

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П.АСТАФЬЕВА»

Институт математики, физики и информатики

Отделение непрерывного образования

Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

Направление 44.03.01 «Педагогическое образование», специальность «математика»



ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой алгебры, геометрии и
и методики их преподавания

В.Р. Майер

2015г.

Выпускная квалификационная работа

**Компьютерное сопровождение школьного курса стереометрии с
использованием системы динамической геометрии «Живая
Математика» на примере темы «Перпендикулярность прямых
плоскостей»**

Выполнил студент 42 группы
Светлана Владимировна Хамайко Хамайко 15.06.15 (подпись, дата)
Форма обучения: заочная

Научный руководитель
к. физ.-мат. н., доцент кафедры
алгебры, геометрии и методики их преподавания
В.В. Абдулкин Абдулкин 15.06.15 (подпись, дата)

Рецензент
Старший преподаватель кафедры
алгебры, геометрии и методики их преподавания
Е.А. Аешина Аешина 15.06.15 (подпись, дата)

Дата защиты _____

Оценка _____

Красноярск
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ.....	7
1.1 Роль стереометрии в школьном курсе геометрии.....	7
1.1.1. Сравнительный анализ курса стереометрии в различных школьных учебниках.....	12
1.2 Особенности использования информационных технологий при изучении стереометрии.....	15
1.3 Использование систем динамической геометрии при сопровождении школьного курса геометрии.....	19
1.3.1 Компьютерные программы по геометрии.....	21
1.3.2 Система динамической геометрии «Живая Математика» и ее использование в школьном курсе геометрии.....	26
Глава 2. МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ «ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ».....	35
2.1 Логико-дидактический анализ содержания темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей».....	35
2.2 Методические рекомендации по использованию компьютерного сопровождения.....	43
2.2.1 Формы и методы организации учебной деятельности при использовании программы «Живая Математика».....	43
2.2.2 Стереочертежи и их использование в учебном процессе.....	47
2.3 Компьютерное сопровождение темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей».....	52
2.4 Описание опытно-экспериментальной работы.....	84
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	87
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	89
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	92

ВВЕДЕНИЕ

Федеральный компонент Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике в качестве основных целей изучения геометрии выделяет формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов; развитие пространственного мышления, служащего практическому познанию предметов и явлений действительности и обеспечивающего успешное овладение теоретическими знаниями, в основе которых лежит оперирование различными графическими образами.

Повышение качества геометрической подготовки учащихся педагогами математики видят в совершенствовании процесса обучения стереометрии (А.Д. Александров, В.Г. Болтянский, Г.Д. Глейзер, В.А. Гусев, В.А. Далингер, М.И. Зайкин, Ю.М. Колягин, И.М. Смирнова и др.).

Однако, по данным Федерального института педагогических измерений, подготовка учащихся в области стереометрии на сегодняшний день находится на низком уровне и имеет тенденцию к снижению. Подтверждением чему являются результаты выполнения стереометрической задачи с развернутым ответом ЕГЭ по математике. Это вызвано чрезмерной формализацией курса стереометрии и отсутствием адекватных временных средств обучения, которые влияют на потерю интереса к изучению дисциплины, затрудняют понимание изучаемого материала и развитие пространственного мышления, являясь основными причинами необходимости совершенствования процесса обучения стереометрии.

Одним из направлений совершенствования процесса обучения математике ученые называют модернизацию средств информационных и коммуникационных технологий и разработку методики их применения.

Вопросам разработки технологии создания учебных материалов на основе систем динамической геометрии посвящены исследования

зарубежных ученых (Н. Джеквик, Ж.-М. Лаборда, М. Хохенвартер, Х. Шуман) и отечественных авторов (В.И. Глизбург, В.Н. Дубровский, И.Н. Сербис, Т.Ф. Сергеева, А.Г. Ягола).

Анализ передового отечественного и зарубежного опыта использования средств информационных и коммуникационных технологий в обучении стереометрии привел нас к необходимости поиска программных средств учебного назначения с возможностью трехмерного моделирования, которые могут быть использованы при изучении стереометрических понятий и теорем, а также при обучении решению задач. Воплощением таких средств информационных и коммуникационных технологий в процессе обучения стереометрии являются программные среды с возможностью трехмерного моделирования. Их применение в процессе обучения стереометрии является целесообразным и служит средством формирования и развития пространственного мышления, основой формирования понятий и изучения теорем, а также обучения решению задач. Применение программных средств учебного назначения с возможностью трехмерного моделирования и созданных на их основе дидактических материалов в стереометрии выступает связующим звеном между наглядными представлениями и строгой логикой, тем самым помогая преодолению формализма в знаниях учащихся.

Во Франции, США и других странах мира накоплен опыт успешного использования систем динамической геометрии и созданных на их основе дидактических материалов в школьном обучении. Однако в нашей стране, несмотря на наличие различных концептуальных теоретических положений, они так и не нашли должного применения. Традиционная методика обучения стереометрии не использует потенциальные возможности динамических компьютерных моделей.

Сказанное выше обуславливает наличие **противоречий**:

– между потребностью общества, выраженной требованиями к геометрической подготовке школьников, зафиксированной в Федеральном компоненте Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования, и недостаточным уровнем подготовки школьников по стереометрии;

– между достаточной разработанностью механизмов использования компьютерного сопровождения процесса обучения геометрии в школе, изученностью вопроса с общих психолого-педагогических позиций и недостаточной разработанностью методических аспектов их использования в процессе изучения учащимися стереометрии;

– между объективной необходимостью совершенствования процесса обучения стереометрии с позиции использования средств компьютерной поддержки курса стереометрии и отсутствием специальных методик их использования.

Выделенные противоречия обозначили **проблему**: какова методика использования систем динамической геометрии (СДГ), способствующая эффективному изучению курса стереометрии школьниками? Недостаточная теоретическая разработанность проблемы исследования, а также ее востребованность в образовательной практике послужили основанием выбора темы исследования: «Компьютерное сопровождение школьного курса стереометрии с использованием систем динамической геометрии «Живая математика» на примере темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»».

Объектом исследования является процесс обучения стереометрии в средней школе.

Предметом исследования является компьютерное сопровождение курса стереометрии с использованием СДГ «Живая Математика».

Цель исследования состоит в разработке методических рекомендаций по применению СДГ как средства совершенствования процесса обучения стереометрии учащихся средней школы на примере компьютерного сопровождения темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей» с помощью СДГ «Живая Математика».

Для достижения поставленной цели и проверки сформулированной гипотезы потребовалось решить следующие **задачи**:

- на основе анализа психолого-педагогической и методической литературы раскрыть особенности курса стереометрии в школе, особенности использования информационных технологий при изучении стереометрии в школе, выявить наиболее эффективные средства компьютерного сопровождения курса стереометрии в школе;
- обосновать преимущества использования СДГ «Живая Математика» как средства компьютерного сопровождения курса стереометрии в средней школе;
- разработать методические рекомендации по изучению темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей» с использованием СДГ «Живая Математика»;
- экспериментально подтвердить эффективность разработанных методических рекомендаций по теме «Компьютерное сопровождение школьного курса стереометрии с использованием СДГ «Живая Математика» при изучении темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

1.1 Роль стереометрии в школьном курсе геометрии

Геометрия – один из важнейших компонентов математического образования, она необходима для приобретения конкретных знаний о пространстве и практически значимых умений, формирования языка описания объектов окружающего мира, развития пространственного воображения и интуиции, математической культуры и эстетического воспитания учащихся. Изучение геометрии вносит вклад в развитие логического мышления и формирование понятия доказательства.

Школьный курс геометрии состоит из двух частей - планиметрии и стереометрии. Стереометрия - один из самых важных и увлекательных разделов геометрии. Именно стереометрия знакомит нас с разнообразием пространственных форм, законами изображения пространственных фигур. Стереометрия способствует развитию логического мышления.

Также стереометрия способствует приобретению необходимых практических навыков при измерении основных геометрических величин (площадей, объемов, длин, углов). Наконец, стереометрия сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых ученых: Пифагора, Евклида, Архимеда, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н.И. Лобачевского.

При изучении стереометрии в школьном курсе геометрии выделяют следующие задачи [3]:

1) развитие и закрепление содержательных линий, начатых в неполной средней школе; обобщение основных математических методов относительно пространства;

2) изучение свойств пространственных фигур;

3) изображение пространственных фигур на плоскости, используя свойства параллельного проектирования;

4) развитие логического мышления учащихся при решении задач и доказательстве теорем курса стереометрии.

В процессе изучения стереометрии в школе выделяют два основных этапа:

- 1) Формирование первоначальных представлений о пространственных фигурах (1–9 классы);
- 2) Систематический курс стереометрии (10–11 классы).

Нами выяснено, что на изучение систематического курса стереометрии в 10 – 11 классах отводится приблизительно по 70 часов. В ходе изучения рассматривают следующие темы:

1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия.
2. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве.
3. Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве.
4. Координаты, векторы, геометрические преобразования в пространстве.
5. Многогранники.
6. Тема вращения.
7. Площадь поверхностей и объем геометрических тел.
8. Изображение пространственных фигур на плоскости.

Выделим некоторые методические особенности изучения стереометрии.

1. Курс стереометрии полностью опирается на курс планиметрии.

Большинство задач курса сводятся к решению планиметрических задач, соответственно все недочеты, имевшие место при изучении планиметрии, ощущаются и при изучении стереометрии.

Следовательно, для успешного изучения стереометрии учитель должен постоянно возвращаться к планиметрическому материалу; перед изучением той или иной теоремы необходимо повторять нужные планиметрические сведения.

2. В стереометрии принципиально другой подход к геометрическим построениям.

Если при изучении планиметрии учащиеся пользуются чертежами, которые дают явные представления об изучаемом объекте, то в стереометрии нет чертежных инструментов, которые позволяют изобразить пространственные фигуры. Здесь мы имеем дело не с самим объектом, а лишь с его изображением.

Каждая стереометрическая задача является одновременно задачей на построение изображения фигуры с помощью свойств параллельной проекции. Это требует от учащихся значительно больших усилий, чем их требуется при решении планиметрических задач.

3. В курсе стереометрии уделяется большое внимание логической стороне проводимых умозаключений; приходится обосновывать каждый свой вывод, четко устанавливая предпосылки.

4. Программа по стереометрии предполагает более быстрый темп прохождения материала, чем в планиметрии. При этом времени на решение задач требуется гораздо больше, соответственно более значительное место занимает самостоятельная работа школьников. Необходим тщательный подбор заданий на уроке – включать только самое необходимое.

5. Курс стереометрии строится аксиоматически. При изучении аксиоматики стереометрии необходимо решить две основные методические задачи:

1) переформулируются аксиомы планиметрии для пространства (некоторые должны быть с уточнениями).

Здесь фактически под видом договоренности между учителем и учащимся вводится, как бы новая аксиома:

В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

2) добавляются новые специфические аксиомы пространства, которые на первых этапах изучения иллюстрируются с помощью моделей, стереометрического ящика, рисунка, геометрии классной комнаты.

При этом появляется возможность более эффективного выявления учащимися сущности аксиоматики и ее роли в построении геометрии.

Формирование пространственных представлений идет в несколько этапов и включает в себя:

- умение представить по чертежу целостный образ геометрической фигуры, взаимное расположение ее элементов;

- умение мысленно изменить положение фигуры – посмотреть с другой стороны;

- умение мысленно расчлнить фигуру, составить из нее новый объект;

- умение изобразить фигуру на чертеже, адекватно отразив имеющиеся отношения;

- умение представить фигуру на основе ее словесного описания и т.д.

На I этапе на наглядной основе формируются предпосылки для создания целостного образа фигуры с выделением ее существенных признаков. На данном этапе учитель должен широко использовать модели, реальные объекты окружающего мира. После этого строится чертеж, который закрепляет рассмотрение соответствующей геометрической конфигурации.

В конце I этапа и на II у школьников формируются образы фигур и их комбинаций, которые они могут представить себе в почти неизменных условиях.

Схема формирования пространственных представлений на I и II этапе следующая:

Модель → чертеж → представление

На II этапе роль моделей несколько уменьшается, т. к. в противном случае у школьников будет тормозиться развитие способностей мысленно представлять себе особенности расположения фигуры и ее элементов.

При построении чертежа на данных этапах учителю не следует сразу демонстрировать готовый чертеж, а стараться его выполнять постепенно вместе с учащимися с целью поэтапного восприятия ими пространственных образов.

III этап: – овладение умением оперировать образами в измененных условиях. Школьники сначала работают с основным чертежом, который, однако, часто не дает возможности увидеть особенности расположения фигуры с разных позиций. Поэтому чертеж, как правило, должен подкрепляться рассмотрением соответствующей модели. Демонстрация сопровождается специально подобранными вопросами.

Например: Какие фигуры могут получиться при пересечении тетраэдра плоскостью? Покажите на модели и чертеже различные случаи. Ответ обоснуйте.

Схема формирования пространственных представлений на III этапе:

чертеж → модель → представление.

IV этап: Учащиеся должны конструировать стереометрические объекты самостоятельно на базе сформулированных ранее представлений. При этом не используется ни чертеж, ни заранее подготовленная модель, а можно лишь учителю задавать вопросы для уточнения расположения фигуры.

Схема на IV этапе: представление → чертеж.

Стереометрия как учебный предмет отличается характерными особенностями, образующими благоприятные условия для развития многих интеллектуальных качеств учащихся, в том числе и развития пространственного мышления. Изучение некоторых задач на стереометрические комбинации, часть из которых включены в упражнения на экзаменах по математике, имеют огромный развивающий потенциал в формировании пространственного

мышления, но, к сожалению, их изучение проводится в недостаточном объеме из-за ряда причин. К ним относятся:

- большие затраты учебного времени на их изучение;
- ограниченный запас пространственных образов учащихся, не позволяющий устанавливать необходимые зависимости между стереометрическими комбинациями и входящими в их состав элементами;
- возникновение трудности в переходе от трехмерного пространства к двумерному и обратно;
- недостаток наглядных моделей и, в связи с этим, трудность самого процесса объективного восприятия стереометрических комбинаций.

На основании выше изложенного можно сделать вывод, что стереометрия – один из самых важных разделов геометрии, но процесс обучения стереометрии учащихся средних школ требует совершенствования наглядных средств обучения, основанных на передовых достижениях в области создания программных средств учебного назначения.

1.1.1 Сравнительный анализ курса стереометрии в различных школьных учебниках.

В действующих учебниках ставятся разные содержательные акценты при изучении стереометрии. В качестве примеров рассмотрим наиболее часто используемые учебники геометрии А.В. Погорелова [15], учебники авторских коллективов А.Д. Александрова и др. [2] и Л.С. Атанасяна и др. [1].

В учебнике А.Д. Александрова и др. существует градация задач: вначале отмечается группа основных задач, а затем группы более простых и сложных задач. Это деление находит отражение в использовании специальных значков для обозначения. В учебнике Л.С. Атанасяна и др. судить

о сложности задачи можно лишь прочитав ее. Аналогичная ситуация и в учебнике А.В. Погорелова. Отличие заключается лишь в том, что к некоторым задачам есть подсказки - подписан либо пункт параграфа, к которому она относится, либо задача, сходная с ней, решенная в учебнике. Авторы каждого учебника уделяют большое внимание образцам решения опорных задач, сообщающих полезный факт, либо иллюстрирующих метод или прием.

Количественное соотношение задач в учебниках геометрии для 10-11 классов:

10 класс: Атанасян-44,8%, Погорелов-23,1%, Александров-43,2%

11 класс: Атанасян-62,8%, Погорелов-25,6%, Александров-41,9%

Среди основных положительных характеристик любого учебника выделяется развернутость текста учебника. Если рассматривать учебник А.Д. Александрова и др., то следует отметить, что в этом учебнике к некоторым параграфам идут дополнения, позволяющие полнее раскрыть тему. Такое разграничение материала позволяет ученикам, прочитав параграф, не только уяснить его основные понятия, но и при желании, ознакомиться с дополнительной информацией по данной теме. Такое углубление знаний необходимо т.к. учебник изначально предназначен для учащихся школ и классов с физико-математическим профилем. Учебники А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна и др., предназначены для общеобразовательной школы. Авторам приходится изучаемый материал излагать в краткой форме, учитывая, что он должен быть доступен для учеников с разным уровнем восприятия информации и подготовленности по предмету.

Эффективность обучения геометрии во многом определяется тем, каким образом кодируется информация, используются ли при этом рисунки, чертежи, схемы. Академик А.Д. Александров видит задачу преподавания в школе в единстве строгой логики и живого восприятия реального мира. В своем учебнике он предоставляет школьникам возможность самостоятельно

обработать текстовую информацию, переводя ее на язык рисунков, схем, чертежей. Александров А.Д. считает: «Во всяком подлинно геометрическом предложении неразрывно присутствуют два элемента: наглядная картинка и строгая формулировка, строгий логический вывод» [2]. Поэтому количество рисунков в его учебнике не превосходит 19% от общего объема информации.

Другой академик - А.В.Погорелов на первое место ставит развитие логического мышления учащихся [15]. Рисунки в его учебнике занимают около 23% от общего объема информации.

Авторский коллектив профессора Л.С. Атанасяна и др. – акцентирует свое внимание на развитии умений и навыков учащихся, на доступности изложения, считая, что каждый элемент курса геометрии должен опираться на возможно более простое и ясное наглядное представление [1]. Атанасян Л.С. включает в учебник большое количество рисунков и чертежей.

Соотношение визуальной информации в учебниках геометрии:

10 класс: Атанасян-19,5%, Погорелов-22,5%, Александров-17,9%

11 класс: Атанасян-26,1%, Погорелов-20,9%, Александров-18,2%

Исходя из целей ВКР, мы для работы выберем учебник Атанасяна [1], так как учебник соответствует федеральным компонентам Государственного стандарта общего образования по математике. Он характеризуется доступностью изложения материала, сочетающейся с достаточной строгостью, краткостью, схематичностью. Его отличает хорошо подобранная система задач, включающая типовые задачи к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и задачи повышенной трудности в конце учебника. Учебник позволяет обеспечить вариативность, дифференцированность и другие принципы обучения. Учебник красочно оформлен, что поможет учащимся полнее осознать красоту пространственных геометрических форм и лучше усвоить стереометрический материал.

1.2 Особенности использования информационных технологий при изучении стереометрии

Значительное место в системе формирования интеллектуальной и творческой личности обучающегося отводится изучению геометрии как дисциплины, обладающей огромным гуманитарным и мировоззренческим потенциалом.

Для достижения высокого уровня геометрической подготовки учащихся необходимо обеспечить возможность приобретения ими глубоких фундаментальных знаний, развития пространственного воображения, стремления к самостоятельному изучению нового материала.

Результаты вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения показывают, что уровень геометрической подготовки школьников низкий, значительное число абитуриентов не справляется с решением геометрических задач.

Решению этой проблемы способствует внедрение в учебный процесс новых информационных технологий, являющихся эффективным средством управления познавательной деятельностью и формирования пространственных представлений учеников.

При их использовании открываются огромные возможности изменения и совершенствования методики отбора необходимой теоретической и практической информации, которая способствует улучшению формирования пространственного представления школьников на уроках геометрии. Такой процесс обучения характеризуется индивидуальным и дифференцированным подходом, приводят к изменению содержания и характера деятельности между учителем и учеником.

Рассмотрим что такое информационные технологии.

Информационные технологии – это совокупность методов, устройств и

производственных процессов, используемых обществом для сбора, хранения обработки и распространения информации [18,20].

Часто информационные технологии называют компьютерными технологиями или прикладной математикой.

Рассмотрим пять основных дидактических функций компьютера в преподавании математики [5]:

1.Выполнение упражнений, когда учащимся предлагаются ранжированные по трудности задания.

2.Электронная доска, использование мультимедиа – проектора на уроках математики.

3.Моделирование.

4.Исследование, когда из числа предлагаемых вариантов ученик выбирает, аргументируя, собственное решение.

5.Математические расчеты в курсах других дисциплин.

Конечно, выполнение всех этих функций предполагает большой труд, как учителей, так и инженеров-программистов.

Использование компьютера на уроках математики способствует активной деятельности учащихся. Компьютер является как помощником, так и контролером на стадии тренировочных упражнений. Огромное разнообразие ролей компьютера в учебном процессе в своей основе является сочетанием трех главных функций: компьютер как орудие, компьютер как партнер, компьютер как источник формирования обстановки. Он помогает в значительной степени учителю при проведении урока, делая его отношения с учениками более человечными [18].

Во-первых, компьютер замыкает на себя большую часть контрольных функций и реакций на ошибки ученика. Ошибки, беспощадно фиксируемые компьютером, оказываются в значительной степени частным делом школьника.

Учитель освобождается от необходимости выявлять слабые стороны в знаниях учащихся, его отношение к детям становится более позитивными.

Во-вторых, компьютер, вступая с учеником в партнерские отношения, освобождает учителя от необходимости поддерживать темп и тонус деятельности каждого обучаемого. Благодаря этому учитель получает больше возможностей видеть обстановку в классе в целом или уделять внимание отдельному ученику.

Компьютер расширяет возможности решения сложных стереометрических задач. Он позволяет такого типа задачи сделать наглядно обозримыми, помогает развитию пространственного воображения.

Одной из основных проблем при изучении геометрии в школе является проблема наглядности, связанная с тем, что изображения даже простейших геометрических фигур, выполненные в тетрадях или на доске, как правило, содержат большие погрешности. Современные компьютерные технологии позволяют решить эту проблему. Стереометрия - это одна из немногих, если не единственная область школьной математики, в отношении которой не приходится агитировать за информационные технологии. Современная трехмерная графика позволяет создавать модели сложных геометрических тел и их комбинаций, вращать их на экране, менять освещенность.

Приступая в 10 классе к изучению нового раздела геометрии - стереометрии, учащиеся, имевшие дело в 7-9 классах с геометрией на плоскости, испытывают серьезные затруднения при переходе из плоскости в пространство, хотя, казалось бы, новый предмет можно начать «с чистого листа». «Лишнее» измерение создает особенные сложности вначале изучения стереометрии, когда учащиеся сталкиваются с необходимостью представить себе столь абстрактные понятия, как бесконечно протяженные прямая и плоскость в пространстве, которым посвящено большинство теорем и задач курса 10 класса.

Второе затрудняющее школьников обстоятельство - как подойти к доказательству теоремы или решению зачастую весьма абстрактной задачи. А проблема учителей - как научить школьников находить нужный подход. Большинству школьников требуется помощь в развитии умения представлять и изображать стандартные стереометрические конфигурации; их приходится как-то обучать геометрическому видению - пониманию теорем и условий задач, сформулированных словесно [6].

Одним из условий успешного изучения учащимися начал стереометрии является наличие у них развитых пространственных представлений. Под пространственными представлениями понимают умственную деятельность по созданию образов и оперированию ими. Психолого-педагогические исследования пространственных представлений у школьников показывают, что у учащихся 10-х классов оно развито намного слабее, чем у учащихся 7-х классов [9].

Подытожим сказанное выше: использование при изучении стереометрии вещественных моделей для показа взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве необходимо, но недостаточно. Во-первых, не всегда просто показать расположение объектов внутри геометрических тел; во-вторых, невозможно проследить динамику построений; в-третьих, переход от вещественной пространственной модели к ее изображению на плоском чертеже затруднен для учащихся. Справиться с этими сложностями позволяют прикладные компьютерные программы, строящие трехмерные изображения.

1.3. Использование систем динамической геометрии при сопровождении школьного курса геометрии

Быстрое развитие информационных технологий ставит вопрос об их использовании в обучении стереометрии с целью развития пространственного

мышления учащихся. На сегодняшний день среди перспективных направлений внедрения таких технологий в процесс обучения стереометрии особо выделяется использование математических программ, позволяющих конструировать интерактивные стереометрические объекты с помощью заложенных в них средств мультимедиа.

Системы динамической геометрии (СДГ) представляют собой программные среды, позволяющие создавать и манипулировать геометрическими построениями, прежде всего на плоскости (в плоской Евклидовой геометрии). К тому же при движении исходных объектов геометрические построения сохраняют свою целостность.

СДГ предназначены прежде всего для решения задач школьного курса геометрии: в них можно создавать всевозможные конструкции из точек, векторов, отрезков, прямых; строить графики элементарных функций, которые также возможно динамически изменять варьированием некоторого параметра (или нескольких параметров), входящего(их) в уравнение; строить перпендикулярные и параллельные заданной прямой линии, серединные перпендикуляры, биссектрисы углов, касательные; определять длины отрезков, площади многоугольников и замкнутых кривых и т.д. Кроме того, в некоторых СДГ координаты точек могут быть введены вручную на панели объектов, а уравнения кривых и касательных к ним в строке ввода при помощи соответствующих команд.

Особую ценность представляют присущие некоторым СДГ возможности визуализации различного рода теорем, а также поэтапного воспроизведения решения задач и иных демонстраций. Все это делает такие системы весьма привлекательными для школьного и даже вузовского образования. Следует также отметить, что СДГ признаны во всем мире наиболее эффективным средством обучения математике с применением информационно-компьютерных технологий.

Системы динамической геометрии появились вначале 1980-х, и пионером среди таких систем была СДГ *Geometric Supposer*. После нее последовали *Cabri* и *The Geometer's Sketchpad* («Блокнот геометра») [16]. Обладая очень удобным интерфейсом, она быстро завоевала популярность учителей. Эти две программы получили наибольшее распространение в мире. В частности, Институтом Новых Технологий (Москва) русифицированы и программа «The Geometer's Sketchpad» («Живая Математика») и программа «CabrilogCabri 3D» (Интерактивная Стереометрия. Кабри 3D).

Наиболее известны в настоящее время также программы *Cinderella* и *Zirkelund Lineal* (Германия), *GeoGebra* (Австрия). Они замечательны тем, что относятся к системам с открытым кодом и свободно распространяются, что способствует созданию их разноязычных версий.

В последнее десятилетие СДГ стали пользоваться популярностью и в России, более того, была разработана первая отечественная система динамической геометрии «1С: Математический конструктор», которая в отличие от зарубежных платных программ-аналогов может использоваться в любом образовательном учреждении, имеющем государственную аккредитацию, допускается установка и одновременное использование одного приобретенного комплекта «1С: Математический конструктор» на любом количестве персональных компьютеров.

На сегодняшний день существует немногим более 40 СДГ – программ двухмерной геометрии, из которых большинство – бесплатно распространяемые. К ним можно отнести *Apollonius*, *Cabri Geometry*, *C.a.R.*, *CaRMetal*, *Cinderella 1.4*, *Cinderella 2.0*, *GeoGebra*, *Geometrix*, *Geometry Explorer*, *GeoNext*, *Kig*, *KSEG*, *Live Geometry* и др., функционирующие на платформах iPhone/iPod Touch, Windows, GNU/Linux и Mac OS X. Для изучения трехмерных геометрических объектов могут быть использованы *Archimedes Geo3D*, *Cabri 3D*, *GeoGebra* (начиная с версии 5.0 Beta), *Geometria*, *GeomSpace*, *GeomView*, *Géospace*, *GEUP 3D*, *Yenka 3D Shapes*, *WIRIS*, которые в современных методиках обучения, основанных на применении новых информационных технологий,

играют важную роль в развитии пространственного и геометрического мышления учащихся [9]. В связи с этим исследования, посвященные приложениям СДГ в тех или иных сегментах системы современного образования, считаются актуальными.

1.3.1 Компьютерные программы по геометрии

Живая Математика, The Geometer's Sketchpad (GSP)- это набор инструментов, который предоставляет все необходимые средства для построения чертежей и их исследования. Она дает возможность «открывать» и проверять геометрические факты. Программа позволяет "оживлять" чертежи, плавно изменяя положение исходных точек.

- Платформа (ОС): Mac OS X, Windows, Linux
- Название компании: Key Curriculum Press Technologies
- Лицензия: свободное пользование (русская версия)
- Автор: Nicholas Jackiw
- Разработчики: Nicholas Jackiw, Skott Steketee
- Сайт: www.keypress.com
- Язык интерфейса: русский
- Русификация: Институт новых технологий образования

Плюсы:

- языки: Английский, Испанский, Датский, Русский, Корейский, Тайский, Традиционный и упрощенный китайский, Корейский, Литовский;
- поддерживаются: макросы, Java-апплеты, анимация, измерения/вычисления.
- платформы: Windows, Mac OS, TI-92+;

Минусы:

- высокая цена индивидуальной лицензии

– ограниченные возможности по встраиванию (работе из HTML страницы)

GeoGebra- это бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете.

Кроме того, у программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т. д.) за счёт команд встроенного языка (который, кстати, позволяет управлять и геометрическими построениями).

Программа написана Маркусом Хохенвартером на языке Java (работает на большом числе операционных систем). Переведена на 50 языков и в настоящее время активно разрабатывается. Полностью поддерживает русский язык.

- Создатель: Markus Hohenwarter
- Разрабатывается: с 2002 года
- Свободно распространяемая
- Переведена на 50 языков

Плюсы

- хорошо продуманный интерфейс
- совмещает в себе возможности выполнения построений и аналитическую геометрию
- встроенный язык, при помощи которого можно задавать построения и производить математические расчеты
- активное сообщество пользователей по всему миру (190 стран), институты GeoGebra

Минусы

- встроенные анимационные возможности ограничены

Математический конструктор - это виртуальная геометрическая среда. Данная среда основана на принципе динамической геометрии и разработана с учетом требований российской школы и российской традицией преподавания математики.

Конструктор может служить инструментальной средой для самостоятельной работы учащихся на уроке (или дома) «с чистого листа». При этом перед учениками ставятся задачи построения и исследования определенных объектов, в ходе решения которых и должны достигаться те или иные учебные цели.

Конструктор может использоваться автором (учителем, учеником) для создания конкретных моделей-заданий, содержащих объяснение материала, заготовки геометрических объектов, тексты с условиями и чертежи с данными, пошаговые планы построений и т.п. информацию. После чего ученики работают не с конструктором как таковым, а с этими готовыми моделями.

– Разработчик: “1С”

– Разработка началась по заказу Федерального агентства по образованию (в рамках Федеральной целевой программы развития образования на 2006 – 2010 годы)

– Разрабатывается: с декабря 2006 года

– Лицензия на компьютерный класс (15 компьютеров) - около 14 000 рублей

– Кроссплатформенная (написана на Java)

Плюсы

– расширенный набор операций, богатые возможности настройки

– встроенный язык программирования (JavaScript)

– проверка, построена ли геометрическая фигура

– активно развивается

– возможность интеграции с другими программными продуктами

(SCORM)

Минусы

- документация не описывает объектную модель (для написания скриптов)
- программа выпускается «сырой» (с большим количеством ошибок и недоработок)

Интерактивная Стереометрия. Кабри 3D- виртуальный конструктор для поддержки школьного курса стереометрии позволяет простыми и интуитивно понятными действиями создавать трехмерные динамические графические объекты и модифицировать их.

Новые возможности ученика:

- Быстро, в несколько щелчков создавать стереометрические объекты: линии, сферы, пирамиды, цилиндры, и т. д.
- Простыми движениями мыши трансформировать и анимировать фигуры: вращать их в пространстве, изменять их размеры и форму.
- Работать с числами и уравнениями, используя встроенные вычислительные и измерительные инструменты.
- Получать развертки и сечения, распечатывать развертки и складывать из них бумажные фигуры.

Новые возможности учителя:

- Связывать курс математики с другими учебными дисциплинами: физикой, химией, географией, художественной культурой...
- Отслеживать весь процесс выполнения построений учеником и выявлять места его затруднений.
- Оптимизировать занятия, подстраивая интерфейс программы к текущим учебным целям.
- Создавать материалы для работы через Интернет, вставлять динамические изображения в различные электронные документы.

Geonet

Разработчик: кафедра математики и дидактики Университета Байройта (Германия)

Идеолог – Альфред Вассерман

Разрабатывается: с 1999 года

Свободно распространяемая.

Плюсы:

- прост и лёгок в освоении, т.к. не перегружен дополнительными функциями
- выполняется быстрее других сред, написанных на Java

Минусы:

- неполная документация
- мало готовых примеров
- отсутствуют некоторые привычные для других сред возможности (например, вычисление площади).

Изучая литературу по данной теме, мы пришли к выводу, что программы GeoGebra и «Живая Математика» являются одними из самых популярных среди упомянутых выше СДГ при изучении школьного курса геометрии.

Мы в нашем исследовании сделаем свой выбор в пользу СДГ «Живая Математика», так как достаточным (хотя далеко не исчерпывающим) основанием для его активного внедрения является естественная и мощная техника построения чертежей - аккуратных, грамотно описываемых и легко редактируемых. Простая техника измерений элементов геометрических фигур, с которыми работает учащийся, позволяет усваивать метрические соотношения не догматически, а экспериментально - в том числе учащимся с затрудненным восприятием геометрии. Сервисные модули программы позволяют учащимся хранить и грамотно каталогизировать наиболее удачные построения – вплоть до создания мини-монографий. Наиболее продвинутое средства пакета - такие,

как рекурсия и мультипликация - предоставляют возможности для качественно более глубоких геометрических экспериментов, чем в традиционной геометрии.

1.3.2 Система динамической геометрии «Живая Математика» и ее использование в школьном курсе геометрии

Программа The Geometer's SketchPad (tm) компании Key Curriculum Press Inc, локализованная в России Институтом новых технологий образования под названием «Живая Математика» - приобрела широкую популярность во многих странах прежде всего как программа для сопровождения курса геометрии 7-11 классов. Но вместе с тем, она может быть использована в курсе алгебры и начала анализа, а именно там, где учебный материал требует от учителя большего обращения к наглядности, а от учащихся - большей самостоятельности, что может быть лучше изучено именно с использованием инструментальных программных средств (предметно-ориентированной средой «Живая Математика»).

СДГ «Живая математика» (более точный перевод оригинального названия программы – «Альбом геометра») является электронным аналогом готовальни, разумеется, с дополнительными динамическими возможностями, такими как озвучивание чертежей и создание геометрических мультфильмов.

Следует отметить, что сама среда не является обучающей и «сама ничего не делает», - все чертежи в ней создаются пользователем, а программа лишь предоставляет для этого необходимые средства, так же как и возможности для усовершенствования чертежей и их исследования.

Программа «Живая Математика» работает с двумя типами документов - чертежами и сценариями - последовательностями команд. Для построения понадобятся инструменты для изображения объектов и способы чтения и записи команд.

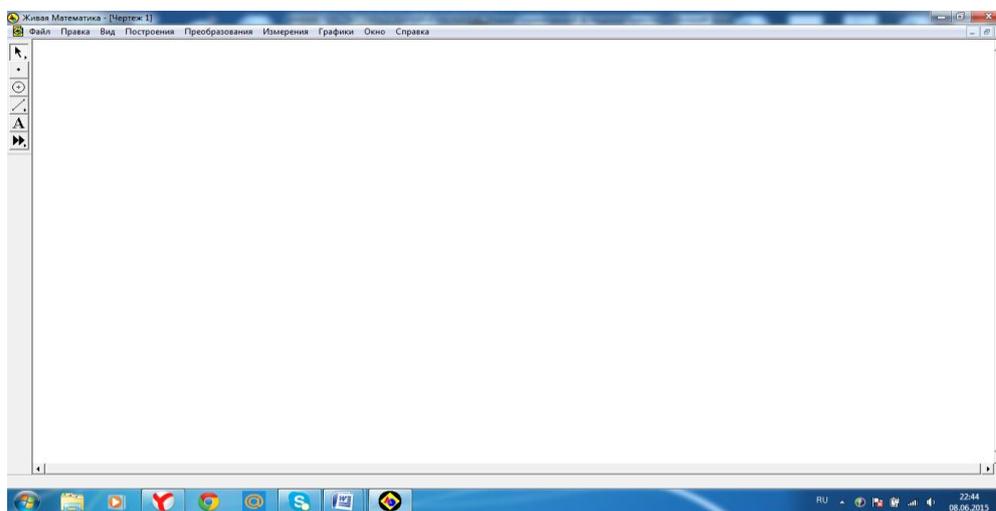
Чертежи - это геометрические рисунки. Вести геометрические исследования можно с самого начала, отправляясь от пустого листа. Для

создания чертежей используются стандартные геометрические операции, такие как - проведение прямой (луча, отрезка) через две точки, построение окружности по заданному центру и точке на окружности (или по заданным центру и радиусу), биссектрисы угла, середины отрезка, проведение перпендикулярных и параллельных прямых, фиксация пересечения прямых, окружностей, прямой и окружности.

При этом можно исследовать законы геометрии, а можно просто создать рисунок для решения задачи.

Сценарии - это записи геометрических построений тех или иных объектов и соотношений между ними. Сценарий можно воспроизвести и построить по нему чертеж в соответствии с описанием.

Окно программы «Живая Математика» имеет вид:



Основными элементами окна программы являются:

- рабочее поле или плоскость чертежа (имеет белый фон и занимает всю центральную часть экрана);
- панель инструментов (столбец кнопок в левой части экрана);
- меню команд (строка из заголовков меню расположена в виде строки в верхней части экрана).

Для получения "живого" чертежа, полезно придерживаться следующих рекомендаций.

Для изображения на плоскости первоначально заданных геометрических объектов, удобно использовать кнопки на панели инструментов:

 – построение точки;

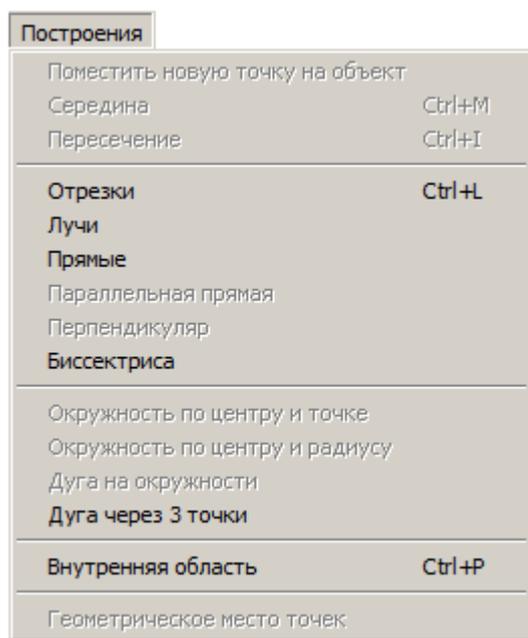
 – построение окружности;

 – построение соответственно отрезка, луча, прямой;

 – ввод текста или обозначение объекта.

Следует иметь ввиду, что по умолчанию самая верхняя кнопка  (*Стрелка*) панели инструментов находится в активном состоянии. После построения серии одноименных объектов (точек, окружностей и т.д.) или ввода текста необходимо снова активизировать эту кнопку.

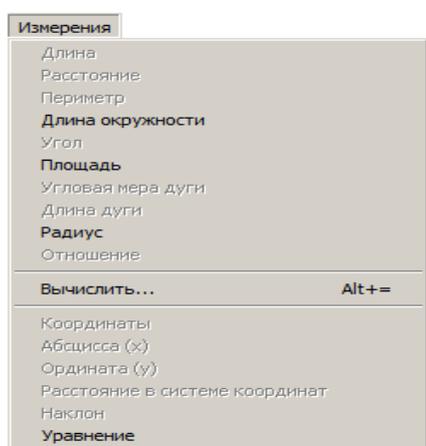
Для построения основного чертежа к задаче удобно использовать команды меню *Построения*:



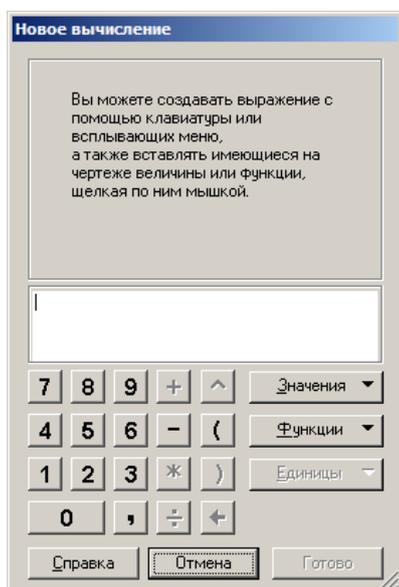
Команды становятся активными, если для их выполнения выделены необходимые объекты инструментом *Стрелка* . Например, для построения прямой необходимо выделить («подсветить» мышкой) две точки; для окраски внутренней области треугольника – выделить его вершины.

При построении сложных чертежей возникает необходимость делать невидимыми вспомогательные части чертежа. Для этого используется команда *Спрятать объекты* в пункте меню *Вид* (скрываемые элементы предварительно нужно выделить).

Для определения величин геометрических объектов, используются команды меню *Измерения*:



Для выполнения действий над величинами используется калькулятор, вызываемый командой *Вычислить...* меню *Измерения*:



Ряд дополнительных действий (корень квадратный, абсолютная величина, ...) и тригонометрические функции берутся из раздела *Функции*.

Возможности работы с программой «Живая Математика» весьма разнообразны. Буквально в каждую значительную тему математики она привносит новое методическое значение. «Живая Математика» — прежде всего инструмент динамического построения. С этим связана и возможность исследования. Она позволяет ученикам изучать — а точнее, понимать математику такими средствами, которые просто не возможны с помощью традиционных инструментов. Основой программы является реализация идеи «Оживления чертежа», когда можно создать объект, а затем изучить его математические свойства, просто перемещая объект мышью. Все математические отношения, заложенные при построении, сохраняются, позволяя ученикам изучить целый комплекс аналогичных случаев за несколько секунд.

Познакомимся с демонстрацией «Построение прямой, перпендикулярной плоскости». На исходной картинке (рис.1) показаны плоскость и принадлежащая ей прямая (прямую a и точку M можно передвигать, а всю конфигурацию в целом вращать). Нажимая на кнопки пошагового показа доказательства, будем знакомиться с вызываемыми ими надписями и следить за

изменениями на чертеже. На рис. 3 показан окончательный вид чертежа при доказательстве существования такой прямой.

Кнопка **К доказательству единственности** осуществляет переход на вторую страницу чертежа к соответствующему рассуждению, а кнопка **К началу доказательства** скрывает все, что было показано при нажатии кнопок шагов.

Наконец, на Панели управления в данном случае имеется только две кнопки – одна из них запускает или прекращает вращение, а другая устанавливает исходный угол поворота.

Эта демонстрация предназначена для показа через проектор при активном обсуждении с классом.

Перпендикулярность прямых и плоскостей: Иллюстрации к теории

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная к данной плоскости.

Посмотрите иллюстрации к шагам доказательства.

Шаг 1 Докажем сначала существование такой прямой.
Пусть a - произвольная прямая в плоскости α .

Шаг 2

К началу доказательства

Вращение

Старт/Стоп

В исходное положение

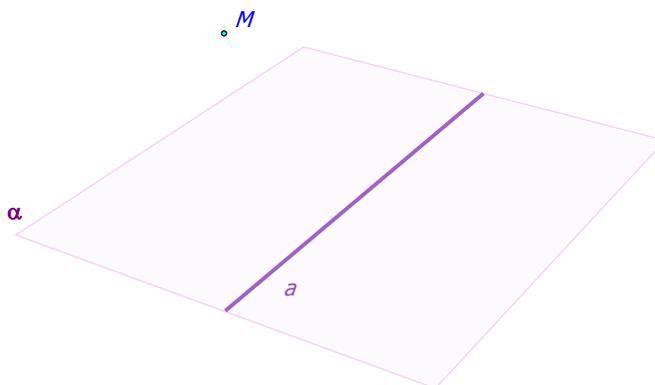


Рисунок 1

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная к данной плоскости.

Посмотрите иллюстрации к шагам доказательства.

Шаг 1 Докажем сначала существование такой прямой.
Пусть a - произвольная прямая в плоскости α .

Шаг 2 β проходит через M и $\beta \perp a$.
Почему такая плоскость существует?

Шаг 3

К началу доказательства

Вращение

Старт/Стоп

В исходное положение

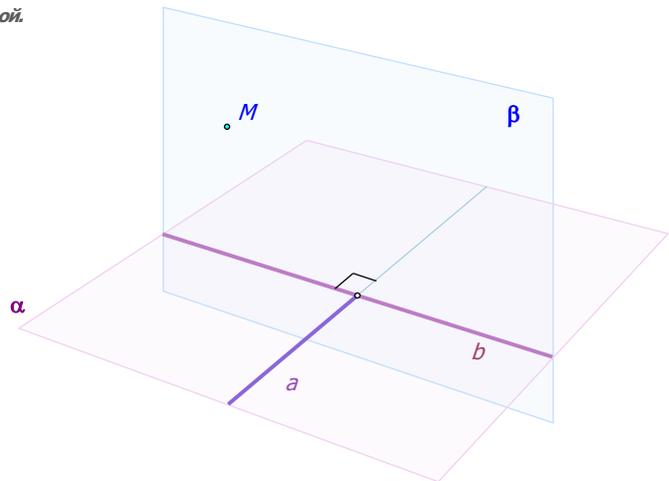


Рисунок 2

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная к данной плоскости.

Посмотрите иллюстрации к шагам доказательства.

Шаг 1 Докажем сначала существование такой прямой.
Пусть a - произвольная прямая в плоскости α .

Шаг 2 β проходит через M и $\beta \perp a$.
Почему такая плоскость существует?

Шаг 3 $c \perp b$, c проходит через M .
Почему c - искомая прямая?

К доказательству единственности

К началу доказательства

Вращение

Старт/Стоп

В исходное положение

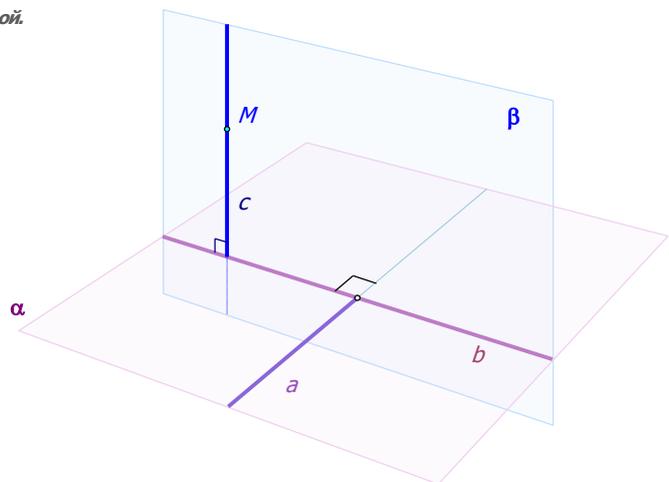


Рисунок 3

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная к данной плоскости.

Докажем единственность такой прямой.

Шаг 1 Предположим, что, кроме c , существует прямая c' , $c' \perp \alpha$, проходящая через точку M .

Шаг 2 Тогда $c \parallel c'$. Почему? В чем заключается противоречие?

К началу доказательства

К доказательству существования

Вращение

Старт/Стоп

В исходное положение

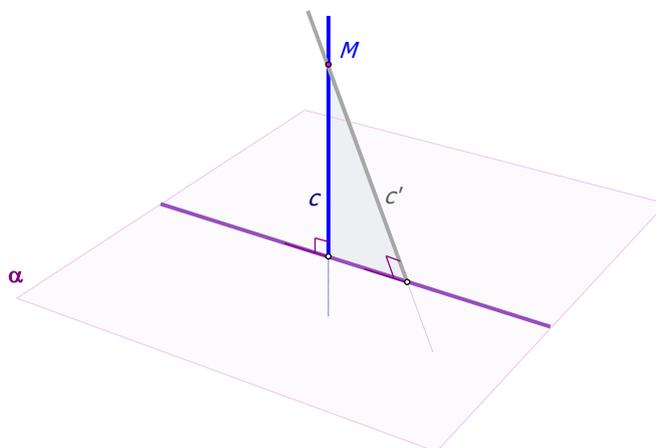


Рисунок 4

Такой стиль работы, как давно заметили психологи, подводит их к обобщениям самым естественным путем. Это помогает процессу открытия, при котором ученики сначала представляют себе и анализируют проблему, и затем делают предположения, прежде чем попытаются доказать их. Таким образом, «Живая Математика» расширяет и углубляет изучение математики.

Исходя из всего выше сказанного, можно сделать вывод, что использование системы динамической геометрии «Живая Математика» в процессе обучения стереометрии является своевременной, актуальной задачей, благодаря которой возможно обеспечить высокую эффективность обучения. Применение данной среды на уроках изучения стереометрических комбинаций способствует формированию и развитию пространственного мышления учеников. Такой подход к обучению стереометрии улучшает качество представления стереометрических комбинаций, повышает их наглядность и ускоряет усвоение знаний учащимися.

Выводы по первой главе:

1. Процесс обучения стереометрии учащихся средних школ требует совершенствования наглядных средств обучения, основанных на передовых достижениях в области создания программных средств учебного назначения с возможностями трехмерного моделирования.

2. Среди компьютерных программных средств, используемых при изучении геометрии, наибольшим потенциалом в представлении пространственных объектов обладают системы динамической геометрии, в частности мы остановили свой выбор на СДГ «Живая Математика».

3. Использование СДГ «Живая Математика» в процессе обучения стереометрии является своевременной, актуальной задачей, благодаря которой возможно обеспечить высокую эффективность обучения. Применение данной среды на уроках изучения стереометрии дает возможность проводить в интерактивном режиме отработку элементарных базовых умений и увеличивает долю собственной содержательной работы ученика за счет снятия проблем технического характера; повышает удельный вес в учебном процессе исследовательской деятельности; дает возможность увеличения объема предъявляемой для изучения информации за счет использования наглядных зрительных образов, способствует формированию и развитию пространственного мышления учеников. Такой подход к обучению стереометрии улучшает качество представления стереометрических комбинаций, повышает их наглядность и ускоряет усвоение знаний учащимися.

Глава 2. МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ «ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ»

2.1 Логико-дидактический анализ содержания темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Приведем логико-дидактический анализ темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей» в соответствии с учебником Атанасяна [1].

1.Целеполагание

1.1 Цели изучения темы

Образовательные:

- Сформировать представления о прямых, перпендикулярных в пространстве, о перпендикулярности прямой и плоскости, о перпендикулярности плоскостей.
- Сформулировать признак перпендикулярности прямой и плоскости, ввести понятия углов между прямой и плоскостью, между плоскостями.

Развивающие:

- Развитие пространственного мышления при построении прямых, перпендикулярных плоскости, перпендикулярных плоскостей;
- Развитие вычислительных навыков при решении задач по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»;
- Развитие аккуратности при изображении условий различных задач;
- Развитие логического мышления при решении задач на доказательство по данной теме и при доказательстве утверждений;

- Развитие умения переносить свойства геометрических объектов на сходные с ними реальные объекты.

1.2 Содержание темы

На изучение темы по программе отводится 17 часов. В рамках изучения темы рассматриваются: перпендикулярные прямая и плоскость, перпендикуляр и наклонная, угол между прямой и плоскостью, двугранный угол, перпендикулярные плоскости.

1.3. Постановка учебных задач[4]

Учебные задачи:

– определить перпендикулярность двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей как одно из возможных отношений между объектами в пространстве, используя аналогию или обобщение понятия перпендикулярности на плоскости;

– выявить условия существования, признаки и свойства различных из указанных выше комбинаций, используя аналогию с данным материалом, изложенным в планиметрии, и построения темы «Параллельность»;

– конструктивно определить расстояние и углы между парами объектов в пространстве;

– формировать обобщенный прием решения задач на вычисление расстояний и углов между пространственными фигурами (изображение, анализ чертежа, вычисление с помощью анализа или синтеза сводится к решению некоторого прямоугольного треугольника);

– формировать новый способ решения задач на построение сечений многогранников с помощью свойств параллельных и перпендикулярных плоскостей;

– формирование логической культуры, связанной с содержательной общностью понятий перпендикулярности на плоскости и в пространстве.

Диагностируемые цели.

По окончанию изучения темы ученик:

Знает:

– определения (перпендикулярных прямых в пространстве; прямой, перпендикулярной к плоскости; перпендикуляра и наклонной, проведенных из точки к плоскости, проекции наклонной на плоскость; расстояния от точки до плоскости; проекции точки и произвольной фигуры на данную плоскость; угла между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней; двугранного угла, граней и ребра двугранного угла; линейного угла двугранного угла; градусной меры двугранного угла; перпендикулярных плоскостей; прямоугольного параллелепипеда; измерений прямоугольного параллелепипеда; куба);

– формулировки леммы о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей; теорем (прямой и обратной), связывающих параллельность с перпендикулярностью прямых к плоскости; признака перпендикулярности прямой и плоскости; теоремы (прямой и обратной) о трех перпендикулярах; признака и свойства перпендикулярных плоскостей;

– доказательства признака перпендикулярности прямой к плоскости; теоремы о трех перпендикулярах; признака и свойства перпендикулярных плоскостей.

Умеет:

– изображать отрезки, длины которых являются расстояниями между указанными фигурами и углы между фигурами и обосновывать их изображение;

– вычислять соответствующие расстояния и углы;

– строить сечения многогранников новым способом.

Понимает (осознает):

– практическую значимость данной темы;

- роль аналогии и обобщения в получении новых знаний;
- взаимосвязь между определениями расстояний и углов между объектами.

1.4 Мотивация

Материал главы широко используется при изучении последующих разделов курса. Изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве сопровождается решением большого количества задач, поэтому при изучении данной темы продолжается развитие пространственных представлений учащихся, конструктивных навыков изображения фигур на плоскости, навыков выполнения рисунков, их правильного восприятия и чтения. Использование в задачах многогранников – призмы и пирамиды – позволяет подготовить учащихся к изучению соответствующего раздела в курсе стереометрии. При решении геометрических задач на ЕГЭ довольно часто используются знания по этой теме.

2. Логико – математический анализ

2.1 Анализ теоретического материала.

I. В теме выделены следующие дидактические единицы [4]:

1. Определения:

- перпендикулярных прямых в пространстве;
- прямой, перпендикулярной к плоскости;
- перпендикуляра и наклонной, проведенных из точки к плоскости, проекции наклонной на плоскость;
- расстояния от точки до плоскости;
- проекции точки и произвольной фигуры на данную плоскость;
- угла между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней;
- двугранного угла, граней и ребра двугранного угла;
- линейного угла двугранного угла;

градусной меры двугранного угла;
перпендикулярных плоскостей;
прямоугольного параллелепипеда;
измерений прямоугольного параллелепипеда;
куба.

2. Теоремы:

о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей (сформулирована как лемма);

о перпендикулярности двух параллельных прямых к плоскости;

обратная к теореме о перпендикулярности двух параллельных прямых к плоскости;

признак перпендикулярности прямой и плоскости;

о прямой, перпендикулярной плоскости;

о трех перпендикулярах и обратная к ней;

признак перпендикулярности двух плоскостей и следствия из него;

свойства прямоугольного параллелепипеда;

свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда и следствие из него.

3. Утверждения, не выделенные в тексте параграфа как теоремы:

если прямая a перпендикулярна к плоскости α , то она пересекает эту плоскость (доказано методом от противного);

перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из этой же точки к этой плоскости;

проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая (доказано);

все линейные углы двугранного угла равны друг другу (доказано);

II. Методологические знания.

1. Относительно определений.

Структура определений, встречающихся в теме, – через род и видовые отличия. Все их можно подразделить на две подгруппы по способу задания видовых отличий. Видовые отличия сформулированных определений задаются:

а) конструктивно, указанием способа построения (перпендикуляра и наклонной, проведенных из точки к плоскости, проекции наклонной на плоскость линейного угла двугранного угла);

б) перечисление некоторого набора свойств (все остальные).

Ни структура определений, ни способы задания видовых отличий для учащихся не новы.

Логическая структура и способы получения для учащихся не новы (прослеживается аналогия с курсом планиметрии). Все понятия представлены в вербальной, натуральной и графической форме. Возникает необходимость широкого использования учебно-наглядных средств для включения учеников в самостоятельный поиск новых утверждений.

При введении понятий необходимо:

а) уделять внимание доказательству его существования;

б) обучению логическим умениям выводить следствия и подводить под понятия (что важно при решении задач).

Учащимся важно показать, что определение перпендикулярных прямых, понятие перпендикуляра и наклонной в пространстве является обобщением соответствующих определений на плоскости.

2. Относительно теорем.

1). Осмысление логической структуры теорем: какая из них является теоремой-свойством, теоремой-признаком;

2). Рассмотренные в теме теоремы доказываются уже известными учащимся общелогическими методами, а именно: синтетическим, полной индукции, от противного.

3). К выделенным теоремам необходимо добавить некоторые задачи-факты, которые должны быть усвоены учащимися наряду с другими теоремами.

4). Перпендикулярность прямой и плоскости (двух плоскостей) есть частный случай пересекающихся прямой и плоскости (двух плоскостей).

Тема даёт возможность продолжать формировать у учащихся средства:

– аналогии (аналогичны последовательности изучения понятий параллельности и перпендикулярности: определение \rightarrow существование \rightarrow признак \rightarrow свойства, понятия перпендикулярности прямых на плоскости и в пространстве, перпендикулярных прямых и перпендикулярных плоскостей и так далее);

– синтез;

– обобщение.

3. В теме присутствуют дидактические единицы, которые имеют большое прикладное значение и используются в первую очередь для решения задач. Например, теорема о трех перпендикулярах и ей обратная в основном используются для построения линейного угла двугранного угла.

4. При изучении темы полезно прибегать к моделированию как способу включения учащихся в самостоятельную поисковую познавательную деятельность.

5. Тема очевидным образом разбивается на три блока: перпендикулярность прямых, перпендикулярность прямой и плоскости, перпендикулярность плоскостей.

2.2 Анализ задачного материала.

I. Дидактические.

- Перпендикулярность прямой и плоскости (116 –119).
- Наклонная. Проекция наклонной. Перпендикуляр (138).
- Линейный угол двугранного угла (166, 167).
- Параллелепипед (187, 188).

II. Задачи на вычисление.

1. Расстояний:

- От точки до плоскости (141–143, 150а), 170, 189, 202, 207, 209, 210).
- От точки до прямой (130б), 149, 152, 154, 155, 157, 158, 203, 168, 170, 182б), 206).
- Между скрещивающимися прямыми (150, 194, 215).
- От прямой до плоскости (193а, в)).
- Между плоскостями (193б)).

2. Углов:

- Между прямыми(201).
- Между прямой и плоскостью (192).
- Между плоскостями (171, 172, 173, 174, 190, 213, 214).

III. Задачи–теоремы (123, 132–137, 139, 144, 146, 153, 156, 161, 162, 175, 177–180, 183, 185, 186, 212).

IV. Задачи на множество точек (136, 200, 210).

V. Построение сечений(196).

VI. Прочие задачи.

- На доказательство перпендикулярности:
 - прямых (127, 129б), 148, 181);
 - плоскостей (191);
 - прямых и плоскостей (128, 129а), 131, 159)
- На вычисление (120–122, 125, 130а), 140, 145б), 163, 176, 184, 195, 204, 208, 211, 216, 217). В этих задачах требуется найти длину отрезка, площадь треугольника и так далее, которые нельзя отнести к предыдущим пунктам.

2.3 Тематическое планирование по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей» см. в Приложении 1

2.2. Методические рекомендации по использованию компьютерного сопровождения

2.2.1 Формы и методы организации учебной деятельности при использовании программы «Живая Математика»

Урок – это основная форма организации обучения. Поэтому он должен быть продуман во всех деталях, чтобы они следовали одна за другой, чтобы учащиеся понимали, почему, что и зачем они делают на уроке.

Информационные технологии могут применяться на уроках математики различных типов, а также на различных этапах урока, хотя невозможно каждый урок математики проводить с использованием компьютера.

На этапе организации работы с любым программным средством учитель должен обучить умению владеть им своих учеников.

Привлечение учащихся к самостоятельному приобретению знаний, овладению умениями и навыками, творческому применению их на практике должно сочетаться с постановкой перед учащимися целей и задач каждого урока, показа практической значимости изучаемого материала.

Использование информационных технологий дает возможность для:

- повышения мотивации обучения;
- индивидуальной активности;
- направленности на личность школьника;
- формирования информационной компетенции;
- свободы творчества;
- интерактивности обучения.

Применением программы «Живая Математика» позволяет сделать уроки высоко эстетичными, наглядными, увлекательными.

Эта программа помогает учителю проследить все этапы урока [8].

1. Проверка знаний (тест, устный опрос, письменный и устный диктант).
2. Объяснение новой темы с использованием электронных уроков, созданных в среде «Живая Математика» с применением презентации, анимации с возможностью преобразовывать объекты, делать объяснение динамичным.
3. Закрепление нового материала – выполнение учащимися разноуровневых заданий с применением мобильного класса.
4. Повторение пройденного материала в виде лабораторных работ на исследование, наблюдение.
5. Выполнение домашних работ, творческих проектов и т.д.

Как нам представляется, значение электронных чертежей для понимания курса геометрии, если исходить, прежде всего, из интересов учащихся со средними способностями и ограниченным интересом к геометрии, невозможно преувеличить. Переход от статической геометрии к динамической меняет объекты исследования не меньше, чем переход от чисел к функциям — учащийся реально работает с конфигурациями. Работа в виртуальной математической лаборатории обеспечивает поддержку работы проектного типа, подразумевающего почти незаметный и плавный переход от несложных опытов и простых заданий к углубленному изучению явления, вызвавшего интерес. Кроме того, программная среда поддерживает и традиционную «задачную» форму».

Использование СДГ позволяет развить у учеников навыки восприятия математических объектов (фигур, связанных с ними величин, формулировок утверждений и вопросов, доказательств и т. п.) и проведения различных активных действий (измерений, сравнений, построений, наблюдений, формирования предположений, их подтверждений и опровержений, доказательств и т. п.).

Работая с СДГ «Живая Математика» учитель может [8]:

- проиллюстрировать объяснения эффектно и точно чертежами;
- организовать экспериментальную исследовательскую деятельность учащихся в соответствии с уровнем и потребностями учащихся;
- повысить разнообразие форм работы учащихся, значительно увеличить долю активной творческой работы в их учебной деятельности;
- высвободить время на выполнение учащимися творческих задач;
- реализовать дифференциацию по уровню знаний и возможностей учеников и индивидуализировать обучение (это относится как к уровню формирования предметных умений и знаний, так и интеллектуальных и общих умений).

Находясь в среде виртуальной математической лаборатории Живая Математика учащийся получает возможность:

- видеть предположительное равенство и подобие фигур;
- отличать осмысленные утверждения о фигурах от бессмысленных, точные от неточных;
- понимать, что утверждения о фигурах делятся на истинные и ложные;
- понимать, что ложные утверждения о фигурах опровергаются контрпримерами, и самостоятельно строить контрпримеры;
- понимать соотношение между математическим утверждением, его обобщениями и частными случаями;

- отличать верные доказательства от неверных, в отдельных случаях самостоятельно доказывать правдоподобные утверждения.

При работе с данной программой каждая обсуждаемая фигура изображается на экране монитора. Можно создавать очень сложные конструкции за ограниченное время, делать аккуратные, четкие и грамотные чертежи, а так же легко исправлять ошибки. Если работа происходит в классе, оснащенный только одним компьютером и проектором, ученикам можно предложить выполнять решения в тетради, пользуясь при этом указаниями и подсказками, данными в задачах, и сверять свои построения с образцом.

Все результаты работы на компьютерах должны храниться в виде оформленных чертежей в правильно структурированных директориях – надо научить учащихся организовывать активные директории и архивы, грамотно производить обмен чертежами и т.п.

Замечания преподавателя можно фиксировать на чертежах специальным «учительским» шрифтом (аналогом красных чернил). В отличие от традиционных тетрадей, эти замечания, как правило, не должны быть направлены на констатацию ошибок обучающегося или пробелов в его знаниях; вместо этого замечания должны содержать конструктивные предложения по доработке или переработке чертежа.

Слабые учащиеся имеют возможность видеть и наблюдать то же, что и средние; лишь уровень понимания ими логических связей может быть ниже. Следует допускать, что они сделают меньше средних, но полностью прочувствуют происходящее. Средние учащиеся, как правило, в состоянии полностью выполнить обязательные задания и иногда попробовать свои силы в дополнительных. Для сильных учащихся возникает возможность быстро выполнить необходимый минимум и высвободить время для задач повышенной трудности и собственных исследований. Учителю математики, приступающему к работе в СДГ, достаточно владеть компьютером на уровне начинающего пользователя.

Можно рекомендовать координировать освоение программы в классе с преподавателем информатики, чтобы с их помощью осваивать более продвинутые возможности компьютера.

2.2.2 Стереочертежи и их использование в учебном процессе

Изучение стереометрии вызывает, как правило, у учащихся наибольшие затруднения. В этом параграфе мы рассмотрим, как можно применять стереочертежи в учебном процессе в целом, при изучении темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей» в частности.

Важнейшая особенность стереочертежей заключается в сочетании двухмерного и трехмерного представления фигуры в одном изображении, достигаемое прежде всего за счет возможности произвольного изменения ракурса, а так же благодаря другим эффектам трехмерной графики. Будучи зафиксированным, такое изображение выполняет все функции рисунка в учебнике и/или чертежа в тетради (но чертежа математически точного), причем оно допускает редактирование, дополнительные построения и т.п.

Однако в любой момент пользователь может «перейти в трехмерный режим», включив вращение конструкции вокруг одной или нескольких осей, а также некоторые другие эффекты, создающие ощущение трехмерности. Выбирая новый ракурс изображения, можно проверить правильность выполненных построений, продолжить их, произвести измерения и т.д. работа в такой среде – это уникальное средство развития пространственного воображения, навыка, являющегося важнейшей предпосылкой и, в то же время, результатом успешного изучения стереометрии, решения стереометрических задач.

На стереочертежах можно создать «панель», на которой расположены виртуальные движки и кнопки, управляющие ракурсом и размером изображения (рисунок 5.)[8]:

- движок **Масштаб**: длина соответствующего отрезка изменяется перетаскиванием треугольника – указателя мышью и позволяет пропорционально менять все размеры изображения;
- кнопка **Старт/ стоп** и угловой движок, приводящие изображенную конструкцию во вращение вокруг связанной с ней оси: кнопка включает и выключает вращение, движок позволяет вращать фигуру вручную;
- движок **Наклон**, поворачивающий фигуру вокруг горизонтальной оси вперед и назад в диапазоне от -90 до 90 ; при нулевом наклоне ось вращения вертикальна.



Рисунок 5.

Может иметься так же движок **Высота**, изменяющий высоту параллелепипеда, и кнопки выбора конкретных видов (проекций). Обычно на панели есть и кнопка **В исходное положение**, возвращающая изображение к исходному «удобному» ракурсу.

Могут быть использованы кнопки **К началу**, **Сброс**, **Изменить** и т.п., которые возвращают рисунок в исходное состояние, но не могут «стереть» построения или отменить изменения параметров, произведенные пользователем

Неисчерпаемое поле деятельности для сильных учеников открывают задания по самостоятельному конструированию чертежей более сложных тел и конструкций. Для упрощения чисто технической стороны этой работы можно предложить учащимся уже готовые шаблоны стереометрических фигур и инструменты работы с ними.

Рассмотрим, как можно использовать стереочертежи в учебном процессе. Ограничимся тремя основными вариантами организации работы:

1. *Групповая работа с классом при участии учителя* требует наличия в классе медиа-проектора. Учитель демонстрирует чертеж на экране, обсуждает его с учениками, получает от них ответы на вопросы, задаваемые на чертеже, выполняет по их предложениям задания и т.п. Место учителя здесь может занять и вызванный «к доске» ученик.

2. *Самостоятельная работа в классе* возможна в компьютерном классе с достаточным количеством рабочих мест. Ученики выполняют свои задания самостоятельно либо небольшими группами по 2-3 человека, что бывает даже более эффективно.

3. *Самостоятельная индивидуальная работа дома.*

С чертежами, иллюстрирующими теорию и решения задач лучше работать на большом экране, хотя можно изучать их и в режиме самостоятельной работы. Пошаговые демонстрации обычно содержат пояснительный текст; предполагается, что учитель применяет их как наглядное сопровождение при объяснении нового материала или повторения.

При использовании стереочертежей существуют различные формы представления материала:

1. **Иллюстрация** - наиболее простой по структуре чертеж, предназначенный лишь для того, чтобы сделать более наглядной и понятной рассматриваемую конфигурацию или производимые на ней построения; текст

на таких чертежах, как правило, сводится к формулировке факта или условия задачи.

На рис.6 приведен пример чертежа - иллюстрации (к теореме о плоскостях, перпендикулярных к одной прямой). Рисунок дает ясное и наглядное представление о том, каково взаимное расположение плоскостей, перпендикулярных к одной прямой, позволяя увидеть их с разных сторон и при разных расположениях точек. Оптимальный способ использования этого чертежа – демонстрация на большом экране при объяснении соответствующей темы. Можно сделать и иначе: спрятав формулировку теоремы. Предложить учащимся поэкспериментировать и самим сформулировать свойство перпендикулярных прямой и плоскостей.

Перпендикулярность прямых и плоскостей: Задачи

Теорема о плоскостях, перпендикулярных к одной прямой

Докажите, что если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны.

Посмотрите иллюстрации к шагам доказательства.

Доказательство проводится методом от противного.

шаг 1

К началу доказательства

Вращение
Старт/Стоп
В исходное положение

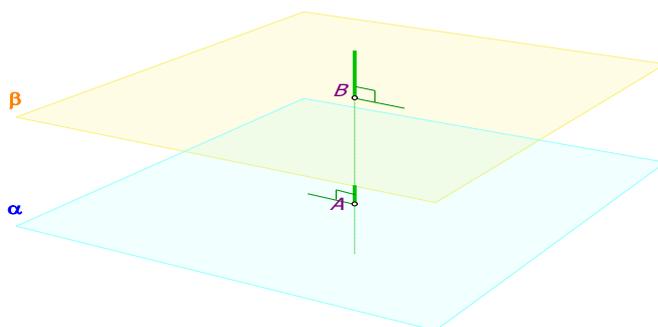


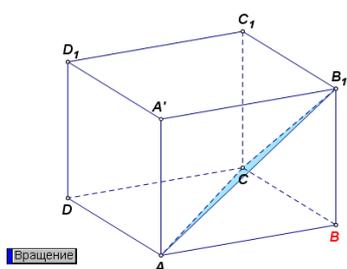
Рисунок 6.

2. **Демонстрация** – это изложение доказательства теоремы или решения задачи, «разворачивающееся во времени», то есть разбитое на шаги, на каждом из которых изменяется рисунок, появляются краткие текстовые пояснения, контрольные вопросы; переход к новым шагам осуществляется нажатием на кнопки. (смотри рисунки 1-4)

3. **Задание** – это иллюстрация к задаче, чаще всего на построение или на вычисление. В заданиях ученик должен выполнить некоторые построения,

изменить значения числовых параметров (вводя ответы), передвинуть какие-то части модели (например, с целью выбора специального «удобного» ракурса изображения). Обычно задания содержат формулировку того, что требуется сделать и чертеж – модель.

Допустим ученику необходимо решить задачу, в которой чертеж играет немаловажную роль. Если при решении задачи ученик выполнил чертеж таким образом, то решение этой задачи, скорее всего, займет много времени.

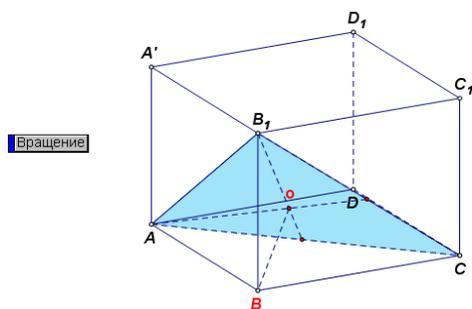


Задача.

В единичном кубе найдите расстояние от точки B до плоскости ACB₁.

Вращение

С помощью «Живой Математики» мы можем предоставить возможность ученику взглянуть на решение этой задачи с другой стороны, подходить более творчески, заинтересовать исследовательской работой.



Вращение

Подсказка 1

AB₁ = B₁C = AC - диагонали граней куба.

Подсказка 2

AB = BB₁ = BC - рёбра куба.

Подсказка 3

BAB₁C - правильная пирамида, высота пирамиды выражает расстояние от точки B до плоскости AB₁C.

Решение

$$\text{Радиус описанной окружности} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \text{ОВ} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

4. **Шаблоны** содержат готовые изображения стандартных фигур, с помощью которых можно создавать новые чертежи, надстраивая или изменяя заготовки. Они рассчитаны на индивидуальную работу. Модели многогранников могут служить заготовками для иллюстрирования их разнообразных свойств или основой для дополнительных построений, позволяя создавать модели более сложных фигур.

Из всего выше сказанного можно сделать вывод, что основная цель стереочертежей – дать ученику инструмент для самостоятельной работы в рамках освоения новой темы, помочь учащимся связать графический образ понятий и их точные определения; освоить понятия не только на качественном, но и на количественном уровне, проводя измерения и проверяя соответствие результатов заданным или ожидаемым значениям.

2.3. Компьютерное сопровождение темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

В пункте мы 2.1 выяснили, что по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей» запланировано 17 уроков. Тему «Перпендикулярность прямых и плоскостей» можно разбить на три модуля, а их в свою очередь на содержательно-дидактические единицы:

Модуль I. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Содержательно-дидактические единицы:

Перпендикулярные прямые в пространстве; лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой; перпендикулярная прямая к плоскости; теоремы, выражающие связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости; признак перпендикулярности прямой и плоскости; теорема о единственности прямой, перпендикулярной к плоскости, проходящей через любую точку пространства.

Модуль II. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

Содержательно-дидактические единицы:

Расстояние от точки до плоскости; теорема о трех перпендикулярах; угол между прямой и плоскостью.

Модуль III. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

Содержательно-дидактические единицы:

Двугранный угол; признак перпендикулярности двух плоскостей; прямоугольный параллелепипед.

Опишем применение СДГ в соответствии с разработанными методическими рекомендациями на примере обучения учащихся содержанию модуля I «Перпендикулярность прямой и плоскости», который включает 6 занятий, по следующей схеме: организация учащихся на работу; актуализация знаний; мотивация; подведение под понятия; отработка новых знаний; подведение итогов урока; постановка домашнего задания и анализ смоделированного занятия с точки зрения реализации проблемы исследования.

Типы уроков по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости».

Урок 1. Урок изучения и закрепление материала п.15,16 «Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости».

Урок 2. Урок изучения и первичного закрепления знаний п.17 «Признак перпендикулярности прямой и плоскости».

Урок 3. Урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности.

Урок 4. Урок изучения и закрепления материала п.18 «Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости».

Урок 5. Урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности.

Урок 6. Урок контроля и коррекции знаний и способов деятельности.

Занятие 1 «Перпендикулярность прямой и плоскости»

Тема урока: «Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости».

Тип урока: урок изучения и закрепление материала

Цели:

О.Ц: обеспечить усвоение: а) понятий: перпендикулярные прямые в пространстве, перпендикулярность прямой и плоскости; б) леммы о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой; в) доказательств теорем, выражающих связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

В.Ц: через организацию урока воспитывать активность учащихся и умение проводить самоанализ.

Р.Ц: развивать умение работать с учебником (выделять главное, составлять план).

Методы обучения: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный, частично-поисковый

Ход урока:

1. Организационный момент.

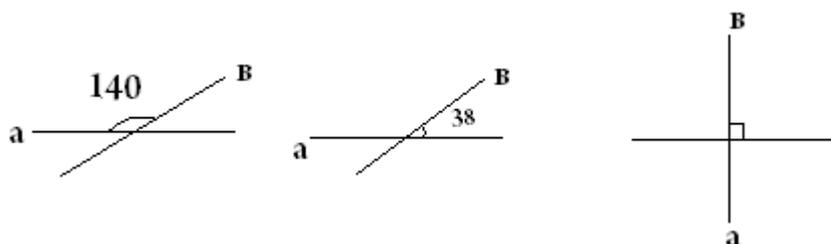
Учитель формулирует тему урока и просит учащихся просмотреть пункты 15 и 16 §1 «Перпендикулярность прямой и плоскости», выделить те понятия, которые будут рассмотрены на этом уроке, и попробовать сформулировать учебную задачу (учащиеся работают с учебником, при формулировке учебной задачи могут общаться друг с другом).

2. Актуализация знаний учащихся.

На данном этапе учащиеся вспомнят: определение угла между прямыми; взаимное расположение двух прямых в пространстве и нахождение углов между скрещивающимися прямыми; свойства куба.

При фронтальном опросе все вопросы будут написаны на слайде. Учащиеся будут отвечать устно, с места, если для решения задачи понадобится дополнительный рисунок, можно будет изобразить его на доске.

1. Что называется углом между прямыми?
2. Чему равны углы между прямыми a и b :



3. Что называется углом между скрещивающимися прямыми? Как найти угол между скрещивающимися прямыми?

4. Задача (Рисунок, созданный с помощью шаблона в программе «Живая Математика», при необходимости можно вращать для наибольшей наглядности чертежа) (рисунок 7)

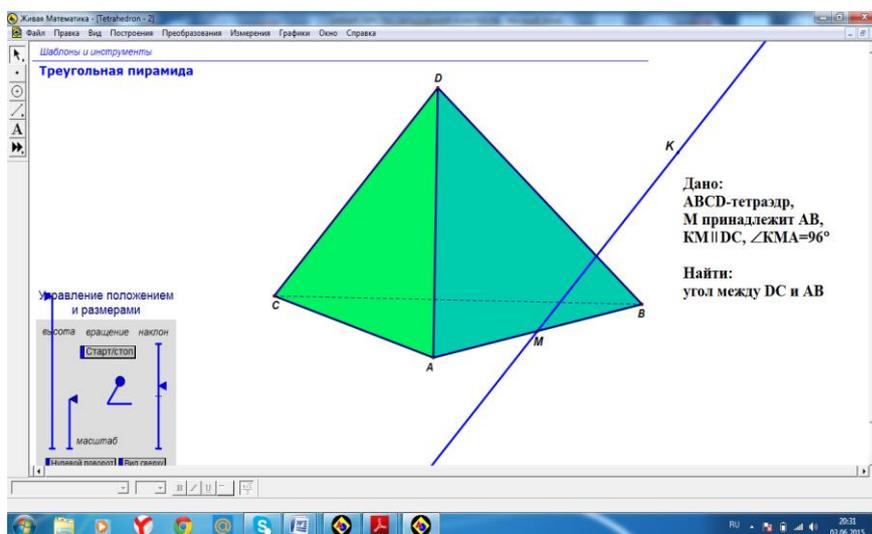


Рисунок 7

5. Что называется кубом? Перечислите его свойства.

3. Введение нового материала.

Учитель: мы с вами изучили параллельные прямые в пространстве, скрещивающиеся и пересекающиеся прямые, а частный случай пересекающихся прямых – это какие прямые? (*учащиеся: перпендикулярные*).

Найдите в учебнике определение перпендикулярных прямых в пространстве (*учащиеся могут отвечать хором, затем учитель еще раз проговаривает определение*)

Учитель предлагает учащимся решить задачу (*Рисунок создан в программе «Живая математика»*) (рисунок 8)

Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что $DC \perp B_1 C_1$, если $\angle BAD = 90^\circ$.

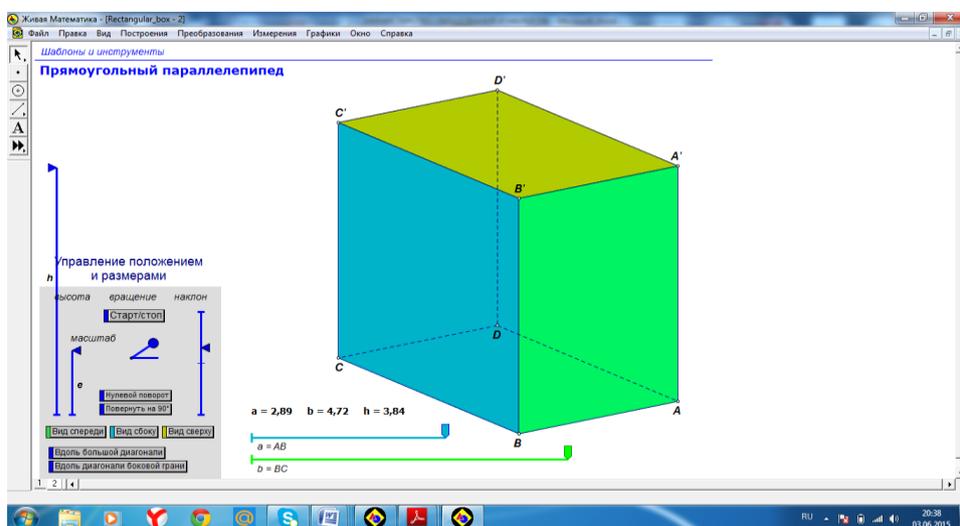


Рисунок 8.

Учитель: что дано? Что требуется доказать в задаче? Какую теорию можно применить для ее решения? Попробуйте составить план ее решения.

Учащиеся в парах пытаются доказать, высказывают свои предположения.

Учитель: итак, решить задачу мы не можем. Давайте оставим ее и попробуем найти ту теорию, с помощью которой мы сможем ее решить. Для этого нам понадобится лемма о перпендикулярности двух прямых к третьей.

Давайте рассмотрим модель куба (*чертеж делается из предыдущего выравниваем основных измерений*). (рисунок 9)

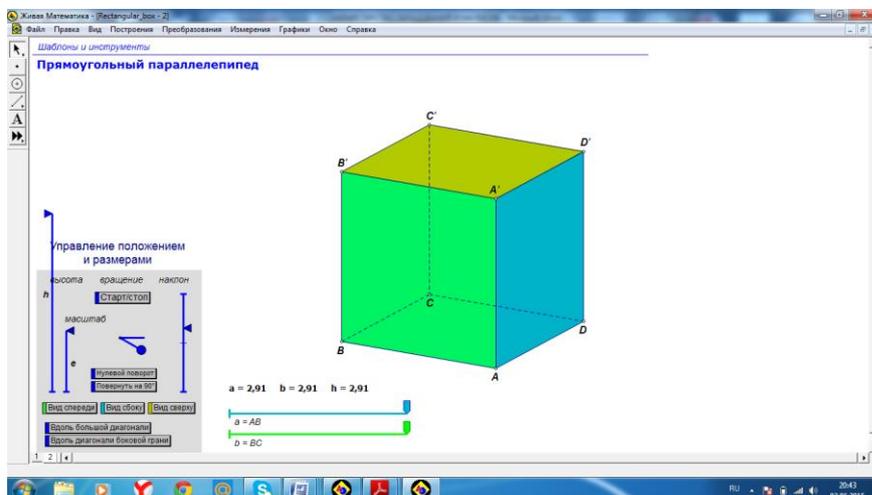


Рисунок 9.

Как называются прямые AB и BC ? Повторите еще раз определение перпендикулярных прямых.

Найдите угол между прямыми AA_1 и DC ; BB_1 и AD ? Какие это прямые? (*учащиеся: скрещивающиеся и перпендикулярные*).

Давайте рассмотрим прямые AA_1 , CC_1 и DC в этом кубе.

Прямые AA_1 , CC_1 – это какие прямые? (*параллельные*)

А прямые CC_1 и DC – это какие прямые? (*перпендикулярные*)

Но, мы еще только что сказали, что прямые AA_1 и DC – перпендикулярные.

(*Учитель записывает вывод на доске, учащиеся в тетрадях*)

Итак, $AA_1 \parallel CC_1$

$$CC_1 \perp DC$$

$$AA_1 \perp DC$$

Мы сейчас вышли на формулировку леммы.

Лемма Если одна из двух **параллельных прямых** перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

(Учитель формулирует лемму и показывает на чертеже (рис.10) , учащиеся повторяют хором и выделяют на чертеже другие пары прямых, подходящих под формулировку леммы. Затем учитель формулирует еще раз, выделяя голосом ключевые слова).

Давайте докажем эту лемму. Прочитайте еще раз лемму и выделите что дано? Что нужно доказать? Подумайте, как можно осуществить доказательство?

Готовый рисунок (рис. 10) спроецирован на экран в программе «Живая Математика».

Итак, вы уже, наверное, поняли, что именно эта лемма будет необходима для решения нашей задачи, она же понадобится и для решения многих других задач и для доказательства многих теорем.

Учащиеся в тетрадях записывают формулировку леммы, что дано, что необходимо доказать. Затем высказываются предположения по доказательству.

Дано: $a \parallel b, a \perp c$.

Доказать: $b \perp c$.

Учитель: выберем произвольную точку пространства M , не лежащую на данных прямых и проведем прямые a' и c' , параллельные соответственно прямым a и c . (шаг 1.) Чему будет равен угол $a'c'$? (учащиеся: 90). Почему? (учащиеся: так как $a \perp c$). (шаг 2.)

У кого-нибудь возникли идеи по дальнейшему доказательству? Каким прямыми являются a' и b' ? Почему? (учащиеся: параллельными, так как $a \parallel a'$ по построению и $b \parallel b'$ по условию). (шаг 3.)

Итак, прямые b и c параллельны каким прямым? (учащиеся: a' и c'). Угол между которыми чему равен? (учащиеся: 90°). А что это означает? (учащиеся: $b \perp c$). (рис. 11)

Итак, давайте еще раз посмотрим на лемму. Что нам было дано? Что нам надо было доказать? Сколько шагов было в доказательстве? Что мы делали на каждом из них? (Учащиеся оформляют доказательство леммы в тетради)

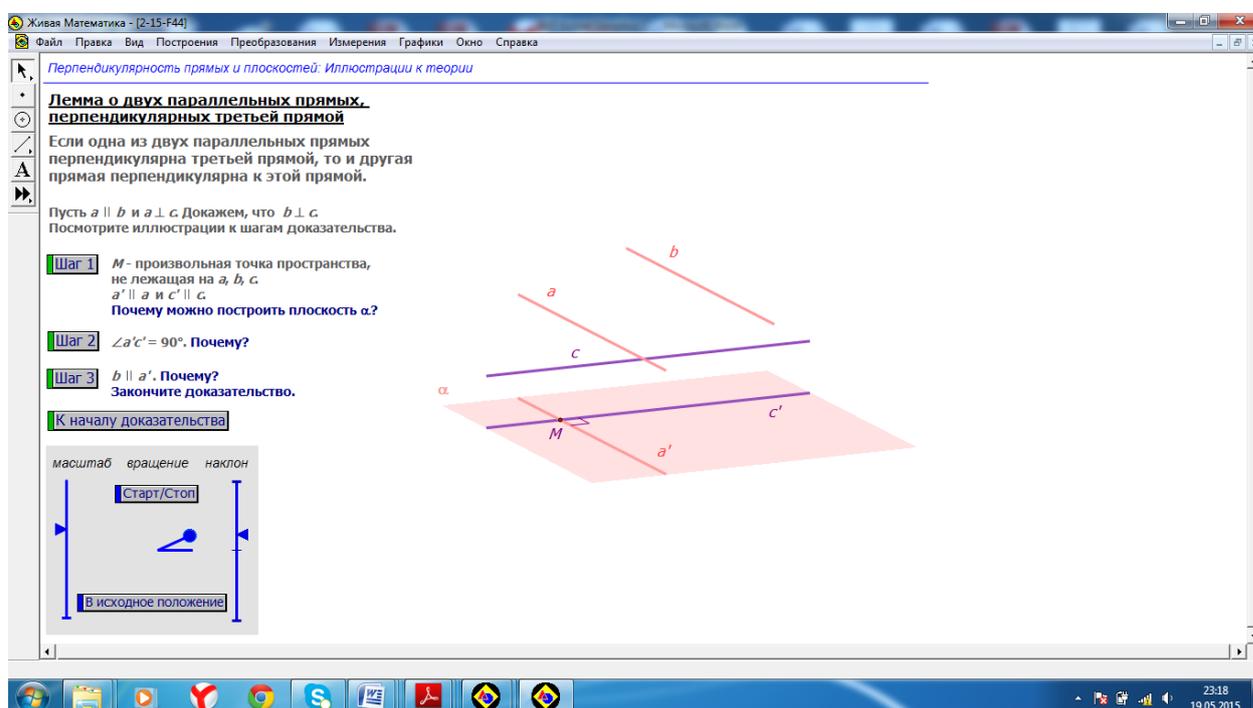


Рисунок 10.

Давайте теперь вернемся к нашей нерешенной задаче и посмотрим, нашли ли мы ту теорию, которой сможем воспользоваться при ее решении? (учащиеся должны найти соответствие с леммой и выделить прямые, которые необходимы для доказательства. По желанию один из учащихся на месте проговаривает ход решения задачи).

Учитель: давайте вернемся к модели нашего куба (учитель возвращается к рисунку 8 на экране и производит дополнительные построения). (рис.11)

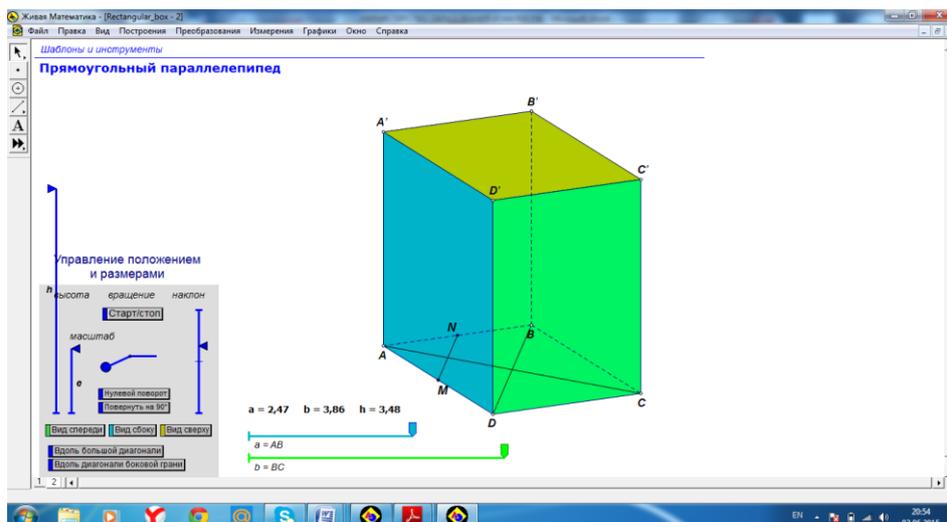


Рисунок 11

Найдите угол между прямой AA_1 и прямыми плоскости (ABC) : AD , AB , AC , MN , BD .

Итак, прямая AA_1 является какой прямой по отношению к любой прямой, лежащей в плоскости (ABC) ? (учащиеся: перпендикулярной).

Так вот, такие прямая и плоскость называются перпендикулярными.

Дайте четкое определение прямой, перпендикулярной к плоскости!

Определение Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к **любой прямой, лежащей в этой плоскости**

(Учащиеся хором проговаривают определение. Затем учитель еще раз проговаривает, выделяя ключевые слова).

А существует ли связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости?

Давайте рассмотрим две теоремы, которые и «говорят» об этой связи (учащиеся читают теоремы в учебнике и разбирают их по шагам, выделяют

необходимую теорию для их доказательства, а учитель затем разбирает ход доказательства с помощью программы «Живая Математика» и записывает на доске, а учащиеся в тетрадь). (рис.12,13)

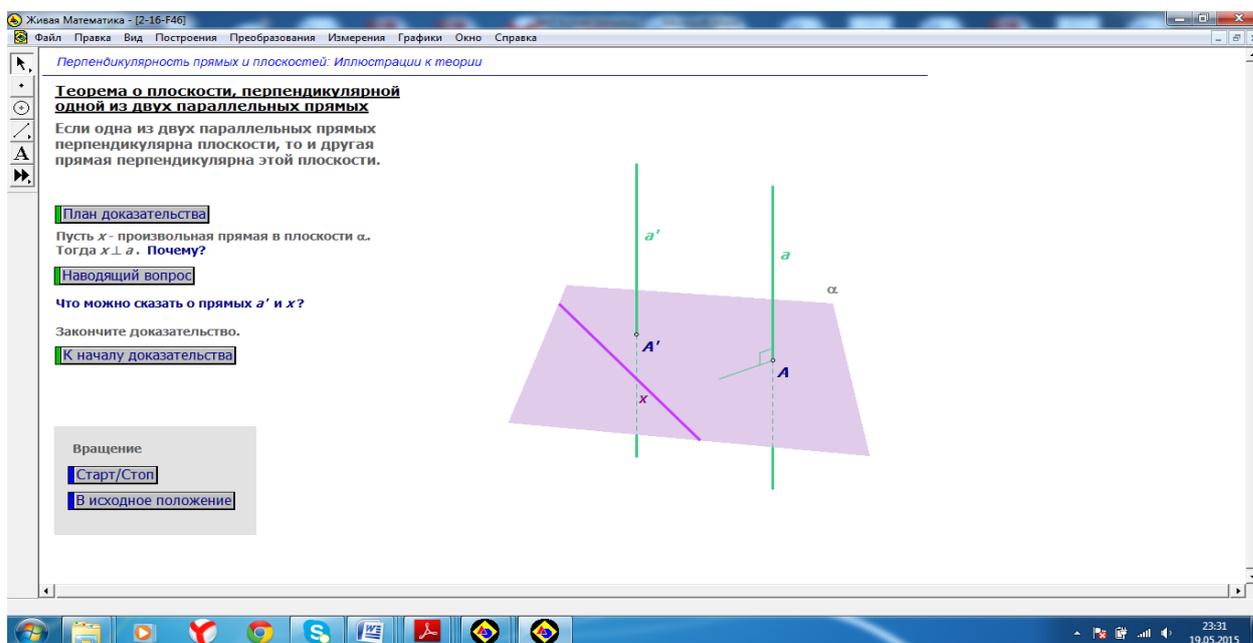


Рисунок 12.

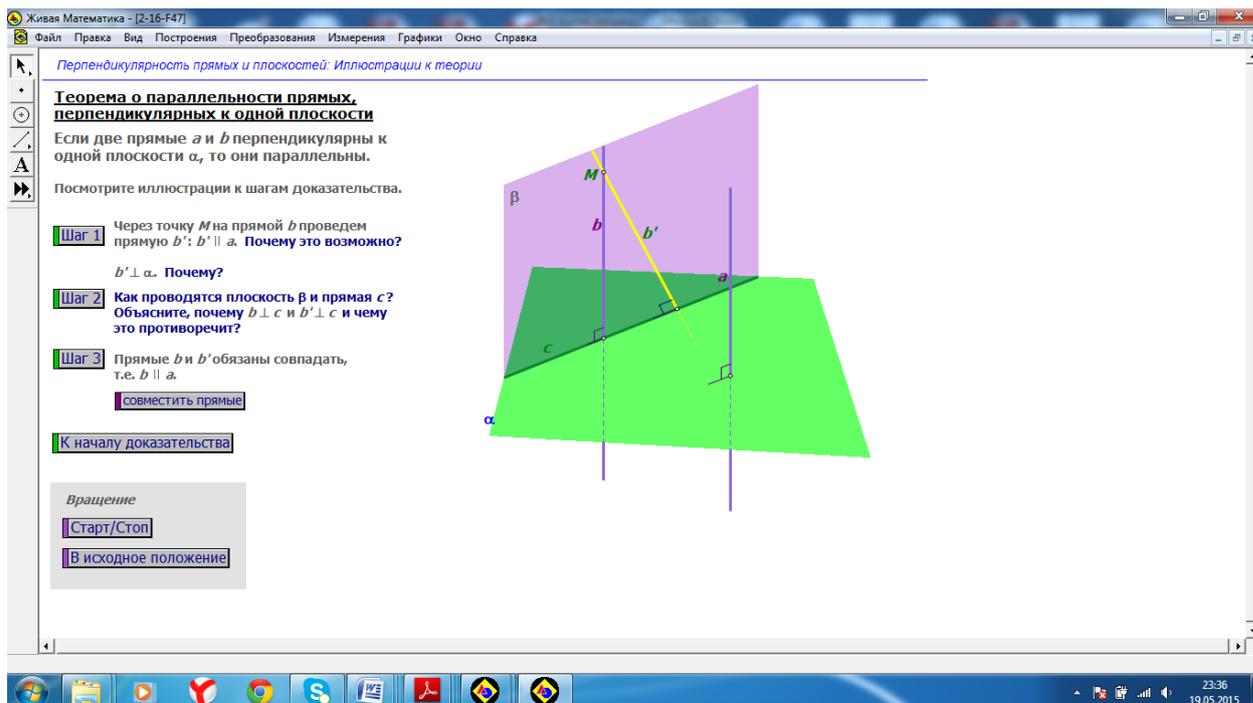


Рисунок 13.

4. Закрепление изученного материала.

Решаем задачу из учебника №120.(рис.14)

Задача. Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a , проведена прямая OK , перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки K до вершин квадрата, если $OK=b$.

Один из учащихся по желанию читает вслух задачу, выделяет что дано, что требуется найти.

В ходе решения задачи учитель задает наводящие вопросы (по плану: анализ текста задачи; поиск решения; анализ результата; ответ), если возникли затруднения.

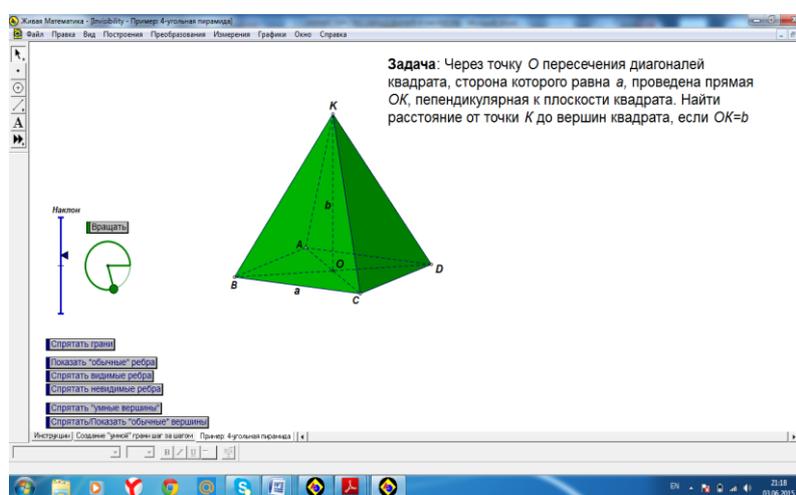


Рисунок 15.

Учитель: рассмотрим треугольники AOK , COK , BOK , DOK . Это какие треугольники? (*учащиеся: равные по двум катетам*). Что отсюда следует? ($AK=KC=KD=BK$). Рассмотрим треугольник OKC . Найдите OC и CK .

5. Подведение итогов урока.

Итак, давайте вернемся к учебной задаче. Выполнили ли мы все цели, которые ставили? Почему?

Какие определения мы рассмотрели? Какую лемму доказали? Какая была идея доказательства?

Какие теоремы мы рассмотрели? Сформулируйте их.

Какие вопросы остались для вас не совсем ясными? На что необходимо еще уделить внимание?

Учащиеся предупреждаются о том, что все задачи, которые будут разобраны в классе, дома, которые составят сами учащиеся в процессе изучения заявленных трех модулей, учитель собирает в одну тетрадь, затем из них будет сформирован итоговый зачет по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»+ теоретические вопросы.

6. Постановка домашнего задания.

§1 (п. 15, 16). Учащиеся самостоятельно составляют карточки с заданиями по пройденной теме + задача из учебника № 188.

После занятия учащиеся знают: определения перпендикулярных прямых в пространстве и прямой перпендикулярной к плоскости; связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых, прямых и плоскостей. Этому способствовали следующие приемы: формулировка учащимися учебной задачи; решение задач по готовым чертежам во время фронтального опроса; работа с учебником (составление плана доказательств, выделение главного); постановка задачи на новый материал и вывод необходимой теории для ее решения; формулировка учителем определений, теорем и выделение ключевых слов в них, повторение их учащимися; парная работа на местах; решение задачи по плану: анализ текста задачи; поиск решения; анализ результата; ответ. На уроке все учащиеся вовлечены в процесс изучения темы (отвечают на местах, работают у доски и в парах с места). Использование проектора позволяет быстро провести фронтальный опрос и возвращаться к предыдущим задачам, определениям урока.

Занятие 2 «Признак перпендикулярности прямой и плоскости»

Тема урока: «Признак перпендикулярности прямой и плоскости»

Тип урока: урок изучения и первичного закрепления знаний

Цели урока:

О.Ц.: Познакомиться с признаком перпендикулярности прямой и плоскости и научиться применять его при решении задач стереометрии

Р.Ц.: Развитие пространственного воображения и логического мышления обучающихся

В.Ц.: Воспитание уважительного отношения к мнению окружающих

Методы обучения: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный, частично-поисковый

Ход урока:

1. Организационный момент

В организационном моменте учитель говорит, что сегодня мы будем изучать признак перпендикулярности прямой и плоскости. Эта тема важна так, как в дальнейшем она пригодится для решения разнообразных задач, в том числе и задач из ЕГЭ.

Затем учитель проводит обсуждение с учащимися целей занятия для того, чтобы они сами сформулировали их. Цели, которые будут сформулированы могут быть такими: запомнить признак перпендикулярности прямой к плоскости и разобраться в сущности его доказательства; научиться применять его при решении задач.

2.Актуализация знаний, полученных учащимися на предыдущем уроке:

- понятие перпендикулярности прямых в пространстве;
- перпендикулярность прямой и плоскости;
- свойств параллельных прямых, перпендикулярных плоскости.

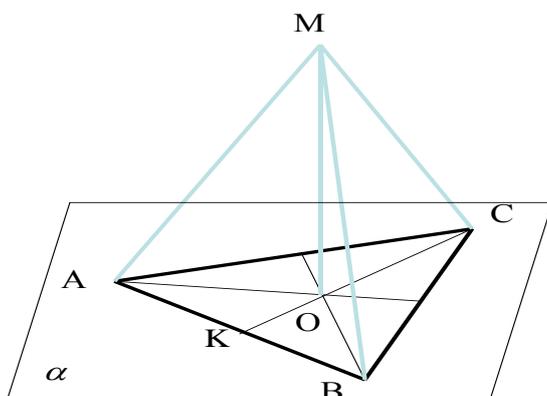
2.1. С целью актуализации знаний один ученик выходит к доске и записывает решение задачи № 188.

2.2. Пока он готовится, фронтальный опрос класса:

- Каково взаимное расположение прямых в пространстве?
- Как определяется угол между прямыми в пространстве?
- Какие прямые в пространстве называют перпендикулярными?
- Сформулируйте лемму о параллельных прямых, перпендикулярных третьей прямой.
- Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости

2.3. Предложить учащимся устно решить задачу (рис 15).

Задача (устно)



Дано: $\triangle ABC$ – правильный;
 O – центр $\triangle ABC$, $OM \perp \alpha$
 $OM=4$, $r=1,5$

Доказать: $MA=MB=MC$

Найти: MA

Рисунок 15.

2.4. Проверка правильности решения домашней задачи.

3. Изучение признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Учитель ставить проблемный вопрос «А как проверить перпендикулярность прямой к данной плоскости? Вот у вас есть столб, а вам

необходимо проверить, перпендикулярен он плоскости земли или нет. Как вы будете это делать? Исходя из определения, необходимо проверить перпендикулярность данной прямой по отношению к любой прямой, лежащей в плоскости. Но таких прямых сколько? Сколько достаточно взять, чтобы ответить на данный вопрос?», для того, чтобы активировать мыслительную деятельность учащихся и пробудить интерес к теме. Далее учитель предлагает взять одну прямую и демонстрирует, что одной прямой недостаточно, тогда берет две прямые и предлагает учащимся рассмотреть возможные случаи их взаимного расположения, а в итоге сформулировать вместе признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Записывается тема урока в тетради.

Доказательство теоремы (и чертеж) (рис.16) производится поэтапно, записи ученики выполняют в тетради. Каждый пункт доказательства обсуждается, после этого ученики делают соответствующие записи.

Перпендикулярность прямых и плоскостей: Иллюстрации к теории

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к данной плоскости.

Вспомните определение перпендикулярности прямой к плоскости.

Посмотрите иллюстрации к шагам доказательства.

- Шаг 1** Сначала рассмотрим случай, когда прямая a проходит через точку O .
- Шаг 2** m - произвольная прямая, $l \parallel m$.
- Шаг 3** $OA' = OA''$
- Шаг 4** $\triangle A'PQ = \triangle A''PQ$. Почему?
- Шаг 5** $\triangle A'PL = \triangle A''PL$. Почему?
- Шаг 6** $\triangle A'LA''$ - равнобедренный. Почему? Как отсюда следует, что $l \perp a$? Закончите доказательство в этом случае.

Общий случай

К началу доказательства

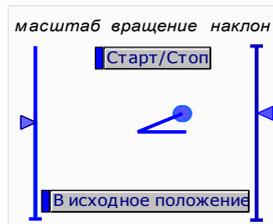
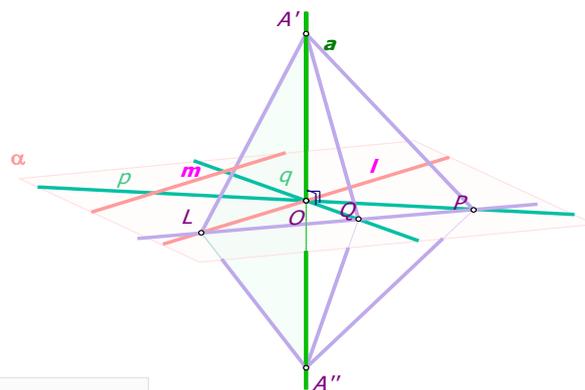


Рисунок 16.

4. **Отработка навыков** применения теоретических знаний к решению задач.

С целью первичного закрепления умения применять признак перпендикулярности прямой и плоскости предложить для устного решения задачи 1, 2 и 3 (рисунки 17,18 и 19 соответственно).

Задача 2 (устно)

По данным чертежа определите вид треугольника NAD

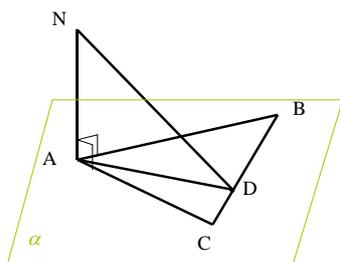


Рисунок 17.

Задача 1 (Устно)

$ABCD A'B'C'D'$ – прямоугольный параллелепипед. Определите, какие прямые перпендикулярны:

- а) плоскости $ABB'A'$;
- б) плоскости $BB'C'C$

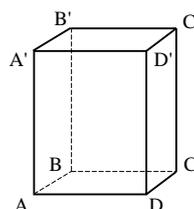


Рисунок 18.

В менее подготовленном классе целесообразнее задачу 3 выполнить после письменного решения №127 из учебника.

Задача 3 (устно)

Докажите, что если все точки прямой, проведенной через точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, равноудалены от вершин прямоугольника, то прямая перпендикулярна плоскости прямоугольника.

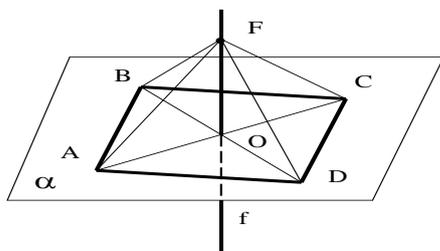


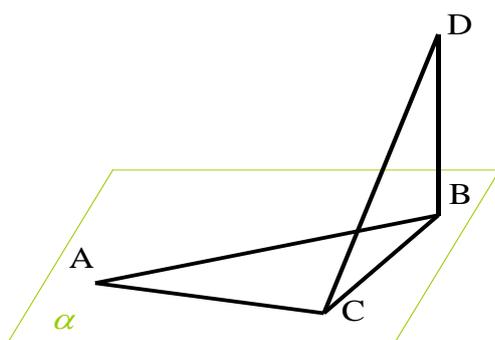
Рисунок 19.

Решить задачу №127 из учебника «Геометрия, 10-11 класс, Атанасян». Составляется плана решения: анализ текста задачи, поиск решения, решение,

анализ результата. Учитель обращает внимание на важные моменты в решении задач, затем в конце решения возвращается обратно и проговаривает решение еще раз.

В зависимости от подготовленности класса чертеж и решение может выполняться на классной доске один ученик, в слабом классе целесообразнее чертеж, а также образец оформления записи решения задачи, показать на слайде (рис.20).

№ 127



Дано: $\triangle ABC: \angle A + \angle B = 90^\circ$,
 $BD \perp \alpha$

Доказать: $CD \perp AC$

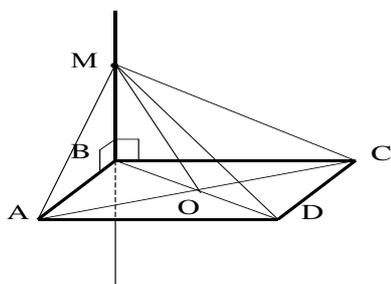
Решение.

1. Т.к. $BD \perp \alpha$, то $BD \perp AC$.
2. Т.к. $\angle A + \angle B = 90^\circ$, то $BC \perp AC$.
3. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AC \perp (CDB)$, а, значит, $AC \perp CD$.

Рисунок 20.

Решить задачу № 130 из учебника, чертеж к задаче на рисунке 21.

№ 130



Дано:
 $ABCD$ – квадрат, O – точка
 пересечения диагоналей;
 BM – прямая,
 $\angle MBA = \angle MBC = 90^\circ$;
 $MB = m$, $AB = n$.

Найти: а) MA , MC , MB , MD ;
 б) расстояние от M до
 прямых AC и BD .

Рисунок 21.

5. Итоги урока. Учащиеся должны вернуться к поставленной в начале урока цели и проанализировать, достигли ли они ее или нет (аргументировать свой ответ; сформулировать признак, выделить этапы в его доказательстве).

В качестве дополнительных вопросов предложить следующие:

- кто знает, как можно проверить на практике перпендикулярность прямой и плоскости, какие инструменты для этого существуют (с помощью двух треугольников, с помощью двух уровней);
- на сколько существенно, что в признаке перпендикулярности прямой и плоскости, взяты две *пересекающиеся* прямые?

6.Задание на дом

1.Решить задачу и построить объемный чертеж в «Живой Математике» (с помощью шаблонов): «Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK , перпендикулярная его плоскости. Расстояния от точки K до других вершин прямоугольника равны 6м, 7м, 9м. Найдите отрезок AK .»

2.Подготовиться доказывать теорему «Признак перпендикулярности прямой и плоскости»

После занятия учащиеся знают признак перпендикулярности прямой и плоскости и сущность его доказательства и умеют применять его к решению задач. Этому способствовали следующие приемы: постановка проблемного вопроса (после которого учащиеся смогли сами сформулировать признак); составление плана доказательства и задач; анализ задачи и ее решения; самостоятельная работа «Ищу ошибку» анализ итогов урока.

На уроке учащиеся активно участвовали в работе, отвечая на местах и у доски; работали самостоятельно: составляли план доказательства и решали задачи; учились рассуждать и анализировать; учились оценивать свою деятельность.

Занятие 3 «Перпендикулярность прямой и плоскости»

Тема урока: «Признак перпендикулярности прямой и плоскости»

Тип урока: урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности.

Цели урока:

ОЦ: обеспечить усвоение всех определений и теорем, пройденных на уроках 1-2. Научиться применять полученные знания к решению задач.

ВЦ: воспитывать интерес к предмету.

РЦ: развивать умение работать в группе, работать самостоятельно, коммуникативные способности (отвечать у доски) и грамотность учащихся.

Методы обучения: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный

1. Организационный момент

(Урок проходит в компьютерном классе)

Учащиеся записывают в тетрадях тему урока «Признак перпендикулярности прямой и плоскости». Учитель формулирует цели урока.

2.Актуализация знаний

На дом было задано научиться доказывать теорему «Признак перпендикулярности прямой и плоскости». (1 ученик доказывает теорему у доски, для доказательства можно воспользоваться демонстрацией к теореме в «Живой Математике»).

Фронтальный опрос:

- 1)Какие две прямые в пространстве называются перпендикулярными?
- 2)В каких случаях взаимного расположения двух прямых прямые в пространстве могут быть перпендикулярными?

3) Сформулируйте теорему о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой?

4) Сформулируйте теорему о перпендикулярности прямых к плоскости?

5) Сформулируйте теорему «Признак перпендикулярности прямой и плоскости»?

- Теперь послушаем внимательно доказательство теоремы «Признак перпендикулярности прямой и плоскости». (1 ученик доказывает теорему у доски).

- Проверка домашней задачи (1 человек у доски) (рис.22)

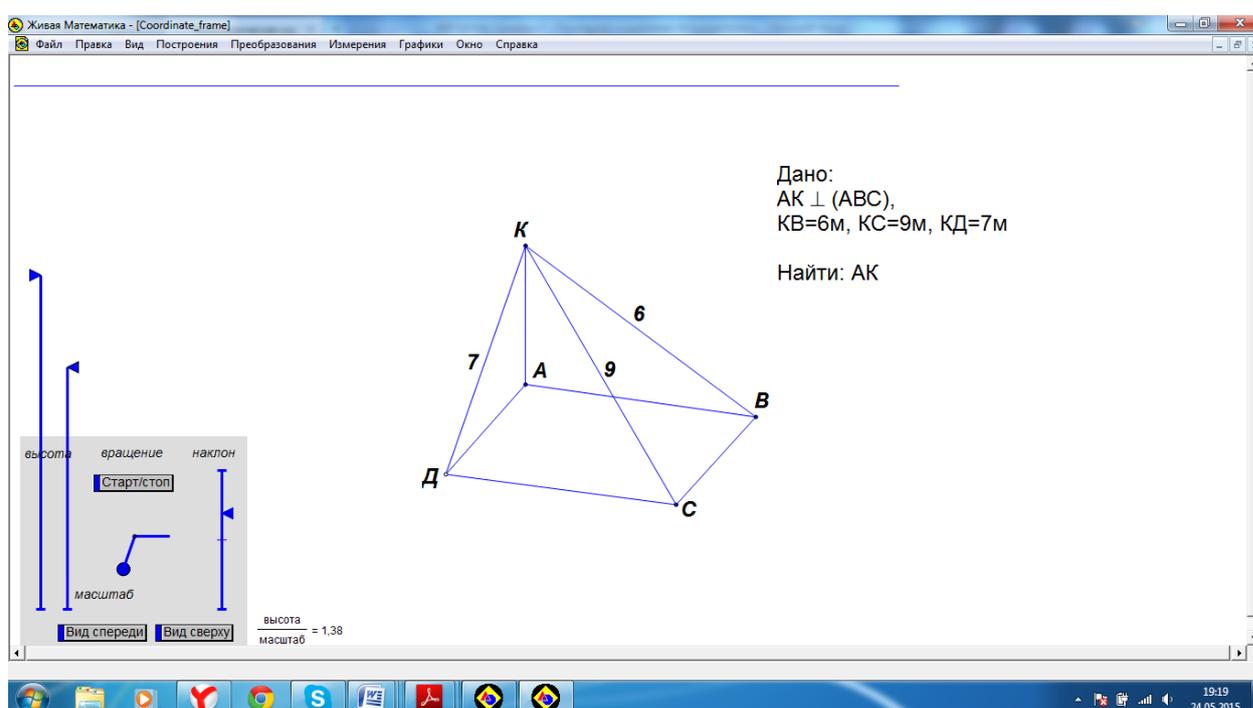


Рисунок 22.

Возможное решение: $CB = 9^2 - 6^2 = 45$, $CB = AD$,

Из ADK : $AK^2 = 49 - 45 = 4$. $AK = 2$ м. А вы уверены, что KBC прямоугольный?

2. Отработка знаний

1. (Учащиеся работают в парах)

Задача 1. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD , перпендикулярная к плоскости

треугольника. Найдите расстояния от точки D до вершин B и C , если $AC=a$, $BC=b$, $AD=c$.

Задача 2. Из точки O , взятой на высоте CD треугольника ABC , восстановлен к его плоскости перпендикуляр OM . Докажите, что плоскость α , проходящая через CD и OM , перпендикулярна AB .

В ЖМ сконструировать динамическую модель задаче 1, решить задачу, оформить решение на слайде. Задача 2 решается в тетради самостоятельно теми учащимися, которые успешно справились с задачей 1. Учитель контролирует выполнение заданий, при необходимости оказывает помощь.

2. Самостоятельная работа

В конце урока проводится небольшая самостоятельная работа, с целью закрепления пройденного материала на этом и предыдущих уроках. Работа называется «Ищу ошибку», состоящая из 2 заданий (1. найти ошибку в определении; 2. найти ошибку в решении задачи, в рассуждениях), где учитель специально делает ошибки в заданиях, а учащиеся должны исправить их. (текст сам. работы см. в приложении)

4. Итоги урока: что нового вы получили на сегодняшнем уроке?

Выставление оценок за устные ответы и работу на уроке.

5. Домашнее задание №132, №134, повторить теорию по теме

После занятия учащиеся знают признак перпендикулярности прямой и плоскости и умеют применять его при решении задач. Этому способствовали следующие приемы: фронтальный опрос; работа в парах, анализ итогов урока учащимися.

На уроке учащиеся учатся работать в паре и у доски, при такой работе развивают свои коммуникабельные способности. Самостоятельное построение динамической модели к задаче способствует визуализации материала, индивидуальной активности, повышению мотивации обучения. Такая организация занятия вызывает интерес учащихся к предмету.

Занятие 4 «Перпендикулярность прямой и плоскости»

Тема урока: «Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости».

Тип урока: урок изучения и закрепление материала

Цели урока:

ОЦ: обеспечить понимание сущности доказательства теоремы о единственности прямой, перпендикулярной к данной плоскости.

РЦ: развивать умение рассуждать, делать выводы; развивать математическую речь.

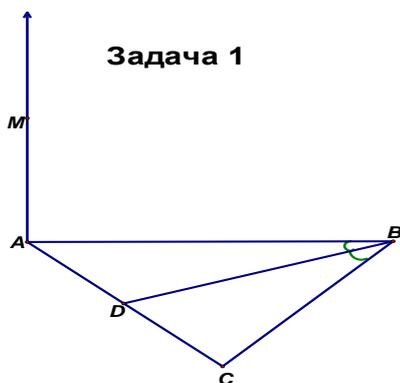
ВЦ: воспитывать умение работать в паре.

Методы обучения: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный

1. Организационный момент Учитель говорит, что сегодня мы будем изучать еще одну теорему, которая необходима будет учащимся для выполнения теста, индивидуального задания.

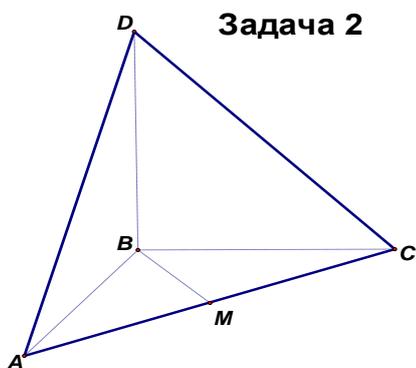
Затем учитель логически подводит учащихся к тому, чтобы они сами сформулировали цели занятия. Сформулированные цели могут звучать следующим образом: запомнить теорему о единственности прямой, перпендикулярной к данной плоскости и разобраться в сущности ее доказательства.

2. Актуализация знаний. Проводится фронтальный опрос по готовым чертежам. На этом этапе учащиеся могут совещаться, отвечать хором. Такой опрос (не заостренный на каком-либо учащемся) поможет детям расслабиться и активизироваться к последующей работе. (Готовые чертежи выполнены в программе «Живая Математика»)



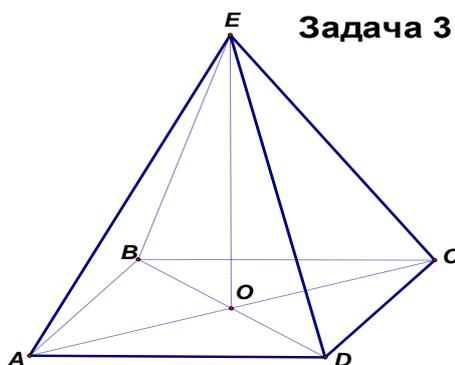
Дано:
 $AM \perp (ABC)$
 BC -биссектрисса
 $\triangle ABC$

Найти:
 угол между прямыми
 AM и BD



Дано:
 $\triangle ABC$, $AB=BC$, $AM=MC$,
 $BD \perp AB$, $BD \perp BC$

Доказать:
 1) $BD \perp (ABC)$
 2) $AC \perp (BDM)$



Дано:
 $ABCD$ - ромб
 $EO \perp AC$, $EO \perp BD$

Доказать:
 1) $EO \perp (ABC)$
 2) $AC \perp (BDE)$

3. Изучение нового материала

Учитель предлагает рассмотреть следующую ситуацию (учитель смотрит, как учащиеся делают чертеж в тетрадах): предлагает нарисовать учащимся плоскость и взять любую точку, не лежащую на этой плоскости, затем предлагает ребятам нарисовать прямую, перпендикулярную этой плоскости и проходящую через взятую точку. Затем ставится проблемный вопрос «Сколько таких прямых можно провести через данную точку?» Учащиеся высказывают свои предположения и могут попытаться доказать свои утверждения. Учитель предлагает изучить теорему по учебнику и разобраться в доказательстве.

Учащиеся в парах разбираются с теоремой, затем выходят по желанию к доске: один строит чертеж, садится и контролирует второго, а другой пишет план доказательства. Затем учитель вместе с классом корректирует план и разбирает доказательство теоремы. На этом этапе развивается у учащихся способность работать в паре, также при составлении плана доказательства ученик должен проговорить, что откуда следует, какая теория используется и т.п., таким образом, развивается умение рассуждать, делать выводы.

Можно при доказательстве теоремы воспользоваться УМК «Живая Математика», альбом «Стереометрия», тема «Перпендикулярность прямых и плоскостей», чертеж 4.7 «Построение прямой, перпендикулярной плоскости 1»(демонстрация к теореме).

4. Закрепление

Решаются задачи по плану: анализ, поиск решения, решение, анализ результата, который проводят сами учащиеся с помощью учителя, развивая умение рассуждать, делать выводы. При этом учащиеся должны проговаривать, какую теорию они использовали, формулировать ее, тем самым, развивая свою математическую речь. Учитель заостряет внимание учащихся на важных моментах в решении, просит учащихся еще раз проговорить все этапы решения задач.

№124 учебника выполняют с учителем, при решении задачи можно воспользоваться УМК «Живая Математика» (рис.23)

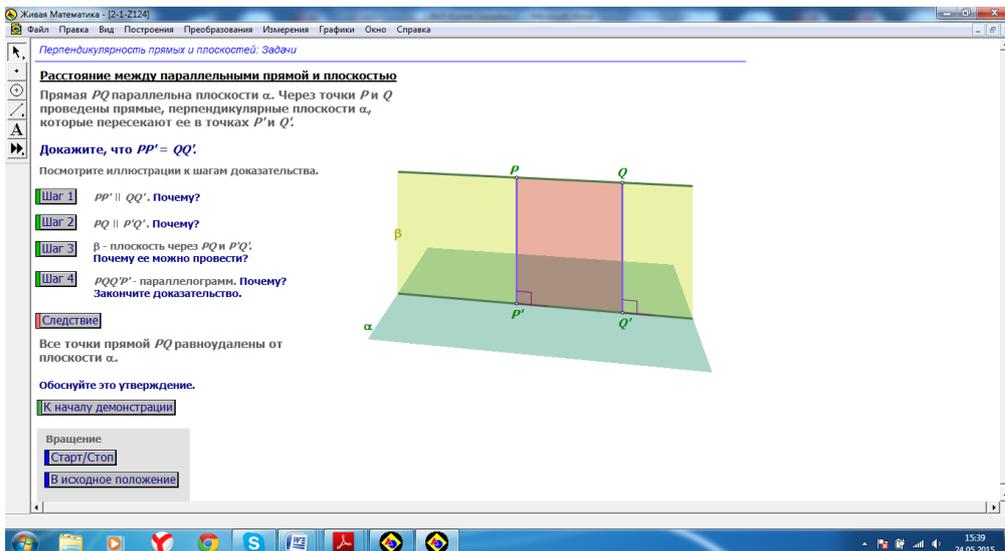


Рисунок 23.

В №126, если есть возможность, рисунок предложить построить учащимся в программе «Живая Математика», чтобы получить динамическую модель и наглядно понаблюдать за перемещениями точки D по прямой AC и как при этом изменяется треугольник EBD . Далее с задачей работа идет по плану.(рис. 24)

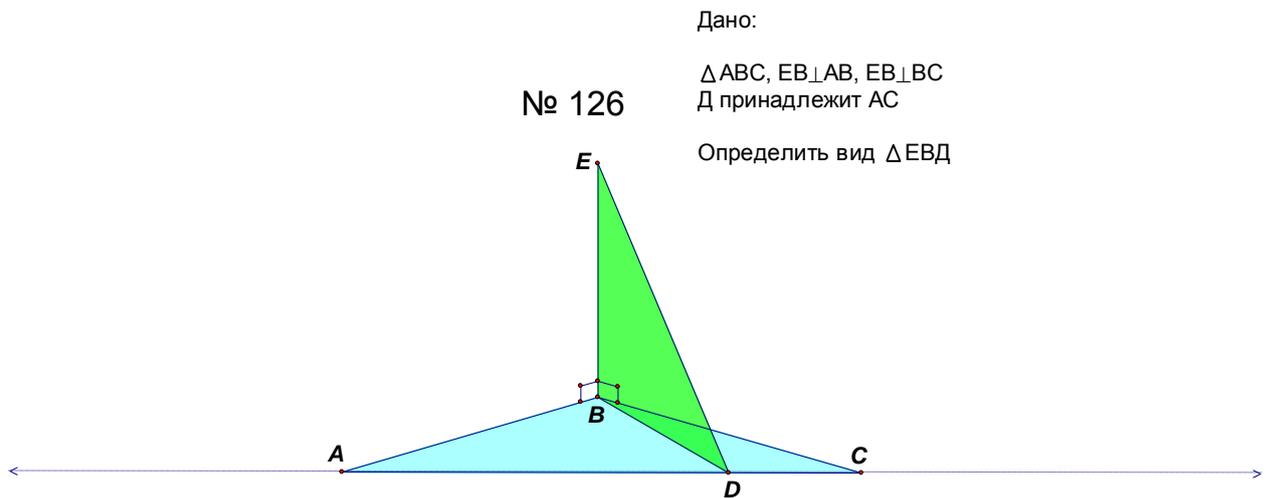


Рисунок 24.

5. Подведение итогов

Учащиеся анализируют все этапы урока, что у них получилось, что нет и почему; достигли ли они поставленной цели; формулируют теорему.

6. Домашнее задание

Учитель объясняет, как составить опорный конспект по пройденной теме, что он должен включать. Задачи по учебнику: выделяются учителем номера (№ 125, 127, 129, 130) и из них учащиеся могут выбрать любую.

После занятия учащиеся знают теорему о единственности прямой, перпендикулярной к данной плоскости и умеют применять ее при решении задач. Этому способствовали следующие приемы: фронтальный опрос по готовым чертежам; составление чертежа и плана доказательства теоремы в парах, при этом учащиеся проговаривают все этапы доказательства и теорию; анализ задач и их решения; анализ итогов урока учащимися.

На уроке учащиеся учились работать в парах; учились рассуждать, делать выводы при доказательстве теоремы, решении задач, а также развивали математическую речь, проговаривая необходимую теорию для решения задач.

Занятие 5 «Перпендикулярность прямой и плоскости».

Тема урока: «Перпендикулярность прямой и плоскости».

Тип урока: урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности.

Цели урока:

ОЦ: обеспечить усвоение всех определений и теорем, пройденных на уроках 1-4. Научиться применять полученные знания к решению задач.

ВЦ: воспитывать интерес к предмету.

РЦ: развивать умение работать в группе, работать самостоятельно, коммуникативные способности (отвечать у доски) и грамотность учащихся.

Методы обучения: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный

1. Организационный момент Учитель говорит, что сегодня мы будем готовиться к зачетному занятию по модулю I. В конце урока вы должны будете сами оценить свою работу.

Затем учитель логически подводит учащихся к тому, чтобы они сами сформулировали цели занятия. Сформулированные цели могут быть следующими: закрепить полученные знания по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости»; устранить оставшиеся пробелы в знаниях.

2.Актуализация знаний (фронтальная работа)

Для успешной работы нам необходимо вспомнить определение, теоремы и формулы, которые понадобятся сегодня на уроке:

- ✓ определение прямой, перпендикулярной плоскости;
- ✓ теорема о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей прямой;
- ✓ теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости;
- ✓ признак перпендикулярности прямой и плоскости;
- ✓ теорема о свойстве диагоналей прямоугольного параллелепипеда и её следствие;
- ✓ теорема Пифагора;
- ✓ где лежит центр, описанной около треугольника окружности;
- ✓ формула для нахождения длины радиуса описанной окружности около равностороннего треугольника;
- ✓ значение тригонометрических функций для углов 30° , 45° , 60° .

(Ответы учащихся).

3.Отработка знаний

1. Каждый учащийся получает карточку, на которой написано 10 утверждений. Если утверждение верно, то возле него ставится “+”, если неверно “-”. За каждый правильный ответ – 1 балл. Количество баллов выставляется в листок учёта знаний.

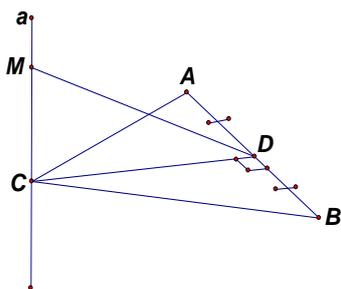
Утверждения:

- 1) Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости;
- 2) Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, параллельной этой плоскости;
- 3) Прямая, перпендикулярная каким-нибудь двум прямым, лежащим в плоскости, перпендикулярна этой плоскости;
- 4) Прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная его диаметру перпендикулярна плоскости круга;
- 5) Прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная двум его радиусам (не образующим диаметр), перпендикулярна плоскости круга;
- 6) Прямая, перпендикулярная двум не параллельным хордам круга, перпендикулярна его плоскости;
- 7) Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой;
- 8) Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой;
- 9) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны;
- 10) Если две прямые, перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Учащиеся меняются карточками и проверяют работу друг у друга. На экран выводятся правильные ответы. Заполняются листы учёта знаний.

4. Устное решение задач (фронтальная работа; условия задач на экране)

Задача 1



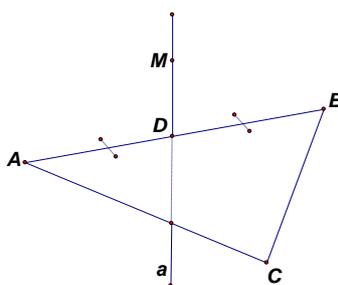
Дано:

$a \perp (ABC)$, $\angle ACB=90^\circ$,
 $AC=4$, $MD=3$

Найти:

MC

Задача 2

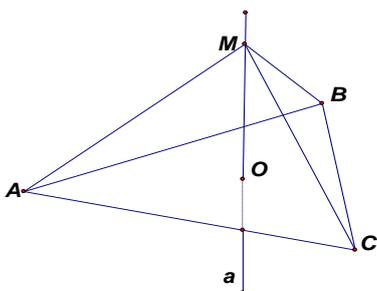


Дано:

$a \perp (ABC)$, $\triangle ABC$ -
равносторонний,
 $AB=2\sqrt{3}$, $MD=4$

Найти: MC

Задача 3



Дано:

$a \perp (ABC)$,
 $\triangle ABC$ -равносторонний,
 $AB=4\sqrt{3}$, O - центр
описанной окружности,
 $MO=3$

Найти: MB

3. Решение задач в группах. Каждый учащийся в группе выполняет отдельные компоненты учебной деятельности. Один ставит цели, которые необходимо достичь группе (например, решить ряд задач, познакомиться с новым понятием или законом), причем делает он это с помощью других членов группы. Второй учащийся планирует последовательность действий всей группы, также с помощью остальных участников. Третий ученик контролирует, насколько выполняемые действия соответствуют поставленным целям. Четвертый оценивает результаты совместной деятельности. Таким образом, постановка цели, определение содержания, контроль и оценка собственной деятельности, т.е. ее организация, производятся учащимися самостоятельно. Учитель корректирует ход работы групп. Затем группы представляют результаты своей работы у доски.

4. Самостоятельное решение задач

4. Подведение итогов

Учащиеся оценивают свою работу и выставляют баллы, анализируют итоги урока.

Лист учёта знаний

Фамилия, имя	Утверждения	Работа в группах	Самостоятельная работа	Моя оценка	Оценка учителя	Итоговая оценка

5. Домашнее задание

Первая часть индивидуального задания, которое учащиеся получили в начале изучения темы и должны принести через одно занятие.

После занятия учащиеся знают все определения, теоремы по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости» и умеют применять его при решении задач. Этому способствовали следующие приемы: фронтальный опрос; работа в группах (учащиеся сами ставят цель, которую необходимо достичь группе; составляют план действий группы; контроль учащихся членом своей группы; совместная оценка результатов); анализ итогов урока учащимися.

На уроке учащиеся учатся работать в группе и у доски, при такой работе развивают свои коммуникабельные способности. Такая организация занятия вызывает интерес учащихся к предмету.

Занятие 6 «Перпендикулярность прямой и плоскости»

Тема урока: «Перпендикулярность прямой и плоскости».

Тип урока: урок контроля и коррекции знаний и способов деятельности (зачет).

Цели урока:

ОЦ: обеспечить усвоение всех определений и теорем, пройденных на уроках 1-4. Показать умение применять полученные знания к решению задач.

ВЦ: воспитывать интерес к предмету.

РЦ: коммуникативные способности и грамотность учащихся.

Методы обучения: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный

В организационном моменте учитель говорит, что сегодня мы проводим зачетное задание, где вы можете показать свои знания по модулю I. Учитель сообщает, что сегодня на уроке можно заработать 14-30 баллов, перечисляет критерии оценивания ответов, сколько и за что можно заработать то или иное количество баллов.

Критерии оценивания.

Если ответ будет полным и правильным, то ставиться максимальное количество баллов.

Если ответ неполный, то баллы ставятся по усмотрению учителя.

При этом учитель должен объяснить, за что и почему он поставил те или иные баллы.

Количество баллов

1-6 баллов – за практическую работу (учащиеся, которые решают задачи по патрулям;

6 баллов – учащимся, которые являются часовыми на постах (с ними учитель разговаривает до урока);

Игру составляют сами учащиеся, которые назначаются часовыми (с ними учитель беседует до урока и выставляет им заработанные баллы). Все задания предварительно проверяются учителем. Несколько учащихся назначаются часовыми (3-6). Каждому выдается эталон пароля. Это может быть ответ задачи

или отдельные слова определения, теоремы, предложения или несколько предложений и т.п. На листочках имеются задачи, которые учащиеся должны решить, или определение, теорема с пропущенными словами, где учащиеся должны заполнить пропуски. Пройти контрольный пункт можно, только правильно выполнив задание. Пройдя часового, учащийся получает букву или слова от фразы, которую он разгадает, пройдя все пункты и дойдя до учителя должен сообщить полученный пароль-фразу. На каждом часовой разные задания (решить задачу, заполнить пропуск, заполнить недостающие слова в кроссворде и т.п.). Если ученик не справился с заданием, то ему разрешается выполнить еще одно задание или пойти дальше. В зависимости от того, сколько ученик прошел пунктов он получает соответствующий балл.

В данном типе урока делается попытка создать психическое напряжение у учащихся, вызвать ситуацию преодоления трудностей.

При подведении итогов учащиеся могут отозваться о форме проведения занятия и внести свои предложения.

Учитель предлагает подсчитать учащимся все баллы, заработанные за урок, определиться с оценкой, сделать выводы кто чего достиг.

Домашнее задание.

Тест №1, часть индивидуального задания (см. приложение №1).

После занятия учащиеся знают все определения, теоремы по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости» и умеют применять полученные знания при решении задач. Этому способствовало то, что учащиеся сами организовывали практическую работу (организаторы проходили опрос до урока); учащиеся проявляют большой интерес к такой форме занятия, поэтому материал запоминается легче.

2.5 Описание опытно-экспериментальной работы

Исходя из целей и задач нашей работы, был проведен мини - эксперимент.

Цель эксперимента: выявление уровня сформированности знаний, умений и навыков учащихся 10-х классов по изученной теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей», необходимых при решении геометрических задач, по традиционной методике и с применением СДГ «Живая Математика»;

Базой для его проведения явились учащиеся 10 «А» класса МБОУ «Красномаяковская СОШ» в 2014/15 учебном году. В качестве контрольной группы выступали учащиеся 10 «Б» класса этой же школы.

В нем приняли участие 30 учащихся (17 человек в 10 «А» классе и 13 человек в 10 «Б» классе).

Сравним результаты обучения учащихся по традиционной системе и результаты обучения учащихся с применением СДГ «Живая Математика» по результатам контрольной работы по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей», то есть, сравним, сколько учащихся в процентном соотношении справились с контрольной работой на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно» по традиционной системе и с применением СДГ, учитывая, что уровень базовых знаний в обоих классах примерно одинаковый .

Таблица 2. Сравнение результатов обучения учащихся по традиционной системе и с применением СДГ

Традиционная система обучения (10 «Б» -13 человек)		Обучение с применением СДГ «Живая геометрия» (10 «А» -17 человек)	
«отлично»	–	«отлично»	5,8% (1

			человек)
«хорошо»	30,7 % (4 человека)	«хорошо»	52,9 % (9 человек)
«удовлетворительно»	46,1% (6 человек)	«удовлетворительно»	41,1 % (7 человек)
«неудовлетворительно»	23% (3 человека)	«неудовлетворительно»	-

Из таблицы следует, что в классе, где тема изучалась с применением СДГ, результаты несколько выше (средняя оценка в классе 10б составила 3.08, а в классе 10А — 3.65). Это говорит о том, что применение в процессе обучения разработанной нами методики с использованием СДГ «Живая Математика» способствует совершенствованию процесса обучения стереометрии учащихся средней школы. Однако, так как СДГ «Живая Математика» для учащихся была новой в работе, еще не познанной до конца, это не оптимальные результаты, которые могли бы быть после изучения данной темы, работай и они, и учитель с применением данной среды систематически и не первый год. Поэтому, несомненно, необходимо дальнейшее внедрение этой технологии в учебный процесс, необходимы дальнейшие исследования данной темы.

Выводы по второй главе:

- 1.** Разработаны методические рекомендации по применению СДГ «Живая Математика» как средства совершенствования процесса обучения стереометрии учащихся средней школы на примере компьютерного сопровождения темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей».
- 2.** Для проверки эффективности разработанных методических рекомендаций была проведена работа по их апробированию, состоящая из опытно-экспериментальной работы, проведенной в десятых классах средней школы.
- 3.** Анализ результатов опытно-экспериментальной работы позволяет сделать вывод об эффективности разработанных методических рекомендаций использования СДГ как средства совершенствования процесса обучения при изучении курса стереометрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена решению актуальной проблемы теории и методики обучения математике: выявление влияния систем динамической геометрии на совершенствование процесса обучения стереометрии в средней школе. Основным средством для решения этой проблемы была выбрана СДГ «Живая Математика», которая позволяет конструировать интерактивные стереометрические объекты с помощью заложенных в нее средств мультимедиа.

В соответствии с поставленными целями перед данной выпускной квалификационной работой и результатами, полученными в ходе исследования, можно сделать следующие выводы:

1. В ходе анализа научной, учебной, методической и математической литературы было установлено, что на сегодняшний день нет единого подхода к построению школьного курса геометрии, его составные части слишком разобщены, отсутствует целенаправленная и систематически проводимая пропедевтика формирования пространственного мышления, что приводит к трудностям освоения систематического курса стереометрии в старшей школе, пространственное мышление развито недостаточно. Процесс обучения стереометрии учащихся средних школ требует совершенствования наглядных средств обучения.

2. Наиболее эффективным средством обучения математике с применением информационно-компьютерных технологий во всем мире признаны системы динамической геометрии (СДГ). СДГ представляют собой программные среды, позволяющие создавать и манипулировать геометрическими построениями.

3. Нами установлено, что наибольшими возможностями трехмерного моделирования обладает СДГ «Живая Математика», которая позволяет осуществлять изменение размера, пространственного положения и структуры изучаемых геометрических объектов.

4. Выявлены дидактические функции СДГ «Живая Математика» в процессе обучения стереометрии: предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения математическими фактами (особенное значение это приобретает на этапе введения нового знания); отработка в интерактивном режиме элементарных базовых умений; усиление значимости и повышение удельного веса в учебном процессе исследовательской деятельности учащихся; увеличение собственной практической деятельности ученика; возможность увеличения объема предъявляемой для изучения информации за счет интенсификации процесса обучения.

5. Разработаны методические рекомендации использования СДГ как средства совершенствования процесса обучения стереометрии на примере изучения темы «Перпендикулярность прямой и плоскости» и экспериментально подтверждена их эффективность.

Сделанные выводы дают основание полагать, что справедливость гипотезы исследования экспериментально подтверждена, все поставленные задачи исследования решены и цель достигнута.

Перспективы исследования проблемы состоят в дальнейшей разработке теоретических и методических основ применения СДГ «Живая Математика» в обучении стереометрии, а также планиметрии, алгебре и началам математического анализа в рамках школьного курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Атанасян, Л. С. Геометрия 10-11: учеб. Для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. –13-е изд. – М.: Просвещение, 2013.
2. Александров А.Д. и др. Геометрия для 10-11 классов: учеб. Пособие для учащихся шк. И классов с углубл. Изуч. Математики/ А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – 3-е изд., перераб.-М.:Просвещение, 1992. -464с.:ил.
3. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение (с решениями) / А.Д Александров; Под ред. Н.В.Наумович.– 19-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2013.- 176 с.
4. Бескин Л.Н. Стереометрия. – М.: Просвещение, 1971.
5. Верещагина Н.Н. Преподавание математики в классе с компьютерной поддержкой / Н.Н. Верещагина. - <http://centen fio.ru/>
6. Глейзер Г.Д. Каким быть школьному курсу геометрии //Математика. Приложение к газете «Первое сентября». 1990. №7. С.68-71.
7. Дубровский В. Н. Стереометрия с компьютером / В.Н. Дубровский // «Компьютерные инструменты в образовании» - 2003. № 6, с. 34.
8. Живая математика: Сборник методических материалов. — М.:ИНТ. — 176с.
9. Зинченко, В.П. Образ и деятельность— М.: Издательство «Институт практической психологии». Воронеж НПО «МОДЭК», 1997. — 608с.
10. Зубрилин А. А., Пауткина О. И. Некоторые пути формирования пространственных представлений и пространственного воображения на уроках математики и информатики в средней школе / А. А. Зубрилин, О. И. Пауткина // «Педагогическая информатика» - 2002. № 3, с. 34-45.
11. Изучение геометрии в 7, 8, 9 классах : Метод. Рекомендации к учеб. : Кн. для учителя / Л.С Атанасян, В.Ф.Бутузов, Ю.А Глазков и др. — 6-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 255 с.

12. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение. - 1968 – 416 с.
13. Методика обучения геометрии: Учебн. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчишина и др.; Под ред. В.А. Гусева. — М.: Издательский центр «Академия», 2012. — 368с.
14. Немов, Р.С. Психология: Учеб. для студентов высш. Пед. Учеб. заведений. В 3 кн. Кн. 1. Общие основы психологии. — 2-е изд.—М. Просвещение ВЛАДОС, 1995 — 576с.
15. Погорелов, А.В. Геометрия: 7-11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. —12-е изд., доп. / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2012.– 224 с.: ил.
16. Пойя, Д. Как решать задачу / Д. Пойя.- М.: Наука, 1974.
17. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев.– М.: Просвещение, 2012.– 224 с.: ил.
18. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Компьютер помогает геометрии / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. - М.: Дрофа, 2003г. – 365с.
19. Темербекова, А.А. Методика преподавания математики: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Гуманит. изд. Центр ВЛАДОС, 2013. — 176с.
20. УМК «Живая Математика» -М.:ИМТ, 1998г.
21. Фридман, Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике: Учителю математики о пед. психологии. — М.: Просвещение, 1983 — 160с., ил.
22. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи : Кн. для учащихся ст. классов сред. шк / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий.- 3-е изд., дораб.– М.: Просвещение, 1989.– 192 с.
23. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений / Н.Ф. Четверухин.– 2-е изд.– М.: Учпедгиз, 2013.

24. Шарыгин И.Ф. Нужна ли школе 21 века геометрия?. //Математика. Приложение к газете «Первое сентября». 2004. №12. С.2-4.

25. Якиманская, И.С. Психологические основы математического образования : Учеб. пособие для студентов пед. Вузов / И.С.Якиманская. — М.: Издательский центр «Академия», 2004 — 320с.

Тематическое планирование темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Таблица 1 - Тематическое планирование

Номер урока, его тип. Тема урока.	Учебная задача.	Диагностируемые цели.
1.Перпендикулярные прямые в пространстве (урок изучения и закрепления материала)	1) Расширить понятие перпендикулярных прямых на плоскости до понятия перпендикулярных прямых в пространстве 2) «Открыть» совместно с учащимися лемму о перпендикулярных прямых 3) Обосновать существование этих объектов на натуральных моделях	1) Знает определение перпендикулярных прямых в пространстве, формулировку леммы 2) Выделяет 2 возможных случая взаимного расположения перпендикулярных прямых в пространстве, ТБ доказательства 3) Воспроизводит идею доказательства 4) Распознает перпендикулярные прямые на натуральных моделях
2.Признак перпендикулярности прямой и плоскости (урок изучения и первичного закрепления знаний)	1) «Открыть» совместно с учениками определение и признак перпендикулярности прямой и плоскости, условия существования прямой перпендикулярной плоскости 2) Провести доказательство признака совместно с учениками	1) Знает определение прямой перпендикулярной плоскости 2) Формулирует признак 3) Осознает необходимость рассмотрения дополнительных теорем для доказательства общего случая признака 4) Обосновывает ход рассуждений при доказательстве признака 5) Выделяет ТБ доказательства признака 6) Обосновывает существование прямой, перпендикулярной плоскости
3.Признак перпендикулярности прямой и плоскости (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности) Самостоятельная работа	Формировать умения: 1) применять теоретические положения для решения задач 2) составлять задачи, обратные данной 3) осуществлять поиск решения аналитико-синтетическим методом	1) Выделяет в условии задачи отдельные элементы 2) Осознает схему поиска решения задачи аналитико-синтетическим методом 3) Владеет способом доказательства перпендикулярности прямой и плоскости
4. Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости (урок изучения и закрепления материала)	1) «Открыть» совместно с учениками теорему о прямой, перпендикулярной плоскости, единственность такой прямой 2) Провести доказательство теоремы совместно с учениками	1)Формулирует теорему о прямой, перпендикулярной плоскости 2)Обосновывает ход рассуждений при доказательстве признака 3)Выделяет ТБ доказательства теоремы

<p>5. Перпендикулярность прямой и плоскости (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности)</p>	<p>Выявить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) степень усвоения теорем-свойств и признаков изучаемых объектов и способов их доказательства 2) степень усвоения определений перпендикулярных прямых, перпендикулярности прямой и плоскости 3) сформированность умений применять теоретические знания к решению дидактических задач 	<p>Понимает уровень усвоения материала и уровень собственных умений</p>
<p>6. Перпендикулярность прямой и плоскости (урок контроля и коррекции знаний и способов деятельности) Тест №1</p>	<p>Выделить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) приемы доказательства перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости; 2) типы задач на вычисление и способы их решения 	<p>Знает:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) определения, признаки, свойства перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости; 2) способы доказательства перпендикулярности двух прямых 3) способы доказательства перпендикулярности прямой и плоскости <p>Умеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) доказывать перпендикулярность двух прямых, прямой и плоскости, <p>Осознает:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) природу происхождения темы 2) роль аналогии и обобщения в получении новых знаний, значимость темы
<p>7. Расстояние от точки до плоскости (урок изучения и закрепления материала)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) «Открыть» с помощью конструктивного диктанта понятия перпендикуляра и наклонной к плоскости 	<ol style="list-style-type: none"> 1) Знает определения новых понятий 2) Выделяет на рисунке новые понятия
<p>8. Теорема о трех перпендикулярах (урок изучения и закрепления материала)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) «Открыть» формулировку теоремы о трех перпендикулярах и ей обратной 2) Выделить круг задач, которые можно решать с помощью этих теорем 3) Привлечь учащихся к работе в группах 4) Формировать у учащихся познавательные и исследовательские умения 5) Провести аналогию с курсом планиметрии 	<ol style="list-style-type: none"> 1) Знает формулировку теоремы о трех перпендикулярах и обратной ей 2) Понимает, что обратное утверждение является теоремой, идею доказательства теоремы о трех перпендикулярах
<p>9. Теорема о трех перпендикулярах (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности)</p>	<p>Формировать умения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) применять теоретические положения для решения задач 2) осуществлять поиск решения аналитико-синтетическим методом 	<ol style="list-style-type: none"> 1) Выделяет в условии задачи отдельные элементы 2) Осознает схему поиска решения задачи аналитико-синтетическим методом 3) Владеет способом доказательства ТТП и теоремы, ей обратной

<p>10. Угол между прямой и плоскостью (урок изучения и закрепления материала) Самостоятельная работа</p>	<p>1) Привлечь учащихся к работе в группах 2) Формировать у учащихся познавательные и исследовательские умения 3) Провести аналогию с курсом планиметрии</p>	<p>1) Имеет представление о расстояниях и углах между различными объектами в пространстве 2) Изображает расстояния и углы в простейших ситуациях 3) Осознает связь данного материала с курсом планиметрии</p>
<p>11. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью (урок контроля и коррекции знаний и способов деятельности) Тест №2</p>	<p>Выявить: 1) степень усвоения теоретического и методического материала 2) степень сформированности умений применять их</p>	<p>Понимает уровень усвоения материала и уровень собственных умений</p>
<p>12. Двугранный угол (урок изучения и закрепления материала)</p>	<p>1) Познакомиться с определением двугранного угла 2) Выделить круг задач на нахождение градусной меры двугранного угла 3) Привлечь учащихся к работе в группах 4) Формировать у учащихся познавательные и исследовательские умения</p>	<p>1) Знает определение двугранного угла, умеет находить градусную меру двугранного угла 2) Выделяет на рисунке новые понятия</p>
<p>13. Свойства двугранного угла (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности)</p>	<p>Формировать умения: 1) применять теоретические положения для решения задач 2) осуществлять поиск решения аналитико-синтетическим методом</p>	<p>1) Выделяет в условии задачи отдельные элементы 2) Осознает схему поиска решения задачи аналитико-синтетическим методом 3) Знает определение двугранного угла</p>
<p>14. Перпендикулярность плоскостей (урок изучения и закрепления материала)</p>	<p>1) «Открыть» совместно с учащимися определение и признак перпендикулярных плоскостей 2) Обосновать существование этих объектов 3) Провести совместно с учащимися доказательство признака</p>	<p>1) Знает определение перпендикулярных плоскостей 2) Формулирует признак перпендикулярности плоскостей 3) Обосновывает существование перпендикулярных плоскостей, ход рассуждений при доказательстве признака перпендикулярных плоскостей 4) Выделяет ТБ доказательств 5) Решает дидактические задачи</p>
<p>15. Прямоугольный параллелепипед</p>	<p>1) Выделить в качестве нового объекта изучения прямоугольный параллелепипед, изучить его свойства</p>	<p>1) Знает определение прямоугольного параллелепипеда 2) Формулирует свойства параллелепипеда 3) Обосновывает ход рассуждений при доказательстве свойств параллелепипеда 4) Решает дидактические задачи</p>

<p>16. Перпендикулярность прямых и плоскостей (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности) Тест №3, индивидуальное задание</p>	<p>Выделить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 3) пары объектов в пространстве, между которыми устанавливается отношение перпендикулярности, и охарактеризовать это отношение 4) приемы доказательства перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей 5) типы задач на вычисление и способы их решения 	<p>Знает:</p> <ol style="list-style-type: none"> 4) определения, признаки, свойства любой пары объектов 5) способы доказательства перпендикулярности двух прямых 6) способы доказательства перпендикулярности прямой и плоскости 7) способы доказательства перпендикулярности двух плоскостей 8) обобщенный план решения задач на нахождение углов и расстояний в пространстве <p>Умеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> 2) доказывать перпендикулярность двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей 3) находить расстояние и углы между различными парами объектов <p>Осознает:</p> <ol style="list-style-type: none"> 3) природу происхождения темы 4) роль аналогии и обобщения в получении новых знаний 5) значимость темы
<p>17. Итоговый зачет (урок контроля и коррекции знаний и способов деятельности)</p>	<p>Выявить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) степень усвоения теорем-свойств и признаков изучаемых объектов и способов их доказательства 2) степень усвоения определений перпендикулярных прямых, перпендикулярности прямой и плоскости 3) сформированность умений применять теоретические знания к решению дидактических задач 	<p>Понимает уровень усвоения материала и уровень собственных умений</p>

План работы при изучении темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Модуль I. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Урок №1 «Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости».

Урок №2 «Признак перпендикулярности прямой и плоскости».

Урок №3 «Признак перпендикулярности прямой и плоскости».

Самостоятельная работа

Урок №4 «Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости».

Урок №5 «Перпендикулярность прямой и плоскости».

Урок №6 «Перпендикулярность прямой и плоскости» (практическая работа). Тест №1 «Перпендикулярность прямой и плоскости».

Модуль II. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

Урок №7 «Расстояние от точки до плоскости».

Урок №8 «Теорема о трех перпендикулярах».

Урок №9 «Теорема о трех перпендикулярах».

Урок №10 «Угол между прямой и плоскостью».

Самостоятельная работа

Урок №11 «Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью Тест №2 «Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью».

Модуль III. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

Урок № 12 «Двугранный угол»

Урок №13 «Свойство двугранного угла»

Урок №14 «Перпендикулярность плоскостей»

Урок № 15 «Прямоугольный параллелепипед»

Урок №16 «Подготовка к зачету». Тест №3 «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей». Индивидуальное задание

Урок № 17 Зачет

Индивидуальное задание выдается в начале изучения темы. Оно состоит из трех заданий на каждый модуль, в общем 9 заданий, и по окончании изучения модуля учащиеся могут выполнить три задания и сдать досрочно, получив дополнительные баллы. Сдается индивидуальное задание в конце изучения всей темы.

Тестирование проводится по всему модулю.

Самостоятельная работа может проводиться и по какой-либо содержательной единице модуля, и по всему модулю.

Тест №1.

Модуль I. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Данный тест направлен на проверку основных знаний по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости»: определение перпендикулярных прямых в пространстве и прямой перпендикулярной к плоскости; теоремы, выражающие связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости; признак перпендикулярности прямой и плоскости; теорема о единственности прямой, перпендикулярной к плоскости.

Инструкции по выполнению: Работайте самостоятельно. Прочитайте внимательно задание и следуйте инструкции к нему, выделенной жирным шрифтом.

Критерии оценивания.

За выполнение теста максимально можно заработать 22 балла.

За выполнение каждого задания 1 уровня сложности (1-7) – 1 балл.

За выполнение каждого задания 2 уровня сложности (8-10) – 5 баллов.

6-15 баллов – оценка «3»

16-19 баллов – оценка «4»

20-22 балла – оценка «5»

В тех заданиях, где необходимо ввести ответ, учащиеся могут записывать ход своих рассуждений. И если ответ неправильный, то ученик может получить часть баллов за правильность рассуждений.

Приступайте к выполнению заданий. Желаем удачи!

1. Какое утверждение верно?

1. Если одна из двух прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

2. Если две прямые перпендикулярны к третьей прямой, то они параллельны.

3. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

2. Вставьте пропущенные слова.

Если прямая перпендикулярна к прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

3. Выберите правильный ответ.

$MBACD$ – тетраэдр. $ABCD$ – прямоугольник, $BM \perp (ABC)$. Тогда неверно, что ...

1. $VMAC$;

2. $AMAD$;

3. MDDC.

4. Выберите правильный ответ.

Прямая m перпендикулярна к прямым a и b , лежащим в плоскости α , но m не перпендикулярна к плоскости α . Тогда прямые a и b ...

1. параллельны;
2. пересекаются;
3. скрещиваются.

5. Выберите правильный ответ.

Плоскость α проходит через вершину A ромба $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC . Тогда диагональ BD ...

1. перпендикулярна плоскости α ;
2. параллельна плоскости α ;
3. лежит в плоскости α .

6. Выберите правильный ответ.

$a \perp \alpha$, $b \parallel \alpha$. Тогда прямые a и b не могут быть ...

1. скрещивающимися;
2. перпендикулярными;
3. параллельными.

7. Выберите правильный ответ.

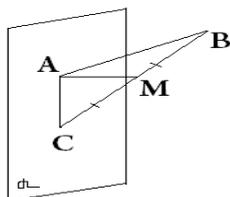
$ABCD$ – параллелограмм. $BD \in \alpha$, $AC \perp \alpha$. Тогда $ABCD$ не может быть ...

1. прямоугольником;
2. квадратом;

3. ромбом.

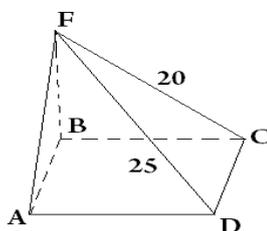
8. Введите ответ.

$AB \perp \alpha$, $AC \in \alpha$, $CM = MB$, $AM = 2,5$ см, $AC = 3$ см. Тогда $AB = \dots$



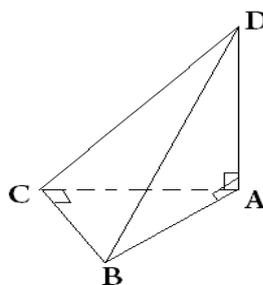
9. Введите ответ.

ABCD – прямоугольник. $BF \perp (ABC)$. $CF = 20$ см, $DF = 25$ см. тогда длина отрезка $CD = \dots$



10. Введите ответ.

DABC – тетраэдр. $AD \perp AC$, $AD \perp AB$, $AC \perp BC$. Тогда ребро BC перпендикулярно плоскости ...



№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Ответ	3	Двум пересекающимся	3	1	2	3	1	4	15	ADC
-------	---	------------------------	---	---	---	---	---	---	----	-----

Тест №2 Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

Данный тест направлен на проверку основных знаний по теме «Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью»: определение перпендикуляра и его основания на плоскость; наклонной, ее основания и проекции на плоскость; расстояния между: точкой и плоскостью, параллельными плоскостями, прямой и параллельной ей плоскостью, скрещивающимися прямыми; теорема о трех перпендикулярах; угол между прямой и плоскостью.

Инструкции по выполнению: Работайте самостоятельно. Прочитайте внимательно задание и следуйте инструкции к ним, выделенной жирным шрифтом.

Критерии оценивания.

За выполнение теста максимально можно заработать 22балла.

За выполнение каждого задания 1 уровня сложности– 1 балл.

За выполнение каждого задания 2 уровня сложности –5 баллов.

6-15 баллов – оценка «3»

16-19 баллов – оценка «4»

20-22 балла – оценка «5»

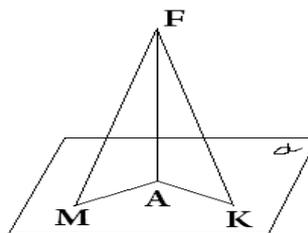
В тех заданиях, где необходимо ввести ответ, учащиеся могут записывать ход своих рассуждений. И если ответ неправильный, то ученик может получить часть баллов за правильность рассуждений.

Приступайте к выполнению заданий. Желаем удачи!

1. Выберите правильный ответ.

$AF \perp \alpha$. Неверно, что ...

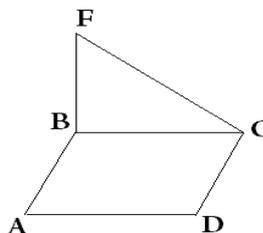
1. $FM > AF$;
2. $FK > FM$;
3. $AK < FK$.



2. Выберите правильный ответ.

$BF \perp (ABC)$. Прямые CD и CF не будут перпендикулярными, если $ABCD$ будет ...

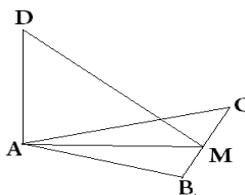
1. прямоугольником;
2. ромбом;
3. квадратом.



3. Выберите правильный ответ.

$AD \perp (ABC)$. Прямые DM и BC будут перпендикулярными, если AM будет ...

1. биссектрисой;
2. медианой;
3. высотой.



4. Вставьте пропущенные слова.

Прямая, проведенная в плоскости через основание ... перпендикулярно к ее ... на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

5. Выберите правильный ответ.

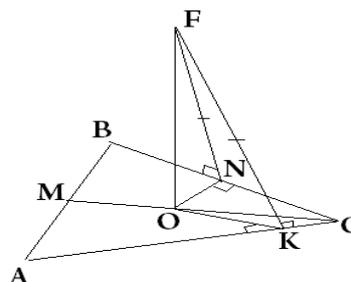
Точка М равноудалена от вершин треугольника ABC. Тогда проекция точки М на плоскости ABC есть точка пересечения ...

1. высот треугольника;
2. биссектрис углов треугольника;
3. серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

6. Выберите правильный ответ.

Треугольник ABC. $FK \perp AC$, $FN \perp BC$, $FK = FN$. $FO \perp (ABC)$, $O \in CM$. Тогда CM – ...

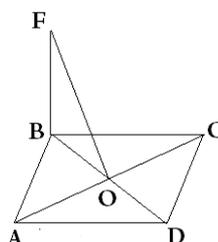
1. биссектриса;
2. медиана;
3. высота.



7. Выберите правильный ответ.

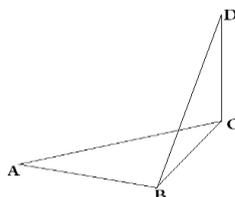
ABCD – параллелограмм, AC пересекается с BD в точке O. $FO \perp (ABC)$. FO – расстояние от точки F до прямой AC. Тогда ABCD не может быть ...

1. прямоугольником;
2. ромбом;
3. квадратом.



8. Введите правильный ответ.

$CD \perp (ABC)$, $AB \perp BD$, угол $ABC = 10$ градусов. Тогда угол $BAC = \dots$



9. Введите правильный ответ.

$ABCD$ – ромб, $AB = a$, $\angle ABC = 150$ градусов, $CF \perp (ABC)$, $CF = \sqrt{3}/2$. Тогда расстояние от точки F до прямой AD равно ...

10. Введите правильный ответ.

Тангенс угла наклона бокового ребра правильного тетраэдра к плоскости основания равен ...

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	2	2	3	Наклонной , проекции	3	1	1	80	a	2

Тест №3 Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

Данный тест направлен на проверку основных знаний по теме «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей»: определение двугранного

угла и его линейного угла; признак перпендикулярности двух плоскостей; прямоугольный параллелепипед и его свойства.

Инструкции по выполнению: Работайте самостоятельно. Прочитайте внимательно задание и следуйте инструкции к ним, выделенной жирным шрифтом.

Критерии оценивания.

За выполнение теста максимально можно заработать 22 балла.

За выполнение каждого задания 1 уровня сложности – 1 балл.

За выполнение каждого задания 2 уровня сложности – 5 баллов.

6-15 баллов – оценка «3»

16-19 баллов – оценка «4»

20-22 балла – оценка «5»

В тех заданиях, где необходимо ввести ответ, учащиеся могут записывать ход своих рассуждений. И если ответ неправильный, то ученик может получить часть баллов за правильность рассуждений.

Приступайте к выполнению заданий. Желаем удачи!

1. Выберите правильный ответ.

Линейным углом двугранного угла нельзя назвать угол, возникающий при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ...

1. ребру двугранного угла;
2. одной из граней двугранного угла;
3. граням двугранного угла.

2. Какое утверждение верное?

1. Не может ребро двугранного угла быть не перпендикулярным плоскости его линейного угла.

2. Не могут две плоскости, перпендикулярные к одной плоскости, быть непараллельными.

3. Не могут две плоскости, перпендикулярные к одной прямой, быть непараллельными.

3. Вставьте пропущенные слова.

1. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости.

4. Какое утверждение верное?

1. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости. То такие плоскости перпендикулярны.

2. Если плоскости перпендикулярны, то линия их пересечения перпендикулярна любой прямой, лежащей в одной из данных плоскостей.

3. Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

5. Выберите правильный ответ.

Количество двугранных углов параллелепипеда равно ...

1. 8;

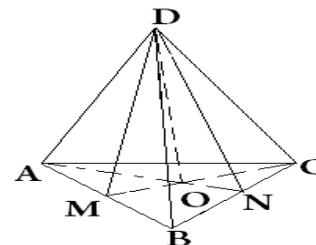
2. 12;

3. 24.

6. Выберите правильный ответ.

Треугольник ABC, AN и CM – высоты. $DO \perp (ABC)$. Градусная мера угла ABCD равна градусной мере угла ...

1. ABD;
2. AND;
3. ACD.



7. Введите правильный ответ.

Точка A находится на расстоянии 3см и 4см от перпендикулярных плоскостей. Тогда расстояние от точки A до прямой пересечения этих плоскостей равно ...

8. Введите правильный ответ.

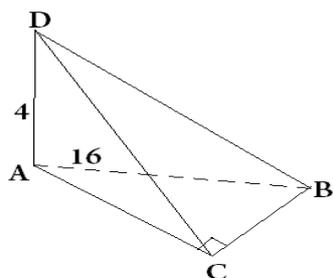
Равнобедренные треугольники ABC и BCD с общим основанием не лежат в одной плоскости. Их высоты, проведенные к основанию, равны 2см, а расстояние между точками A и D равно 22см. Тогда градусная мера угла ABCD равна

9. Введите правильный ответ.

Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α , катет наклонен к этой плоскости под углом 30 градусов. Тогда угол наклона плоскости треугольника к плоскости α равен ...

10. Введите правильный ответ.

DABC – пирамида, $AD \perp (ABC)$, $AD=4$ см. $\angle ACB=90^\circ$, $\cos A=0,25$, $AB=16$ см. Тогда $ABCD=$...



№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	2	1	Двумя полуплоскостями	2	2	2	5	90	45	45

Индивидуальное задание.

Цель: проверить уровень усвоения теоретического материала по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей», а также умение применять его на практике; развивать умение работать самостоятельно, проводить самоанализ.

Критерии оценивания

Индивидуальное задание состоит из 9 заданий (по три на каждый модуль, разного уровня усвоения). За выполнение индивидуального задания максимально можно заработать 39 баллов (за задания 2 уровня сложности – 3 балла; за задания 3 уровня сложности – 5 баллов).

19-24 балла – оценка «3»

25-36 баллов – оценка «4»

37-39 баллов – оценка «5»

Учитель должен аргументировать все выставленные баллы. Если ученик недоволен результатом, то учитель может дать ему дополнительное задание.

Индивидуальное задание выдается в начале изучения темы и сдается в конце ее изучения. Однако учащиеся могут сдавать индивидуальное задание по частям, в конце изучения каждого модуля.

Задания

I часть

1. Дано: E не принадлежит $(ABCD)$. $ABCD$ - прямоугольник. $BE \perp AB$, $EA \perp AD$.

Доказать, что $AD \perp BE$.

Найти S_{EBD} , если $BD = 7$ см, $ED = 25$ см.

(Рекомендации по решению: вспомнить связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью; определение прямой перпендикулярной к плоскости и формулу нахождения площади прямоугольного треугольника)

2. Докажите, что если точка X равноудалена от концов данного отрезка AB , то она лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярна к прямой AB .

(Рекомендации по решению: вспомнить определение серединного перпендикуляра)

3. Через вершину B сторону квадрата $ABCD$ проведена прямая BM , $\angle MBA = \angle MBC$; $MB = m$, $AB = n$. Найти расстояние от точки M до: а) вершин квадрата; б) прямых AC и BD .

(Рекомендации по решению: вспомнить свойства квадрата; теорему Пифагора; условие перпендикулярности прямой и плоскости)

II часть

1. Один конец данного отрезка лежит в плоскости α , а другой находится от нее на расстоянии 6 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α .

(Рекомендации по решению: вспомнить понятие расстояния между точкой и плоскостью; п. 21 учебника; теорема Фалеса)

2. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между плоскостями $AA_1 D_1$ и BDC_1 (задача из ЕГЭ).

(Рекомендации по решению: вспомнить свойства куба условие параллельности плоскостей; условие перпендикулярности прямой к плоскости; построение сечений; свойства прямоугольного треугольника)

3. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно $\sqrt{3}$ (задача из ЕГЭ).

(Рекомендации по решению: вспомнить, как находить расстояние между скрещивающимися прямыми; свойства куба)

III часть

1. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость ADM так, что двугранный угол $BADM$ равен 60° . Найдите сторону ромба, если угол BAD равен 45° и расстояние от точки B до плоскости ADM равно 4.

(Рекомендации по решению: вспомнить свойство двугранного угла; построение двугранного угла; перпендикуляр к плоскости; определение прямой перпендикулярной к плоскости; свойства прямоугольного треугольника)

2. Равнобедренные треугольники ABC и BDC не лежат в одной плоскости. Их высоты, проведенные к основанию BC , равны 2 см, и расстояние между точками A и D тоже равно 2 см. Чему равна градусная мера двугранного угла $ABCD$?

(Рекомендации по решению: вспомнить определение двугранного угла и его градусной меры; свойства равнобедренного и равностороннего треугольника)

3. $FABCD$ – пирамида, $BF \perp (ABC)$, $BF = \sqrt{3}$ см. $ABCD$ – квадрат, $AC = \sqrt{2}$ см.
Чему равен угол $ACDF$?

(Рекомендации по решению: вспомнить определение двугранного угла, линейного угла двугранного угла; способы его построения и свойства квадрата)

Самостоятельная работа

Модуль I. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Цель: проверить уровень усвоения материала учащимися по теме «Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости» и умение применять его на практике; развивать умение анализировать и работать самостоятельно.

Задания.

1. В треугольнике ABC сумма углов A и B равна 90 . Прямая BD перпендикулярна к плоскости ABC . Докажите, что $CD \perp AC$.

(Рекомендации по решению: вспомнить свойства углов; признак перпендикулярности прямой к плоскости)

2. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так, что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

(Рекомендации по решению: вспомнить свойства параллелограмма; признак перпендикулярности прямой к плоскости)

Самостоятельная работа

Модуль II. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

Цель: проверить уровень усвоения материала по теме «Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние от точки до плоскости» и умение применять его при решении задач; развивать умение анализировать.

Критерии оценивания

Задания

1. Прямая АК перпендикулярна плоскости правильного треугольника ABC, точка М – середина стороны ВС. Докажите, что $MK \perp BC$.

(Рекомендации по решению: вспомнить теорему о трех перпендикулярах; свойства правильного треугольника и входящих в него элементов)

2. Прямая ОК перпендикулярна к плоскости ромба ABCD, диагонали которого пересекаются в точке О. а) Докажите, что расстояние от точки К до всех прямых, содержащих стороны ромба, равны. б) Найдите это расстояние, если $OK=4,5$ дм, $AC=6$ дм, $BD=8$ дм.

(Рекомендации по решению: вспомнить свойства диагоналей ромба; признаки равенства треугольников; определение расстояния от точки до плоскости; теорему Пифагора)

Зачет

Цель: проверить уровень усвоения материала учащимися по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей» и умения применять его при решении задач; развивать умение анализировать; работать самостоятельно.

Зачет состоит из трех заданий: первые два – теоретические; третье – практическое.

Всего 7 вариантов.

Критерии оценивания

- выполнены все три задания – оценка «5»;
- выполнено теоретическое задание (доказать ...) и практическое задание – оценка «4»;
- выполнено два теоретических задания или одно практическое – оценка «3»;
- выполнено теоретическое задание (сформулировать ...) и практическое задание – оценка «3»;;
- не выполнено ни одного задания полностью или с ошибками – оценка ставится на усмотрение учителя, но аргументируются учащимся.

(Рекомендации к подготовке к зачету: повторить теорию по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости»; просмотреть основные задания, которые решали на занятиях, дома)

Карточка №1

1. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте и докажите теорему о трех перпендикулярах.
3. Неперпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN . В плоскости β из точки A проведен перпендикуляр AB к прямой MN и из этой же точки A проведен перпендикуляр AC к плоскости α . Докажите, что угол ABC – линейный угол двугранного угла $AMNC$.

Карточка №2

1. Сформулируйте определение угла между прямыми и между прямой и плоскостью.

2. Сформулируйте определение двугранного угла. Сформулируйте и докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.

3. В тетраэдре $ABCD$ $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N – середины ребер AB и AC .

Карточка №3

1. Сформулируйте и докажите лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.

2. Сформулируйте определение двугранного угла. Сформулируйте и докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.

3. Один конец данного отрезка лежит в плоскости α , а другой находится от нее на расстоянии b см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α .

Карточка №4

1. Сформулируйте и докажите прямую теорему о перпендикулярности двух параллельных прямых к плоскости.

2. Сформулируйте определение наклонной, проекции, перпендикуляра к плоскости.

3. В тетраэдре $DABC$ все ребра равны, точка M – середина ребра AC . Докажите, что угол DMB – линейный угол двугранного угла $BACD$.

Карточка №5

1. Сформулируйте и докажите теорему о трех перпендикулярах.

2. Сформулируйте определение угла между прямыми и между прямой и плоскостью.

3. Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a , проведена прямая OK , перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки K до вершин квадрата, если $OK=b$.

Карточка №6

1. Сформулируйте и докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте определение наклонной, проекции, перпендикуляра к плоскости.
3. Даны два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна 180.

Карточка №7

1. Сформулируйте и докажите теорему о прямой, перпендикулярной к плоскости.
2. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
3. Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α , а угол между плоскостями α и ABC равен 60° . Найдите расстояние от точки B до плоскости α , если $AC=5$ см, $AB=13$ см.

