Проф. Г. ШУБЕРТЪ

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ РАЗВЛЕЧЕНІЯ и ИГРЫ

переводъ съ 3-го нѣмецкаго изданія
І. Л. ЛЕВИНТОВА
подъ редакціей и съ добавленіями
„Вѣстника Опытной Физики и
Элементарной Математики"

MATHESIS

ОДЕССА 1911.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Книга Шуберта „Mathematische Mussestunden" предполагаетъ только весьма элементарныя свѣдѣнія по математикѣ со стороны читателя, и потому Шубертъ почти нигдѣ не даетъ законченной математической обработки разсматриваемыхъ въ книгѣ задачъ. Нѣкоторыя изъ нихъ допускаютъ, однако, совершенно законченную, строгую и вмѣстѣ съ тѣмъ вполнѣ элементарную обработку. Таковы, напримѣръ, задачи о цѣпяхъ домино, о гиряхъ, о переливаніяхъ и другія. Редакція сочла полезнымъ снабдить русскій переводъ добавленіями, содержащими строгую элементарную обработку такихъ вопросовъ, и примѣчаніями, уясняющими то или другое мѣсто текста книги. Все это дано въ концѣ книги.

Предисловіе къ первому нѣмецкому изданію.

Предлагаемый сборникъ требуетъ отъ читателя знакомства лишь съ первоначальными элементами ариѳметики. Какъ въ сборникахъ Люка [1]) и Болла [2]), здѣсь представлены въ историко-критическомъ изложеніи важнѣйшія запутанныя игры и задачи математической природы, которыя могутъ служить для развлеченія. Хотя авторъ многое заимствовалъ изъ сборниковъ Люка и Болла, но въ большинствѣ содержащихся въ книгѣ вопросовъ авторъ пользовался своими собственными изслѣдованіями. Изъ книгъ съ аналогичнымъ содержаніемъ, относящихся къ болѣе давнему времени, слѣдуетъ назвать на первомъ мѣстѣ книгу Баше де Мезирьяка [3]). Раньше Баше математическія развле-

[1]) Edouard Lucas, «Récréations mathématiques», Paris 1882. Кромѣ того: Lucas, «L'Arithmétique amusante», Paris 1895 (издано послѣ смерти автора H. Delannoy, C. A. Laisant и E. Lemoine).

[2]) W. W. Rouse Ball, «Mathematical recreations and problems of past and present times», London 1892.

[3]) Bachet de Méziriac. «Problesmes plaisans et délectables qui se font par les nombres». Первое изданіе: Paris 1612; второе изданіе: Lyon 1624; третье и четвертое изданія, улучшенныя и дополненныя Лабономъ (Labosne): Paris 1874 и 1879.

ченія разрабатывались Карданомъ[1]) и Тартальей[2]), а послѣ Баше—Оутредомъ[3]) и Озанамомъ[4]). Появившіяся въ XIX столѣтіи въ Германіи книги Монтага[5]), Миттенцвея[6]) и др. содержатъ, правда, много занимательныхъ задачъ, но не даютъ математической критики ихъ. Лишь статьи[7]), опубликованныя авторомъ этой книги въ журналѣ „Naturwissenschaftliche Wochenschrift" за 1893—1895 г.г. подъ заглавіемъ „Mathemathische Spielereien", даютъ уже нѣкоторую математическую критику, хотя и не очень глубокую, содержащихся въ нихъ головоломокъ.

Гамбургъ, ноябрь 1897 г. **ГЕРМАНЪ ШУБЕРТЪ.**

---

[1]) Cardano. «De subtilitate libri XX», Nürnberg 1550.

[2]) Tartaglia, «Quesiti et inventioni diverse», Venetia 1554; «Trattato de numeri e misure», Venetia 1556; Opere, Venetia 1606.

[3]) Oughtred, «Mathematical recreations» London 1653.

[4]) Ozanam, «Récréations mathématiques et physiques», Paris 1694; вышло множество дополненныхъ и улучшенныхъ изданій.

[5]) Montag, «Die Wunder der Arithmetik», Leipzig.

[6]) Mittenzwey, «Mathematische Kurzweil», 3-е изданіе, Leipzig 1895.

[7]) Эти статьи изданы также въ видѣ отдѣльной книжки подъ названіемъ: «Zwölf Geduldspiele», Berlin 1895 (нынѣ издательство Göschen, Leipzig).

Предисловіе къ второму нѣмецкому изданію.

Уже въ 1899 г. я приготовилъ новое большое трехтомное изданіе моей книги „Математическія развлеченія“, которая появилась впервые въ 1898 г.; новое изданіе книги, вышедшее въ свѣтъ въ 1900 г., имѣло втрое большій объемъ, чѣмъ первоначальное изданіе. Хотя это большое изданіе нашло себѣ многихъ друзей, но высказывались также пожеланія, чтобы наряду съ большимъ изданіемъ не выходило изъ обращенія и малое. Согласно этому, малое изданіе, которое появилось въ 1898 г. и было распродано, выходитъ теперь вторично безъ существенныхъ добавленій.

Къ литературѣ родственнаго содержанія, приведенной въ предисловіи къ первому изданію, мы должны теперь присоединить еще двѣ книги. Во-первыхъ, W. Grosse, „Unterhaltende Probleme und Spiele“, Leipzig, 1897. Эта книга появилась всего за нѣсколько недѣль до выхода перваго изданія моихъ „Математическихъ развлеченій“, и поэтому не могла быть упомянута въ немъ; авторъ ея приводитъ многое изъ того, что еще раньше было опубликовано имъ въ „Naturwissenschafliche Wochenschrift“, но даетъ также не мало новаго и интереснаго. Вторая книга математически глубже, чѣмъ книга Гроссе и моя. Она написана математикомъ Аренсомъ (W. Ahrens) и озаглавлена „Mathematische Unterhaltungen und Spiele“, Leipzig, 1901. Въ третьихъ, упомянемъ еще, что на долю „математическихъ игръ“ выпала честь быть обработанными въ большой „Энциклопедіи математическихъ наукъ“ („Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“), конечно, всего лишь на 14 печатныхъ страницахъ; авторомъ статьи въ „Энциклопедіи“ является только что упомянутый Аренсъ. Пусть и это новое малое изданіе математическихъ развлеченій найдетъ себѣ друзей!

Гамбургъ, 18 августа 1903 г. **Г. ШУБЕРТЪ.**

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Опечатка.

Страница 121, строка 7-ая снизу, въ лѣвой части равенства должно быть

$$(1 + 2 + 4)(1 + 71) - 284.$$

§ 19.

Магическіе квадраты.

А. Введеніе.

Первый магическій квадратъ, который мы встрѣчаемъ въ христіанскихъ западныхъ странахъ, приложенъ, какъ аттрибутъ, къ гравюрѣ Альбрехта Дюрера, которая называется „меланхолія“. Этотъ квадратъ имѣетъ слѣдующій видъ:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Такое расположеніе 16 чиселъ отъ 1 до 16 отличается замѣчательнымъ свойствомъ: будемъ ли мы складывать четыре числа любого изъ четырехъ горизонтальныхъ рядовъ, или же четыре числа любого изъ четырехъ вертикальныхъ рядовъ, или, наконецъ, четыре числа каждаго изъ двухъ діагональныхъ рядовъ, — мы во всѣхъ этихъ случаяхъ будемъ получать одну и ту же сумму 34. Вообще магическимъ квадратомъ называется квадратъ изъ $n \times n$ квадратныхъ полей, въ которыхъ $n \times n$ чиселъ,—чаще всего числа отъ 1 до $n \times n$,—расположены такимъ образомъ, что сумма n чиселъ въ каждомъ горизонтальномъ, въ каждомъ вертикальномъ и каждомъ діагональномъ ряду равна одному и тому же числу. Эта задача, относящаяся къ фигурѣ, имѣющей видъ шахматной доски, такъ же какъ и сама шахматная игра, вѣроятно, индусскаго происхожденія. Во всякомъ случаѣ эта задача была хорошо извѣстна арабамъ, къ которымъ она, вѣроятно, перешла отъ индусовъ. Благодаря арабамъ магическіе квадраты стали извѣстны въ Восточной Римской Имперіи. Наконецъ, со временъ Альбрехта Дюрера ученые Западной Европы тоже занялись методами полученія подобныхъ квадратовъ. Самый старый и простой магическій квадратъ содержитъ 9 чиселъ отъ 1 до 9, расположенныхъ въ квадратѣ такимъ образомъ, что сумма чиселъ каждаго горизонтальнаго, вертикальнаго и діагональнаго ряда равна одному и тому же числу 15. Этотъ квадратъ имѣетъ слѣдующій видъ.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Здѣсь на самомъ дѣлѣ $6+1+8=7+5+3=2+9+4=6+7+2=1+5+9=8+3+4=6+5+4=8+5+2=15$. Легко доказать математически, что всѣ магическіе квадраты изъ чиселъ отъ 1 до 9 должны имѣть число 5 въ серединѣ, а четныя числа— въ четырехъ углахъ, такъ что возможны лишь 8 такихъ магическихъ квадратовъ; при этомъ любой изъ нихъ даетъ всѣ прочіе, если мы будемъ всевозможными способами вращать его или переворачивать. Изъ квадрата Дюрера съ числами отъ 1 до 16 можно получить еще множество другихъ магическихъ квадратовъ путемъ методическихъ перестановокъ. Самый простой способъ полученія магическаго квадрата съ числами отъ 1 до 16 состоитъ въ слѣдующемъ. Написавъ эти числа сперва въ ихъ натуральномъ порядкѣ, т. е. слѣдующимъ образомъ:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

мы оставляемъ на занимаемыхъ ими мѣстахъ числа 1, 4, 13, 16 въ четырехъ угловыхъ клѣткахъ и числа 6, 7, 10, 11 въ четырехъ среднихъ клѣткахъ, но вмѣсто каждаго изъ прочихъ чиселъ пишемъ число, которое получается при вычитанiи этого числа изъ 17, а именно 15 вмѣсто 2, 14 вмѣсто 3, 12 вмѣсто 5, 9 вмѣсто 8, 5 вмѣсто 12, 3 вмѣсто 14 и 2 вмѣсто 15. Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующiй магическiй квадратъ.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Всѣ вертикальные ряды этого квадрата, равно какъ горизонтальные и діагональные, даютъ одну и ту же сумму 34. Къ этому свойству присоединяется еще замѣчательная особенность, состоящая въ томъ, что всякія четыре числа, расположенныя вокругъ средины въ видѣ квадрата или прямоугольника, даютъ въ суммѣ число 34,—напримѣръ, 1, 4, 13, 16, или 15, 14, 3, 2, или 12, 9, 8, 5, или 6, 7, 10, 11, или 15, 9, 8, 2, или 14, 12, 3, 5. Этотъ квадратъ получается изъ квадрата Дюрера, если переставить въ послѣднемъ два средніе вертикальные ряда одинъ на мѣсто другого.

В. Старые способы составленія магическихъ квадратовъ съ нечетнымъ числомъ клѣтокъ.

Уже въ древности были извѣстны правила для построенія магическихъ квадратовъ, содержащихъ болѣе, чѣмъ 3×3 и чѣмъ 4×4, клѣтокъ. Прежде всего можно легко вычислить сумму, которую должны давать числа каждаго ряда при данномъ числѣ клѣтокъ. Если числа отъ 1 до n^2 должны образовать магическій квадратъ и постоянная сумма чиселъ въ каждомъ ряду есть x, то сумма всѣхъ чиселъ отъ 1 до n^2 должна быть равна $x\,.\,n$. Но, какъ извѣстно, для полученія суммы всѣхъ чиселъ отъ 1 до m, нужно m умножить на ближайшее слѣдующее число $m+1$ и взять половину произведенія. Такимъ образомъ, $x\,.\,n = \frac{1}{2}n^2(n^2+1)$, или

$$x = \tfrac{1}{2}n(n^2+1).$$