МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Кафедра математики и методики обучения математике

ЧЕРКАСОВА АННА ДМИТРИЕВНА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ В КУРСЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программ
Информационные и суперкомпьютерные технологии в математическом образовании

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ:

Заведующий кафедрой математики и
методики обучения математике д.п.н.,
профессор кафедры МиМОМ
Шкерина Л.В.

_14.12.2020_________________________
(дата, подпись)

руководитель магистерской программы
д.п.н., профессор кафедры математики и
методики обучения математике
Майер В.Р.

_14.12.2020___________________
(дата, подпись)

научный руководитель
д.п.н., профессор кафедры математики и
методики обучения математике
Майер В.Р.

_14.12.2020___________________
(дата, подпись)

Обучающийся
А.Д. Черкасова

_11.12.2020___________________
(дата, подпись)
Оценка
____

Красноярск 2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Анализируя различные подходы к исследованию проблем и перспектив развития математического образования в высших учебных заведениях, легко увидеть характерный 21 веку системный подход. Рассматривая ВУЗ как один из важнейших социальных институтов общества, строящего цифровую экономику, можно однозначно отметить системную тенденцию последних лет, связанную с использованием информационных технологий при обучении целому ряду дисциплин, среди которых – математика (геометрия). Следствием этой тенденции, а в отдельных случаях – её результатом, является большое число разработок специалистов в области программного обеспечения для образования студентов вообще и математического образования в частности. Для решения всевозможных дидактических задач в настоящее время существует большое количество специальных компьютерных систем и программ. Лидером по применению в обучении студентов бакалавриата – будущих учителей математики школьной геометрии среди компьютерных программ является система динамической геометрии (СДГ) The Geometer's Sketchpad, которая с успехом используется во многих странах мира, в том числе и при обучении решению задач стереометрии.

В профессионально-педагогической подготовке будущих учителей математики важное место занимает курс элементарной математики. На практических занятиях этого курса закладываются основы методического мастерства будущего учителя математики, так как студенты не только овладевают приемами решения задачи, но и стремятся раскрыть процесс поиска решения, выбора соответствующих методов рассуждения при решении задачи, моделируют школьные учебные ситуации.

В настоящее время современное отечественное образование переходит на Федеральный государственный образовательный стандарт, в котором одним из передовых требований является именно использование информационно-коммуникационных технологий (далее - ИКТ).

Актуальность исследования. Приоритетным направлением модернизации отечественного математического образования является его информатизация. Разнообразие и количество цифровых образовательных ресурсов не является чем-то удивительным. Но, важно, среди всего этого разнообразия выбрать то, что действительно способствует процессу обучения. Среди различных программных сред, которые используются в геометрической подготовке студентов – будущих учителей математики, наиболее востребованы так называемые системы динамической математики (СДМ), которые применяются при обучении в большей степени планиметрии (основная школа) и в меньшей степени – стереометрии (старшая школа). Одна из таких сред - Живая математика, которая позволяет учителю на высоком уровне поддержать практически все разделы школьной стереометрии. В связи с этим появилась потребность в разработке методики обучения решению вычислительных задач стереометрии для студентов бакалавриата – будущих учителей математики в рамках дисциплины «Элементарная математика (геометрия)» с использованием среды Живая математика. Анализ имеющегося опыта и результаты исследований позволяют сделать вывод, что школьники, студенты и даже учителя испытывают значительные трудности при решении стереометрических задач.

Степень разработанности проблемы. Проблемы геометрического образования обучающихся в педагогическом университете рассмотрены, как в педагогических исследованиях, так и психологических и методических. Особенности геометрического мышления, как вида математического мышления раскрываются в работах психологов (Р.А. Атаханов, Л.Ф. Фридман, И.С. Якиманская и др.), педагогов (Ю.К. Бабанский, Н.А. Лошкарева и др.), методистов (Г.Д. Глейзер, Н.В. Метельский, Ю.М. Колягин, Г.И. Саранцев, А.Я. Хинчин и др.). Психологические процессы восприятия, представления, осмысления с учетом особенностей геометрии как науки, определяют психологические особенности изучения геометрии, такие как пространственное воображение, пространственное, логическое и геометрическое мышления (А.В. Брушнинский, И.Я. Каплунович, J1.М. Фридман, И.С. Якиманская и др.). В методических исследованиях, посвященных обучению геометрии (Н.М. Бескин, Л.И. Боженкова, Г.Д. Глейзер, В.А. Далингер, О.Б. Епишева, В.И. Крупич, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр и др.) выделены особенности учебной геометрической деятельности и её формирования в процессе обучения геометрии. Различные аспекты процесса развития общеучебных умений представлены в исследованиях психологов (Е.Н. Кабанова-Меллер, И.Я. Лернер и др.), педагогов (Ю.К. Бабанский, Н.А. Лошкарева, П.И. Пидкасистый, Т.И. Шамова и др.), методистов (В.А. Байдак, Л.И. Боженкова, В.А. Далингер, О.Б. Епишева, В.И. Крупич и др.).

Таким образом, авторы большей части исследований рассматривают процесс формирования, лишь определенных знаний и умений обучающихся (логических, пространственно-образных, конструктивных и др.). А значит, проблема сформированности и развития математических умений студентов педагогического университета остается исследованной на недостаточном уровне. Также, на практике видно, что даже сформированность этих отдельных умений находится на низком уровне.

Результаты эксперимента позволили выявить ***противоречие*** между объективной потребностью обучения студентов педвуза стереометрии с использованием систем динамической геометрии и отсутствием разработанных методических материалов использования среды Живая математика при изучении дисциплины «Элементарная математика (геометрия)».

Выделенное противоречие обозначило ***проблему исследования***: как осуществить эффективное применение среды Живая математика при обучении решению вычислительных задач стереометрии курса

«Элементарная математика (геометрия)» в педвузе, которое позволит обеспечить более прочное и глубокое усвоение материала?

Недостаточная разработанность проблемы на теоретическом уровне, востребованность ее практического решения в процессе изучения курса «элементарная математика (геометрия)», обусловленная современными требованиями, позволили определить тему исследования: ***«Методика решения вычислительных задач стереометрии в курсе элементарной геометрии педагогического вуза с использованием среды Живая математика».***

Цель исследования: разработать и экспериментально апробировать методику решения вычислительных задач стереометрии в курсе элементарной геометрии педагогического вуза с использованием анимационных и конструктивных возможностей среды Живая математика.

***Объект исследования*:** учебно-воспитательный процесс в педагогическом университете, ориентированный на использование в обучении решению стереометрических задач систем динамической математики.

***Предмет исследования*:** методика решения вычислительных задач стереометрии в курсе элементарной геометрии педагогического вуза с использованием среды Живая математика.

В ходе исследования проверялась ***гипотеза*** о том, что результативность предметной подготовки студентов по дисциплине элементарная геометрия будет достигнута, если при решении позиционных и вычислительных задач стереометрии использовать систему динамической геометрии Живая математика в соответствии с разработанной методикой.

Для реализации поставленной цели и проверки гипотезы исследования нами решались следующие ***задачи*:**

1. проанализировать содержание дисциплины «Элементарная математика (геометрия)» в педагогическом вузе с точки зрения эффективности использования при её обучении среды Живая математика;

2. изучить «стереометрические», анимационные и вычислительные возможности Живой математики как средства обучения студентов решению стереометрических задач;

3. познакомиться с опытом преподавателей и учителей математики по использованию СДМ при изучении фигур в пространстве, решении позиционных и метрических задач;

4. разработать сопровождение в Живой математике тем дисциплины «Элементарная математика (геометрия)», провести апробацию всех модулей.

Для решения поставленных задач применялись следующие методы исследования: теоретический анализ психолого-педагогической и методической литературы; сравнение и выбор; прогнозирование; наблюдение; эксперимент.

Выпускная квалификационная работа (магистерская диссертация) состоит из Введения, двух глав, списка литературы и приложений.

Во Введении обоснована актуальность данного исследования, сформулирована его цель, объект, предмет, гипотеза и задачи исследования.

В первой главе представлены дидактические преимущества среды Живая математика, анализ содержания дисциплины «Элементарная математика» на предмет целесообразности использования данной динамической среды при обучении студентов решению стереометрических задач, а также рассмотрены структура, содержание и основные методические линии учебных пособий, предназначенных для обучения студентов-бакалавриата – будущих учителей математики.

Во второй главе представлены методические разработки практических занятий для студентов бакалавриата – будущих учителей математики в рамках курса элементарная математика (геометрия) с использованием среды Живая математика, а также экспериментальная проверка эффективности использования среды Живая математика; проведен анализ полученных результатов.

Заключение содержит выводы по результатам выполненной работы.

ГЛАВА 1. Теоретическое обоснование целесообразности применения среды Живая математика при подготовке студентов – будущих учителей математики к решению позиционных и вычислительных задач стереометрии

1.1. Дидактические преимущества использования среды Живая математика при обучении студентов решению позиционных и вычислительных задач стереометрии, верификации найденных решений

Концепция модернизации Российского образования определяют его главную задачу — обеспечение современного качества образования на основе сохранения фундаментальности и соответствия актуальным и перспективным потребностям личности, общества и государства [54]. Требования к уровню подготовки выпускников вузов направлены, в частности, на формирование обобщенных способов учебной деятельности (общих учебных умений и навыков), специальных способов учебной деятельности по отдельным учебным дисциплинам, обобщенных способов познания [22]. Эта задача обуславливает необходимость подготовки учителя не только усвоившего содержание обучения, но и обладающего системой профессиональных умений и профессионально значимых качеств личности, что в полной мере относится к обучению геометрии в педвузе [26].

Современный подход к обучению геометрии, в частности, стереометрии, обеспечивает более глубокое усвоение учебного материала. В то время, как традиционный – приводит к малой популярности данного предмета [23]. В данном случае проблема заключается в том, что традиционный подход к обучению нацелен на развитие некритического мышления (обучение сводится к заучиваю теорем и их доказательств, а не практической проверки) [3; 6]. Помочь в решении данной проблемы может динамическая среда Живая математика — это русскоязычная версия популярной американской обучающей программы The Geometer’s Sketchpad, разработанной фирмой Key Curriculum Press Technologies. Программа «The

Geometer's Sketchpad» была русифицирована Институтом Новых Технологий (Москва) и распространяется в России под названием «Живая математика» [45].

В данном параграфе мы рассмотрим эффективность применения среды Живая математика при обучении решению задач стереометрии. Также, хотелось бы отметить, что использование данной программы помогает не только находить верное решение, но и повысить математическую грамотность и культуру.

Сейчас, в век цифровых технологий, представлено огромное количество цифровых образовательных ресурсов. Но очень важно выбирать те из них, которые направлены именно на процесс обучения, а не являются только средством наглядности [20]. Среда Живая математика обладает рядом весомых преимуществ по работе с разнообразными разделами математики и видами задач. С одной стороны, отметим, что сама динамическая среда не является обучающей, т.е. все построения и преобразования в ходе решения задачи выполняются самим пользователем, а не программой (в данной среде студент выполняет все те же действия, которые бы он производил на бумаге). Сама динамическая среда, как мы уже отмечали выше, не осуществляет решение задачи, но ее возможности позволяют выполнить не только элементарные построения, но и вычислительные действия и преобразования, в результате чего студент с наименьшими затратами времени приходит к решению основной или вспомогательной задачи. С другой стороны, можно утверждать, что использование среды Живая математика при решении задач способствует именно процессу обучения [4]. Так, например, при решении задачи на бумаге можно не увидеть очевидного алгоритма решения, но, построив динамический чертеж, студент заметит нужные закономерности, которые способствуют решению задачи. А также с помощью динамической среды можно легко убедиться в том, что найденное решение является верным и сколько таких решений может быть (т.е. провести исследование).

В среде Живая математика выполнять чертежи и графики довольно легко и не занимает большое количество времени. Очевидно, что динамические чертежи будут не слишком отличаться от рисунка на бумаге, с одной стороны, но с другой – одним из главных преимуществ Живой математики является ее динамичность и сохранение зависимости между объектами построения [59]. Другими словами, данная динамическая среда позволяет создавать чертеж с сохранением иерархии (изменив положение объекта (будь то точка, отрезок, окружность или любая другая геометрическая фигура), сохранится установленная ранее иерархия зависимости между элементами конфигурации). Например, если компьютерной мышью изменять положение какого-либо объекта подвижного чертежа, то видно, что все зависящие от него объекты также изменят свое положение, а отношения, в которых они находились (например, параллельность, перпендикулярность, принадлежность) сохранятся.

Также отметим немаловажный плюс среды Живая математика — функция «спрятать-показать». Вследствие чего чертеж не нагромождается множеством вспомогательных линий и построений. Разумеется, мы соблюдаем весь алгоритм действий для того, чтобы итоговый чертеж был достоверным, но мы имеем возможность убрать какие-то детали чертежа, дополнительные построения, говоря простым языком, делаем их временно невидимыми для наших глаз, но мы имеем возможность в любую секунду вернуть их, затратив на это минимум времени.

Математика – точная наука, что говорит о важности проверки построенных чертежей, графиков и т. д. И в этом случае Живая математика позволяет воспользоваться некоторым количеством дополнительных возможностей. Во-первых, она дает возможность измерять длины отрезков, величины углов, площади фигур, длину окружностей и многое другое. Во-вторых, она позволяет осуществлять математические действия над заданными величинами, т. е. при решении задач на вычисление можно осуществить проверку с помощью специального калькулятора, находящегося в меню. В этом случае нет необходимости вводить величины, а достаточно просто «кликнуть» по ним на чертеже, что дает возможность забыть о рутинной работе на моменте проверки и перейти к быстрому и четкому алгоритму, приводящему к необходимому результату [38].

Так же, не стоит забывать и об эстетической составляющей среды Живая математика. Она не просто дает возможность построить правильный чертеж, а помогает сделать его точным и информативным. Щёлкнув по любому из элементов чертежа, можно задать имя, не затратив на это большого количества времени. Есть возможность выделения цветом любых частей изображения (стороны, сечения и т. п.). Возможно преобразование любых линий чертежа: замена цвета, толщины, преобразование в пунктир, в зависимости от преследуемых нами целей. Линии полученной фигуры можно сделать жирными, вспомогательные линии, наоборот, тонкими, а невидимые - заменить на пунктир [44]. В итоге, за счет этих преобразований, чертеж становится эстетичным и достоверным.

Конечно, это еще не все возможности динамической среды Живая математика. Её интерфейс насчитывает большое количество команд. К примеру, есть возможность задать анимацию точки, прямой или геометрической фигуры в целом; можно выполнить геометрические преобразования, такие, как симметрия, перенос, поворот и т. д., а также множество других функций.

Из всего перечисленного следует, что без доли сомнения можно сказать, что Живая математика – это не просто линейка и циркуль в электронном формате, а целая математическая лаборатория [35].

Стереометрия – это часть элементарной геометрии, которая изучает свойства фигур, расположенных в пространстве [27].

Именно стереометрия является одним из сложнейших разделов в изучении школьного курса математики в равной степени и для школьников, и для студентов бакалавриата, выбравших в качестве будущей профессии - преподавание математики. В основном, трудности возникают из-за того, что достаточно тяжело визуализировать в голове пространственные фигуры, так как прямой угол может казаться острым, скрещивающиеся прямые могут принять вид пересекающихся или даже параллельных [7]. А изобразить пространственные фигуры в тетради или на доске в начале пути изучения стереометрии может показаться близким к невозможному. Многие считают геометрию одним из самых сложных предметов школьной программы как раз потому, что из-за сложностей в начале изучения курса часть обучающихся может потерять интерес к данному предмету [46].

На самом же деле, почти любая задача по стереометрии может быть преобразована в задачу на построение. Для этого необходимо изобразить фигуру, о которой говорится в задаче [1]. Немалый интерес к выполнению задачи вызывает построение «трехмерной» модели. Поговорим об этом подробнее.

Кратко рассмотрим технологию создания 3D графики в системе динамической геометрии (GSP) Живая математика. «Трехмерность» модели задается такими средствами, как:

- возможность динамического изменения ракурса изображения, что можно назвать эффектом вращения;
- правильность изображения видимых и невидимых элементов изображения, например: вершин, ребер, граней, что дает возможность невидимые детали показать пунктиром или же не показывать совсем;
- перспектива (для максимального эффекта центр проекции можно сделать управляемым);
- имитация освещенности [59].

Из-за того, что ребра куба обладают одинаковой толщиной, цветом и стилем, тяжело понять, с какой же стороны мы на него смотрим: сверху или снизу [12]. А если привести куб во вращение относительно вертикальной оси, то нам будет достаточно сложно понять, в какую сторону направлено вращение. Для правильного восприятия фигуры нам поможет изображение невидимых линий пунктиром. Учитывая, что наши модели вращающиеся, необходимо обеспечить правильное чередование сплошного и пунктирного изображения всех линий, а также «исчезновение» невидимых деталей фигуры. Рёбра и вершины многогранников являются видимыми на изображениях только в тех случаях, когда хотя бы одна примыкающая к ним грань является видимой. Это замечание позволяет определить параметры видимости вершин и ребер.

У человека зрение устроено таким образом, что мы видим только в центральной проекции, а не в параллельной. В среде Живая математика мы можем осуществить построение центральной проекции, для этого нам нужно получить гомотетию точки.

А эффект освещения можно получить исключительно в среде Живая математика. Для этого нам необходимо окрашивание фигур в зависимости от числового параметра. Яркость освещения плоской фигуры пропорциональна косинусу угла между направлением света и нормалью к плоскости фигуры. В качестве параметра следует выбрать этот косинус. Можно построить модель икосаэдра в перспективе и с освещением, предполагая, что свет падает сверху и равномерно со всех сторон.

Остановимся подробнее на распространенных ошибках, возникающих при изучении курса стереометрии и на возможностях их разрешения с помощью использования среды Живая математика. Самой важной ошибкой учеников является то, что, найдя решение задачи, они, довольно часто заканчивают работу на этом, результатом чего является неполный ответ. Зададимся вопросом, возможно ли избежать таких ситуаций и как это сделать. Есть необходимость выполнять сразу несколько вариантов чертежей и рассматривать наиболее удачный, но будет лучше, если к рассмотрению будет приниматься два, а то и три чертежа сразу. Так же, распространенной проблемой является выбор наиболее удачного ракурса чертежа. Ведь условие задачи можно изобразить сразу множеством вариантов, но, некоторые из них делают решение задачи невозможным, другие же, напротив, позволяют увидеть решение сразу. Построение «удобного» варианта чертежа не всегда получается сразу и иногда приходится затратить не малое количество времени для его находки.

Например, в некоторых задачах можно мысленно «растянуть» или «сжать» данные объекты, изменить их расположение или даже размер. При этом вероятность обнаружения отдельных случаев явно увеличивается [9].

Еще трудности могут проявляться из-за загруженности чертежа. Такое случается при фиксировании всех данных из условия задачи на чертеже, иногда и некоторых этапов ее решения. В связи с чем не наблюдается один из принципов дидактики – наглядность. Из-за этого приходится снова выполнять несколько вариантов чертежа, что потребует еще некоторого количества времени.

Ответ на логично возникающий вопрос «Как способствовать формированию у обучающихся умений находить все решения задачи, проводить полное исследование, изображать правильный и удобный чертеж задачи и не перегружать его?». В этом случае помочь могут функции среды Живая математика. При работе в ней ракурс чертежа можно изменить за считанные секунды и, в результате, найти искомый «удобный» вид изображения чертежа. Если же требуется создание нескольких чертежей, Живая математика позволит быстро создать требуемое количество дубликатов и выделить на них нужные данные. Уже упоминалась такая функция Живой математики, как «спрятать-показать», с помощью которой можно не изображать несколько чертежей или оставлять все на одном, а на время спрятать вспомогательные элементы, которые можно вернуть в любую секунды одним кликом [59]. Становится ясно, что для проделывания того же объема работы в тетради будет необходимо затратить намного больше времени. В результате, Живая математика позволяет быстро точно провести исследование, т. е. всегда ли она имеет решение, сколько таких решений она имеет и при каких условиях. Безусловно, исключать из образовательной программы выполнение чертежей на бумаге никак нельзя, но можно использовать ИКТ-технологии в случаях, когда задача вызывает затруднения или не требует умений выполнять чертежи.

Проверка правильности решения – это очередная трудность, с которой могут столкнуться, обучающиеся 10-11 классов, так и студенты педагогического университета [46]. Для большинства обучающихся процесс проверки правильности решения задачи носит проблемный характер [37]. На бумажном чертеже не всегда возможно понять, что построенный чертеж является верным. А благодаря возможностям динамической среды сделать это достаточно просто, достаточно просто воспользоваться такими функциями Живой математики, как измерения величин и встроенного калькулятора.

Отмеченные выше примеры наглядно показывают важность и эффективность применения динамических сред при обучении одному из самых сложных разделов геометрии.

Рассуждая о возможности проверки правильности найденного решения задачи, возникает вопрос: при изучении какого раздела геометрии и решении каких типов задач целесообразно применение динамических сред? Очевидно, что наиболее эффективно применение Живой математики при решении задач на построение. Данная среда позволяет не только быстро и легко выполнить необходимую последовательность построений, но и убедиться в том, что построенный чертеж удовлетворяет условиям задачи и правильности ее решения. Например, нам необходимо построить треугольник по заданной стороне и двум прилежащим к ней углам. В Живой математике пользователь будет выполнять тот же ряд последовательных построений, что и выполнял бы на бумаге. Но после всех этих построений он может спрятать все вспомогательные элементы построения, оставив только первоначально заданные данные и построенный треугольник и убедиться в правильности своего решения. Для этого необходимо измерить объекты, которые были заданы (сторона и два угла) и уже построенные объекты решения. Если данные совпали – значит задача решена верно. Также, не следует забывать о таком важном этапе решения задачи на построение, как исследование. Изменив первоначальные данные, обучающийся сможет убедиться, всегда ли данная задача имеет решение и сколько таких решений возможно. При изучении курса стереометрии Живая математика не менее эффективна. Во-первых, она добавит наглядность в процесс обучения. Как уже отмечалось выше, в динамическом чертеже можно выбрать его подходящее расположение, а также удобный угол для обзора [59]. Во-вторых, построение изображений в динамической среде значительно экономят время, которого часто не хватает на практических занятиях. Но это не говорит о том, что Живая математика применима только при обучении решению задач на построение. Так, например, такие типы задач, как задачи на нахождение расстояний и углов между объектами многогранника с большой эффективностью можно выполнить в данной среде. Уже только на этапе построения чертежа можно увидеть возможный ход решения данной задачи в результате изменения положения элементов и зависящих от них объектов. А также огромным плюсом является проверка правильности решения. В данном виде задач она производится благодаря построению вспомогательных чертежей (переход от стереометрического чертежа к планиметрическому). Также, отметим, что все учебники и учебные пособия содержат большое количество определений, теорем и их доказательств, постулатов, которые не всегда легко правильно интерпретировать, но в динамической среде достаточно просто и удобно создавать собственные конструкции, которые моделируют, например, условия теоремы. Благодаря чему повышается не только наглядность, но и эффективность более прочного усвоения и понимания данного теоретического аспекта.

Таким образом, можно утверждать, что динамическая среда Живая математика применима при изучении любого раздела, как планиметрии, так и стереометрии, а также при решении всех типов задач за счет возможности создания «живого» чертежа.

1.2. Анализ содержания дисциплины «Элементарная математика (геометрия)» в педагогическом университете на предмет возможности использования при обучении решению позиционных и метрических задач среды Живая математика

Анализируя знания и умения обучающихся, отмечено, что студенты I курса имеют разный уровень математической подготовки в целом и не всегда он является достаточным к изучению некоторых дисциплин в вузе. Поэтому важнейшей из задач вузовского образования является систематизация и обобщение основного содержания школьного курса математики [51]. Данная задача поможет в устранении пробелов математических знаний будущего учителями. Решение данной задачи – внедрение курса элементарной математики, который занимает особое место среди всех изучаемых дисциплин в педагогическом университете. В отличие от других математических дисциплин, в данном курсе большая часть учебного времени отводится именно на решение задач. Разумеется, что курс элементарной математики (геометрии) включает в себя рассмотрение теоретических вопросов, но это, скорее, повторение изученного школьного курса математики. Отсюда возникает вопрос правильного выбора для отбора содержательной линии курса [52]. Выделяя направления развития предметного образования и профессиональной подготовки будущего учителя математики в педвузе, необходимо вернуться к роли особых учебных курсов, связывающих предметное образование и профессиональную подготовку, к которым относится именно курс элементарной математики [44]. Первоначально он предназначался для поддержания и отработки умения студентов решать задачи школьного типа. Затем стали определяться два направления его развития. Одно предполагало обобщение и систематизацию теоретических знаний, необходимых для решения соответствующих задач. Другое стремилось усилить методическую сторону решения математических задач (приемы поиска решения задач, разные способы решения одной и той же задачи, выстраивание методически целесообразной системы задач) [21]. Таким образом, курс элементарной математики все больше был ориентирован на изучение предметной области, отраженной в содержании школьной математики.

Курс элементарной математики, согласно Государственному стандарту, входит в блок предметных дисциплин (блок, формирующий предметные знания), но вместе с тем является и связующим звеном между ним и блоком психолого-педагогических дисциплин (блоком, определяющим пути передачи этих знаний) [47].

Общий объем времени, отводимый на изучение дисциплины на V курсе педагогического университета – 1 зачетная единица или 36 часов. На аудиторную работу (контактные часы) отводится 20 часов практических занятий, на самостоятельную работу – 16 часов.

Предполагается следующая работа студентов над освоением курса:

- освоение основных теоретических положений стереометрии;
- решение стереометрических задач элементарной математики;
- работа со школьными учебниками по стереометрии, пособиями и сборниками задач по подготовке учащихся 10-11 классов к решению стереометрических задач повышенной сложности;
- подготовка докладов и сообщений, связанных с методикой решения задач по стереометрии;
- практика создания анимационных 3D-чертежей в одной из систем динамической геометрии (Живая математика, GeoGebra);
- разработка компьютерного сопровождения решения задач по геометрии;
- исследовательские работы методического характера [24].

Цель дисциплины состоит в дальнейшем освоении математического аппарата и теоретических положений курса стереометрии, имеющих непосредственные приложения к школьному курсу геометрии.

Основные задачи дисциплины:

- повторить основные темы школьного курса стереометрии;
- углубить и расширить имеющиеся у студентов знания по элементарной геометрии;
- познакомить студентов с некоторыми новыми методами и приемами решения геометрических задач;
- формировать умение решать стереометрические задачи различной степени сложности;
- способствовать развитию творческого потенциала студентов, необходимого для решения сложных прикладных задач [60].

Достижение цели и задач изучения дисциплины обеспечивается так же решением целого ряда вспомогательных задач, таких как:

- использование современных образовательных технологий;
- формирование системы предметных знаний и умений;
- активизация самостоятельной деятельности, включение в исследовательскую работу.

Дисциплина опирается на школьный курс математики и сформированные в школе компетенции, позволяющие студентам освоить дисциплину «Элементарная геометрия».

В результате изучения дисциплины «Элементарная геометрия» и решения отмеченных выше задач, обучающийся должен:

- знать: основные определения, формулы и теоретические факты элементарной стереометрии; стандартные приемы, традиционные и нетрадиционные методы решения геометрических задач;
- уметь: математически грамотно формулировать и логически строго доказывать теоремы, используемые в школьном курсе геометрии, применять изученную теорию к решению геометрических задач на доказательство, вычисление и построение;
- владеть: навыками решения стереометрических задач различного уровня сложности [56].

Перечень образовательных технологий, используемых при освоении дисциплины.

1. Современное традиционное обучение с использованием систем динамической геометрии.

2. Педагогические технологии на основе гуманно-личностной ориентации педагогического процесса:

- педагогика сотрудничества;
- гуманно-личностная технология.

3. Педагогические технологии на основе активизации и интенсификации деятельности обучающихся (активные методы обучения):

- технология проектного обучения;
- проблемное обучение;
- информационные технологии.

4. Педагогические технологии на основе эффективности управления и организации учебного процесса:

- технология дифференцированного обучения;
- технология экспериментальной математики как содержательно-методической линии школьного курса математики;
- технологии индивидуализации обучения.

Дисциплина «Элементарная математика (геометрия)» занимает одно из основополагающих мест в основной образовательной программе подготовки учителя математики. В результате изучения данной дисциплины формируются навыки применения теоретических знаний различных математических курсов к решению задач школьной элементарной математики, закладываются основы методического мастерства, повышается уровень профессиональной подготовки в условиях профилизации образования [34]. Освоение дисциплины «Элементарная математика (геометрия)» тесно связано с изучением таких дисциплин как «Геометрия», «Алгебра», «Методика обучения математики», с педагогическими практиками, что требует согласования содержания и порядка преподавания названных дисциплин.

Также одной из целей данного курса является приобретение студентами знаний решения задач различного типа с использованием ИКТ и умений применить данные знания на практике (непосредственно в педагогической деятельности). То есть не только при проведении занятий по геометрии, но и в организации индивидуальной работы с обучающимися, а также создание собственных элективных курсов и цифровых образовательных ресурсов.

В структуре изучаемого курса выделены два основных модуля:

1. модуль 1 – взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве
2. модуль 2 – многогранники

Векторному методу решения задач стереометрии отведена достаточно большая часть курса, которая имеет достаточно большой объем задач повышенного уровня сложности, для решения которых требуются современные методы.

Сформулируем основные рекомендации по каждому модулю дисциплины.

При изучении модуля №1 студенты должны хорошо усвоить определение параллельности двух прямых, прямой и плоскости, параллельность двух плоскостей, знать признаки этих понятий. Должны научиться строить сечения многогранников плоскостями, если секущая плоскость задана: тремя точками, не принадлежащими одной прямой, двумя точками и направлением, точкой и двумя не параллельными направлениями, освоить метод следа и метод внутреннего проектирования.

При изучении перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве следует уделить внимание применению координатно-векторного метода к нахождению расстояний (от точки до прямой (плоскости), между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями) и углов (между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями). Предусмотрено выполнение контрольной работы [21].

Модуль № 2. Многогранники

При изучении модуля №2 основными геометрическими фигурами стереометрии являются: прямая, плоскость, многогранники, тела вращения. В данном разделе большой объем материала отводится на самостоятельную работу студентов. На самостоятельное освоение выносится материал из школьного курса стереометрии. В данном разделе предусмотрена индивидуальная домашняя работа [34]. Прежде, чем приступать к ее выполнению, внимательно изучите необходимую теорию. В ходе защиты домашней контрольной работы проверяются не только степень самостоятельности выполнения заданий, но и знание основных фактов начального курса стереометрии.

Примеры заданий с использованием трёхмерных эффектов в среде Живая математика.

Задачи на построение сечений. Данный вид задач наиболее востребован в связи с тем, что построение сечений является частью основной школьной программы и зачастую вызывает трудности, как у школьников, так и у студентов – будущих учителей математики. Открыв задание, ученик видит привычный чертеж – точно такой же, какой он привык видеть в учебнике или рисовать в свой тетради; например: призму и три точки на ее поверхности, через которые нужно провести секущую плоскость. Построения тоже осуществляются привычным способом – проводятся прямые, находятся точки их пересечения и т.д. [42].

Основное отличие заключается в том, что встроенный в скетч (термин из GSP, который интерпретируется как динамическая электронная страничка) позволяет в любой промежуток времени повернуть всю конструкцию вокруг одной из двух осей и продолжить построении, смотря на нее с другой стороны [16]. За счет этого можно проверить, как ведут себя прямые в пространстве: пересекаются или скрещиваются. Это позволяет избежать наиболее распространенной ошибки – построение точки пересечения скрещивающихся прямых. Так же можно наглядно увидеть, решена ли задача верно, всего лишь изменив положение построенного сечения. При этом наблюдается имитация постоянного перехода от пространственной фигуры к её изображению на плоскости [28]. Можно выразиться, что построения осуществляются в пространстве, что положительно влияет на развитие пространственного воображения.

Задачи на метод проекции. Задачи на метод проекции. Уже упоминалось о том, что главным способом решения стереометрических задач является преобразование их в планиметрические. В этом случае имеется два метода решения. Первый – пересечь данную пространственную фигуру подходящей плоскостью и рассмотреть получившееся пересечение. Этот метод называется методом сечений. Второй метод заключается в проектировании фигуры на подходящую плоскость и называется методом проекции [31]. При этом, в зависимости от самой задачи, может быть использована как ортогональная, так и более общая параллельная проекция. Один из методов будет более эффективным относительно другого в конкретной задаче, в зависимости от ее условий. Стоит отметить, что метод проекций имеет преимущество. Он позволяет отобразить на одном чертеже и связать друг с другом элементы, не лежащие в одной плоскости. Так же метод проекций прекрасно реализуется с помощью моделей, так как изображение модели на экран компьютера и есть ее проекция, а выбрать нужный ракурс можно соответствующими поворотами фигуры [32].

Задачи на построение. Различные задачи на построение – это ещё один значительный класс заданий, продолжающий линию задач на сечения. Ученикам доступен «шаблон» - вращающееся изображение какой-либо пространственной фигуры. Требуется достроить его до другой заданной фигуры или комбинации тел, либо преобразовать его таким образом, чтобы получить изображение определенной фигуры с точно заданными свойствами

[18]. Практически любую стереометрическую задачу можно представить как задачу на построение, начертив фигуру, о которой говорится в задаче [28]. Подробнее о данной технологии мы говорили в предыдущем параграфе.

Рассмотрим пример решения одного из видов задач в среде Живая математика. *Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба с ребром 1 (Рисунок 1).*

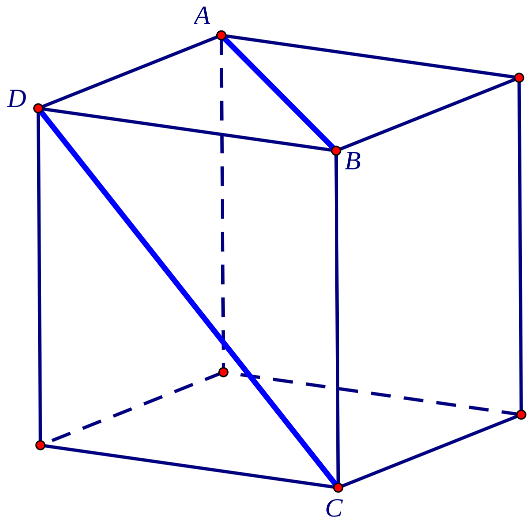


Рисунок 1

Эта задача метрическая и здесь необходимо воспользоваться ортогональной проекцией. Возьмём плоскость, перпендикулярную одной из диагоналей, например, AB. Она параллельна общему перпендикуляру d к диагоналям, поэтому его длина сохраняется при проекции на эту плоскость. С другой стороны, при этой проекции сохранится и перпендикулярность d ко второй диагонали CD. Поэтому мы поворачиваем куб так, чтобы точки A и B совпали; он изобразится прямоугольником высоты 1 и ширины $\sqrt{2}$. Искомая величина равна высоте треугольника ACD на этом рисунке.

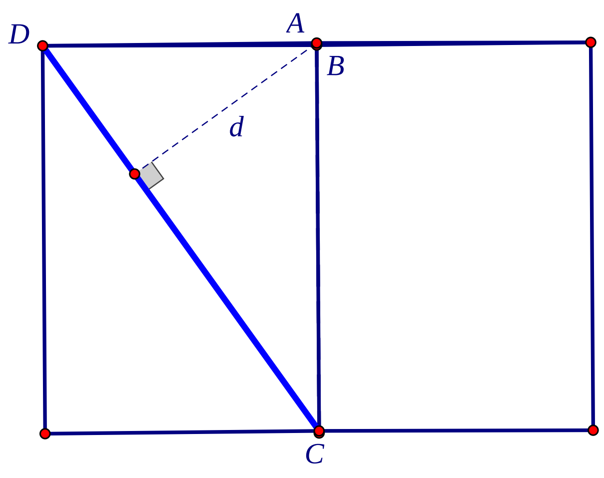


Рисунок 2

Следует отметить, что в данной задачи компьютерная модель играет роль «ступеньки» в решении, как аналогичных задач, так и задач повышенного уровня сложности [43]. Модели могут и должны помочь в поиске нужного ракурса, они позволяют и непосредственно измерить приближённые значения искомых величин, но окончательной стадией работы должно быть «обычное» решение с полным обоснованием и расчетами (Рисунок 2).

Область применения виртуальных демонстрационных моделей достаточно ограничена. Они помогают лучше понять определения, формулировки теорем, условия стереометрических задач. Но развитию пространственного воображения они способствуют лишь на первом этапе [16]. Более того, предоставляя постоянно обучающимся готовые, пусть очень красивые и правильные рисунки, включая компьютерные 3D модели, мы в конечном итоге начинаем тормозить дальнейшее совершенствование этого навыка, а некоторые задачи вообще почти теряют смысл, если дать к ним готовый рисунок. Приведём пример такой задачи. *Найдите объём пересечения двух правильных тетраэдров объёма один, каждый из которых симметричен другому относительно середины их общей высоты.*

Ключевое и самое трудное место решения задачи – понять, что рассматриваемое пересечение является параллелепипедом. После того как вид пересечения установлен, вычисления уже не вызывают серьёзных трудностей. Поэтому показать правильный чертёж к этой задаче – почти всё равно, что сразу объяснить ее решение [28].

Опустим обсуждение вопросов о том, когда, как и в каком объёме следует использовать готовые качественные рисунки, реальные или виртуальные модели в преподавании стереометрии. Нас будут интересовать виртуальные модели стереометрических конструкций другого, инструментального типа, которые открывают перед преподавателем и обучающимся новые возможности, базирующиеся прежде всего на высокой интерактивности. Обучающиеся получают двумерное изображение пространственной фигуры, являющееся одновременно и объектом, и инструментом, и средой конструирования и исследования. Важнейшая отличительная черта этих моделей – это возможность при работе с ними в любой момент произвольно изменять ракурс изображения [58]. Таким образом, в одном изображении сочетаются двумерное и трёхмерное представления фигуры. Фактически учащийся имеет дело с обычным двумерным представлением фигуры и при этом может выполнять на этом изображении те же операции, что и в своей тетрадке на уроке (дополнительные построения и др.). Но в любой момент построения можно, грубо говоря, «перейти в 3D режим», то есть попросту включить виртуальное вращение конструкции вокруг одной или нескольких осей, а также некоторые другие эффекты, создающие ощущение трехмерности [42]. Выбрав новый ракурс изображения по ходу вращения, можно продолжить построения и другую работу с моделью.

Следовательно, мы делаем вывод о том, что использовать цифровые образовательные ресурсы обдуманно и на необходимом на то этапе обучения. Объясняется это тем, что данные средства должны быть направлены не только на наглядность в виде красочного чертежа, а именно на сам процесс обучения новому знанию.

Изучая школьный курс математики 10 класса и курс элементарной геометрии в педагогическом университете, а именно, раздел «Стереометрия» с использованием среды Живая математика можно смело утверждать, что возможности данного ресурса способствуют повышению качества математической подготовки обучающихся за счет реализации многогранных возможностей данного ресурса. Проще говоря, многие ресурсы, представленные в Единой коллекции, достойны признания со стороны преподавателей и обучающихся [55]. Использовать в работе такой продукт, как Живая математика необходимо, т.к. изучение геометрии дополняется такими средствами, как визуализация, инструменты работы с математическими объектами и т. п., а наглядность материала, особенно при изучении геометрии это крайне важный показатель эффективности образования [51]. Это позволяет сделать вывод о том, что современные технологии обучения помогают повысить качество математической подготовки обучающихся, как по определенным темам, так и в целом повысить математическую культуру, формировать умения решать задачи различных типов и развить пространственное мышление. И поэтому целесообразно применение данного средства обучения, а именно, среды Живая математика в преподавании курса элементарной математики (геометрии) среди студентов бакалавриата – будущих учителей математики, так как дальнейшее обучение школьников зависит именно от их качественной подготовки [28].

1.3. О структуре, содержании и основных методических линиях учебных пособий, рекомендуемых студентам при изучении дисциплины «Элементарная математика (геометрия)», возможности поддержки этих пособий в среде Живая математика.

Ни для кого не секрет, что прочное усвоение знаний во многом зависит от структуры, содержания и методических линиях учебных пособий, которые используются непосредственно на занятиях и при самостоятельной работе. В одном учебном пособии может быть большое количество изображений, задач различных типов и уровней, индивидуальный подход к введению каждого нового термина, но студент все равно воспринимает его без интереса и должного энтузиазма [55]. Почему так происходит? Мы живем в век технологий и современных студентов уже не удивить красивыми картинками в учебнике или простой презентацией на компьютере. Мы уже говорили о том, что Живая математика – это не только хороший инструмент в более прочном освоении курса, то и также данная динамическая среда повышает интерес обучающихся к данной дисциплине. А значит возникает потребность сравнить несколько учебных пособий по стереометрии на возможность их поддержки в среде Живая Математика.

Для того, чтобы сравнить содержание и структуру учебных пособий необходимо обратить внимание на то, какие цели обучения преследовали авторы. Сейчас основная цель изучения стереометрии – это не только развитие логического мышления, а, в большей степени, образного (пространственного) мышления, интуиции и формированию конструктивно-геометрических учений и навыков [57].

Дидактический анализ проводился по следующим критериям:

1. содержание и структура материала;
2. задачи, рассмотренные в данном пособии:

2.1. уровень сложности задач;

2.2. разнообразие типов и содержания задач;

3. наглядность изложения материала;

4. эффективность поддержки учебного комплекса средой Живая математика.

Для проведения анализа были выбраны три учебных пособия:

1. Литвинено В.Н., Батугина О.А. «Геометрия. Готовимся к ЕГЭ 10 и 11 классы»;

2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 10-11 классы.

3. Нарчук О.М. «Практикум по решению стереометрических задач» [57].

Перейдем непосредственно к дидактическому анализу учебных пособий.

1. Содержание и структура материала.

Рассмотрим структуру и содержание учебного материала «Геометрия. Готовимся к ЕГЭ 10 и 11 классы» В.Н. Литвиненко, О.А. Батугина. Весь материал учебника разбит на главы, которые, в свою очередь, разбиты на параграфы, а каждый параграф содержит в себе пункты. Каждый параграф содержит теоретический материал и практическую часть. В учебном пособии приведены доказательства теорем, а также имеются схемы, чертежи, сопровождающие их доказательства. Вопросы для актуализации знаний не представлены. Все рисунки изображены цветом [25].

Знакомство со стереометрией начинается с векторов в пространстве (Глава 1.) Для начала вводится понятие вектора, нулевого и коллинеарного векторов. Затем авторы вводят понятие длины вектора, равенство, сумма и разность векторов, далее рассматривается построение суммы, а затем разности векторов, произведение вектора на число и его построение. После этого авторы вводят скалярное произведение векторов, угол между векторами и завершается глава компланарными векторами и разложением вектора по трем некомпланарным векторам. Координаты точки и вектора начинают фигурировать только во второй главе (Глава 2. Координаты точки и координаты вектора в пространстве). Прежде чем дать понятие координат точки и вектора авторы вводят определение прямоугольной системы координат, трех ее осей, а также плоскостей, определяемых этими осями. Далее рассматриваются координаты середины отрезка, длина отрезка. Понятие середины отрезка вводится через координаты точек и задается следующей системой равенств:

$$\begin{cases} x = \frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{2} \\ y = \frac{y_1+y_2}{2} \\ z = \frac{z_1+z_2}{2} \end{cases}$$

, где x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 – координаты начала и конца отрезка [25].

Далее вводится понятие длины отрезка, координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число.

Глава 3 посвящена векторно-координатному методу решения задач. Вычисление угла между прямыми начинается с определения направляющего вектора, а угол между прямой и плоскостью – через определение нормального вектора. Далее рассматривается вычисление угла между плоскостями и уравнение плоскости. И завершается глава построением сечения многогранника плоскостью, заданной уравнением.

Главы 4-5 (Вычисление площадей; Цилиндр. Конус. Шар. Сфера) посвящены вычислению площади многогранников, но для начала авторы определяют площадь его сечения через ортогональную проекцию, а затем площадь поверхности самого многогранника.

В главах 6-7 рассматриваются объемы многогранников и тел вращения: объемы призмы, параллелепипеда, пирамиды; объемы тел вращения и площадь сферы; объем цилиндра и его доли; конуса, усеченного конуса и его доли; объем шара и его частей; площадь сферы и ее частей.

И завершающей главой являются комбинации многогранников и круглых тел, где рассматриваются комбинации многогранников с цилиндром, конусом и шаром, а также комбинации многогранников. Здесь нет определений или теорем, все показано на подробных примерах, все понятия вводятся интуитивно.

При изложении теоретического материала соблюдается систематичность, последовательность изложения. Учебное пособие позволяет обеспечить вариативность, дифференцированность и другие принципы обучения. В учебном пособии «Геометрия. 10 класс. Готовимся к ЕГЭ» В. Н. Литвиненко и О. А. Батугина отличительной особенностью является изучение не только практического материала через самостоятельные построения, но и теоретического. В качестве методической линии — рассмотрение теории сопровождается примерами и заданиями на эффективные (а не воображаемые, что чаще всего можно увидеть в школьных учебниках по геометрии 10-11 классов) построения в пространстве, а также рассматриваются обстоятельные решения типовых задач [25]. В пособии в справочной форме приводятся и иллюстрируются на изображениях многогранников основные сведения из курса геометрии 10 класса. В книгу включены задачи, решение которых направлено на неформальное усвоение теоретического материала и способствует развитию пространственных представлений обучающихся.

Учебник Л.С. Атанасян соответствует ФГОС среднего (полного) образования. В учебнике реализован принцип преемственности с традициями российского образования в области геометрии [2]. Так же, как и в учебном пособии В. Н. Литвиненко и О. А. Батугина, при изложении теоретического материала соблюдается систематичность, последовательность изложения, что позволяет обеспечить вариативность, дифференцированность и другие принципы обучения. Задания, включающие большое количество чертежей, помогут легко усвоить новый материал. Дидактические материалы содержат самостоятельные и контрольные работы, работы на повторение и математические диктанты в нескольких вариантах, а также задачи повышенной трудности и примерные задачи к экзамену. В пособиях «Готовимся к ЕГЭ» в справочной форме приводятся и иллюстрируются на изображениях многогранников и тел вращения основные геометрические сведения. В книги включены задачи, решение которых направленно на неформальное восприятие теоретического материала. Структура данного учебника глобально отличается от пособия «Геометрия. Готовимся к ЕГЭ 10 и 11 классы». Здесь изучение курса стереометрии начинается с параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей (Главы 1-2). Далее авторы знакомят обучающихся с многогранниками и только после этого рассматривают векторы в пространстве (Главы 3-4). В Главе 5 представлен метод координат в пространстве, а также движения. Главы 6-7 посвящены телам вращения и их объемам (цилиндр, конус, шар) и завершается изучение курса Главой 8 (Некоторые сведения из планиметрии).

2. *Задачи, рассмотренные в данном пособии.*

В учебнике В.Н. Литвиненко, О.А. Батугина практически во всех параграфах в теоретическом материале представлены решения задач. После изложения теоретического материала представлены задачи для самостоятельной работы. На наш взгляд, задач достаточно для решения на практических занятых (их порядка 4-6 после каждого параграфа), но недостаточно для самостоятельной работы. А как мы уже говорили, большая часть изучения курса «Элементарная математика (геометрия)» направлена именно на самостоятельное изучение. Как известно, задачи по стереометрии профильного ЕГЭ по математике относятся к одному из нескольких типов – в зависимости от того, что нужно найти (расстояние или угол между объектами в пространстве). Рассмотрим основные типы таких задач и уровень сложности в учебных пособиях. Типы заданий в учебном пособии «Геометрия. Готовимся к ЕГЭ 10 и 11 классы» В.Н. Литвиненко, О.А. Батугина:

1. Построение сечений многогранника;
2. Угол между прямыми;
3. Угол между прямой и плоскостью;
4. Угол между плоскостями;

5. Расстояние между двумя точками;
6. Расстояние от точки до прямой;
7. Расстояние от точки до плоскости;
8. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми [25].

Как мы видим, в данном учебном пособии представлены все задачи на вычисление расстояний и углов между объектами в пространстве, а также задачи на построение плоских сечений многогранника. А значит преподавателю в полной мере может использовать данное учебное пособие для отработки данной темы. Уровень сложности задач для самостоятельной работы никак не отмечен в учебнике, но они встречаются часто, поэтому здесь нет острой необходимости дополнительного поиска заданий. Что тоже можно сказать об учебном пособии «Практикум по решению стереометрических задач» О.М. Нарчук, не смотря на сравнительно небольшой объем учебного пособия [33]. Здесь представлены все основные типы задач, которые необходимо решить школьнику на Едином Государственном Экзамене, а значит и студентам бакалавриата – будущим учителям математики нужно с легкостью справляться с данными типами задач. Итак, какие же типы задач рассматривает О.М. Нарчук в своем учебном пособии? Для того, чтобы не повторяться, запишем те типы задач, которые не были рассмотрены в пособии В.Н. Литвиненко, О.А. Батугина:

1. Двугранный угол [33].

Стоит отметить, что в данном учебном пособии представлено достаточное количество задач практического характера несмотря на то, что само пособие по объему в разы уступает учебному пособию В.Н. Литвиненко, О.А. Батугина. Как мы уже сказали в учебнике представлены примерно одинаковые по уровню сложности задачи по стереометрии, в то время как в практикуме О.М. Нарчук присутствует большое количество задач повышенной сложности [33]. В практической части учебника Л.С. Атанасяна задачи повышенной трудности выделены цветом. Некоторые из этих задач приведены с решением. Такие задачи встречаются не в каждом пункте. Здесь также присутствуют задачи на построение сечений многогранника, на вычисление всех видов расстояний и углов между объектами в пространстве, но, хотелось бы отметить, что метрические задачи представлены в достаточно скудном количестве [2]. Так, например, задач на вычисление угла между прямыми – 1, между прямой и плоскостью – 1, между плоскостями – 1, двугранный угол - 2.

3. Наглядность изложения материала.

В учебном пособии О.М. Нарчук, на наш взгляд, недостаточно рисунков и иллюстраций к определениям и теоремам, в то время как учебник В.Н. Литвиненко, О.А. Батугина наполнен большим количеством изображений. Каждый пример, теорема и определение подкреплены наглядным чертежом. Тоже самое можно сказать и об учебнике Л.С. Атанасяна, также в параграфах свойства и важная информация выделяются жирным шрифтом. Определения, аксиомы, леммы, теоремы и следствия выделяются в рамку голубого цвета. В учебнике геометрии имеются схемы, чертежи, сопровождающие доказательства теорем. Все рисунки изображены цветом. Но ни в одном из пособий не представлены различные вариации положения пространственной фигуры, что как следствие, должно помогать развитию образного мышления. Здесь на помощь может прийти динамическая среда Живая математика, в которой достаточно быстро можно создать чертеж, на который обучающиеся могут посмотреть со всех сторон.

4. Эффективность поддержки учебного комплекса средой Живая математика.

Как известно, в 10 классе начинается систематическое изучение стереометрии, которая отличается от планиметрии не только содержанием, но и восприятием геометрического материала. Далеко не все школьники способны представить себе бесконечную протяжённость геометрических объектов, таких, например, как прямая и плоскость. Слабое пространственное воображение не всегда позволяет учащимся увидеть на чертеже, даже если этот чертёж – полный, две скрещивающиеся прямые. Всё это создаёт проблемы при решении стереометрических задач на вычисление расстояний и углов, которые в большом количестве имеются в школьных учебниках, а также задания повышенной сложности единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Как мы уже отмечали, задачи по стереометрии на определение расстояний или углов в пространстве между объектами, связанными с некоторым многогранником, являются одними из наиболее сложных, как для школьников 10-11 классов, так и для студентов педагогического вуза. Требуется, чтобы сделанные выкладки были последовательны и логичны, ключевые моменты решения обоснованы, а математические термины и символы использованы корректно. Данное задание относится к задачам повышенного уровня сложности с развернутым ответом. Для большинства выпускников задание 14 Единого государственного экзамена является достаточно сложным и затратным по времени, в результате чего многие из них даже не приступают к решению этой задачи, но при правильной подготовке оно становится посильным для большинства обучающихся.

Как уже было отмечено выше, чтобы правильно решить задачу на вычисление расстояний и углов (как и любую другую задачу) необходимо, чтобы у обучающихся прочно были заложены все основные понятия и теоремы стереометрии, но не просто заучены, а именно поняты в полной мере и могли быть представлены [32]. Мы уже убедились том, что в одном учебном пособии количество изображений на достаточном уровне, но ни в одном из пособий не представлены различные вариации положения пространственной фигуры. Здесь на помощь может прийти динамическая среда Живая математика, в которой достаточно быстро можно создать чертеж, на который обучающиеся могут посмотреть со всех сторон, увидеть закономерности, которые сложно рассмотреть на обычном изображении на бумаге. Построение иллюстраций в Живой математике также повысит прочность усвоения материала, что в дальнейшем упростит уже решение типовых задач по данной теме и займет совсем немного времени, что тоже является огромным плюсом в изучении такого сложного раздела, как стереометрия.

Решение самой задачи по стереометрии также пройдет с большей эффективностью в среде Живая математика благодаря таким преимуществам, как: возможность проверить правильность решенной задачи с использованием быстрых и несложных построений и вычислений, которые также легко можно выполнить в Живой математики; возможность увидеть сколько решений имеет задача и имеет ли вообще, т.е. провести исследование. Таким образом, можно сказать, что Живая Математика позволяет проверить выполнение подмеченных закономерностей и задач. С помощью программы можно также найти примеры, ручной поиск которых занял бы много времени или же просто невозможен. На экранах компьютеров можно увидеть точно вычерченные чертежи и графики, ручное построение которых могло быть немыслимо.

Так, например, значительная доля заданий 14 ЕГЭ приходится на стереометрические задачи, в которых необходимо найти, например, угол (или тригонометрическую функцию угла) между скрещивающимися прямыми [32]. Прямые обычно задаются двумя точками, лежащими на ребрах того или иного многогранника.

При решении таких задач, во-первых, необходимо построить изображение этого угла и, во-вторых, найти его величину. Чтобы изобразить искомый угол, необходимо выполнить дополнительные построения, часто совсем не очевидные. Чтобы вычислить величину угла или его тригонометрическую функцию, требуется рассмотреть какой-нибудь треугольник, одним из углов которого является искомый угол, затем вычислить в этом треугольнике три элемента, задающие его. Таким образом, становится понятно, что решение задач на вычисление углов в пространстве может оказаться сложным и недоступным для большинства выпускников. Для каждого конкретного случая нужны свои построения и приёмы решения [32]. Как мы видим, сложились определенные предпосылки для научно-методической разработки упрощённых приемов, формирующих в процессе самостоятельной познавательной деятельности готовность учащихся к усвоению более глубоких знаний и навыков, и они могли бы лечь в основу формирования простых алгоритмов решения стереометрических задач.

В настоящее время большая часть современных школ в качестве содержательной основы школьного курса геометрии используют учебники Л. С. Атанасяна, меньшая же из них — учебники других авторов, например, И. М. Смирновой и В. А. Смирнова. Мы же рекомендуем учебное пособие «Геометрия. 10 класс. Готовимся к ЕГЭ» В. Н. Литвиненко и О. А. Батугина, отличительной особенностью которой является изучение не только практического материала через самостоятельные построения, но и теоретического. В качестве методической линии — рассмотрение теории сопровождается примерами и заданиями на эффективные (а не воображаемые, что чаще всего можно увидеть в школьных учебниках по геометрии 10-11 классов) построения в пространстве, а также рассматриваются обстоятельные решения типовых задач. В пособии в справочной форме приводятся и иллюстрируются на изображениях многогранников основные сведения из курса геометрии 10 класса. В книгу включены задачи, решение которых направлено на неформальное усвоение теоретического материала и способствует развитию пространственных представлений обучающихся.

Выводы по главе I

Таким образом, в условиях современного общества необходимо пересмотреть методы и формы обучения стереометрии как в общеобразовательной школе, так и в высшем учебном заведении при подготовке студентов бакалавриата – будущих учителей математики. Данное утверждение обосновывается не только сложностями школьников и студентов при изучении курса стереометрии, но и особенностями современного поколения. Рассматривая образовательное учреждение как одну из систем общества, можно однозначно сказать, что в современных условиях без компьютерного моделирования не обойтись. Невозможно обучать человечество 21 века только стандартным набором инструментов: мел, доска, учебник. Необходимо включать в стандартный набор инструментов и электронные ресурсы, разнообразие которых сейчас удивляет. Именно поэтому преподавателю следует более тщательно и обдуманно подходить к выбору заданий и дополнительных учебных пособий, а также контролировать, чтобы формирование основных умений и навыков обучающихся было планомерным. Стоит отметить, что в некоторых учебных пособиях содержится недостаточное количество задач. Если в одном могут присутствовать все типы задач стереометрии, то в другом – только какие-то определенные типы или только задачи базового уровня. Образовательный процесс обучения геометрии может стать гораздо интереснее и эффективнее, используя пригодные на то ресурсы. Целесообразное включение в образовательный процесс информационно-коммуникационных технологий и электронных образовательных ресурсов позволит сделать процесс обучения успешнее. Если говорить о процессе обучения математике и, в частности, геометрии, то цифровые образовательные ресурсы помогают визуализировать, моделировать математические объекты, исследовать их свойства и совершить проверку одним нажатием. Компьютер в данном случае может выступать также в качестве инструмента познания, средства обучения и контроля деятельности обучающихся.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ЖИВОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ПЕДВУЗА РЕШЕНИЮ ПОЗИЦИОННЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

2.1. Методика компьютерного сопровождения решения задач на построение плоских сечений многогранников в среде Живая математика

Задачи на построение плоских сечений многогранников, как известно, являются неотъемлемой частью школьного курса геометрии, а также и дисциплины «Элементарная математика (геометрия)» для студентов педвуза. Решение таких задач включает в себя четыре этапа:

1. Анализ;
2. Построение;
3. Доказательство;
4. Исследование [18].

Задачи данного типа играют одну из важнейших ролей в формировании и развитии пространственного и логического мышления [52]. Но на практике мы видим, что обучение построению плоских сечений многогранников в школе происходит прерывисто. В результате чего уровень требований к знаниям и навыкам по решению такого рода задач снижается и, как следствие, практически не реализуется развивающийся потенциал задач.

Почему так происходит? Во многих учебниках и учебных пособиях по стереометрии задачи на построение сечений можно увидеть только в начале курса, на решение которых отводится, как правило, три-четыре учебных часа. Что, конечно, недостаточно для эффективного освоения данной части курса. В некоторых пособиях можно увидеть их еще в некоторых разделах, но чаще всего преподаватели обходят их стороной. Причинами отрицательного отношения к задачам на построение сечений многогранников являются большие затраты учебного времени, необходимого для решения этих задач, громоздкость построений, вследствие чего теряется их наглядность и, как результат, негативное отношение к этому разделу курса стереометрии как обучающихся, так и студентов-бакалавриата – будущих учителей математики.

Таким образом, сложились определенные предпосылки для научно-методической разработки средств, форм, и упрощённых приемов, формирующих в процессе самостоятельной познавательной деятельности студентов глубоких знаний и навыков, а также они могли бы лечь в основу формирования простых алгоритмов решения задач на построение плоских сечений многогранников [14]. Одним из таких средств, как мы уже говорили, является динамическая среда Живая математика.

В данном параграфе мы рассмотрим методику обучения позиционным задачам на построение плоских сечений многогранника с использованием среды Живая математика.

Всякую задачу, в которой требуется определить общие элементы данных фигур, то есть построить пересечение данных фигур, называют позиционной. Очевидно, что для того, чтобы позиционная задача была решена, достаточно, чтобы изображение было полным [10].

Данный вид задач может быть решен разными методами:

1. Метод следов;
2. Метод внутреннего проектирования;
3. Метод дополнения n-угольной призмы до треугольной;
4. Метод параллельных прямых;
5. Метод переноса секущей плоскости [5].

Смысл метода следов при решении позиционных задач на построение сечений тел заключается в рентабельном построении общих точек, а по ним и прямых пересечения (следов) секущей плоскости с плоскостями граней, диагональных или осевых сечений тела [8]. В основном решение задачи на построение сечения методом следов начинают с построения прямой пересечения секущей плоскости с основной плоскостью. Такая прямая называется главным следом.

Суть метода внутренних проекций при решении задач на построение сечений заключается в том, что по проекциям точек секущей плоскости на основную плоскость находятся дополнительные точки секущей плоскости [8]. Это допустимо потому, что каждая точка секущей плоскости проектируется на основную плоскость в виде лишь одной вполне определенной точки при выбранном аппарате проектирования [41]. В таком случае проекции искомых точек секущей подпираются таким образом, чтобы они были связаны с проекциями точек, определяющих секущую плоскость, и чтобы число графических операций при решении задач сводилось к минимуму.

Сущность метода дополнения n-угольной призмы до треугольника заключается в том, что данную призму (пирамиду) достраивают до треугольной призмы (пирамиды), строят сечение получившейся треугольной призмы (пирамиды), искомое сечение получатся, как часть сечения треугольной призмы (пирамиды) [17].

В основе метода параллельных прямых заложено свойство параллельных плоскостей: «Прямые, по которым плоскость пересекает данные параллельные плоскости, параллельные между собой» [15].

Метод переноса секущей плоскости заключается в следующем: необходимо построить определенное вспомогательное сечение данного многогранника, которое будет удовлетворять ряд требований:

1. Оно должно быть параллельно секущей плоскости;
2. В пересечении с поверхностью данного многогранника образуется треугольник. В таком случае искомое сечение строится на основании свойств прямых, по которым две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью [8].

Рассмотрим несколько примеров решения таких задач.

Задача 1. В четырехугольной пирамиде MABCD на ребрах MA, MB, MC заданы соответственно точки P, Q, R. Построить сечение пирамиды плоскостью PQR [33].

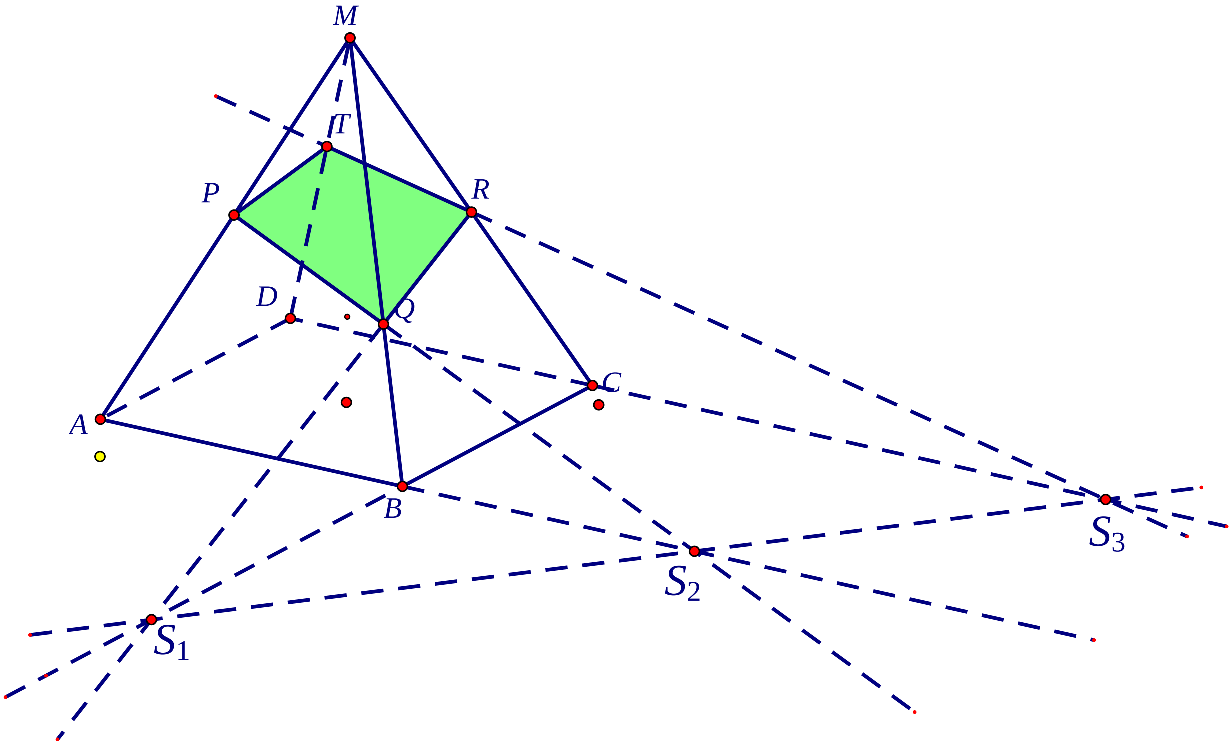


Рисунок 3

Решение:

1. Так как R, Q лежат в грани MCB, то S_1 – точка пересечения BC и QR является точкой пересечения QR с плоскостью основания.

2. Аналогично PQ и AB пересекаются в точке S_2, принадлежащей плоскости сечения и плоскости основания.

Итак, S_1 и S_2 - точки плоскости сечения, лежащие в плоскости основания, то есть S_1S_2 – основной след плоскости сечения.

3. Плоскость грани MDC пересекает прямую S_1S_2 в точке $S_3=DC\cap S_1S_2$.

4. Точки R и S_3 лежат в плоскости сечения и в плоскости грани MDC. Следовательно, RS_3 – прямая пересечения этих плоскостей.

5. $RS_3\cap MD$ = T, R и T – точки плоскости сечения, лежащие в одной грани.

6. Следовательно, PQRT- искомое сечение (Рисунок 3).

Задача №2. Задача №2. В четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы точки P, Q, R соответственно в гранях ABB_1A_1, BCC_1B_1, ADD_1A_1. Построить сечение плоскостью PQR [39].

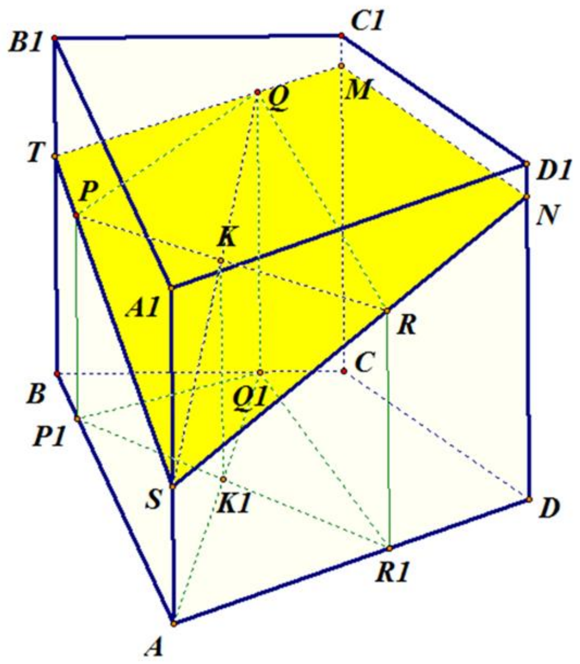


Рисунок 4

Решение:

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – изображение данной четырехугольной призмы, P, Q, R- изображения данных точек плоскости сечения.

1. Установим свойство полноты изображения. За основную плоскость возьмем плоскость основания призмы, а за направление внутреннего проектирования – направление бокового ребра. Относительно аппарата внутреннего проектирования изображение будет полным. Вторичные проекции данных точек P, Q, R находятся однозначно: P_1: $PP_1 \parallel AA_1$, $P_1 \in AB$; Q_1: $QQ_1 \parallel AA_1$, $Q_1 \in BC$; R_1: $RR_1 \parallel AA_1$, $R_1 \in AD$; таким образом изображение плоскости PQR - полное.

2. Рассмотрим проектирующую плоскость PRR_1P_1 и плоскость QQ_1AA_1. Эти плоскости пересекают плоскость основания по прямым P_1R_1 и AQ_1. Пусть K_1 - точка пересечения P_1R_1 и AQ_1.

3. Так как K_1 принадлежит P_1R_1, то она является вторичной проекцией точки К, принадлежащей PR, при этом К строится однозначно: $KK_1 \parallel AA_1$, $K \in PR$.

4. Точки Q и К лежат в плоскости сечения и в плоскости QQ_1AA_1. Следовательно, QK - прямая, по которой пересекаются эти плоскости. QK и AA_1 лежат в одной плоскости. Тогда $S = QK \cap AA_1$- точка плоскости сечения на ребре AA_1.

5. Плоскость A_1ABB_1 пересекается с плоскостью сечения по прямой SP. $SP \cap BB_1 = T$.

6. Плоскость B_1BCC_1 пересекается с плоскостью сечения по прямой TQ. $TQ \cap CC_1 = M$.

7. Плоскость AA_1DD_1 пересекаются с плоскостью сечения по прямой SR. $SR \cap DD_1 = N$.

8. Следовательно, TSNM- искомое сечение (Рисунок 4).

Задача 3. В пятиугольной призме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ *на ребре* EE_1 *задана точка P, на ребре* CC_1 *точка Q. Построить пересечение призмы плоскостью PDQ.*

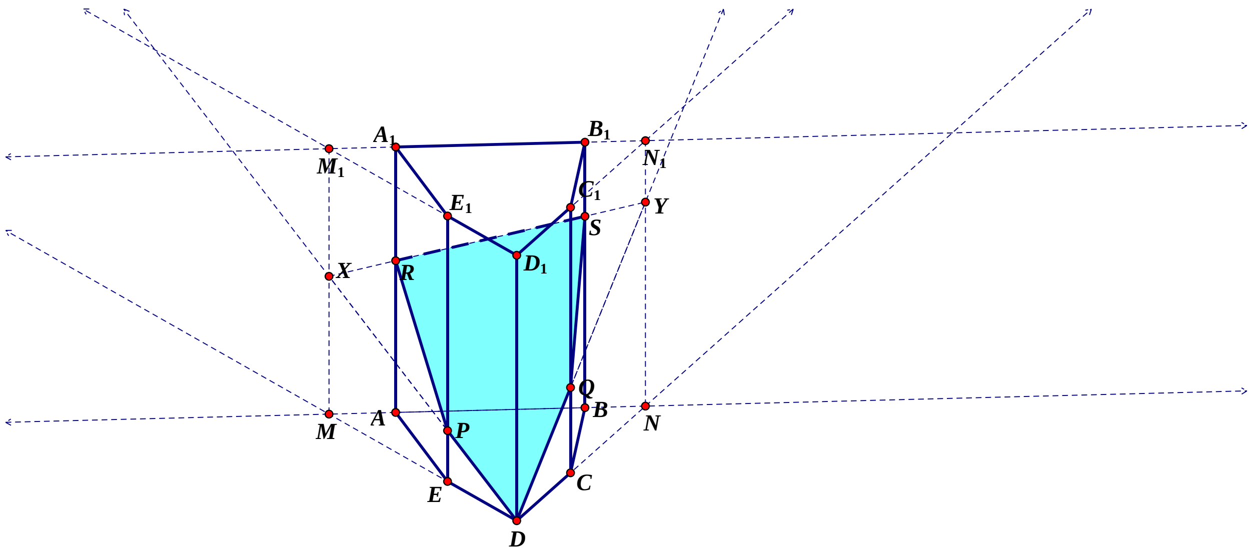


Рисунок 5

Решение:

1. Достроим пятиугольник ABCDE до треугольника MDN; M=EB∩AB, N = DC∩AB. Достроим данную призму до треугольной $MDND_1N_1$, где $M_1 = E_1D_1 \cap A_1B_1$, $N_1 = C_1D_1 \cap A_1B_1$;

2. Так как P и D лежат в одной грани построенной треугольной призмы, то плоскость сечения пересекает грань DD_1M_1M по DX, где X= PD$\cap M_1M$; M_1

3. Так как D и Q лежат в грани DD_1NN_1 построенной треугольной призмы, то плоскость сечения пересекает эту грань по DY, где Y = DQ$\cap NN_1$;

4. Так как X и Y лежат в грани MM_1N_1N, то DXY – сечение треугольной призмы плоскостью PDQ; а так как ребра AA_1 и BB_1 лежат в грани MM_1N_1N, то R = $AA_1 \cap$XY, S = XY$\cap BB_1$ точки плоскости PDQ.

5. Следовательно, DPRSQ – искомое сечение (Рисунок 5).

Проводя исследование построения сечений нужно отметить, что метод следов, который является основным в учебной литературе не всегда удобен в практике построения сечений без использования динамической среды, так как расположение точек, определяющих след, может быть за рамками чертежа или две заданные точки сечения могут лежать на прямой, параллельной основанию. Но мы видим, что Живая математика с легкостью решает данную проблему благодаря тому, что рисунок является динамическим, его всегда можно расположить с нужным ракурсом, чтобы построить верное сечение многогранника, а также спрятать все вспомогательные построения. Расположение нужным ракурсом позволяет также осуществить проверку найденного сечения. Если расположить многогранник так, что три неколлинеарные точки найденного сечения окажутся на одной прямой, а некоторая четвёртая точка сечения этой прямой не будет принадлежать, то это означает, что сечение построено неверно [58].

Метод внутреннего проектирования универсален, но не однократное использование его при построении сечения приводит к загромождению рисунка вспомогательными линиями на чертеже [17]. И здесь также Живая математика помогает функцией «спрятать-показать». Таким образом, применение методов построения сечения в среде Живая математика упрощают решение любых таких задач, и даже метрических, связанных с построенным сечением, что приводит к рациональному решению.

2.2. Методика компьютерного сопровождения решения стереометрических задач на вычисление расстояний в среде Живая математика

Задание 14 Единого государственного экзамена по математике профильного уровня с 2016 года представляет собой стереометрическую задачу на определение расстояний или углов в пространстве между объектами, связанными с некоторым многогранником [49]. Требуется, чтобы сделанные выкладки были последовательны и логичны, ключевые моменты решения обоснованы, а математические термины и символы использованы корректно [36]. Данное задание относится к задачам повышенного уровня сложности с развернутым ответом. Для большинства студентов задание 14 Единого государственного экзамена является достаточно сложным и затратным по времени, в результате чего многие из них даже не приступают к решению этой задачи, но при правильной подготовке оно становится несложным и, как следствие, становится посильным для их будущих обучающихся.

При решении такого рода задач часто требуется найти расстояние и углы. В данном параграфе мы рассмотрим методику обучения задачам на нахождение расстояний между объектами в пространстве.

Типология стереометрических задач на вычисление углов между объектами в пространстве и алгоритмы их решения

Рассматриваемые задачи принято делить на 4 типа:

1. Расстояние между двумя точками.
2. Расстояние от точки до прямой
3. Расстояние от точки до плоскости
4. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми [13].

Рассмотрим каждый тип отдельно.

1. Расстоянием между двумя заданными точками называется длина отрезка, соединяющего эти точки [40].

Чтобы найти расстояние между двумя заданными точками А и В, часто оказывается целесообразным:

1. построить на изображении заданной фигуры какой-нибудь прямоугольный треугольник АВС, одной из сторон АВ которого является отрезок, равный искомому расстоянию. Если, например, АВ - катет, АС = b и является гипотенузой, ВС = а, тогда по теореме Пифагора $AB = \sqrt{b^2 - a^2}$;

2. искомое расстояние может оказаться длиной стороны треугольника АВС, в котором известны, допустим, две стороны а, b и угол С между ними. Тогда по теореме косинусов $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcosC}$;

3. или известна сторона треугольника АВС, допустим а, и два угла, один из которых противолежит стороне а, например, ∠А и ∠С. Решение задачи сводится в этом случае к использованию теоремы синусов: $AB = \frac{a \cdot sinC}{sinC}$ (Рисунок 6).

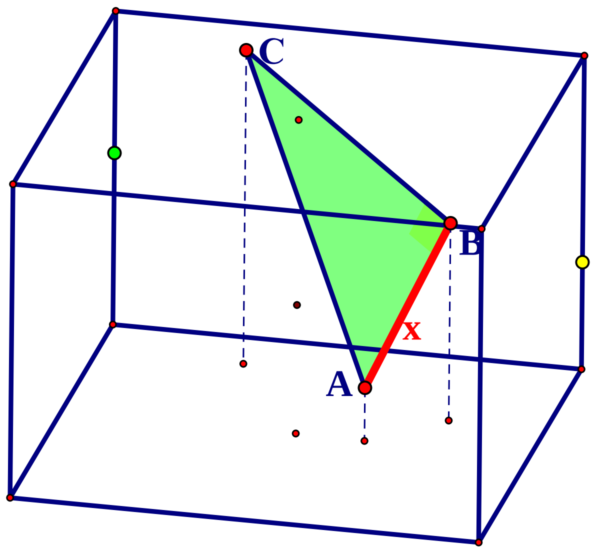


Рисунок 6

2. Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую [39].

Вычисление расстояния от точки А до прямой, а можно вести по плану:

1. выберем на прямой a какие-нибудь две точки, например, точки B и C, и соединим их с точкой A;

2. найдем стороны треугольника ABC;

3. найдем высоту AD треугольника ABC. Высота AD и является искомым расстоянием. Если в треугольнике ABC AB=AC, то $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$, где $BD = \frac{1}{2}BC$ (Рисунок 7).

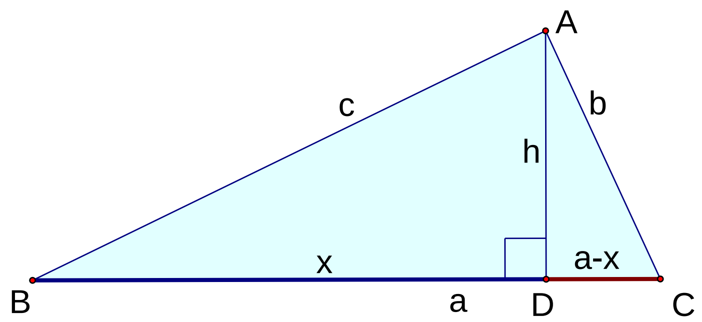


Рисунок 7

3. Вычисление расстояний от точки до плоскости.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость [19].

Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, необходимо воспользоваться следующим алгоритмом:

1. выбрать в плоскости α некоторую прямую a;

2. из точки T опустить перпендикуляр TR на прямую a;

3. в плоскости α через точку R провести прямую b, перпендикулярную a;

4. расстояние от точки T до прямой b равно расстоянию от точки T до плоскости α (Рис. 8).

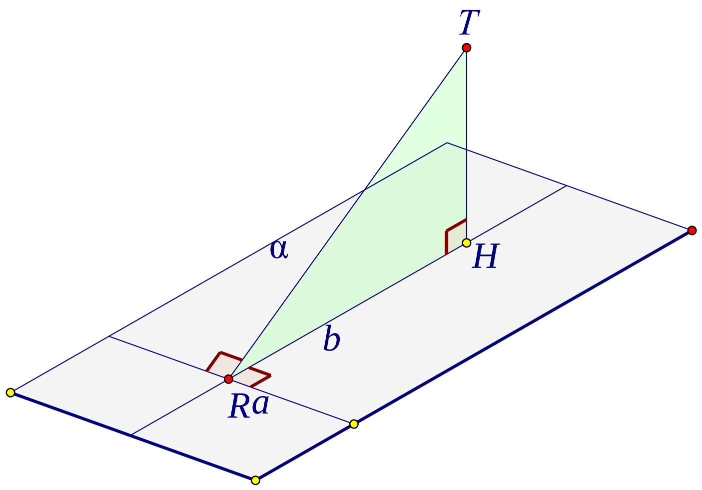


Рисунок 8

2. Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра [39].

Чтобы найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми p и q необходимо:

1. на одной из прямых выбрать произвольную точку, например, на прямой q выбрать точку Q;

2. через точку Q провести прямую p_1, параллельную p, и построить плоскость П, которая содержит пересекающиеся прямые p_1 и q;

3. на прямой p выбрать произвольную точку P, построить ее проекцию H на плоскость П;

4. длина отрезка PH - искомое расстояние от точки P до плоскости П (Рисунок 9).

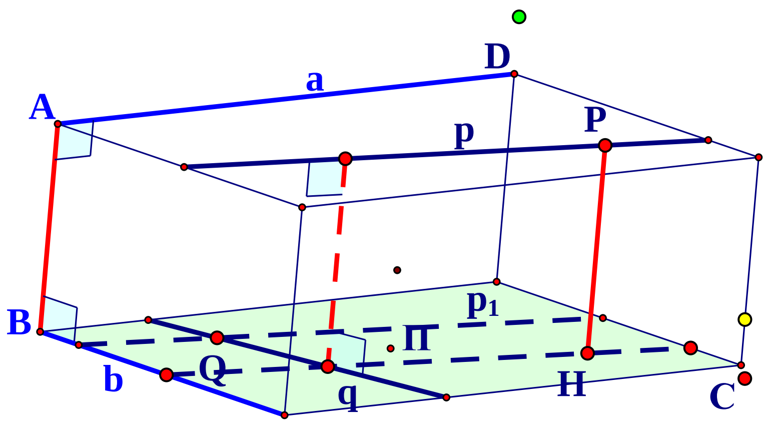


Рисунок 9

Пример решения задачи на вычисление расстояний между точками с использованием динамической среды Живая математика

Задача. На ребре AE куба ABCDEFGH взята точка P - середина этого ребра. Считая ребро куба равным a, найдем расстояние от точки P до прямой FD [11].

Решение:

1. Опустим из точки P проекцию S на прямую DF. Так как треугольник PDF равнобедренный (PD = PF), то S – середина $DF = a\sqrt{3}$;

2. Треугольник PSD - прямоугольный с катетом $SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и гипотенузой $PD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

3. По теореме Пифагора $PS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (Рисунок 10).

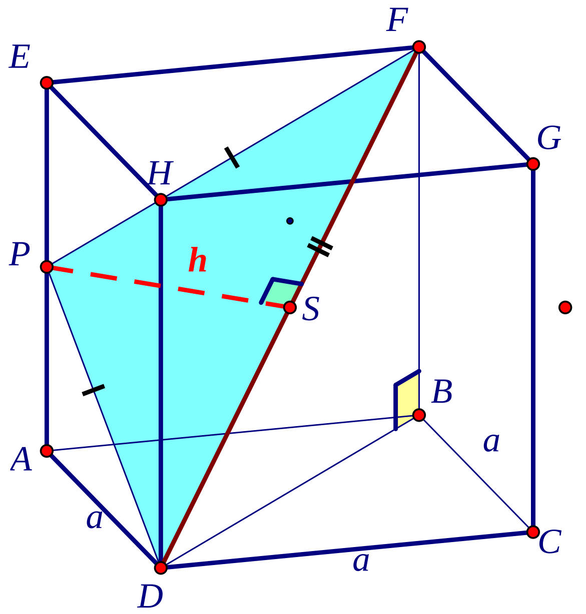


Рисунок 10

Используя возможности Живой математики, выполним проверку. Для этого воспользуемся следующими шагами:

1. Построим произвольный квадрат, который будет представлять собой некоторую грань куба в натуральную величину, например ABCD. Длину стороны квадрата будем считать равной a.

2. Построим изображение треугольника DFP в натуральную величину, для этого:

а) построим диагональ BD;

б) построим середину К стороны AB;

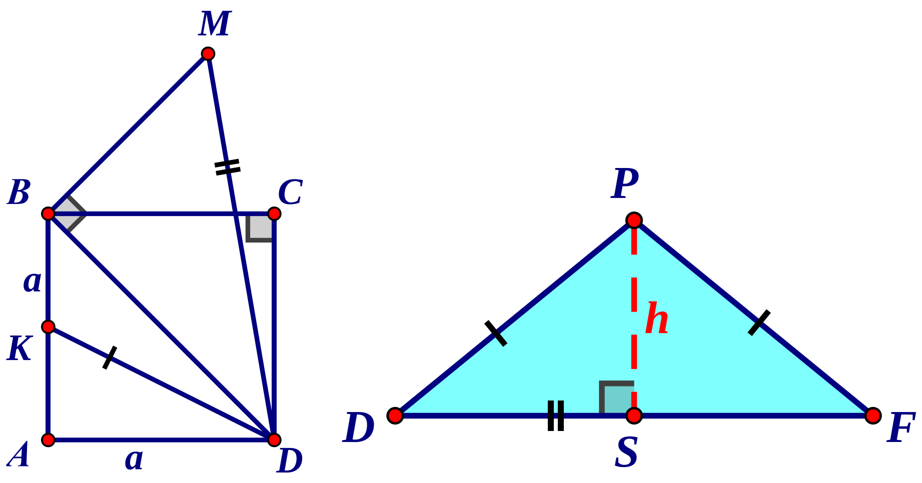
в) построим отрезок DK,

очевидно, DK = DP = DF.

г) построим прямую m, проходящую через B и перпендикулярную BD;

д) отложим на m от точки B отрезок a, получим точку M, прямоугольные треугольники DBF и DBM равны по двум катетам, отсюда DM = DF;

е) построим треугольник DFP по 3 сторонам: DF = DM, DP = DK и FP = DK (Рисунок 11).



a = 3,84 см $\quad \dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$ = 2,71 см

h = 2,71 см

a	h	$\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$
3,39 см	2,39 см	2,39 см
4,74 см	3,35 см	3,35 см
3,84 см	2,71 см	2,71 см

Рисунок 11

Таким образом, можно сказать, что Живая математика позволяет проверить выполнение подмеченных закономерностей и задач. С помощью программы можно также найти примеры, ручной поиск которых занял бы много времени или же просто невозможен. На экранах компьютеров можно увидеть точно вычерченные чертежи и графики, ручное построение которых могло быть немыслимо.

2.3. Методика компьютерного сопровождения решения стереометрических задач на вычисление углов в среде Живая математика

К задачам, вызывающим затруднения, как у школьников, так и у студентов-будущих учителей математики относятся задачи на вычисление углов между объектами в пространстве. При решении такого рода задач многие сталкиваются с такими трудностями, как:

- непосредственно с самим построением искомого угла на чертеже;
- с доказательством, что именно этот угол является искомым [29].

Так, например, значительная доля заданий 14 ЕГЭ приходится на стереометрические задачи, в которых необходимо найти, угол (или тригонометрическую функцию угла) между скрещивающимися прямыми. Прямые обычно задаются двумя точками, лежащими на ребрах того или иного многогранника.

При решении таких задач, во-первых, необходимо построить изображение этого угла и, во-вторых, найти его величину. Чтобы изобразить искомый угол, необходимо выполнить дополнительные построения, часто совсем не очевидные. Чтобы вычислить величину угла или его тригонометрическую функцию, требуется рассмотреть какой-то треугольник, одним из углов которого является искомый угол, затем вычислить в этом треугольнике три элемента, задающие его [30]. Таким образом, становится понятно, что решение задач на вычисление углов в пространстве может оказаться сложным и недоступным для большинства студентов и, как следствие, обучающихся в школе [50]. Для каждого конкретного случая нужны свои построения и приёмы решения.

Таким образом, сложились определенные предпосылки для научно-методической разработки упрощённых приемов, формирующих в процессе самостоятельной познавательной деятельности готовность обучающихся к усвоению более глубоких знаний и навыков, и они могли бы лечь в основу формирования простых алгоритмов решения стереометрических задач.

В данном параграфе мы рассмотрим методику обучения задачам на нахождение углов между объектами в пространстве.

Типология стереометрических задач на вычисление углов между объектами в пространстве и алгоритмы их решения

Такие задачи принято делить на 4 типа:

1. угол между скрещивающимися прямыми;
2. угол между прямой и плоскостью;
3. угол между двумя плоскостями;
4. двугранный угол [50].

Рассмотрим каждый тип отдельно.

1. Углом между двумя скрещивающимися прямыми (p и q) называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными этим скрещивающимся прямым [37].

Для нахождения угла между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве необходимо осуществить перенос одной из скрещивающихся прямых (или сразу двух) так, чтобы прямые, полученные в результате этого преобразования, пересекались. Тем самым исходная задача сводится к нахождению угла между двумя прямыми на плоскости (Рисунок 12).

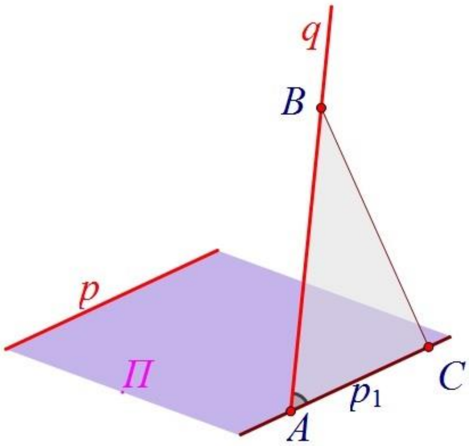


Рисунок 12

2. Углом между прямой р и плоскостью П называется угол между прямой р и ее проекцией на плоскость П. Если прямая р перпендикулярна к плоскости П, то угол между прямой р и плоскостью П считается равным 90°. Если прямая р параллельна плоскости П, то угол между ними считается равным 0° (Рисунок 13).

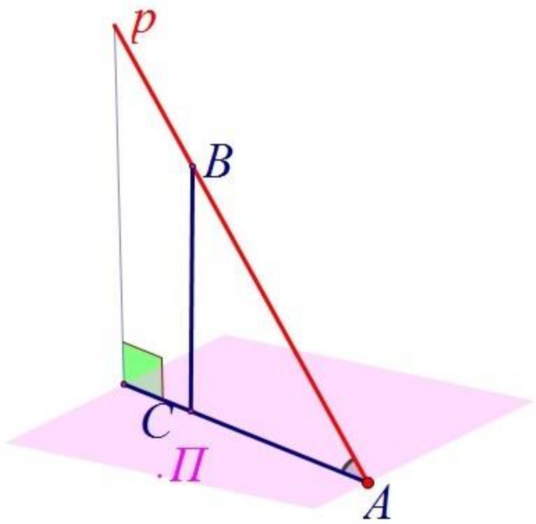


Рисунок 13

При вычислении угла между прямой и плоскостью можно руководствоваться следующим планом:

1. построить искомый угол как угол прямоугольного треугольника (при необходимости данную прямую можно заменить на любую параллельную ей прямую);

2. найти две стороны полученного прямоугольного треугольника;

3. найти какую-нибудь из тригонометрических функций искомого угла и далее сам этот угол.

В случае, если вспомогательный треугольник ABC не является прямоугольным, то можно найти все его стороны и воспользоваться теоремой косинуса.

3. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, образующимися при пересечении этих плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной к линии пересечения первых двух плоскостей. Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным 0° (Рисунок 14) [49].

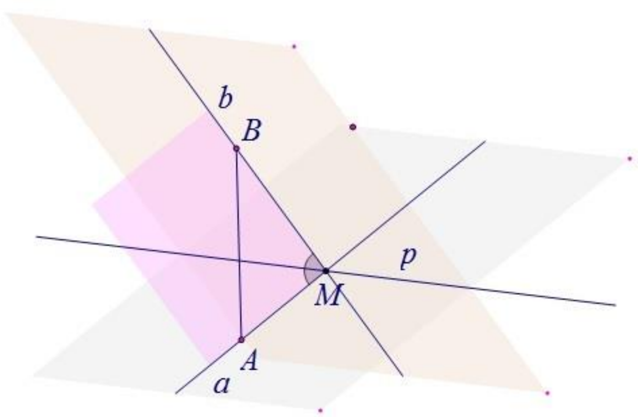


Рисунок 14

При вычислении угла между плоскостями можно руководствоваться следующим планом:

1. построить прямую p – линию пересечения плоскостей;

2. выбрать на p точку M и провести в заданных плоскостях прямые a и b, перпендикулярные p и проходящие через M;

3. выбрать на прямых a и b соответственно точки A и B, получим треугольник ABM;

4. найти cos AMB и, воспользовавшись формулой для вычисления угла φ между прямыми, найти cos(φ) = |cos AMB|, затем угол φ между плоскостями.

4. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, не принадлежащими одной плоскости, с общей ограничивающей их прямой. Эта прямая называется ребром двугранного угла, а полуплоскости - его гранями [40].

Угол, который получается в сечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к его ребру, называется линейным углом этого двугранного угла (угол между лучами, а не прямыми). За меру двугранного угла принимают меру его линейного угла. Радианной (градусной) мерой двугранного угла называется радианная (градусная) мера его линейного угла (Рисунок 15) [41].

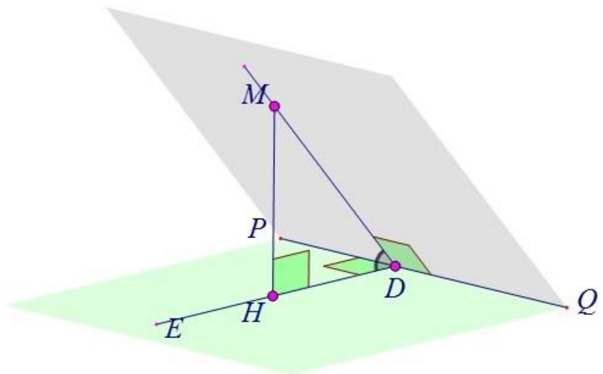


Рисунок 15

Пример решения задачи на вычисление угла в пространстве с использованием динамической среды Живая математика

Задача. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат ABCD, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и в два раза больше стороны основания. Точка E - середина ребра MC. Найдите угол, который образует прямая AC с прямой DE [33].

<u>*Замечание.*</u> С помощью Живой математики построить такую пирамиду не сложно. Ее легко получить из куба, у которого необходимо увеличить одно вертикальное ребро в 2 раза, конец M этого ребра соединить отрезками с вершинами основания ABCD, все остальные рёбра куба спрятать.

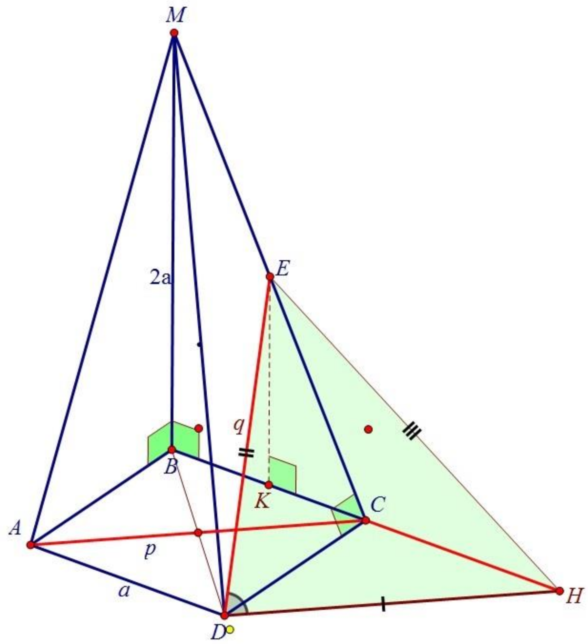


Рисунок 16

Решение. Считая сторону основания равной a, получим боковое ребро, равное 2a. Как отмечалось выше для того, чтобы найти угол между скрещивающимися прямыми, необходимо осуществить перенос одной из скрещивающихся прямых (или сразу двух) так, чтобы прямые, полученные в результате этого преобразования, пересекались. Перенесем AC и получим DH. Живая Математика позволяет осуществить параллельный перенос достаточно быстро и просто, нужно только задать вектор, на который будет осуществляться перенос, точку и сам отрезок, который нужно перенести. Теперь нам уже нужно найти угол между двумя пересекающимися прямыми (∠EDH). Построим отрезок EH и получим треугольник, в котором необходимо найти искомый угол. Рассмотрим полученный треугольник DEH. Найдем сторону DH, для этого воспользуемся теоремой Пифагора. Т. к. $DH = AC(AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, то $DH = a\sqrt{2}$. Для того, чтобы найти сторону EK, из точки E опустим перпендикуляр к стороне BC и получим точку K. Рассмотрим треугольник EKH (∠K=90°) и также воспользуемся теоремой Пифагора: $EH^2 = EK^2 + KH^2 = a^2 + (\frac{3a}{2})^2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $EH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Для того, чтобы найти сторону DE, рассмотрим треугольник DEC (∠C=90°), необходимо найти сторону CE. $CE = MC{:}2$ (т.к. E – середина MC). Отсюда $CE^2 = (\frac{MC}{2})^2 = \frac{4a^2+a^2}{4} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $CE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Воспользуемся теоремой косинусов:

$EH^2 = DH^2 + DE^2 - 2DH \cdot DE \cdot cosD$, отсюда, $cosD = \frac{DH^2 + DE^2 - HE^2}{2DH \cdot DE} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Тогда $\angle HDE = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$. Воспользуемся вычислительными возможностями среды Живая математика и вычислим $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ ≈ 76,37° (Рисунок 16).

Ответ: $\angle HDE = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) \approx 76{,}37°$.

Обучающиеся могут самостоятельно выполнить проверку найденного решения. Для этого рекомендуется использовать возможности динамической среды Живая математика.

1. изобразим произвольный отрезок а, который обозначим AD (Рисунок 17).

2. достроим отрезок AD до квадрата ABCD, на стороне BC как на катете построим прямоугольный треугольник BCM, BM=2a, найдём середину E гипотенузы CM. Построим прямоугольные равнобедренные треугольники DCH и ECD, построим отрезок EH.

3. построим треугольник HDE по его заданным сторонам DH, DE и EH.

4. используя меню «Измерения», измерим угол B. Получим 76,37° (Рис. 17).

Следовательно, задача решена верно.

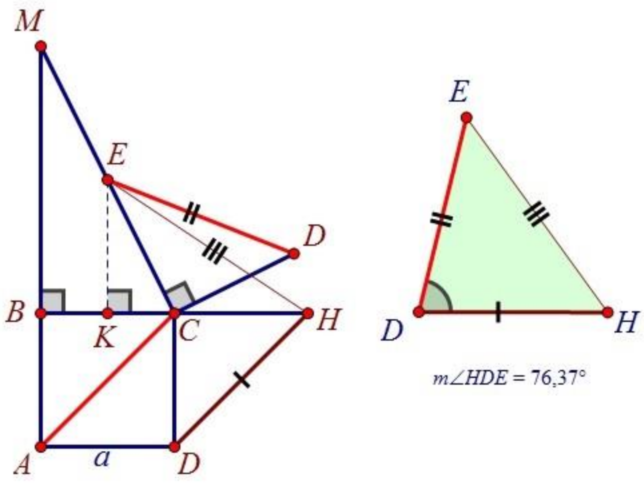


Рисунок 17

Таким образом, мы видим, что Живая математика позволяет не просто выполнить красочный и грамотный чертеж, но и производить сложные вычислительные операции, а также выполнять проверку. Немаловажным преимуществом, при решении такого рода задач, является именно ее динамичность. Посмотрев на чертеж с разных сторон, можно гораздо быстрее осознать идею решения или найти наиболее «удобное» решение.

Важно понимать, что данная динамическая среда сама по себе не является обучающей. Имея базовые знания, можно не только построить подвижный рисунок и решить задачу, но и провести проверку, найти решения, которые сложно было бы сразу определить на статичном рисунке.

Методика решения подобных задач находит свое эффективное применение при дистанционном обучении, что достаточно актуально на сегодняшний день. Для самостоятельного изучения материала можно создавать обучающиеся видеоролики при поддержки соответствующих программ (например, Bandicam). Нами были разработаны такие обучающиеся видеофрагменты, что повысило качество усвоения материала, а также самостоятельной работы студентов. Информация об этих методических материалах помещена в приложения (А, Б, В и Г) данной выпускной квалификационной работы (магистерской диссертации).

Итоги апробации разработанной методики

Данный параграф посвящен описанию и анализу экспериментальной апробации по реализации методики обучения решению задач стереометрии с использованием среды Живая математика. Эксперимент проводился в три этапа: констатирующий, поисковый и формирующий.

Целью первого этапа (2018 - 2019 гг.) было: рассмотреть возможности для организации обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики с использованием цифровых образовательных ресурсов; теоретически обосновать целесообразность применения среды Живая математика при подготовке студентов к решению позиционных и вычислительных задач стереометрии. На первом этапе были определены: проблема исследования, объект, предмет, цель и задачи исследования, а также сформулирована гипотеза данной работы. Также был проведен анализ содержания дисциплины «Элементарная математика (геометрия)» в педагогическом университете на предмет возможности ее использования при обучении решению позиционных и метрических задач среды Живая математика.

На втором этапе (2019 – 2020 гг.) нами была поставлена цель: разработать методику применения Живой математики при обучении студентов педвуза решению позиционных и метрических задач стереометрии. На этом этапе была описана методика обучения решению задач стереометрии, а именно: задачи на построение плоских сечений многогранника, задачи на вычисление расстояний, а также задачи на вычисление углов между объектами в пространстве. Также на данном этапе разрабатывались с использованием среды Живая математика обучающие видеоролики при поддержке программы Bandicam для дистанционного обучения.

На третьем этапе (2020 г.) была проведена экспериментальная работы по применению среды Живая математика в процессе обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики в рамках дисциплины

«Элементарная математика (геометрия)», также проведена проверка выдвинутой гипотезы, результаты были систематизированы. Завершилась работа формулировкой выводов исследования и оформлением выпускной квалификационной работы (магистерской диссертации).

В экспериментальной работе приняли участие 20 студентов V курса, группа DZ-Б16Б-01 КГПУ им. В.П. Астафьева заочной формы обучения (06.10.20 (6 часов), 13.10.20 (6 часов) и 20.10.20 (4 часа)). Данную учебную группы мы разделили на две группы: контрольная группа (далее – КГ) составила 10 человек, экспериментальная группа (далее ЭГ) – 10 человек.

Перейдем к описанию результатов эксперимента по реализации разработанной методики применения среды Живая математика в процесс обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики в рамках дисциплины «Элементарная математика (геометрия)».

На первом этапе эксперимента был проведен констатирующий эксперимент. На этом этапе использовались следующие методы исследования: анализ, обобщение и систематизация, беседа и наблюдение.

Во время осуществления экспериментальной работы был проведен анализ научных и методических исследований, которые посвящены проблеме применения цифровых образовательных ресурсов при изучении курса стереометрии. В результате было выявлено, что имеющиеся на данный момент исследования не в достаточной степени отражают всю сущность проблемы корректного использования компьютерных технологий при обучении решению задач по стереометрии. В разработанных методиках не везде учитываются современные требования к процессу обучения, т.к. обучение не просто должно пройти путь цифровизации, а уметь правильно применять разнообразие новых форм организации учебной деятельности, отбирать среди них по-настоящему эффективные и направленные на развитие умений и навыков, необходимых именно на данном этапе обучения.

Контрольная и экспериментальная группа не отличаются количеством студентов. Также следует отметить, что студенты учебной группы имели приблизительно один уровень освоения данного курса, поэтому нам также важно было увидеть не только как изменится динамика каждого из участника эксперимента, но и группы в целом. В Таблице 1 представлены результаты диагностики знаний и умений студентов в решении задач на построение сечений и нахождении расстояний и углов между объектами в пространстве.

Таблица 1 – Результаты диагностики умений студентов – будущих учителей математики при решении позиционных и метрических задач.

	КГ			ЭГ		
	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Задачи на построение сечений многогранника	5	3	2	6	4	1
Задачи на нахождение расстояний	5	4	1	4	4	2
Задачи на нахождение углов	7	2	1	6	3	1

Итак, учебная группа из 20 студентов была разделена на 2 подгруппы, первая (КГ) – на практических занятиях не использовала среду Живая математика, все построения и решения не производились в динамической среде, вторая (ЭГ) – наоборот. Для данной группы были подготовлены динамические чертежи, все задачи на практических занятиях выполнялись в среде Живая математика, а также все задания для самостоятельного освоения курса. Также отметим, что для всех были разработаны видеоролики решения вычислительных задач стереометрии в Живой математике.

В рамках эксперимента проводилась диагностическая работа по оцениванию уровня усвоения студентами курса стереометрии, а именно обучению вычислительных и позиционных задач.

Студентам обеих групп в заключительной части серии занятий была предложена практическая работа, включающая в себя 5 задач стереометрии на вычисление расстояний и углов в пространстве. Максимальное количество баллов за практическую работу – 100 (1 задача – 20 баллов). В качестве контрольного средства выступила следующая практическая работа, которую студенты выполняли в среде Живая математика:

1. Построить сечение пирамиды SABCD плоскостью MNK, если известно, что точки M и N - соответственно середины ребер AB и AD пирамиды SABCD, точка K принадлежит ребру SC.

2. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды MABC равно стороне основания и равно a. На ребре AC взята точка R - середина этого ребра. Найдите стороны треугольника MBR.

3. Дан куб, длина ребра которого равна 4. Точки MN соответственно середины ребер и найти: расстояние от точки M до прямой AN.

4. Найдите угол между прямыми B'C и C'D, проведенными в кубе ABCDA'B'C'D'.

5. Боковое ребро правильной пирамиды MABCD равно стороне ее основания. Найдите угол между плоскостями MAB и MBC.

В сравнении с контрольной группой, в экспериментальной наблюдается более прочное усвоение материала, высокая заинтересованность в изучении данной темы и разработки собственных методических материалов по данной теме в среде Живая математика. Заметим, что на начало эксперимента знания и умения студентов обеих подгрупп были примерно одинаковы. У контрольной группы мы наблюдаем более плавный переход к более прочному усвоению данного раздела. В экспериментальной же группе данный переход более резкий. Как отмечалось выше, для студентов данной группы были созданы дополнительные условия – организация учебного процесса с использованием новых цифровых ресурсов, таких как динамическая среда Живая математика и создание видеороликов при поддержке программы Bandicam, благодаря чему, как раз, мы видим такие различия в уровне сформированности знаний и умений студентов разных подгрупп.

Результаты практической работы экспериментальной и контрольной групп приведены в Таблице 2.

Таблица 2 – результаты практической работы экспериментальной и контрольной групп

Количество баллов	Экспериментальная группа	Контрольная группа
100	5	2
80	3	3
60	1	3
40	1	1
20	0	1
0	0	0

Также, как мы уже отмечали ранее, были разработаны обучающие видеоролики и после проведения диагностической работы было проведено анкетирование на предмет того, кто из студентов - будущих учителей математики познакомился с данными видеороликами и создал уже свои методические видеоматериалы. Результаты анкетирования можно видеть в Таблице 3.

Таблица 3 – анкетирование студентов на предмет рассмотрения видеороликов и создания собственных материалов в программе Bandicam.

	Экспериментальная группа	Контрольная группа
ознакомились с видеороликом	9	3
ознакомились и создали свой собственный	5	1

видеоролики не просматривали	1	6

Анализируя результаты диагностической работы и рассмотренное анкетирование, мы заметили, что наибольшее количество баллов (100) получили те студенты, которые не только просмотрели обучающиеся видеоролики, но и попытались создать свои учебные материалы по решению позиционных и метрических задач стереометрии. Также, мы видим, что в экспериментальной группе наблюдается более высокий интерес, как к новому ЦОР разделу, так и к разделу стереометрии в целом. Это видно по количеству студентов, которыми были просмотрены разработанные видеоматериалы (в экспериментальной группе – 9 студентов из 10, в контрольной 3 из 10). Возможно, что такая диспропорция связана с тем, что студенты контрольной группы не были знакомы со средой Живая математика, не знали, как создавать с ее помощью видеоматериалы.

Обработку данных исследования проведем с помощью математической статистики с целью проверки фактического соответствия реальных результатов эксперимента и предполагаемой гипотезы.

Исходя из имеющихся результатов эксперимента, для статистической обработки был выбран критерий Вилкоксона-Манна-Уитни. Выбор критерия обуславливается тем, что полученные результаты измерений приведены в шкале отношений и имеется сравнительно малый объем выборки (в группах менее 30 человек). Применение данного критерия позволил сделать вывод о достоверности различий степени усвоения предложенного материала с использованием Живой математики и без нее.

Мы имеем две группы, а значит имеем две выборки, объемом N и M, где N – количество студентов контрольной группы, а M – количество студентов экспериментальной группы. Для каждого результата из первой выборки определим число результатов второй выборки, которое превосходит его (т.е. для каждого количества возможно набранного балла определим на сколько в каждой из группы было студентов больше, решивший задач на данный балл). Такая их сумма называется эмпирическим значением критерия Манна-Уитни и обозначается U. U = 19.

Вычислим эмпирическое значение критерия Вилкоксона:

$$W_{\text{эмп}} = \frac{\left|\frac{N \cdot M}{2} - U\right|}{\sqrt{\frac{N \cdot M \cdot (N + M + 1)}{12}}} = 2{,}34.$$

Вычисления эмпирического значений критерия Манна-Уитни и критерия Вилкоксона приведены в таблице на рисунке (Рис. 18).

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	эксп.группа	контр.группа				
2	1	100	100	0			
3	2	100	100	0			
4	3	100	80	0			
5	4	100	80	0			
6	5	100	80	0			
7	6	80	60	2			
8	7	80	60	2		M=	10
9	8	80	60	2		N=	10
10	9	60	40	5		U=	19
11	10	40	20	8			
12						числитель=	31
13						знаменатель=	13,2288
14						W=	2,34338
23				19			

Кол-во баллов	экс.группа	контр.группа
100	5	2
80	3	3
60	1	3
40	1	1
20	0	1

Рис.18

Сравним полученное эмпирическое значение Вилкоксона с критическим ($W_{0.05} = 1{,}96$). Мы видим, что $W_{\text{эмп}} > W_{0.05}$. Следовательно, мы видим, что достоверность различий степени усвоения предложенного материала с использованием Живой Математики или без нее составляет 95%.

Таким образом, начальные состояния (до проведения эксперимента) экспериментальной и контрольной групп совпадает, а конечные – нет. При этом в ходе эксперимента при обучении двух групп отличие было только в применяемой методике обучения. Следовательно, можно сделать вывод о том, что эффект изменений обусловлен именно применением экспериментальной методики обучения.

Значит, методика обучения решению стереометрических задач с применением среды Живая математика обеспечивает более прочное и глубокое усвоение материала, позволяет подготовить обучаемых к выполнению практических заданий на более высоком уровне с достоверностью 95%.

Выводы по главе II.

Поскольку в первой главе велось обсуждение того, что к обязательному перечню образовательных технологий относятся именно информационные технологии, то новые требования к обучению в курсе элементарной геометрии для будущих учителей математики определяют необходимость перехода от традиционного подхода к современному.

Использование динамической среды Живая математика в качестве средства обучения, а не только средства наглядности позволило создать условия для осуществления более глубокого и прочного усвоения одного из самых сложных разделов стереометрии, как для школьников, так и для студентов бакалавриата – будущих учителей математики. Опираясь на анализ учебной литературы и проблемы современного обучения стереометрии нами были разработаны методические рекомендации для изучения данного раздела курса, а именно решение позиционных и метрических задач.

Опытно-экспериментальная проверка разработанной методики подтвердила ее эффективность в соответствии с выдвинутой рабочей гипотезой исследования. Главным показателем эффективности разработанной методики определена положительная динамика сформированности знаний и умений в решении вычислительных задач на нахождение расстояний и углов между объектами в пространстве и на построение сечений многогранника. Реализация данной методики на практике позволяет наглядно увидеть ее эффективность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование информационных технологий в обучении обязательно во многих странах и является одной из приоритетных задач отечественного образования. Проанализировав степень разработанности методики и опыт в ее реализации, в работе были рассмотрены основные проблемы современного обучения элементарной геометрии в педагогическом университете. В результате чего было выявлено, что данная проблема недостаточно исследована, т.к. в большинстве источниках она направлена на развитии отдельных умений студентов. Также, практика тех же исследований показывает довольно низкий уровень сформированности этих умений. В процессе исследования основным средством решения данной проблемы мы рассматривали динамическую систему геометрии Живая математика. Анализируя дидактические возможности данной среды, мы осуществили проверку эффективности использования этих возможностей при изучении элементарной геометрии в педагогическом вузе.

Проверка эффективности разработанной методики была проверена на практике. Апробация проводилась на базе КГПУ им. В.П. Астафьева среди студентов V курса. В эксперименте было задействовано 20 участников. Результатом экспериментальной проверки стало проведение диагностической работы по выявлению у студентов повышения уровня сформированности знаний и умений в решении позиционных и метрических задач стереометрии и прочности усвоения данных умений, а также развитии пространственного мышления. Владение методами правильного построения динамического чертежа способствует сформированности умений логического контроля и умений делать выводы об истинности найденного решения и количестве таких решений. В ходе результата был отмечен видимый положительный результат в экспериментальной группе.

Цель исследования была достигнута, поставленные задачи выполнены, а его результаты говорят о том, что разработанные методические рекомендации обучения решению позиционных и метрических задач являются эффективным средством обучения и могут быть применены, как при изучении курса стереометрии в школе, так и в педагогическом вузе.

Исследование показало, что включение в образовательный процесс среды Живая математика способствует более наглядному представлению учебного материла, в результате чего повышается эффективность формирования у студентов бакалавриата – будущих учителей математики более глубоких и прочных знаний и умений. А значит, мы можем утверждать, что выдвинутая нами гипотеза получила подтверждение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И, Евстафьева Л.П. Методические рекомендации. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / М.: Просвещение, 2017. 144 с.

2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни /. М.: Просвещение, 2015. 255 с.

3. Баженова И.В., Пак Н.И. Проективно-рекурсивная технология обучения в личностно-ориентированном образовании // Педагогическое образование в России. 2016. № 7. С. 7-13.

4. Безгодова О.С. Формирование и развитие ИКТ-компетентности при использовании образовательной среды «Живая математика» // Теория и практика образования в современном мире: материалы VI Междунар. науч. конф. СПб.: Заневская площадь, 2014. С. 177-179.

5. Белошистая, А.В. Задачи на построение в школьном курсе геометрии. // А.В. Белошистая / Математика в школе», 2002. № 9. С. 25-27.

6. Берсенева О.В. Технологическая составляющая формирования готовности будущих учителей математики к организации исследовательской деятельности обучающихся // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016. № 4. С. 32-34.

7. Бескин Л.Н. Стереометрия [Текст]: кн. для учителя / М.: Просвещение, 1960. 415 с.

8. Варшавский И.К., Гаиашвили М.Я., Глазков Ю.А. Стереометрия на едином государственном экзамене. Математика в школе. 2006. №4. С. 2.

9. Гатауллин А.М. Объектная визуализация в программе «Живая математика» // материалы Международной научно-практической конференции «Информационные технологии в образовании и науке - ИТОН 2012», Казань, 2012. С. 47.

10. Гатауллин А.М., Гатауллина С.Р. Решение стереометрических и параметрических задач с помощью программы «Живая математика» // Научно-методический электронный журнал «Концепт», 2013. Т.3. С. 2456–2460. [Электронный ресурс] // URL: http://e-koncept.ru/2013/53494.htm (дата обращения: 14.04.2020).

11. Глаголев, Н.А. Сборник геометрических задач на построение/ Н.А. Глаголев // М, 1930.-С.67-45.

12. Гусев В.А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы. М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2017. 458 с.

13. Гусев В.А., Орлов В.В., Панчищина В.А. и др. Методика обучения геометрии: учебник пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / М.: Издательский центр «Академия», 2004. 368 с.

14. Дадаян А.А. Основы черчения и инженерной графики. Геометрические построения на плоскости и в пространстве. М.: Изд-во Форум, 2007. 464 с.

15. Далингер, В.А. Методика обучения стереометрии посредством решения задач: учеб. пособие. М.: Юрайт, 2017. 370 с.

16. Дубровский В. Н. Стереометрия с компьютером // Стандарты и концепции. 2003. С. 3-11. URL: https://cyberleninka.ru/article/v/stereometriya-s-kompyuterom (дата обращения: 20.02.2020).

17. Дубровский В. Н., Поздняков С. Н. Динамическая геометрия в школе // Компьютерные инструменты в школе. 2008. № 1. С. 21-31. URL: http://bookfi.net/book/802825 (дата обращения: 10.03.2020).

18. Дудник М.С., Черкасова А.Д. О дидактических преимуществах использования среды Живая математика при обучении решению задач на построение // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, Красноярск, 12-13 ноября 2020 г.; КГПУ им. В.П. Астафьева – Красноярск, 2020. С 107-110.

19. Елизарова Н.Г. О расстоянии от точки до плоскости. Математика в школе. 2009. № 4. С. 67–73.

20. Зимнякова Т.С., Ларин С.В., Ларина Е.И. Особенности использования цифровых образовательных ресурсов в обучении математике и физике. Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, 2019. № 2 (48). С. 26-32.

21. Иванова Т.А., Серова Н.А. Выпускная квалификационная работа по теории и методике обучения математике: Учебно-методическое пособие. Н. Новгород: НГПУ, 2006. 63 с.

22. Козлова, В.В., Кондакова А.М. Фундаментальное ядро содержания общего образования: проект / М.: Просвещение, 2009. 48 с.

23. Костовский, А.Н. Геометрические построения одним циркулем / А.Н. Костовский // М.: Наука, 1989. С. 205-213.

24. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra. 2-е изд., исправ. и доп. Учебное пособие для вузов. М.: «Юрайт», 2018. 233 с.

25. Литвиненко В.Н., Батугина О.А. Геометрия. 10 класс. Готовимся к ЕГЭ: учеб. пособие / М.: Просвещение, 2011. 158 с.

26. Ломаско П.С., Симонова А.Л. Основополагающие принципы формирования профессиональной ИКТ-компетентности педагогических кадров в условиях смарт-образования. Вестник Томского государственного педагогического университета, 2015. № 7 (160). С. 78-84.

27. Маитуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин О.И., Федин Н.Г. Толковый словарь математических терминов. М.: Просвещение, 1965. 509 с.

28. Майер В.Р. О подготовке студентов – будущих учителей математики к использованию среды Живая математика при обучении школьников стереометрии. Информатизация образования и методика электронного обучения Материалы III Международной научной конференции. Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий, 2019. С. 206-211.

29. Майер В.Р. Системы динамической геометрии в математическом образовании школьников и студентов педагогических вузов. Математическое образование в цифровом обществе материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, 2019. С. 103-105.

30. Майер В.Р., Ворошилова А.А. Применение среды живая математика при обучении геометрическим преобразованиям студентов – будущих учителей математики. Информационные технологии в математике и математическом образовании Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием, 2018. С. 36-43.

31. Майер В.Р., Ларин С.В., Кочеткова Т.О., Карнаухова О.А. Особенности создания и использования компьютерных анимационных рисунков в обучении математике. Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, 2020. № 1 (51). С. 6-14.

32. Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л.И. Математика. Все для ЕГЭ. Книга 1. Ростов на Дону: НИИ школьных технологий, 2011. 272 с.

33. Нарчук О.М., Практикум по решению стереометрических задач. Красноярск: РИО КГПУ, 2005. 98 с.

34. Орлова А.О., Валитова С.Л. Особенности обучения математике по ФГОС второго поколения [Электронный ресурс] // URL: http://www.scienceforum.ru/2014/545/1632 (дата обращения: 5.12.2019).

35. Пантуев А.В. Виртуальные лаборатории и активизация работы школьников. Сб. Стимулирование познавательной деятельности студентов и школьников, М: МГПУ, 2002. С. 30-33.

36. Перевощикова Е.Н., Поршнев А.В., Юхова А.В., Клюева Е.Ю. Современные средства оценивания результатов обучения: учебное пособие / под ред. проф. Перевощиковой Е.Н. Н. Новгород: НГПУ, 2007. 175 с.

37. Перепелкин, Д.И. Геометрические построения в средней школе / Д.И. Перепелкин // М.: Издательство академии педагогических наук РСФСР, 1947. С. 61-78.

38. Погорелов А.В. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. общеобразовательных учреждений / М.: Просвещение, 2004. 240 с.

39. Потоскуев Е.В. Решение задач по стереометрии. Практикум. Подготовка к ЕГЭ. М.: Илекса, 2012. 108 с.

40. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 класс: учебник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильн. изучением математики / М.: Дрофа, 2008. 223 с.

41. Прохоров Ю. В. Большой энциклопедический словарь по математике. М.: Науч. издат., 1998. 1456 с.

42. Прядкова Н.А. Черкасова А.Д. Компьютерный самоконтроль при решении задач на вычисление объемов тел // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IV Всероссийской научно- методической конференции с международным участием, Красноярск, 18-19 ноября 2015г. / В.Р.Майер (отв.ред.); ред. Кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2015. С. 110-113.

43. Саакян С.М. Геометрия. Поурочные разработки. 10-11 классы: учебное пособие для общеобразоват. организаций / М.: Просвещение, 2015. 240 с.

44. Саакян, С. М. Примерное планирование учебного материала по математике в X-XI классах // Математика в школе, 2005. №7. С. 2.

45. Савельева И.В. Среда «Живая геометрия» // Математика, 2010. №15. [Электронный ресурс] // URL: http://elcat.pnpu.edu.ua/docs/Caveleva.pdf (дата обращения: 3.11.2019).

46. Самылкина Н.Н., Седова Е.А. и др. Проблемы школьного математического образования глазами учителей и преподавателей вузов: результаты опросов // Математика в школе, 2017. № 2. С. 36-44.

47. Седова Е.А., Пчелинцев С.В., Мищенко Т.М. и др. Примерные программы среднего (полного) общего образования: математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 10-11 классы / под общ. ред. Рыжакова М.В. М.: Вентана-Граф, 2012. 136 с.

48. Смирнов В.А. ЕГЭ 2011. Математика: под ред. Семенова А.Л. и Ященко И.В. М.: МЦНМО, 2011. 64 с.

49. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10 класс [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) - 5-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2019. 135 с.

50. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Расстояния и углы в пространстве [Текст] / М.: Экзамен, 2009. 160 с.

51. Сычева, Е. И. Тесты по стереометрии // Математика в школе, 2006. №4. С. 24.

52. Тумашева О.В. Готовность будущего учителя математики к реализации системно-деятельностного подхода в аспекте требований ФГОС // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016. №4 (38). С. 98-100 (ВАК)

53. Тумашева О.В. Методические продукты будущих учителей математики как форма отражения готовности к реализации системно-деятельностного подхода. Материалы IV Междунар научной конф. «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе» (4 – 5 декабря 2018г.). Калуга: Изд-во АКФ «Политоп», 2018. Т. II. С. 96-99.

54. Тумашева О.В., Берсенева О.В. Обучение математике с позиции системно-деятельностного подхода: монография; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноясрк, 2016. 280 с.

55. Увалиева С.К., Смагулова М.Г. О некоторых проблемах, возникающих при изучении фигур стереометрии // Международный журнал экспериментального образования, 2015. № 5-1. С. 95-96. [Электронный ресурс] // URL: http://expeducation.ru/ru/article/view?id=7499 (дата обращения: 19.02.2020).

56. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс] // Министерство образования и науки РФ [Офиц. сайт], 2013. URL: http://минобрнауки.рф/документы/2794 (дата обращения 20.10.19).

57. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования [Электронный

ресурс] // Специализированная интернет-система организационно-методического сопровождения федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации образовательных программ. URL: http://www.fpu.edu.ru/ (дата обращения 26.01.2020).

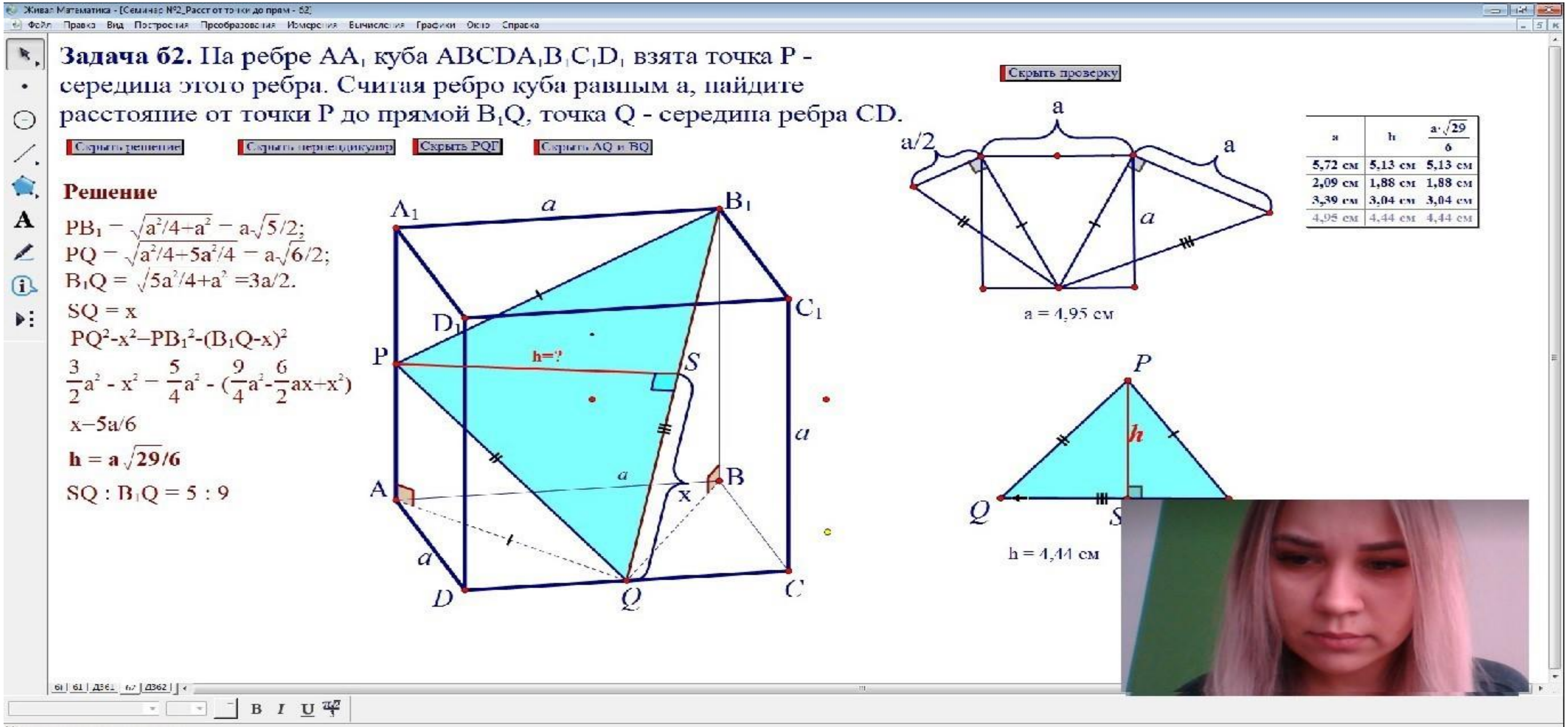
58. Черняк А.А., Черняк Ж.А. Геометрия. 7-11 классы (ЕГЭ: шаг за шагом) / М.: Дрофа, 2011. 247 с.

59. Шабат Г. Б. Живая математика: Сборник методических материалов. М.: ИНТ, 2012. 176 с.

60. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие / М.: БИНОМ, 2012. 694 с.

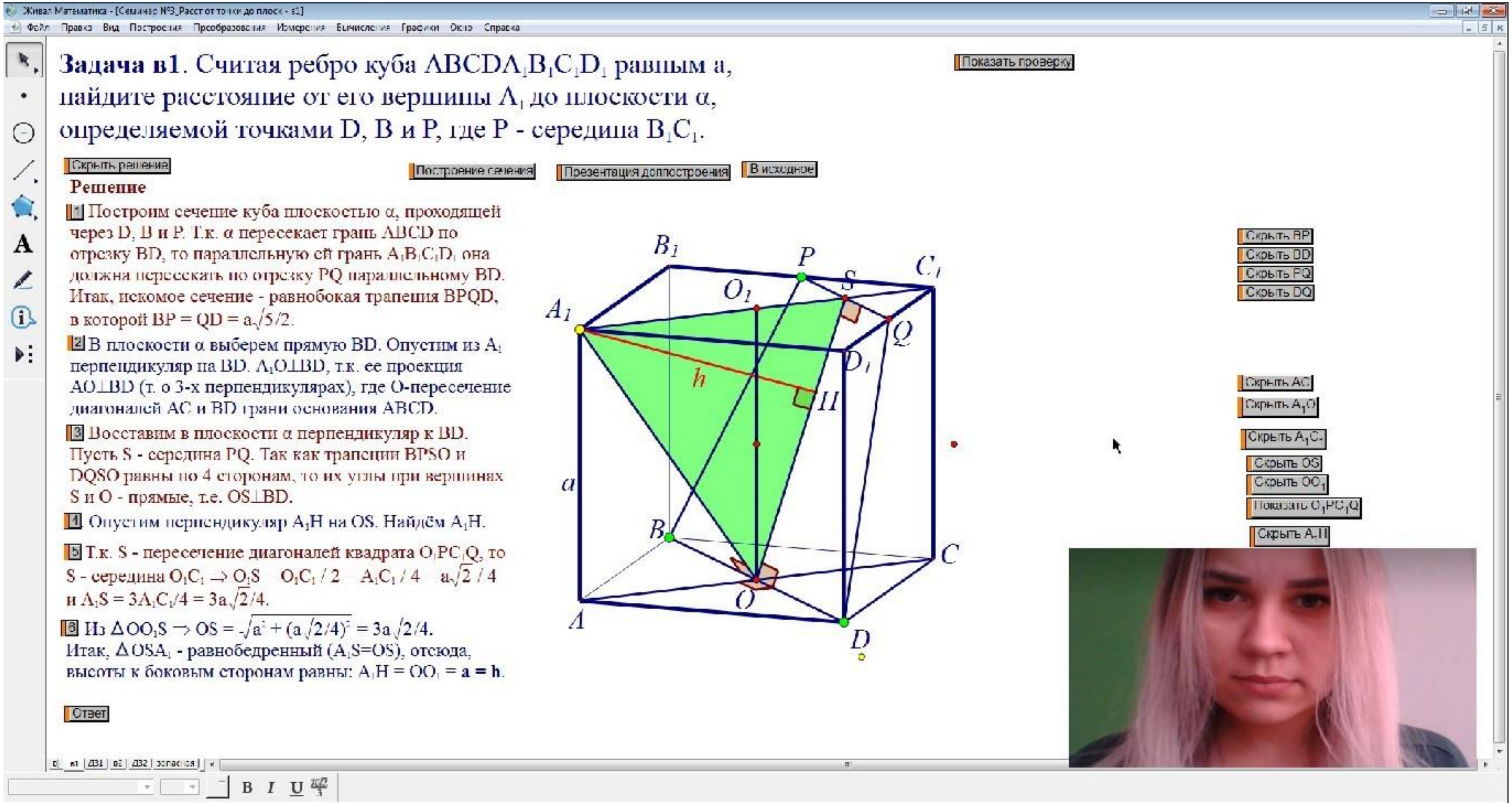
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А – Скриншот обучающего видео для решения некоторой задачи на вычисление расстояний между объектами многогранников среде Живая математика при поддержке программы Bandicam.

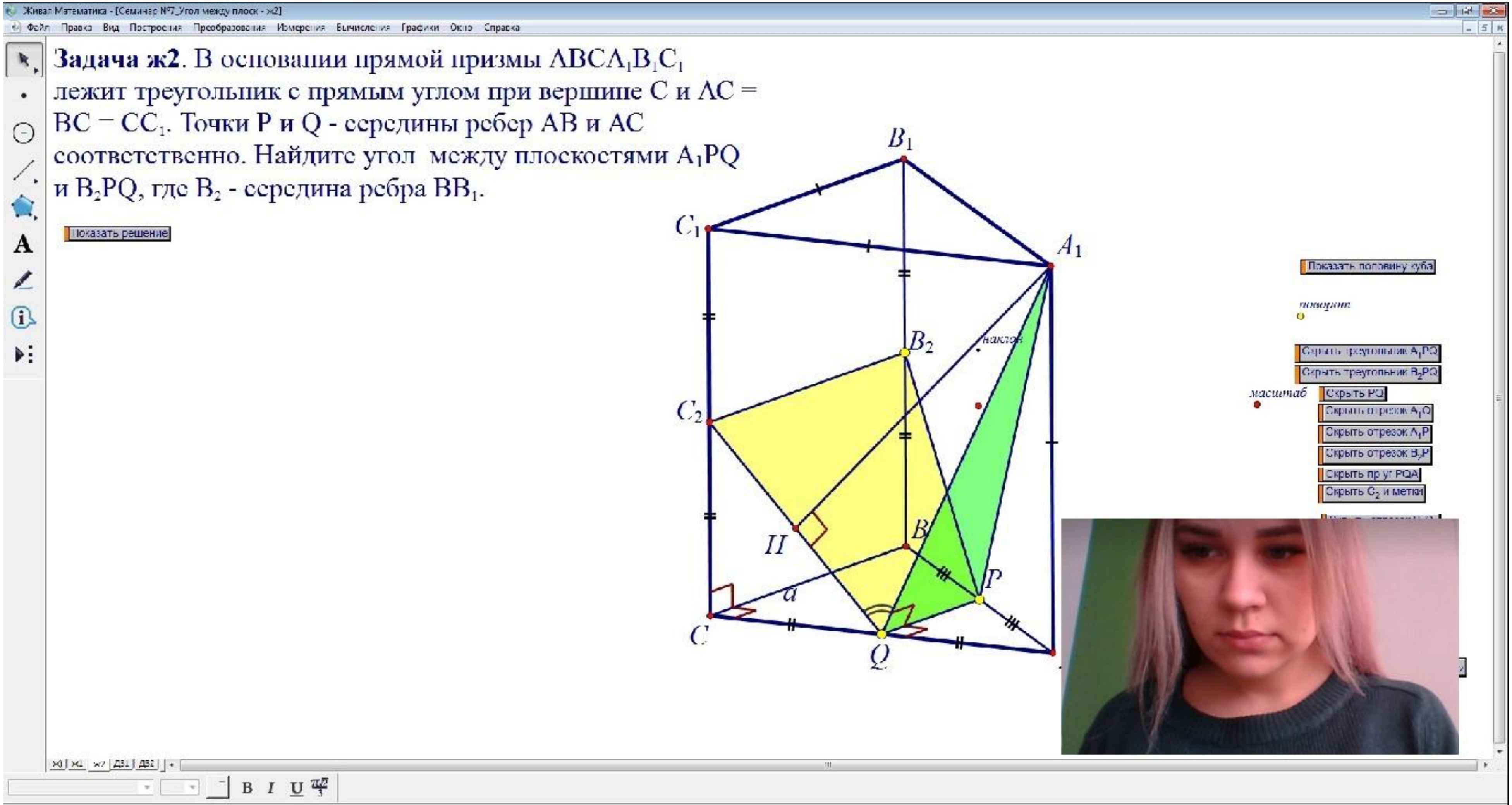


a	h	$\frac{a\cdot\sqrt{29}}{6}$
5,72 см	5,13 см	5,13 см
2,09 см	1,88 см	1,88 см
3,39 см	3,04 см	3,04 см
4,95 см	4,44 см	4,44 см

Приложение Б – Скриншот обучающего видео для решения некоторой задачи на вычисление расстояний между объектами многогранников среде Живая математика при поддержке программы Bandicam.



Приложение В – Скриншот обучающего видео для решения некоторой задачи на вычисление углов между объектами многогранников среде Живая математика при поддержке программы Bandicam.



Приложение Г – Скриншот обучающего видео для решения некоторой задачи на вычисление углов между объектами многогранников среде Живая математика при поддержке программы Bandicam.