

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

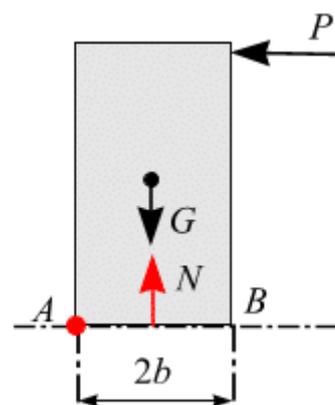
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.П. Астафьева»

И.В. Богомаз
Е.А. Степанов
Е.А. Песковский

Статика: сборник заданий, примеры

Учебное пособие

Электронное издание



Красноярск 2019

УДК 531.1
ББК 22.21
Б 74

Рецензенты:

И.В. Кирко, доктор физ.-мат. наук, профессор
Е.А. Чабан, кандидат технических наук, доцент

Богомаз И.В., Степанов Е.А., Песковский Е.А.

Б 74 Статика. Сборник заданий. Примеры: учебное пособие / [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2019. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux, Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-001020-374-6

Подробно разобраны примеры решения типовых задач, приведены задачи, рекомендованные для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов педагогических вузов, обучающихся по направлению: 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы Технология, Технология с основами предпринимательства, Физика, Математика; 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями), направленность (профиль) образовательной программы Физика и технология; а также для учителей физики средней общеобразовательной школы.

ББК 22.21

ISBN 978-5-00102-374-6

© Красноярский государственный
педагогический университет
им. В.П. Астафьева, 2019
© Богомаз И.В., 2019
© Степанов Е.А., 2019
© Песковский Е.А., 2019

Содержание

Из истории механики	4
Глава 1 Система сходящихся плоских сил	24
1.1 Виды связей	24
1.2 Система сходящихся сил	26
1.3 Условия равновесия плоской системы сходящихся сил	30
Задание для самостоятельного решения №1	35
1.4 Теорема о трех непараллельных силах	38
Задание для самостоятельного решения № 2	49
Глава 2 Система параллельных сил	51
2.1 Равнодействующая системы двух параллельных сил	51
2.2 Распределенные силы	54
2.3 Условия равновесия	55
Задание для самостоятельного решения № 3	63
2.4 Пара сил	64
Задание для самостоятельного решения № 4	65
Задание для самостоятельного решения № 5	70
Глава 3 Пространственная система сил	73
Задание для самостоятельного решения №6	74
Глава 4 Ферма	76
4.1 Способ проекций (способ вырезания узлов)	76
4.2 Способ моментной точки (способ сечения)	79
Задание для самостоятельного решения № 7	81
Глава 5 Равновесие тел	85
5.1 Равновесие конструкций арочного типа	85
Задание для самостоятельного решения № 8	90
5.2 Равновесие составных конструкций	91
Задание для самостоятельного решения № 9	99
Глава 6 Равновесие при наличии трения	106
6.1 Трение скольжения	106
6.2 Конус трения	109
6.3 Трение качения	114
Задание для самостоятельного решения № 10	120
Глава 7 Центр тяжести плоских фигур	124
Задание для самостоятельного решения № 11	126
Библиографический список	129

ИЗ ИСТОРИИ МЕХАНИКИ

Зарождение знаний о механике относится к глубокой древности. В эпоху неолита появилось колесо, чуть позже начали применять рычаг и наклонную плоскость. Регулярное использование рычага и наклонной плоскости начинается в связи со строительными работами в древневосточных государствах. Все это время шел процесс выработки, осознания ряда более или менее абстрактных понятий, таких, как сила, сопротивление, перемещение, скорость.

До современников дошли великолепные архитектурные сооружения, которые называли чудесами света: пирамиды Египта, Александрийский маяк, Висячие сады Вавилона, храм Артемиды, статуя Зевса, Мавзолей в Геликарнасе, Колосс Родосский.

Пирамиды в Египте и Америке. К крупным пирамидам относятся египетские пирамиды и пирамиды доколумбовых культур (ацтеки, майя, Теучитлан) в Латинской Америке (рис.1).



Рис.1

Наибольшей известностью пользуются так называемые Большие или Великие пирамиды: Мейдумская пирамида, Красная и Ломаная (Ромбовидная) пирамиды в Дашуре, ступенчатая пирамида Джосера в Саккаре и пирамиды Микерина (Менкаура), Хефрена (Хафра) и Хеопса (Хуфу) в Гизе. Иногда Великой называют лишь пирамиду Хеопса – самую большую из всех.

Время создания и использования этих исполинов значительно опередило появление первых известных нам серьезных теоретических работ по механике. Первые египетские пирамиды строились примерно за 3000 лет до н. э. При их строительстве были использованы миллионы блоков известняка со средним весом 2,5 т, а также плиты весом более 200 т, отмечена тщательная отделка не только известняковых, но и гранитных и базальтовых плит; имеются просверленные в граните и базальте конические отверстия и соответствующие им керны (обнаружены в конце XIX в.) с бороздкой с шагом 2 мм; ходы, проложенные в толще пирамид, выполнены по линиям, отклоняющимся от прямой не более чем на 5 мм на расстоянии порядка 80 м, плоскости граней пирамид выполнены с большой точностью. На сооружение пирамиды Хеопса пошло 23300000 каменных глыб, средний вес которых равен 2,5 т.

По одной из версий при строительстве сооружений применялись различные простейшие механизмы: наклонные плоскости, рычаги, клин, ворот, блок, винт и т. п. По другой версии строительство пирамид – первый опыт монолитного строительства. Предполагается, что в каменоломнях для отрыва каменных глыб от породы использовался клин. Подъем тяжестей

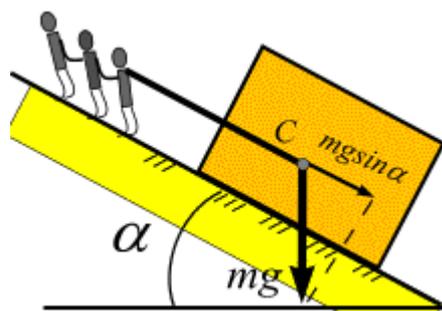


Рис. 2

осуществлялся с помощью наклонной плоскости. Например, наклонная дорога к пирамиде имела подъем 45,8 м и длину 494,6 м. Следовательно, угол наклона к горизонту составлял около $5^{\circ}3'$, и выигрыш в силе при поднятии тяжестей на эту высоту был более чем в 10 раз, рис. 2.

Александрийский маяк – первый в мире маяк, и простоял он 1500 лет (рис. 3). Маяк был построен на маленьком острове Фарос в Средиземном море около берегов Александрии в III в. до н. э., чтобы корабли могли благополучно миновать рифы на пути в александрийскую бухту.



Рис. 3

Ночью морякам помогало отражение языков пламени, а днём – столб дыма. Изображение маяка сохранилось не только на древних монетах, но и в описаниях арабского путешественника, посетившего Александрию в XIII в. Маяк состоял из трёх мраморных башен с основанием из массивных каменных блоков. Первая башня была прямоугольной, в ней находились комнаты, в которых жили рабочие и солдаты. Над этой башней располагалась меньшая, восьмиугольная башня со спиральным пандусом, ведущим в верхнюю башню. Верхняя башня была облицована мрамором. Ее восемь граней располагались по направлениям основных ветров. Башню маяка украшали статуи-флюгеры, расположенные по сторонам, и бронзовая скульптура царя морей Посейдона, венчающая ее купол-макушку (возможно, это была статуя Зевса). На башне находилось множество остроумных технических приспособлений: флюгеры, астрономические приборы, часы. Общая высота маяка составляла 117–150 м.

Чтобы поддерживать пламя на маяке, требовалось большое количество топлива. Дерево привозили по спиральному пандусу на телегах, запряжённых лошадьми или мулами. За пламенем стояли бронзовые пластины, направлявшие свет в море. С кораблей можно было видеть этот маяк на расстоянии до 50–60 км.

История донесла до нас имя строителя маяка, который высек его на камне, затер штукатуркой и сверху написал имя фараона. Со временем штукатурка осыпалась и открылась надпись: *«Сострат, сын Дексифона, книдиец, богам-спасителям за здоровье мореплавателей!»*.

Висячие сады Вавилона (сады Семирамиды) моложе пирамид (рис. 4). Они строились в те времена, когда уже существовала «Одиссея» и возводились греческие города. Греческие и римские писатели рассказывают, что сады были построены около 600 г. до н.э. по приказу Навуходоносора II, повелителя Вавилона. Этот город лежал на берегах реки Евфрат, к югу от сегодняшнего Багдада – столицы Ирака. Легенда повествует, что царь приказал построить сады ради тосковавшей по дому молодой жены Амитис, надеясь, что они напомнят ей родные персидские горы.

Висячие сады были построены, вероятно, у реки и были видны с городских стен Вавилона. Они были устроены в виде террас, самая верхняя из которых, возможно, возвышалась над землёй на 40 м. Навуходоносор распорядился посадить в саду все мыслимые виды деревьев и цветов. Их свозили со всей империи на телегах, запряжённых волами, и на речных ладьях. Успех садоводов, по всей видимости, зависел от хорошей системы полива, для которого использовалась вода из Евфрата. Воду могли поднимать на верхнюю террасу с помощью цепочки вёдер, прикреплённых к колесу, которое вращали рабы. А потом она, должно быть, сбегала по садам ручьями и водопадами, так что земля всегда оставалась влажной.

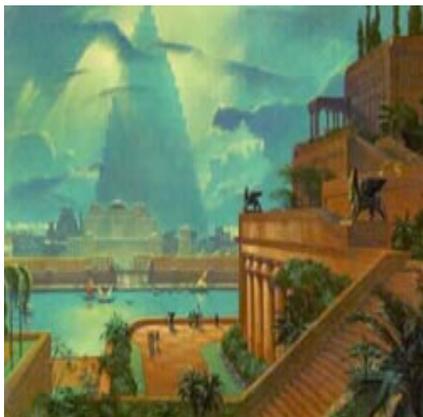


Рис. 4

Сады знаменуют собой закат ассиро-вавилонской державы, современницы Древнего Египта и его соперницы. И если пирамиды пережили всех и живы сегодня, то висячие сады оказались недолговечными и пропали вместе с Вавилоном, величественным, но не прочным гигантом из глины.

Храм Артемиды (рис. 5) был построен последним царём Лидии, древней области в Малой Азии, Крезом. Лидия входила в территорию современной Турции. Крез решил построить храм в честь богини Луны, покровительницы животных и молодых девушек. Греки звали её Артемидой, а римляне – Дианой. Храм был построен из известняка и мрамора. Несущими конструкциями храма являются около 120 мраморных колонн. Гигантские колонны достигали в высоту 20 м. Огромные глыбы, из которых они складывались, приходилось ставить на место с помощью блоков, после чего их скрепляли металлическими штырями. Когда здание покрыла крыша, художники придали ему законченный вид, украсив скульптурами и орнаментами. В центре храма стояла статуя Артемиды. Это был один из крупнейших храмов. Платформа, на которой он стоял, достигала 131 м в длину и 79 м в ширину.

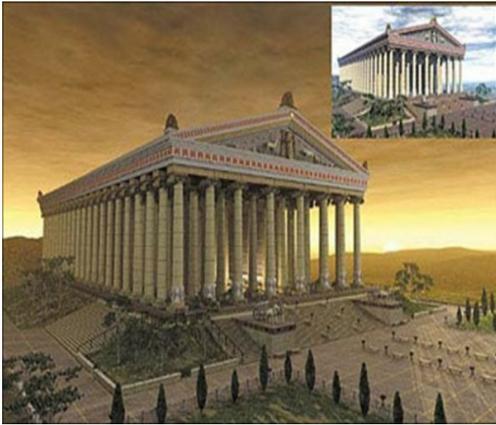


Рис. 5

Двести лет спустя, в 356 году до н. э., храм был сожжен дотла. Поджег его человек по имени Герострат. Спустя годы Александр Великий посетил Эфес и приказал восстановить храм на прежнем месте.

Храм просуществовал до III в. н. э. Постепенно бухту в Эфесе заносило илом и город терял своё значение. Храм был разграблен готами, а позднее затоплялся наводнениями. Сегодня от храма сохранилось лишь несколько блоков основания и одна восстановленная колонна.

Статуя Зевса в Олимпии – творение великого греческого скульптора [Фидия](#), воздвигнутое в 430 г. до н. э. (рис. 6). Храм, превосходивший по размерам все храмы того времени (27,68×64,12 м), был сложен из известняковых блоков, украшен мраморными раскрашенными фронтонами. Находящаяся внутри храма статуя Зевса имела высоту ≈ 13 м и почти касалась потолка храма. Зевс восседал на троне, инкрустированном чёрным деревом и драгоценными камнями. Создавалось впечатление, что если бы Зевс встал, он снёс бы крышу. Вдоль стен соорудили площадки для зрителей, чтобы люди, поднявшись на них, могли увидеть лицо бога. После своего завершения статуя на протяжении 800 лет оставалась одним из величайших чудес света.



Рис. 6

Мавзолей в Геликарнасе обладал колоссальными по тем временам размерами – занимал площадь в 5000 м² и имел высоту 46 м от основания до вершины (рис. 7). Строительство мавзолея было начато ориентировочно в 353 году до н. э. и длилось не менее трех лет. К проектированию мавзолея привлекли знаменитых греческих архитекторов Сатира и Пифея. Мавзолей представлял собой архитектурный комплекс со своим внутренним двором, в центре которого была возведена каменная платформа (иначе называемая птерон). К вершине птерона вела широкая лестница, по бокам ее охраняли каменные львы. Внешние стены мавзолея украшали статуи богов и богинь, а по углам сооружения «расставили» каменных стражей-воинов, которые несли бессменный караул.

Плиний Старший свидетельствовал, что общая протяженность птерона была никак не меньше 440 футов, в высоту же платформа достигала 20 м. На платформе находилась пирамида, которая в высоту почти равнялась основанию, кверху она, как и положено пирамиде, сужалась. Стены гробницы украшали барельефы, изображающие сцены из греческой мифологии. Пирамидальную крышу мавзолея подпирали 36 семиметровых колонн, по 9 на каждой из сторон. Между колоннами были установлены статуи. Мраморная квадрига венчала пирамиду. Квадрига – каменная колесница, запряженная

четырьмя массивными лошадьми, также вырезанными из мрамора. Высота скульптурной композиции составляла 6 м.

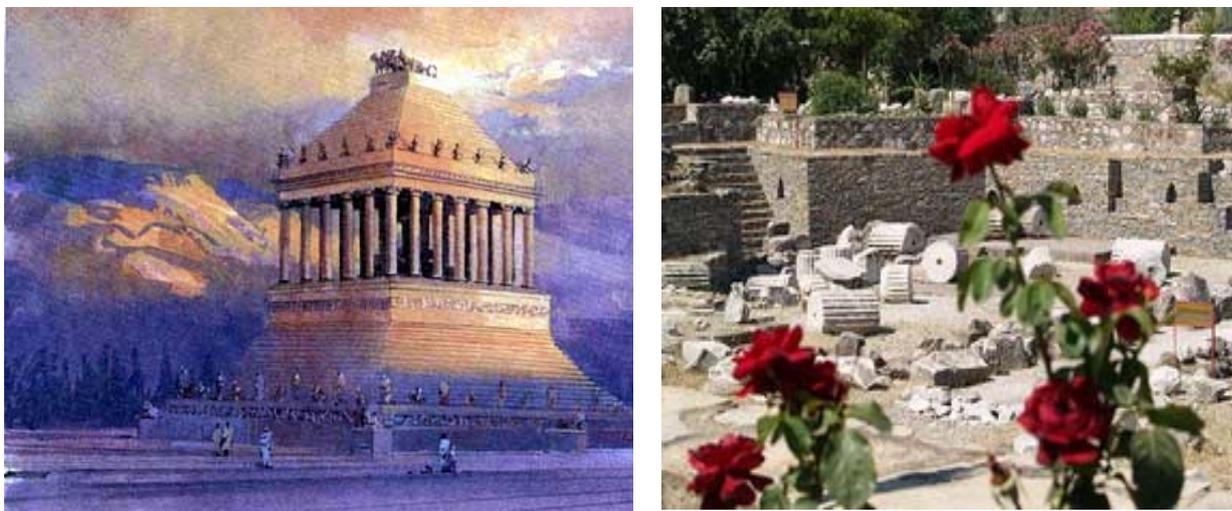


Рис. 7

Колосс Родосский – гигантская статуя, стоявшая в III в. до н. э. в портовом городе на Родосе — острове в Эгейском море у берегов современной Турции (рис.8).

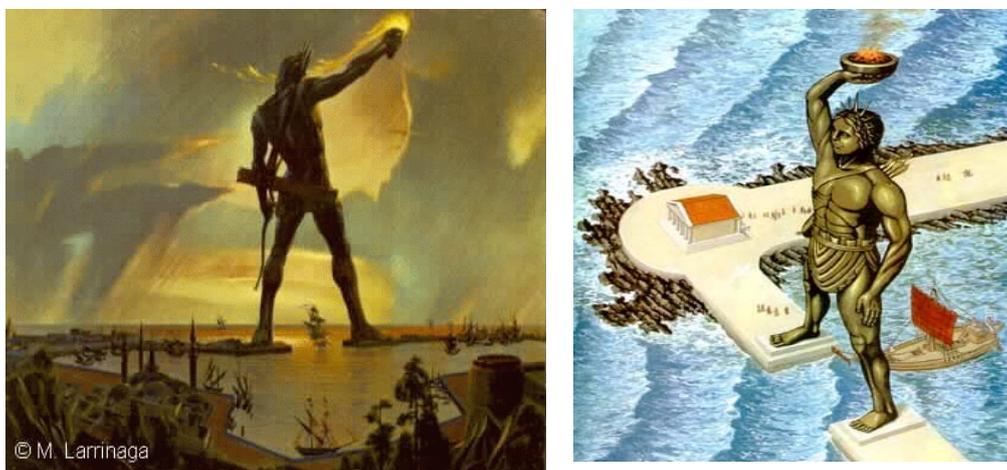


Рис. 8

Жители Родоса воздвигли ее как памятник в честь победы в 304 г. до н. э. над македонским царем Деметрием I, наследником великого царя Александра Македонского. Статую поручили изваять скульптору Харесу. Харес предложил сделать Гелиоса стоящим. В левой руке он держал ниспадающее до земли покрывало, правую руку приложил ко лбу, вглядываясь в даль. Такая поза не

соответствовала канонам, но Харес понимал, что колосс не удержится, если скульптура протянет руку вперёд (правило рычага). Основой тридцатишестиметровой статуи послужили три массивных каменных столба, скреплённые железными балками на уровне плеч. Основания столбов были в

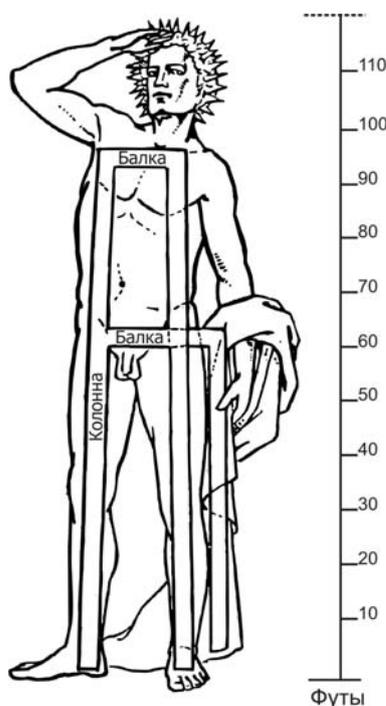


Рис. 9

ногах статуи и покрывале. На уровне плеч и пояса столбы соединялись поперечными балками (рис. 9). По свидетельству Плиния, на изготовление статуи было потрачено 500 талантов бронзы (13 т) и 300 талантов железа (7,8 т). Колосс был собран по частям, которые строители устанавливали на место, работая с земляных насыпей, которыми была окружена статуя. Основанием статуи служили каменные блоки, скрепленные железом. Лицо колосса и корона с семью лучами были позолочены. Возведение статуи длилось 12 лет, а простояла она около 60 лет. После 220 до н. э. мощное землетрясение разрушило колосс, сломав его в

коленях, и он рухнул на землю (возможно, отсюда пошло выражение «колосс на глиняных ногах»).

Из ранних инженерных сооружений сохранились до наших дней Римские акведуки (рис. 10), Колизей (рис. 11) – удивительные чудеса Вечного города. Акведуки — великое свершение инженерной мысли.

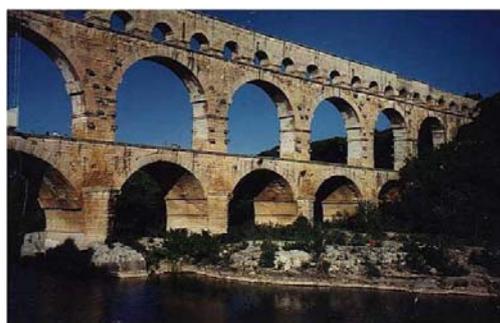


Рис.10

Они подвели чистойшую воду прямо к домам миллиона жителей Рима. Изящные, шагающие по ландшафту арки и подземные тоннели приносили в город — трудно поверить — миллиард тонн пресной воды ежедневно. Эта фантастическая система стала жизненной силой Рима и инженерной моделью для городов всех последующих времен.

Римский Колизей. Название Колизей, по одной версии, происходит от искаженного в средние века латинского слова «colosseum» (колоссальный). Колизей – постройка в виде эллипса: длина 188 м, ширина 156 м, высота 48,5 м. Средняя часть здания, арена (от лат. «arena» – песок), покрытая песком и предназначавшаяся для гладиаторских боев, травли животных, по форме представляла собой эллипс (длина 86 м, ширина 54 м).



Рис. 11

Размеры арены позволяли сражаться на ней одновременно 3000 пар гладиаторов. К ней примыкал четырехметровый подий, который служил оградой во время морских сражений, когда арена заливалась водой.

Внешние части Колизея были сооружены из травертина, внутренние – из туфа, кирпича, мрамора, бетона и дерева. При строительстве Колизея тщательно притертые камни были положены без раствора и скреплены между собою железными скобами.

Под ареной находились сложные инженерные сооружения, водопровод, конструкции для механических устройств (подъемные механизмы, доставляющие гладиаторов и зверей наверх), клетки для животных, склады для

оружия, помещения для декораций, комнаты гладиаторов. Арена современного Колизея лишена покрытия, поэтому сейчас можно видеть прежде скрытые помещения.

Большую роль при строительстве архитектурных сооружений играет правило пропорционального деления отрезка – «золотое сечение», которое ввел Евдокс Книдский (IV в. до н. э.), затем Евклид (III в. до н. э.). Известно, что еще в древности основу скульптуры и архитектуры составляла теория пропорций.

«Золотое сечение» – это такое деление целого на две неравные части, при котором большая часть так относится к целому, как меньшая к большей (рис. 12, а).

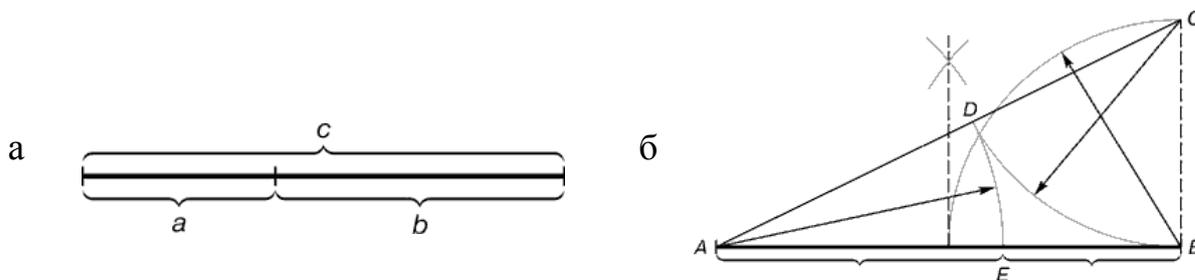


Рис. 12

Практическое построение золотого сечения начинают, как правило, с помощью циркуля и линейки (рис. 12, б). На заданной прямой АВ из точки В восстанавливается перпендикуляр, равный половине АВ ($BC = \frac{1}{2}AB$). Точка С соединяется линией с точкой А. На полученной прямой АС откладывается отрезок CD ($CD = BC$). Отрезок AD переносится циркулем на прямую АВ ($AD = AE$). Полученная при этом точка Е делит отрезок АВ в соотношении золотой пропорции. Отрезки золотой пропорции выражаются бесконечной иррациональной дробью $AE = 0,618\dots$ (если АВ принять за единицу), $BE = 0,382\dots$. Для практических целей часто используют приближенные значения 0,62 и 0,38. Если отрезок АВ принять за 100 частей, то большая часть отрезка равна 62 частям, а меньшая – 38.

Приведем пример золотого сечения. Все диагонали пятиугольника делят друг друга на отрезки, связанные между собой золотой пропорцией (рис. 13).

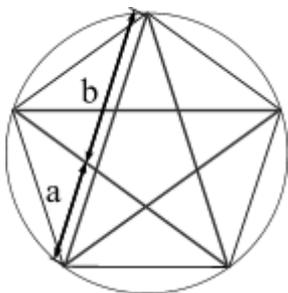


Рис. 13

Звездчатый пятиугольник называется пентаграммой. Каждый конец пятиугольной звезды представляет собой угол золотого треугольника. Его стороны образуют угол 36° при вершине, а основание, отложенное на боковую сторону, делит ее в пропорции золотого сечения. В Древней

Греции пятиконечную звезду выбрали в качестве талисмана, она считалась символом здоровья и служила опознавательным знаком. Пентаграмма была хорошо известна в Древнем Египте. Ее никто не изобретал, а скопировали с природы: пятилепестковые цветы плодовых деревьев и кустарников, морские звезды и др. Пропорции золотого сечения создают впечатление гармонии и красоты. Портрет Моны Лизы (рис.14) долгие годы привлекает внимание исследователей, которые обнаружили, что композиция рисунка основана на золотых треугольниках, являющихся частями правильного звездчатого пятиугольника.

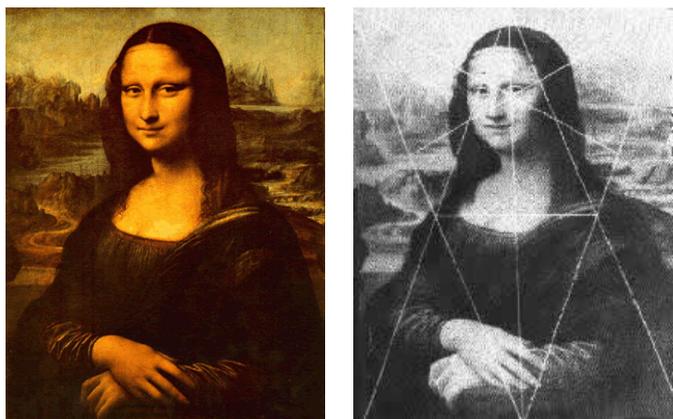


Рис. 14

Древнеегипетские пирамиды, картины Леонардо да Винчи (например «Мона Лиза»), подсолнухи, пальцы человека и т.д. объединены удивительными числами, которые были открыты итальянским математиком Средневековья

Леонардо Пизанским, более известным по имени Фибоначчи (род. ок. 1170 – умер после 1228). После его открытия числа эти так и стали называться его именем. Числа, образующие последовательность

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ... называются **«числами Фибоначчи»**, а сама последовательность – **последовательностью Фибоначчи**. Удивительная суть последовательности чисел Фибоначчи состоит в том, что каждое число в этой последовательности получается из суммы двух предыдущих чисел.

В числах Фибоначчи существует одна очень интересная особенность. При делении любого числа из последовательности на число, стоящее перед ним в ряду, результатом всегда **будет величина, колеблющаяся около иррационального значения 1.61803398875...** и через раз то превосходящая, то не достигающая его. (*Прим. иррациональное число – число, десятичное представление которого бесконечно и не периодически*).

Более того, после 13-го числа в последовательности этот результат деления становится постоянным до бесконечности ряда. Именно это постоянное число деления в средние века было названо Божественной пропорцией, а в наши дни именуется как **золотое сечение**, золотое среднее или золотая пропорция.

В алгебре это число обозначается греческой буквой фи (Φ)

Золотая пропорция = 1 : 1,618

Пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании. Не только египетские пирамиды построены в соответствии с совершенными пропорциями золотого сечения; то же самое явление обнаружено и у мексиканских пирамид (рис.1). На поперечном сечении пирамиды видна форма, подобная лестнице. В первом ярусе 16 ступеней, во втором 42 ступени и в третьем - 68 ступеней. Эти

числа основаны на соотношении Фибоначчи следующим образом:
 $16 \cdot 1,618 = 26$; $16 + 26 = 42$; $26 \cdot 1,618 = 42$; $42 + 26 = 68$.

Некоторые исследователи утверждают, что в пирамиде Хеопса одновременно заложены две мировые константы: число « π » и «золотая» пропорция. Если мы выберем размеры пирамиды такими, что отношение полупериметра основания к высоте будет равно « π », то рис.15:

$$H = FO; h = FE; g = AE = EB = OE$$

$$X = \frac{h}{g} = \frac{\sqrt{g^2 + H^2}}{g} = \frac{\sqrt{g^2 + \left(\frac{4g}{\pi}\right)^2}}{g} = \sqrt{1 + \frac{16}{\pi^2}} = 1,618993 \equiv \Phi.$$

$$\Phi = 1,61803398\dots$$

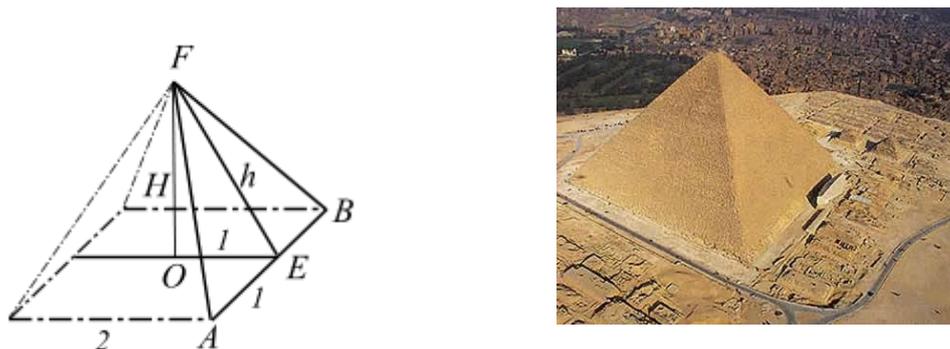


Рис. 15

Скульпторы утверждают, что талия делит совершенное человеческое тело по правилу золотого сечения. Так, например, знаменитая статуя Аполлона Бельведерского состоит из частей, делящихся по золотым отношениям, рис.16.



Рис. 16

Одним из красивейших произведений древнегреческой архитектуры является Парфенон (V в. до н. э.). На рисунках виден целый ряд закономерностей, связанных с золотым сечением. Пропорции здания можно выразить через различные

степени числа Фибоначчи $\Phi=0,618...$ Великий древнегреческий скульптор Фидий часто использовал «золотое сечение» в своих произведениях. Самым знаменитым из них был храм Афины Парфенон (рис. 17).

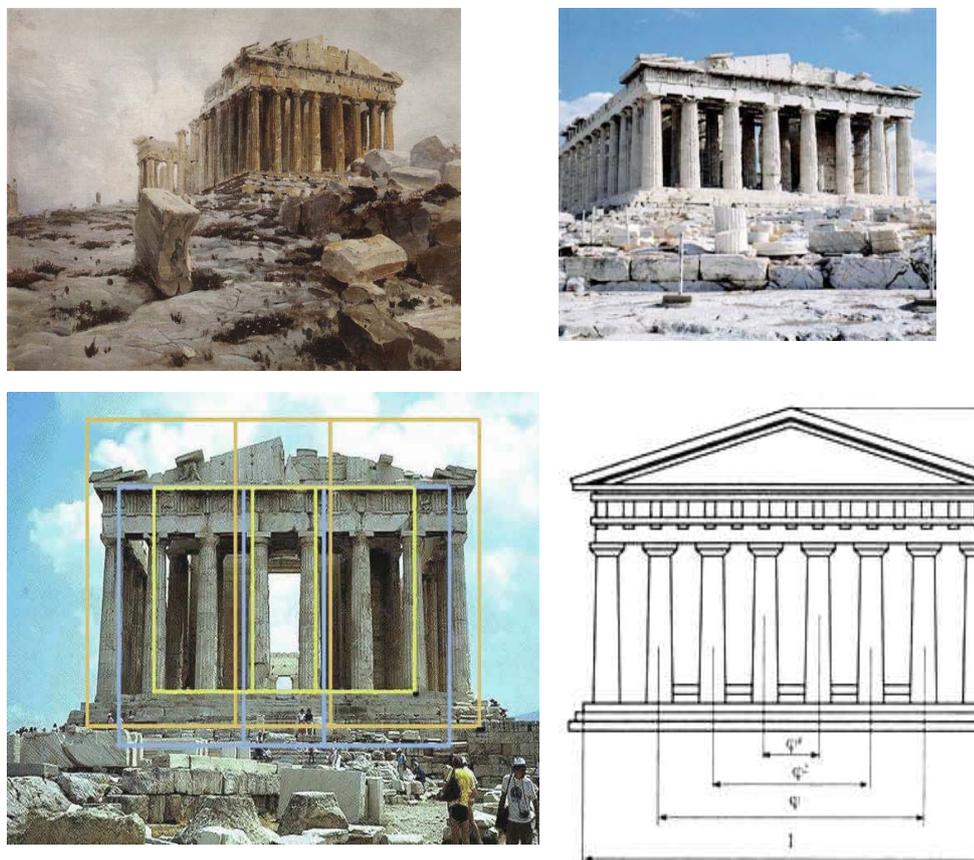


Рис. 17

Парфенон, главный храм афинского Акрополя, посвящен Афине Парфенос (т.е. Деве), богине-покровительнице города. Строительство началось в 447 г. до н.э. и продолжалось до 432 г. до н.э. Парфенон – шедевр древнегреческой архитектуры и символ греческого гения. Впоследствии по Парфенону сверялись эстетические пропорции. Парфенон имеет 8 колонн по коротким сторонам и 17 по длинным. Отношение высоты здания к его длине равно 0,618. Если произвести деление Парфенона по золотому сечению, то получим те или иные выступы фасада.

В соответствии с совершенными пропорциями золотого сечения построены египетские пирамиды, пирамиды в Гизе и Мексике.

Храмы в Греции, Китае, Индии и многое другое свидетельствуют о высоком уровне развития инженерного и строительного искусства в древнем мире. Статика была непосредственно связана с техническими запросами; ее основными проблемами был расчет выигрыша в силе, достижимого с помощью простых механических приспособлений, и вывод условий равновесия при взвешивании и плавании тел.

В фотографии, графике и живописи часто рекомендуют использовать «золотое» сечение для построения композиции. При таком подходе вся область изображения разбивается линиями «золотого» сечения на девять областей (см. рис. 18, а).

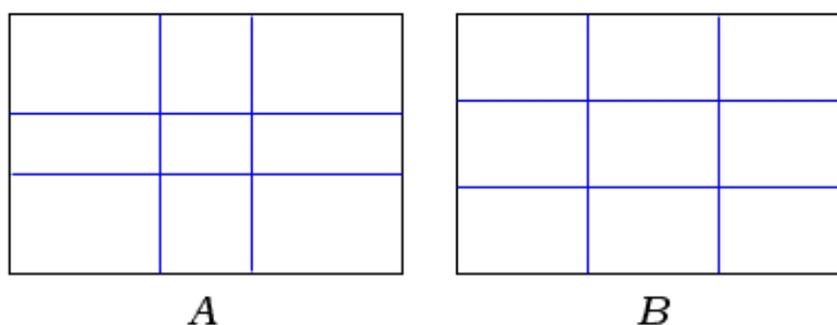


Рис. 18

Ключевые элементы композиции (важные детали, композиционные центры, линию горизонта и т.п.) рекомендуется размещать на линиях «золотого» сечения или в точках их пересечения. На рис. 18, а – сетка золотого сечения: $0,618/0,382$; рис. 18, б – сетка «третей»: $1/3; 2/3; 1$.

Отступления от законов природы в технике просто вредны — здания и сооружения, построенные с отклонениями от законов механики, недолговечны и опасны. В искусстве человеку дается шанс поупражняться в том, чего нет и быть не может. И цель этих упражнений вовсе не в том, что они имеют прямую практическую пользу, а в том, что они способствуют развитию творческих способностей человека.

Язык, на котором разговаривают механики, – язык математического аппарата – язык алгебры, геометрии, тригонометрии, векторной алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений.

Курс механики – это одна из первых инженерных дисциплин, которую изучает студент–архитектор. Этот курс должен являться связующим звеном между чисто теоретическими предметами, такими, как математика, с одной стороны, и специальными дисциплинами конструирования и проектирования сооружений, с другой. Основные положения механики опираются на законы и теоремы общей механики и, в первую очередь, на законы статики, без знания которых изучение курса механика невысказано. Наука о прочности тесно связана с физикой твердого тела, раскрывающей природу деформирования и разрушения твердых тел; с материаловедением, исследующим технические свойства металлов; с испытаниями материалов, позволяющими экспериментально изучать и оценивать количественно их механические свойства. Механика конструкций изучает прикладные вопросы механики твердого деформируемого тела – инженерные методы расчетов простейших элементов конструкций.

В античную эпоху зарождаются два направления статики: кинематическое и геометрическое. Первое направление возникло из практики пользования простыми механизмами для передвижения и поднятия грузов. При этом изучались условия нарушения равновесия, например, рассматривали неравновешенный рычаг, т.е. рычаг в движении. Второе направление развивалось в связи с расчетом равновесия архитектурных конструкций: балок, плит и т.д., подпертых в одной или нескольких точках, а также равновесия подвешенных тяжелых тел, т.е. всевозможных видов весов. Исследовались также механизмы: клещи, клин, топор, кривошип, гончарный круг и т.д.

При изложении законов механики Ньютона обойти имена Аристотеля, Архимеда, Птолемея, Коперника, Тихо-Браге, Кеплера, Галилея и Гюйгенса нельзя. Кратко изложим историю механики, начиная с Аристотеля.

Физика Аристотеля. Первая в мире книга, известная в настоящее время под названием «Физика», написана Аристотелем (384–322 гг. до н.э.). Аристотель рассматривал широкий круг вопросов – логику, поэтику, риторику, религию, историю, астрономию, медицину, физику. По праву считается, что Аристотель является основателем логики.

В аристотелевской натурфилософии фундаментальное место занимает учение о движении. Движение он понимает в широком смысле как изменение вообще, различая изменения качественные, количественные и изменения в пространстве. Для сравнения скоростей тел сопоставляли либо расстояния, пройденные ими за одинаковое время, либо промежутки времени, за которые пройдено было одинаковое расстояние. Аристотель вводит понятие «равноускоренного» движения, при котором «тело в равное время движется одинаково». В «Физике» и других книгах Аристотеля описывается (без доказательств) равновесие рычага, сложение движения, принцип виртуальных перемещений.

Архимед (287–212 гг. до н.э). Архимед был первым и практически единственным, кто в древние времена *ввел в учение о равновесии строгие доказательства*, он заложил основы гидростатики и первым рассмотрел вопрос об устойчивости (теперь говорят «остойчивости») плавающих тел. Известны следующие книги Архимеда, посвященные механике: «О равновесии плоских фигур», «О механических теоремах», «О плавающих телах». Статика Архимеда основана в значительной части на учении центра тяжести и теореме о равновесии рычага. Как следствие равновесия рычага, было сформулировано золотое правило механики. Этой теоремой Архимед первым показал, что в механике, как и в математике, любое утверждение должно быть строго

доказано. Заметим, что в связи с этой теоремой Архимеду приписывают слова: «Дайте мне точку опоры, и Я подниму (опрокину) земной шар!». Он обосновал «принципа рычага» и золотое правило механики: «Выигрываем в скорости (пути) – проигрываем в силе». Архимед был блестящим практиком-конструктором. Например, в порту Сиракуз Архимед соорудил блочно-рычажный механизм, рис. 19. Это приспособление упростило подъем и перемещение тяжелых грузов, позволило ускорить и оптимизировать работу порта.

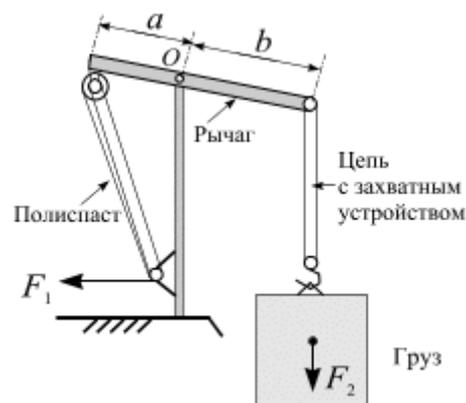
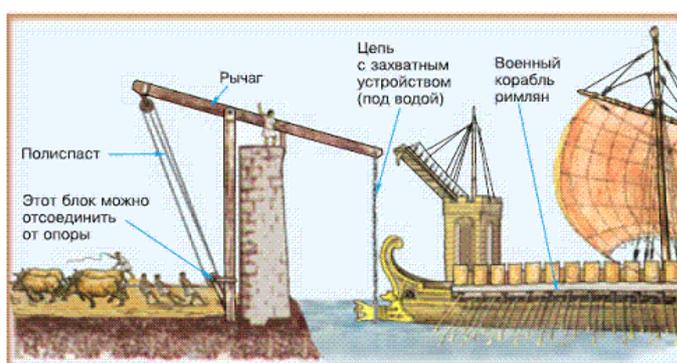


Рис. 19

Дальнейшее развитие механики в древности совершалось благодаря трудам греческих геометров, среди которых необходимо упомянуть Птолемея (2 в. н.э.). Птолемей ввел свою знаменитую *геоцентрическую картину мира*, которая господствовала в течение двадцати веков, до Н. Коперника.

В средние века царствовала метафизика, алхимия, схоластика. Начиная с 15 в., началось возрождение науки и вместе с ней и механики. В этот период особенно выделяется гениальный художник, геометр и инженер Леонардо да Винчи (1452–1519), которому принадлежат исследования в области теории механизмов и движения по наклонной плоскости. Он также строил модели летательных машин.

Некоторое время спустя Н. Коперник (1473–1543) создал *гелиоцентрическую картину мира*, которая сменила геоцентрическую картину

Птолемея и произвела большой переворот в научном мировоззрении. Благодаря работам Н. Коперника и многочисленным наблюдениям датского астронома Тихо-Браге И. Кеплер (1571–1630) получил три знаменитых закона движения планет, которые послужили И. Ньютону основанием для его закона всемирного тяготения. Далее голландец Стивен (1548–1620) исследовал законы равновесия тела наклонной плоскости и на основании этих законов пришел к выводу основных законов статики (повторил и дополнил работы Архимеда).

Средневековый период развития механики заканчивается работами Г. Галилея (1564–1642) и Х. Гюйгенса (1629–1695).

Новый период развития механики начинается со времени математика и мыслителя И. Ньютона (1643–1727), который основал современную классическую механику. Со времени И. Ньютона механика становится точной математической наукой.

Началом механики как науки можно считать 17 в., тогда сформировались основные законы классической механики. И. Ньютон создал теоретические основы механики и астрономии, открыл закон всемирного тяготения, разработал (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисления, изобрел зеркальный телескоп и стал автором важнейших экспериментальных работ по оптике. Методы механики начали быстро совершенствоваться благодаря применению мощного математического аппарата – анализа бесконечно малых (дифференциального исчисления). Математик Л. Эйлер (1707–1783) изложил аналитические методы решения задач механики (например, описал движение жидкости по ограниченному сечению) и дал аналитическую теорию движения твердого тела. В 1743 г. появился труд французского ученого Д'Аламбера, в котором автор установил основной принцип механики, носящий его имя, этот принцип дает возможность задачи динамики свести к задачам о равновесии и дает общий метод решения динамических задач.

Глава 1. Система сходящихся плоских сил



Вспомни теорию

1.1 Виды связей

Гибкая невесомая нерастяжимая нить. Невесомый стержень, шарнирно закрепленный по концам. Связь в виде гибкой невесомой нерастяжимой нити (троса, каната и т. д.) или невесомого стержня, шарнирно закрепленного по концам, рис. 1.1, а, не дает телу удаляться от точек подвеса в единственном направлении – вдоль нити или стержня. Выделим замкнутой кривой тело, равновесие которого определяем, отбрасываем гибкие связи и заменяем их действие силами реакций связей (T_A и T_B), направлены силы реакций связей вдоль нитей (стержня) к точкам ее (его) подвеса, рис. 1.1, б.

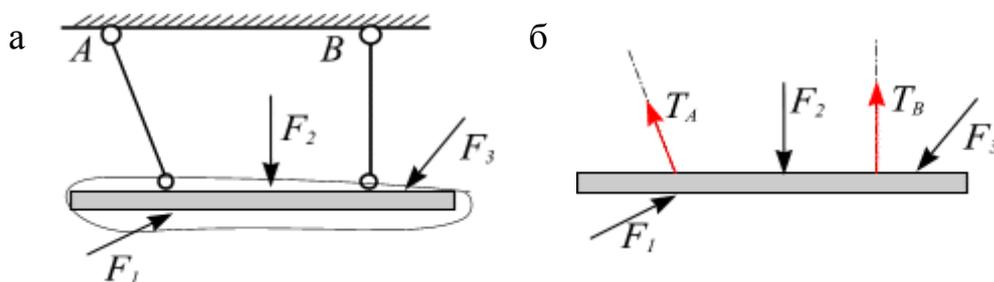


Рис. 1.1

Гладкая поверхность (плоскость) или опора. Гладкая поверхность не дает телу перемещаться только в направлении общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 1.2, а, б). Выделим замкнутой кривой тело, равновесие которого определяем (рис. 1.2, а), отбросим связь (поверхность) и заменим ее действие силой реакции связи (N), которая направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке (рис. 1.2, б).

В результате на тело будет действовать две силы – вес тела mg и реакция опоры N .

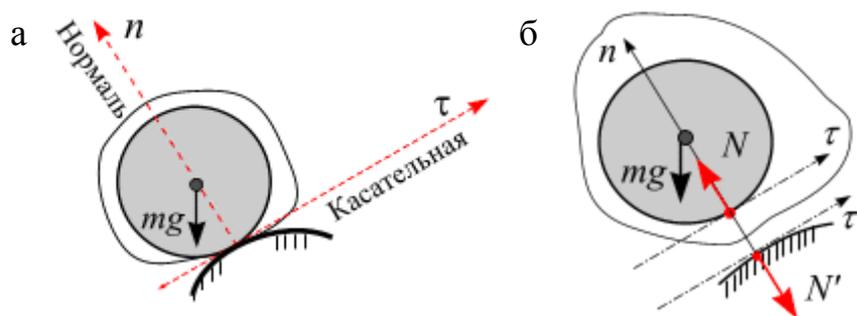


Рис. 1.2

Когда одно из соприкасающихся тел касается другого тела в точке (рис. 1.3), то реакция поверхности направлена по нормали к другой поверхности.

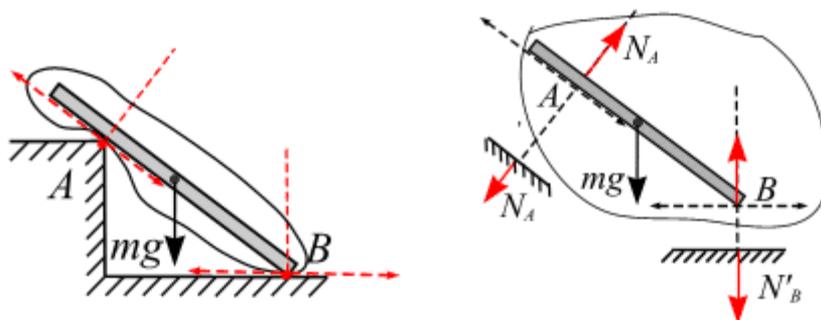


Рис. 1.3

Когда одно из тел лежит на поверхности другого тела (рис. 1.4, а, б), то реакция поверхности направлена по нормали к другой поверхности и проходит через точку центра тяжести тела.

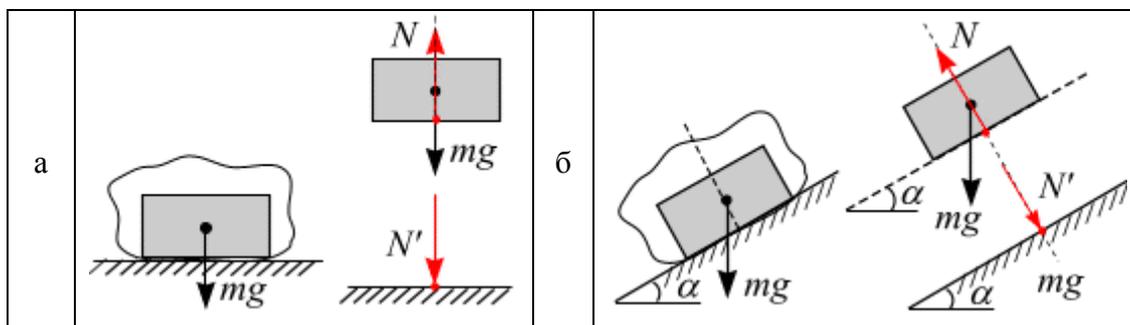


Рис.1.4

1.2. Система сходящихся сил

Системой сходящихся сил, расположенных в одной плоскости, называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 1.5, а).

Две силы, приложенные в одной точке и направленные под углом друг к другу, эквивалентны одной силе (равнодействующей), приложенной в той же точке и равной по модулю и направлению диагонали параллелограмма, стороны которого изображают величины и направления обеих заданных сил (рис.1.5, б).

Модуль равнодействующей \bar{R} можно вычислить из теоремы косинусов:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Параллелограмм, стороны которого изображают величины и направления заданных сил, состоит из двух равных треугольников, рис. 1.5, б. Сторона BC параллелограмма равна модулю вектора силы \bar{F}_2 . Если рассмотреть $\triangle ABC$, то равнодействующую силу \bar{R} можно получить как замыкающую этот треугольник, который принято называть силовым.

Направление равнодействующей \bar{R} (углы β и γ) вычисляется по теореме синусов (рис. 1.5, в):

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta}$$

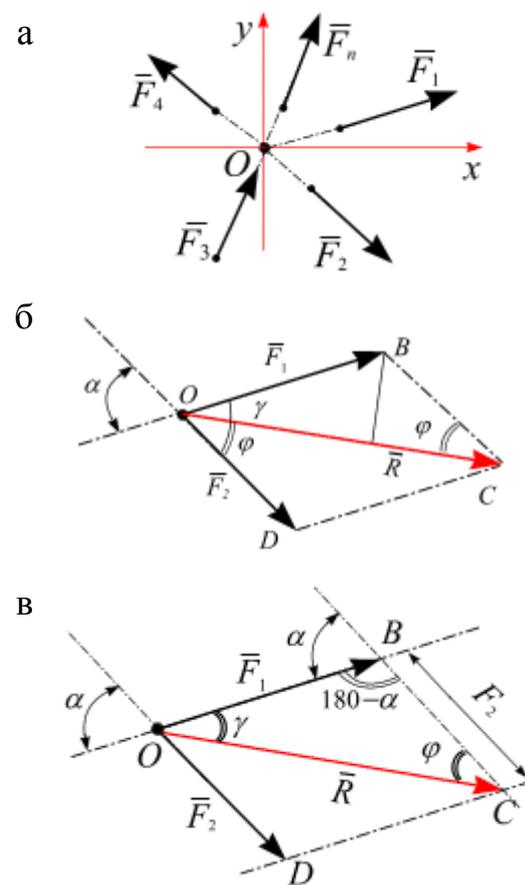


Рис. 1.5

Равнодействующая \bar{R} системы сходящихся сил (рис. 1.5, а) равна геометрической сумме этих сил:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

Геометрическое вычисление равнодействующей. Равнодействующая \bar{R} системы сходящихся сил (рис. 1.6, а) может быть получена построением силового многоугольника из заданных сил. Совмещаем начало системы координат с точкой пересечения линий действия сил, т.е. с точкой O . Из точки O проводим прямую, параллельную линии действия силы \bar{F}_1 , и откладываем в масштабе модуль этой силы (рис. 1.6, б).

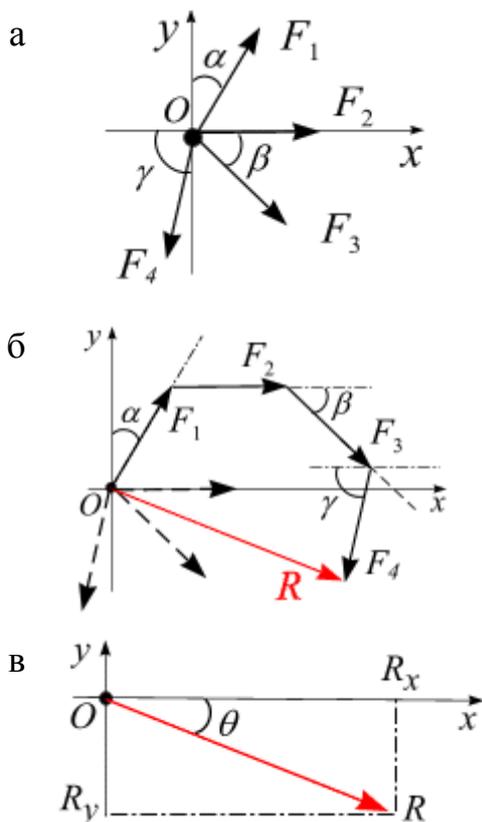


Рис. 1.6

Далее от конца вектора силы \bar{F}_1 проводим прямую, параллельную линии действия второй силы, и откладываем вдоль полученной прямой модуль второй силы, и т.д. В силовом многоугольнике конец одной из сил служит началом другой. Равнодействующая \bar{R} в силовом многоугольнике соединяет начало координат (точка приложения первой силы) с концом вектора последней. Силы в силовом многоугольнике можно изображать в любой последовательности. Измеряем длину полученного вектора \bar{R} и с учетом масштаба получаем модуль равнодействующей $|\bar{R}|$.

Измеряя угол θ , получаем направление вектора \bar{R} (рис. 5.6, в).

Аналитическое вычисление равнодействующей. Аналитическое вычисление равнодействующей основано на применении метода проекций, который основан на правиле векторной алгебры: *проекция равнодействующей на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось:*

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n \Rightarrow \begin{cases} R_x = \sum F_{xi} = F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn}; \\ R_y = \sum F_{yi} = F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn}. \end{cases}$$

Сложим аналитически четыре силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ (рис. 1.6, г).

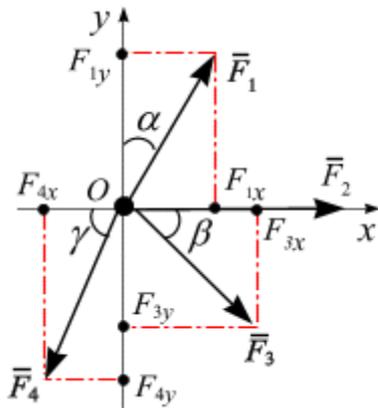


Рис. 1.6, г

Проецируя заданные векторы сил на оси Ox и Oy , получим:

$$R_x = \sum F_{ix} = F_1 \sin \alpha + F_2 + F_3 \cos \beta - F_n \cos \gamma;$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_1 \cos \alpha - F_3 \sin \beta - F_n \sin \gamma.$$

Модуль равнодействующей заданной системы сил:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2};$$

Направление равнодействующей определим по направляющему косинусу:

$$\cos(\bar{R}, \bar{x}) = \cos \gamma = \frac{R_x}{R} \Rightarrow \gamma = \arccos \frac{R_x}{R}.$$

Пример 1.1. Вычислить равнодействующую системы сходящихся сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, приложенных в точку O (рис. 3.6, а), аналитически и геометрически, если $F_1 = 6 \text{ кН}$, $F_2 = 8 \text{ кН}$, $F_3 = 12 \text{ кН}$.

Решение. Совместим прямоугольную систему координат с точкой O .

Геометрическое вычисление равнодействующей. Совместим с началом декартовой системы координат точку пересечения линий действия заданных сил (рис. 1.7, б). Из точки O проводим прямую, параллельную линии действия силы \vec{F}_1 , и откладываем отрезок вдоль этой линии, равный модулю этой силы. Далее, через конец вектора \vec{F}_1 проводим прямую, параллельную линии действия силы \vec{F}_2 (угол между линиями действия сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 равен 60°), и откладываем отрезок, равный модулю силы F_2 , через конец вектора \vec{F}_2 проводим прямую, параллельную линии действия силы \vec{F}_3 (угол между линиями действия сил \vec{F}_2 и \vec{F}_3 равен 75°), и откладываем отрезок, равный модулю силы F_3 .

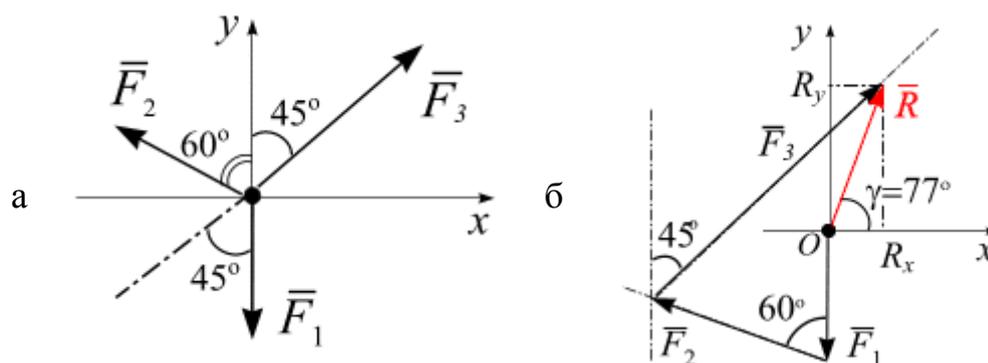


Рис. 1.7

Равнодействующая \vec{R} в силовом многоугольнике соединяет начало координат O (точка приложения первой силы) с концом вектора \vec{F}_3 (рис. 1.7, б). Измеряем модуль равнодействующей \vec{R} и угол между осью Ox и \vec{R} .

Аналитическое вычисление равнодействующей. Проецируем заданные векторы сил на прямоугольную систему координат, получим:

$$R_x = \sum F_{ix} = -F_2 \sin 60^\circ + F_3 \sin 45^\circ = -8 \cdot 0,87 + 12 \cdot 0,707 = 1,52 \text{ кН};$$

$$R_y = \sum F_{iy} = -F_1 + F_2 \cos 60^\circ + F_3 \cos 45^\circ = -6 + 8 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,707 = 6,48 \text{ кН};$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(1,52)^2 + (6,48)^2} = \sqrt{44,3} = 6,65 \text{ кН};$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{x}) = \cos \gamma = \frac{R_x}{R} = \frac{1,52}{6,65} = 0,23 \Rightarrow \gamma = 77^\circ.$$

Сравниваем полученные результаты, убедимся, что геометрические и аналитические расчеты совпали.

1.3. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Аналитическое условие равновесия. Пусть на абсолютно твердое тело действует плоская система сходящихся сил. Тогда для равновесия заданной системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая системы \bar{R} была равна нулю, т.е.

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0,$$

а силовой многоугольник, построенный для этой системы сил, был замкнутым.

В проекциях на декартовы оси координат Ox и Oy аналитическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил представляют так:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим на примере геометрическое вычисление величины силы P , которая уравновесит систему заданных сил S_1, S_2, S_3, S_4 . (рис. 3.7, а). Для этого построим силовой многоугольник из заданных сил. Из точки O (рис. 1.8, б) проводим прямую, параллельную линии действия силы S_1 , и откладываем отрезок вдоль этой линии, равный модулю этой силы, далее через его конец проводим прямую, параллельную линии действия силы S_2 (угол между линиями действия сил S_1 и S_2 равен 78°), откладываем на ней отрезок, равный модулю силы S_2 , и т.д.

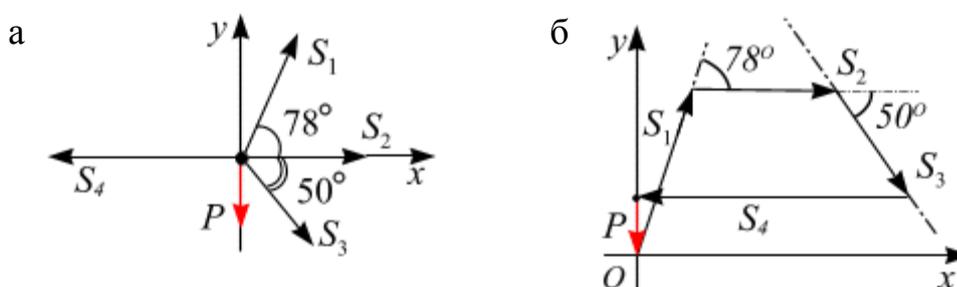


Рис. 1.8

Замыкающим вектором силового многоугольника будет вектор, соответствующий силе P . Измеряем полученный отрезок.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей координат была равна нулю, а силовой многоугольник, построенный для этой системы сил, был замкнутым.

Пример 1.2. Задана система сил: $P = 4 \text{ кН}$, $F = 3 \text{ кН}$, $Q = 5 \text{ кН}$, причем $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ (рис. 1.9). Проверить, находится ли заданная система сил в равновесии.

Решение. Совместим систему координат Oxy с точкой пересечения линий действия заданных сил (рис. 1.9, а).

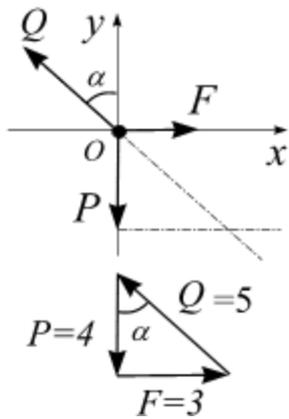


Рис. 1.9

Условия равновесия относительно выбранной системы координат запишутся так:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Q \sin \alpha + F = -5 \cdot \frac{3}{5} + 3 = 0; \\ Q \cos \alpha - P = 5 \cdot \frac{4}{5} - 4 = 0. \end{cases}$$

Равнодействующая заданной системы сил равна нулю. Построим силовой многоугольник (рис. 1.9, б). Убеждаемся, что он замкнутый.

Пример 1.3. Шар весом $P = 10 \text{ кН}$ подвешен на нерастяжимой нити в точке A и удерживается горизонтальной нерастяжимой нитью, привязанной в точке O , касаясь поверхности в точке B , угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 1.10, а). Вычислить натяжение нити давления шара на плоскость.

Решение. Выделим шар, отбросим связи и заменим их силами натяжения: T_A и реакцией гладкой поверхности N_B (рис. 1.10, а,б). Тогда на шар будут действовать три силы: вес P и две реакции связей. Все силы пересекаются в точке O (центр шара) и лежат в одной плоскости (рис. 1.10, б).

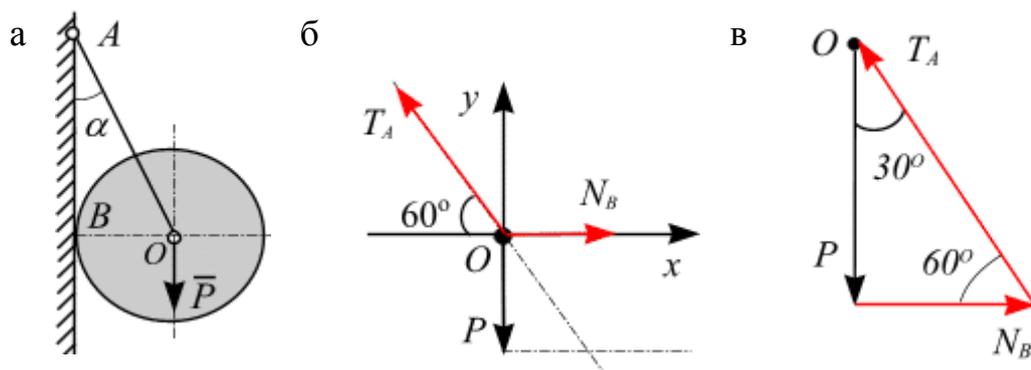


Рис. 1.10

Совместим прямоугольную систему координат с точкой пересечения линий действий сил и запишем условия равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -T_A \cos 60^\circ + N_B = 0, \\ T_A \sin 60^\circ - P = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -T_A \cdot \frac{1}{2} + N_B = 0, \\ T_A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_B = T_A \cdot \frac{1}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \\ T_A = \frac{20\sqrt{3}}{3}. \end{array} \right.$$

Получили, что $T_A = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ кН}$; $N_B = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ кН}$.

Проверим полученный результат графически. Строим силовой многоугольник (рис.3.9, в). Силовой многоугольник, построенный из сил \bar{P} , \bar{T}_A и \bar{N}_B , – замкнутый, равнодействующая этих сил равна нулю. Подтвердим полученный результат, используя теорему синусов:

$$\frac{P}{\sin 60^\circ} = \frac{N_B}{\sin 30^\circ} = \frac{T_A}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_B = \frac{P \cdot \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8,66 \text{ кН}; \\ T_A = \frac{P}{\sin 60^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,55 \text{ кН}. \end{array} \right.$$

Пример 1.4. На нерастяжимой нити ABC в её середине подвешен груз весом Q . Точки A и C , расстояние между которыми ℓ , находятся на горизонтальной прямой (рис. 1.11, а). Смещение точки B от прямой AC равно z . Вычислить натяжение нити в зависимости от отношения $\frac{2z}{\ell}$.

Решение. Рассмотрим геометрию задачи. Из $\triangle AOB$ (рис. 1.11, б) выразим гипотенузу AB и тригонометрические функции угла α как функции аргумента $\frac{\ell}{z}$:

$$AB = \sqrt{z^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell}{2} \sqrt{4\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 1}, \text{ тогда}$$

$$\sin \alpha = \frac{AO}{AB} = \frac{\ell \cdot 2}{2 \cdot \ell \sqrt{4\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 1}}; \cos \alpha = \frac{z}{AB} = \frac{2z}{\ell \sqrt{4\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 1}} = \frac{2\left(\frac{z}{\ell}\right)}{\sqrt{4\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 1}}.$$

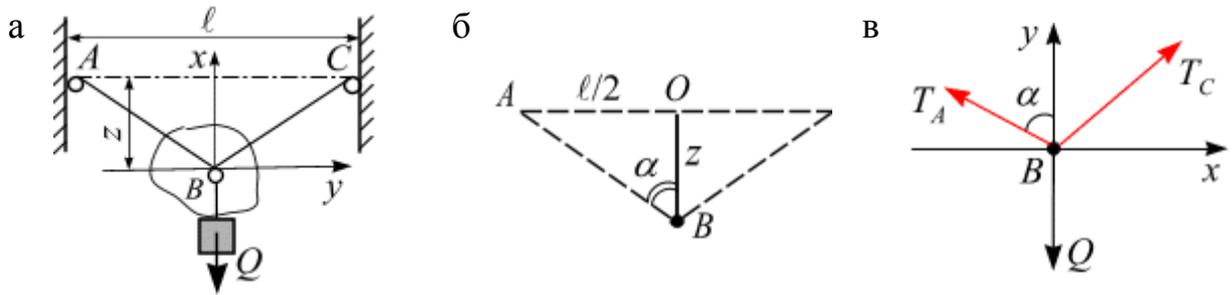


Рис. 1.11

Рассмотрим равновесие узла B : вырежем узел (рис. 1.11, в), отбросим связи, заменим отброшенные связи реакциями. Силы натяжения T_A , T_C (реакции связей) направим вдоль нитей AB и BC к точкам подвеса A и C . Совместим декартову систему координат с точкой B . Запишем и решим полученные уравнения равновесия:

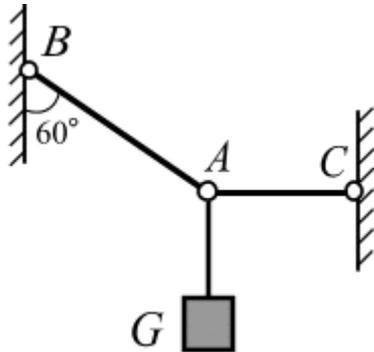
$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-T_A + T_C) \sin \alpha = 0, \\ (T_A + T_C) \cos \alpha - Q = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = T_C, \\ T_A = T_C = \frac{Q}{2 \cos \alpha}. \end{cases}$$

Имеем:

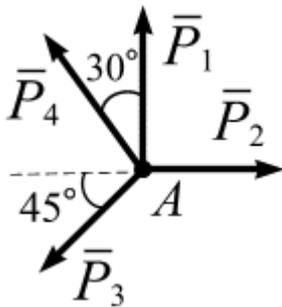
$$T_A = T_C = \frac{Q}{2 \cos \alpha} = \frac{Q \cdot \sqrt{4\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 1}}{2 \cdot 2\left(\frac{z}{\ell}\right)} = \frac{Q \cdot \ell}{4 \cdot z} \sqrt{4\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 1}, \text{ кН.}$$



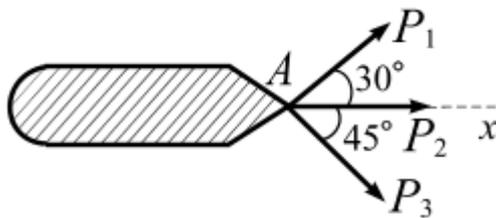
Задание для самостоятельного решения №1



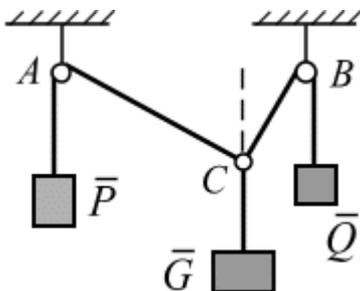
1. Груз весом $G = 60 \text{ Н}$ подвешен на двух нерастяжимых нитях BA и AC . Вычислить натяжение нитей BA и AC .



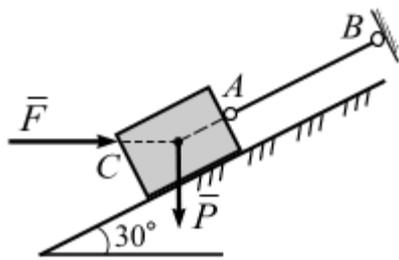
2. Силы $P_1 = 200 \text{ Н}$, $P_2 = 80 \text{ Н}$, $P_3 = 150 \text{ Н}$ и $P_4 = 100 \text{ Н}$ расположены в одной плоскости и направлены, как показано на рисунке. Вычислить величину и направление равнодействующей данной системы сил.



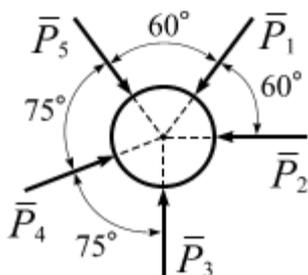
3. Три буксира тянут баржу с усилиями $P_1 = 6 \text{ кН}$, $P_2 = 8 \text{ кН}$, $P_3 = 4 \text{ кН}$. Вычислить направление буксировки баржи по отношению к оси x .



4. Три нерастяжимых нити связаны в узел C . Две нити перекинуты через блоки A и B . К концам этих нитей подвешены грузы $P = 30 \text{ Н}$ и $Q = 50 \text{ Н}$. Вычислить величину силы G и углы φ_1 и φ_2 при равновесии данной системы, если $\angle ACB = 90^\circ$.

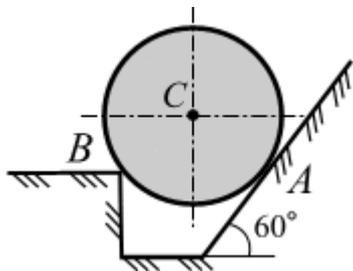


5. Груз весом $P = 1 \text{ кН}$ удерживается на наклонной плоскости веревкой AB , направленной параллельно плоскости, и горизонтальной силой $F = 100 \text{ Н}$, приложенной в точке C . Вычислить давление груза на плоскость и натяжение веревки.



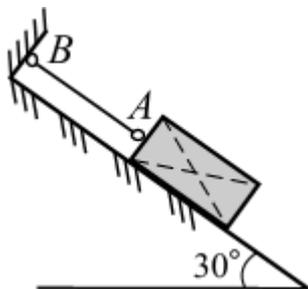
6. Задана плоская сходящаяся система сил $P_1 = 500 \text{ Н}$, $P_2 = 700 \text{ Н}$, $P_3 = 1 \text{ кН}$, $P_4 = 1,2 \text{ кН}$, $P_5 = 400 \text{ Н}$.

Вычислить равнодействующую данной системы сил.



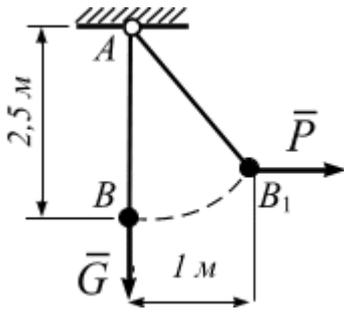
7. Однородный шар весом $P = 20 \text{ Н}$ опирается в точке A на гладкую наклонную плоскость, образующую угол с горизонтом, а в точке B на выступ, находящийся на одной горизонтали с точкой A .

Вычислить опорные реакции наклонной плоскости и выступа.



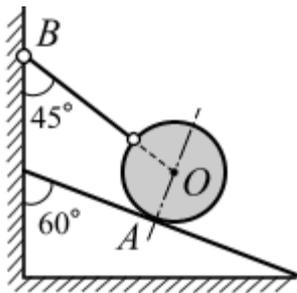
8. Груз весом $P = 3 \text{ кН}$ удерживается на наклонной плоскости тросом AB , направленным параллельно плоскости.

Вычислить натяжение троса.



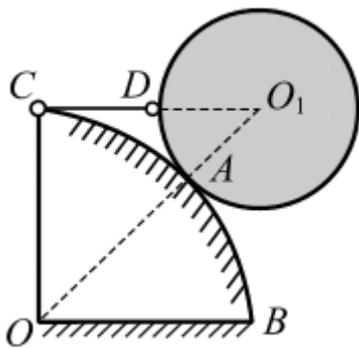
9. Какую силу P необходимо приложить к точке B троса, удерживающего груз $G = 100 \text{ Н}$, чтобы оттянуть трос на 1 м от вертикали?

Вычислить натяжение троса в положении AB .

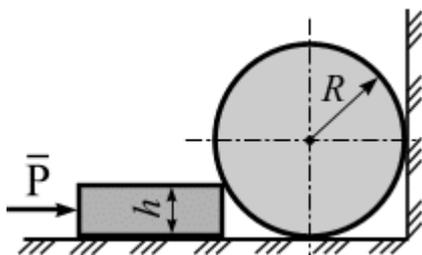


10. Шар весом P привязан нерастяжимой нитью к неподвижной точке B , а в точке A опирается на наклонную плоскость.

Вычислить реакцию в точке A и натяжение нити.

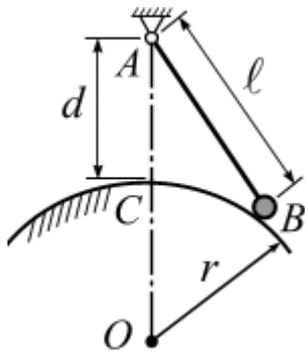


11. Однородный цилиндр A весом P и радиусом r опирается на гладкую поверхность цилиндра B радиусом R и удерживается в равновесии при помощи нити CD длиной l , расположенной в поперечной плоскости симметрии. Вычислить натяжение нити и реакцию цилиндрической поверхности.



12. Гладкий шар радиусом R и весом P , касающийся вертикальной стены, покоится на горизонтальном полу.

С какой силой F следует прижать к нему брусок высотой h , чтобы шар приподнялся над полом?



13. Шарик B весом P подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиусом r ; расстояние точки A от поверхности сферы $AC = d$, длина нити $AB = l$, прямая OA вертикальна. Вычислить натяжение T нити и реакцию опоры шарика о поверхность сферы. Радиусом шарика пренебречь.

1.4. Теорема о трех непараллельных силах



Вспомни теорию

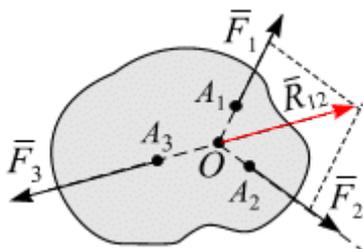


Рис. 1.12

Теорема. Если тело находится в равновесии и на него действует система трех непараллельных сил, то линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке (рис. 1.12).

Следовательно, линия действия силы \vec{F}_3 должна совпасть с линией действия силы \vec{R}_{12} .

Итак, для равновесия системы трех сил, лежащих в одной плоскости, необходимо (но недостаточно), чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке. Этой теоремой удобно пользоваться при

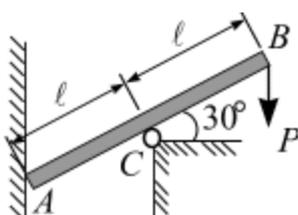


Рис. 1.13

решении задач на равновесие тел, находящихся под действием плоской системы трех сил.

Пример 1.5. Вычислить геометрически направление реакций в опорах A и C , используя теорему о трех непараллельных силах, рис. 1.13.

Решение. Выделим тело AB , отбросим связи, заменим их реакциями связи. Реакция в точке A направлена перпендикулярно вертикальной поверхности и пересекает линию действия силы P в точке O , рис. 1.14, а. При равновесии третья сила – сила реакции в точке C – также пройдет через точку O .

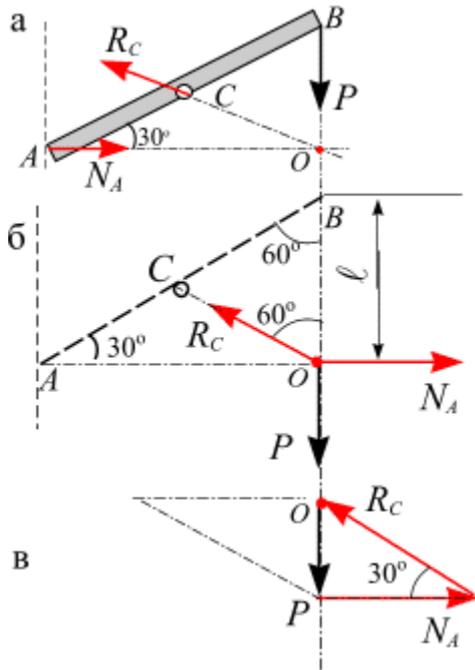


Рис. 1.14

Вычислим направление реакции в точке C из геометрии задачи.

Из $\triangle CBO$ находим:

Из $\triangle CBO$ находим:

$$\begin{cases} BO = \ell, \\ CB = \ell; \end{cases} \Rightarrow \angle BOC = 60^\circ$$

Получили, что реакция R_C направлена под углом 60° к вертикали.

Перенесем силы P, R_C, N_A в точку O (рис. 1.14, б) и построим силовой треугольник, рис. 1.14, в. Из силового треугольника получаем:

$$R_C = 2P;$$

$$N_A = R_C \cdot \cos 30^\circ = 2P \frac{\sqrt{3}}{2} = 2P\sqrt{3}.$$

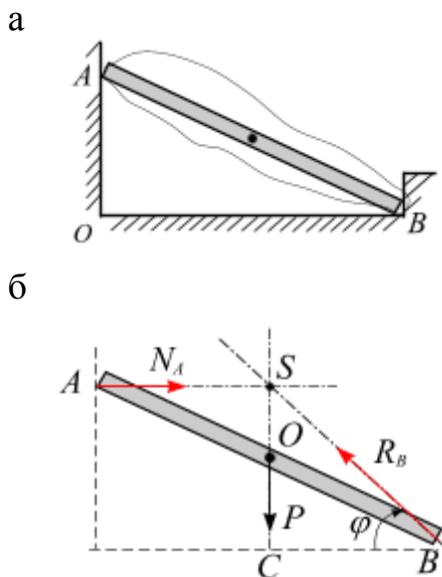


Рис. 1.15

Пример 1.6. Стержень AB длины 2ℓ опирается одним концом на гладкую вертикальную стену, а другим концом упирается в угол B , расстояние $BO = a$ (рис. 1.15, а). Вычислить направление реакции в точке B при равновесии стержня и реакции опор в точках A и B геометрически и

аналитически, если вес стержня $P = 10 \text{ кН}$; $\ell = 5 \text{ м}$, $a = 3 \text{ м}$.

Решение. Выделим тело AB , отбросим связи, заменим их реакциями связи. Реакция в точке A направлена нормально стене OA и пересекает линию действия силы P в точке S . При равновесии третья сила – сила реакции в точке B – также пройдет через точку S , рис. 1.15, б.

Вычислим направление реакции в точке B из геометрии задачи.

Из $\triangle CBO$ находим:

$$\begin{cases} BC = a, \\ OB = \ell; \end{cases} \Rightarrow CO = \sqrt{\ell^2 - a^2}.$$

Из $\triangle CBS$ находим:

$$\begin{cases} BC = a, \\ CS = 2CO = 2\sqrt{\ell^2 - a^2}; \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{CS}{CB} = \frac{2\sqrt{\ell^2 - a^2}}{a} = \frac{2\sqrt{5^2 - 3^2}}{3} \approx \frac{8}{3} \approx 2,67.$$

Вычислим реакции опор в точках A и B аналитически. Перенесем силы P, R_A, N_A в точку S (рис. 1.16, а). Совместим с точкой пересечения линий действия систему координат Sxy и запишем уравнения равновесия (рис. 1.16, а):

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B \cos \varphi + N_A = 0, \\ R_B \sin \varphi - P = 0. \end{cases} \quad (\text{a})$$

Из геометрии задачи вычислим $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Рассмотрим $\triangle CBS$, получим (рис. 3.15, б):

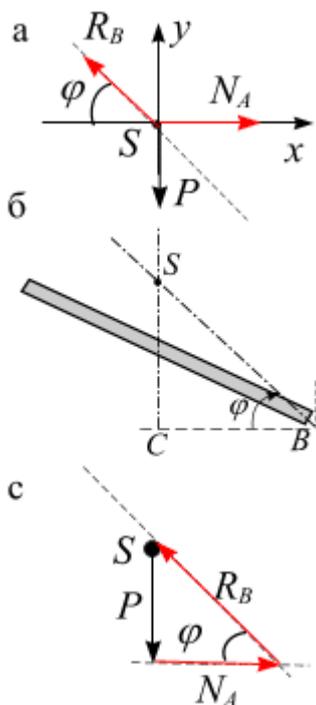


Рис. 1.16

$$\begin{aligned}
 BS &= \sqrt{CS^2 + CB^2} = \sqrt{4(\ell^2 - a^2) + a^2} = \\
 &= \sqrt{4\ell^2 - 3a^2} = \sqrt{4 \cdot 5^2 - 3 \cdot 3^2} = \sqrt{73} \approx 8,54; \\
 \sin \varphi &= \frac{CS}{BS} = \frac{2\sqrt{\ell^2 - a^2}}{\sqrt{4\ell^2 - 3a^2}} = \frac{2\sqrt{5^2 - 3^2}}{\sqrt{4 \cdot 5^2 - 3 \cdot 3^2}} = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{73}} \approx 0,94; \\
 \cos \varphi &= \frac{CB}{BS} = \frac{a}{\sqrt{4\ell^2 - 3a^2}} = \frac{3}{\sqrt{4 \cdot 5^2 - 3 \cdot 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{73}} \approx 0,35.
 \end{aligned}$$

Решим систему уравнений (а):

$$N_A = -R_B \cos \varphi \approx 10,64 \cdot 0,35 = \frac{10}{6} \sqrt{7} = \frac{5}{3} \sqrt{7} \approx 3,7 \text{ кН.}$$

$$R_B = \frac{P}{\sin \varphi} = \frac{10}{0,94} \approx 10,6 \text{ кН};$$

Проверим решение **геометрически**. Зная линии действия реакций N_A , P и R_B , построим замкнутый силовой треугольник, рис. 1.16, б. Из силового треугольника получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{N_A} \Rightarrow N_A = \frac{P}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{10}{2,67} \approx 3,74 \approx 3,7;$$

$$R_B = \sqrt{P^2 + N_A^2} = \sqrt{10^2 + \frac{10^2}{2,67^2}} = \sqrt{100 + \frac{100}{5,76}} \approx 10,6 \text{ кн.}$$

Реакции опор, вычисленные аналитически и геометрически, совпали.

Пример 1.7. Брусок AB длиной $\ell = 10$ (м), на конце которого прикреплен груз M весом

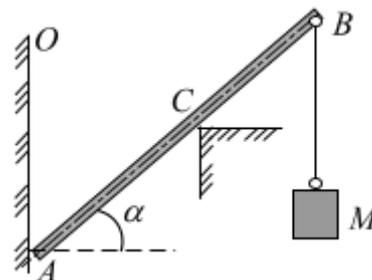
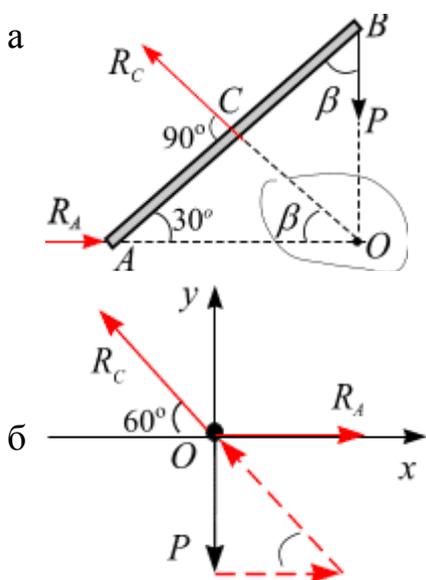


Рис. 1.17, а

$P = 2 \text{ (кН)}$, опирается в точке A на гладкую вертикальную поверхность OA , а в точке C – на уступ (рис. 1.17).

Вычислить, пренебрегая весом бруска и трением, реакции опор и расстояние AC при равновесии, если брусок образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$.



Решение. Выделим тело AB , отбросим связи и заменим их действие реакциями (рис. 1.17, а). Реакция в точке A направлена нормально поверхности OA и пересекает линию действия силы P в точке O . Согласно теореме о трех непараллельных силах, при равновесии третья сила – сила реакции точки C – также пройдет через точку O . Расстояние AC обозначим через x .

Рис.1.17, б

Рассмотрим $\triangle COB$ и $\triangle ACB$:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{CO}{CB} = \frac{CO}{10 - \ell} \Rightarrow CO = (10 - \ell) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = (10 - \ell) \cdot \sqrt{3}. \quad (\text{а})$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CO}{AC} = \frac{CO}{x} \Rightarrow CO = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (\text{б})$$

Приравняем правые части (а) и (б), получим:

$$(\ell - x) \cdot \sqrt{3} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \ell = \frac{3}{4} \cdot 10 = 7,5 \text{ м.}$$

Перенесем силы R_A , P , R_C по линиям их действия к точке O и рассмотрим полученную уравновешенную систему сходящихся сил (рис. 1.17, б). Совместим систему координат Ox с точкой пересечения линий действия трех сил и запишем уравнения равновесия.

Имеем:

Ответ: $N_A = 4,41$ (кН); $N_B = 10,93$ (кН).

$$\sum F_x = 0, \quad -R_C \cos \beta + R_A = 0, \quad \text{откуда } R_A = R_C \sin \alpha = P \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ: $z = \ell \cos^2 \alpha, \quad R_A = P \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad R_C = \frac{P}{\cos \alpha}.$

☺ **Вспомни теорию**

Шарнирное соединение, или шарнир, представляет собой устройство (С), связывающее два тела А и В (рис. 1.18, а) и позволяющее телам поворачиваться в плоскости вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости.

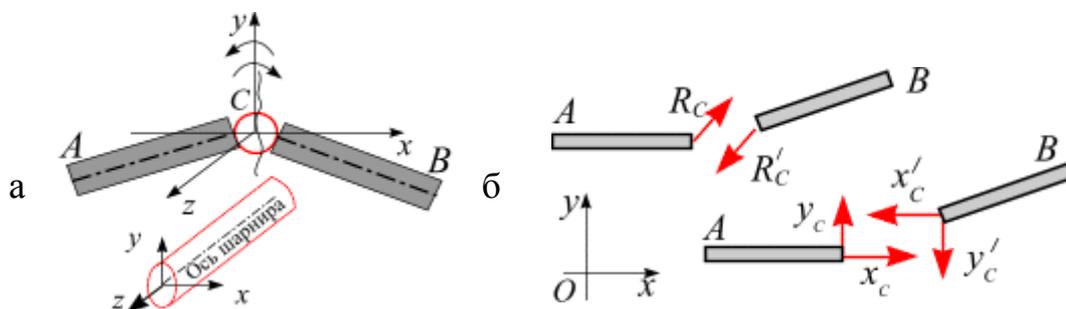


Рис. 1.18

Осевая линия будет осью шарнира. Шарнирное соединение накладывает 2 связи. Следовательно, выделяя тела А и В (разрезая шарнир), действие связи заменяют реакциями связи x_C, y_C слева от сечения и x'_C, y'_C справа от сечения С, равных по модулю и противоположных по направлению, рис.1.18, б.

Шарнирно-неподвижная опора. Эта опора (рис. 1.19, а) допускает вращение тела, опертого на эту опору в плоскости относительно шарнира и не допускает линейных перемещений. Линия действия реакции опоры проходит через ось шарнира под углом α (рис. 1.19, б).

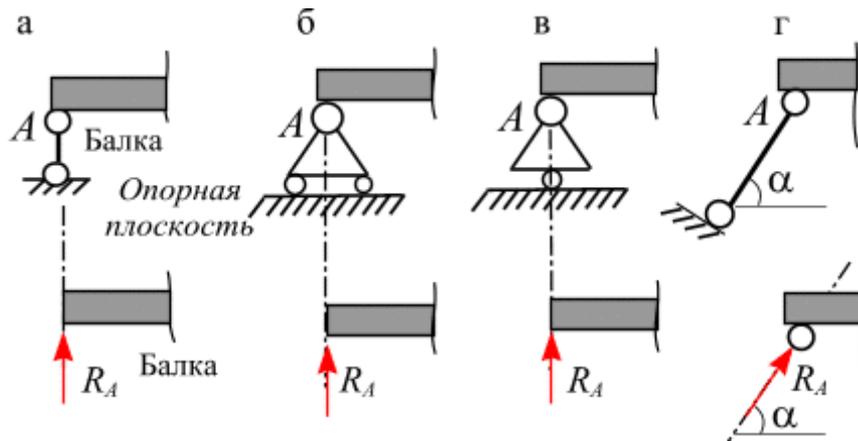


Рис. 1.19

Реакция этой опоры содержит две неизвестные – модуль R и угол α . На практике часто, *но не всегда*, принято раскладывать \vec{R} на два ортогональных направления: горизонтальное H_A и вертикальное V_A , которые обозначаются двумя опорными стержнями – носителями этих двух составляющих (рис. 1.19, в). Тогда: $R = \sqrt{H_A^2 + V_A^2}$, $\cos \beta = \frac{H_A}{R_A}$.

Шарнирно-неподвижная опора. Эта опора накладывает на тело, опертное на нее, две связи. Схематически шарнирно-неподвижная опора обозначается двумя опорными стержнями с шарнирами на концах – носителями двух связей (рис. 1.20, а).

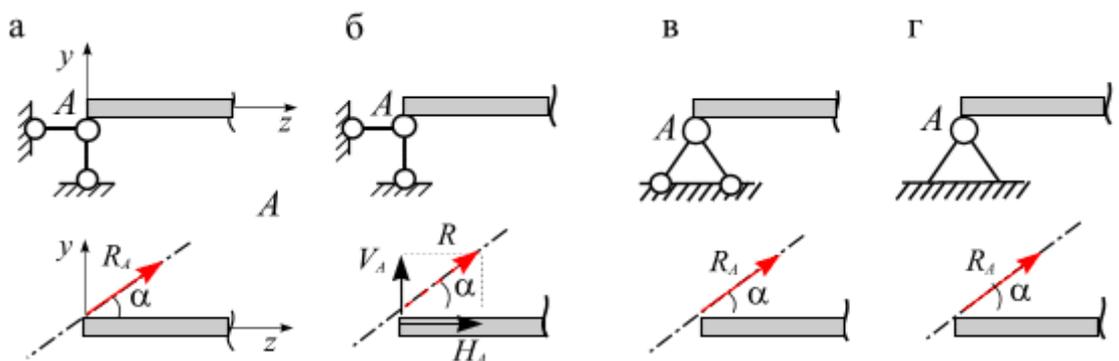


Рис. 1.20

У тела, опертного на эту опору, остается одна степень свободы – допускается поворот тела относительно шарнира и запрещается движение тела

в любом направлении. Отбрасывая опору, заменяем ее действие реакцией \bar{R} , линия действия которой проходит через ось шарнира под произвольным углом α . Реакция этой опоры содержит две неизвестные – модуль реакции опор R и угол α . На практике, как правило, принято раскладывать \bar{R} на два ортогональных направления: H_A и вертикальное V_A (рис. 1.20, б):

$$R = \sqrt{H_A^2 + V_A^2}, \quad \cos \alpha = \frac{H_A}{R}.$$

Если на абсолютное твердое тело наложены определенным образом *три связи* и на него действуют внешние силы (нагрузка), расположенные в плоскости тела, то тело будет находиться в состоянии покоя, разрушиться под этой нагрузкой оно не сможет (разрушаются только деформируемые твердые тела).

Пример 1.8. Вычислить реакции опор однопролетной балки AB длиной $2L$, нагруженной сосредоточенной силой \bar{F} , приложенной посередине балки под углом α (рис. 1.21, а).

Решение. На основании аксиомы связей освободим балку от опор A и B (рис. 1.21, б). Реакция шарнирно-подвижной опоры B направлена вертикально, ее линия действия пересекает линию действия заданной силы F в точке C' . Тогда по теореме о трех непараллельных силах линия действия реакции R_A шарнира A должна пройти через точку D (рис. 1.21, б).

Из геометрии задачи вычислим направление реакции R_A , т.е. угол β .

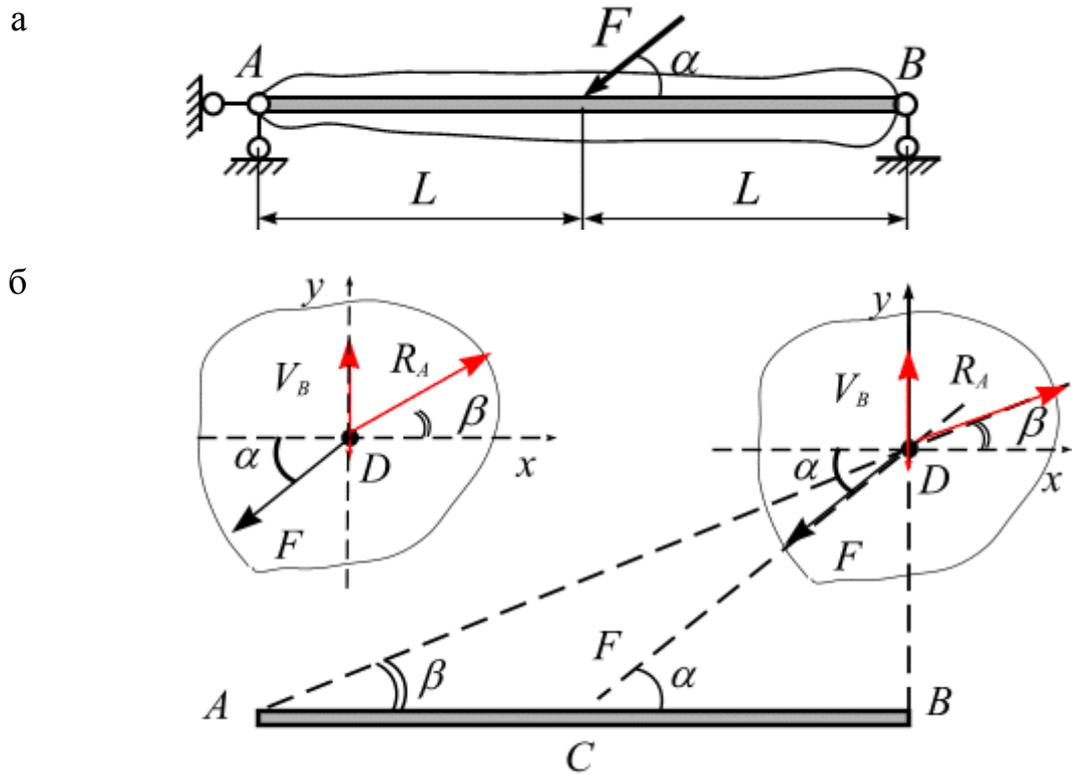


Рис. 1.21

Рассматривая $\triangle CDB$ и $\triangle ADB$, вычислим тригонометрические функции угла β :

$$\text{из } \triangle CDB \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{L}, \quad BD = L \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (\text{а})$$

$$\triangle ADB: AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = L\sqrt{4 + (\operatorname{tg} \alpha)^2};$$

$$\sin \beta = \frac{DB}{AD} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{4 + (\operatorname{tg} \alpha)^2}}; \quad \cos \beta = \frac{2L}{AD} = \frac{2}{\sqrt{4 + (\operatorname{tg} \alpha)^2}}. \quad (\text{б})$$

Продолжим линии действия сил R_A , F и V_B до их пересечения в точке D , перенесем силы в эту точку (рис. 1.21, б). Составим уравнения равновесия в проекциях на оси x и y для системы сходящихся сил, приложенных в точке D :

$$\sum F_x = 0; \quad R_A \cos \beta - F \cos \alpha = 0; \quad (\text{в})$$

$$\sum F_y = 0; \quad R_A \sin \beta - F \sin \alpha + V_B = 0. \quad (\text{г})$$

Из уравнения (в), используя (б), получим:

$$R_A = F \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{1}{2} F \cos \alpha \sqrt{4 + (\operatorname{tg} \alpha)^2}. \quad (\text{д})$$

Из уравнения (г), с учетом (а) и (д), получим:

$$\begin{aligned} V_B &= F \sin \alpha - R_A \sin \beta = F \sin \alpha - R_A \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{4 + (\operatorname{tg} \alpha)^2}} = \\ &= F \sin \alpha - \frac{1}{2} F \cos \alpha \sqrt{4 + (\operatorname{tg} \alpha)^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{4 + (\operatorname{tg} \alpha)^2}} = \\ &= F \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{1}{2} F \sin \alpha. \end{aligned}$$

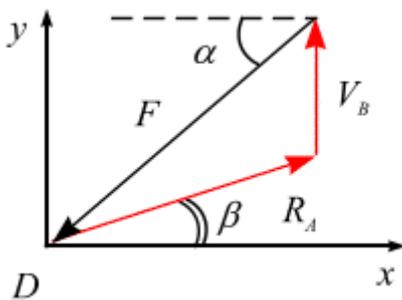


Рис. 1.21, в

Проверим полученные результаты построением силового треугольника, состоящего из сил R_A , F и V_B . Совмещаем начало системы координат с точкой D . Из точки D проводим прямую, параллельную линии действия вектора силы R_A , затем через конец вектора R_A проводим

прямую, параллельную линии действия V_B , далее проводим прямую, параллельную линии действия силы F . Силовым многоугольником, составленным из этих сил, замкнутый, равнодействующая этих сил равна нулю, рис. 1.21, в.

Ответ: $R_A = \frac{1}{2} F \cos \alpha \sqrt{4 + (\operatorname{tg} \alpha)^2}$, $V_B = \frac{1}{2} F \sin \alpha$.

Пример 1.9. Вычислить геометрически направление реакций в опорах (рис. 1.22, а), используя теорему о трех непараллельных силах, если $\ell = 2$ м. Весом балок пренебречь.

Решение. На основании аксиомы связей освободим ломаный брус SAB от опор (рис. 1.22, а). Из рис. 1.22, а видно, что ΔABC – прямоугольный и равнобедренный. Реакция гладкой поверхности N_C направлена нормально поверхности C , т.е. под углом 45° к стержню AC , ее линия действия пересекает линию действия заданной силы F в точке B .

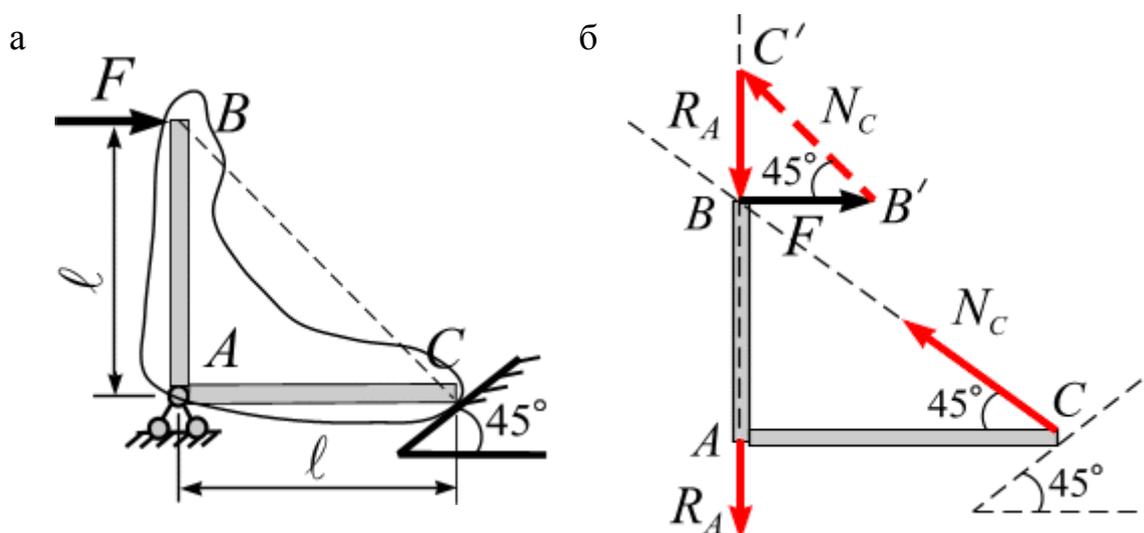


Рис. 1.22

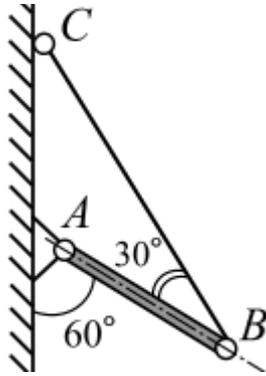
Тогда по теореме о трех непараллельных силах линия действия реакции R_A шарнирно-неподвижной опоры A должна пересечь точку B (рис. 1.22, б). Рассматривая $\Delta BB'C$, получим:

$$R_A = F; \quad N_C = F\sqrt{2}.$$

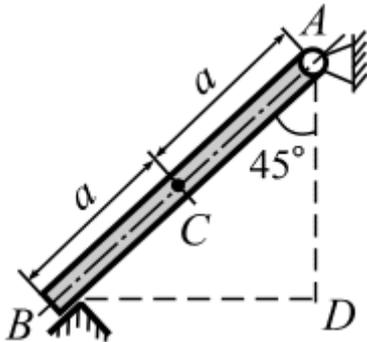
Ответ: $R_A = F; \quad N_C = F\sqrt{2}.$



Задание для самостоятельного решения № 2

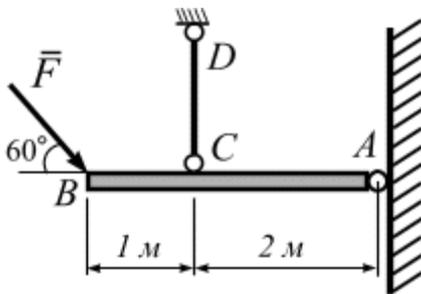


1. Однородный стержень AB прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира A и удерживается под углом 60° к вертикали при помощи веревки BC , образующей с ним угол 30° . Вычислить натяжение веревки и давление на шарнир A , если вес стержня равен 200 Н .

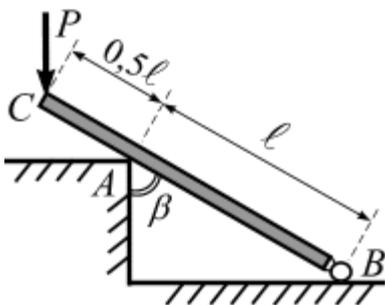


2. Оконная рама AB может вращаться вокруг оси шарнира A , а своим нижним краем B свободно опирается на уступ паза.

Вычислить реакции опор, если вес рамы $P = 89\text{ Н}$ (точка приложения C).

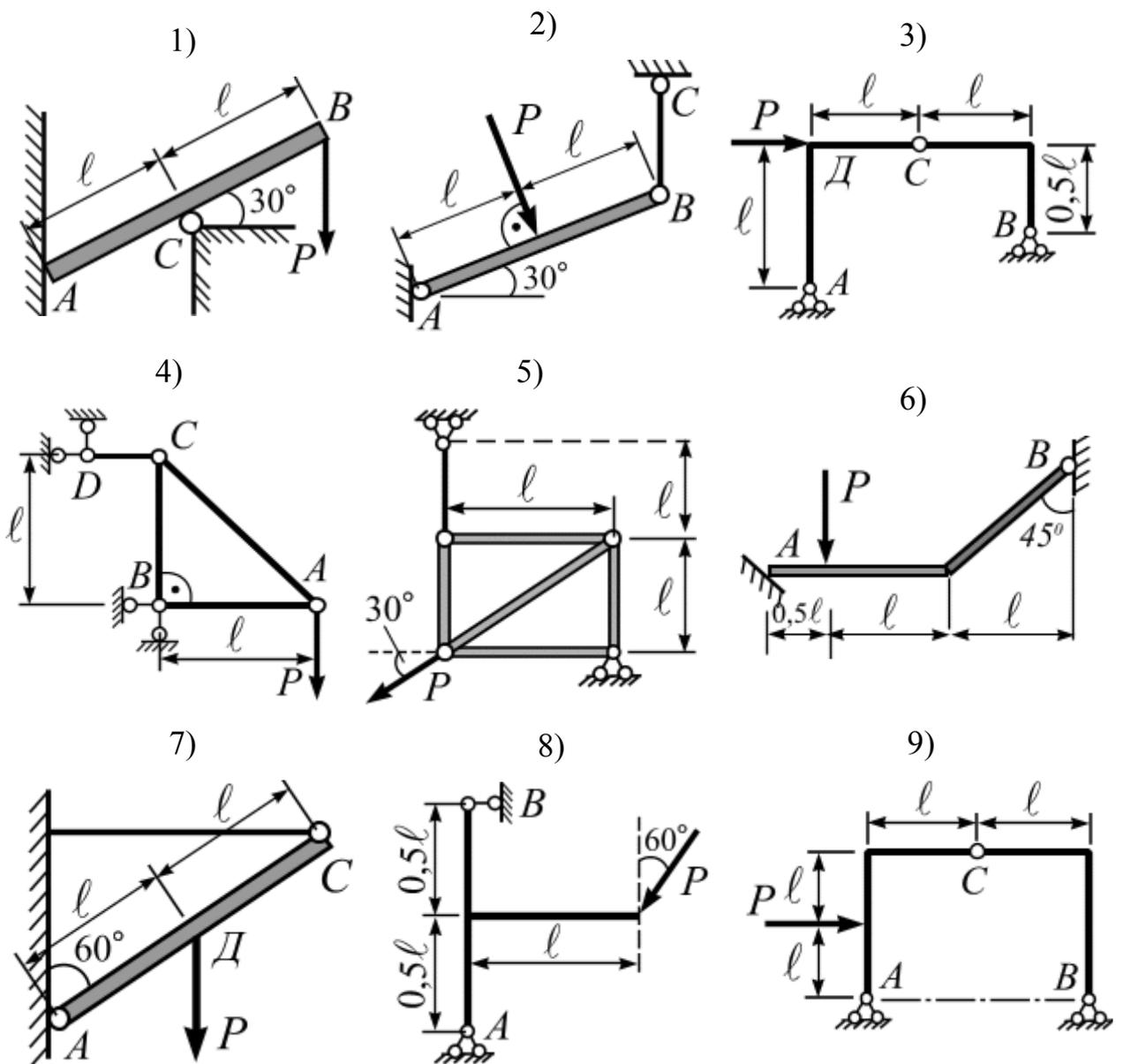


3. Горизонтальная балка AB удерживается в равновесии вертикальным невесомым стержнем CD . На балку действует сила F под углом к горизонту. Вычислить усилие в стержне CD и давление Q балки на стену, если крепления в A , C и D шарнирные. Весом шарниров и балки пренебречь.



4. На рисунке изображена балка, которая свободно опирается на уступ и своим нижним краем закреплена шарниром с горизонтальной плоскостью. На конец балки действует сила P под прямым углом к оси балки. Вычислить реакции опор, если $P = 30\text{ кН}$, $l = 1\text{ м}$, $\beta = 60^\circ$. Весом балки пренебречь.

5. Вычислить геометрически направление реакций в опорах, используя теорему о трех непараллельных силах, если $l=2$ м. Весом балок пренебречь.



Глава 2. Система параллельных сил

2.1. Равнодействующая системы двух параллельных сил

Силы, линии действия которых параллельны, определяют систему параллельных сил, рис. 2.1. Равнодействующая системы двух параллельных сил равна $R = F_1 + F_2$ и делит отрезок АВ, соединяющий точки приложения заданных сил:

$$\frac{R}{AB} = \frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC}.$$

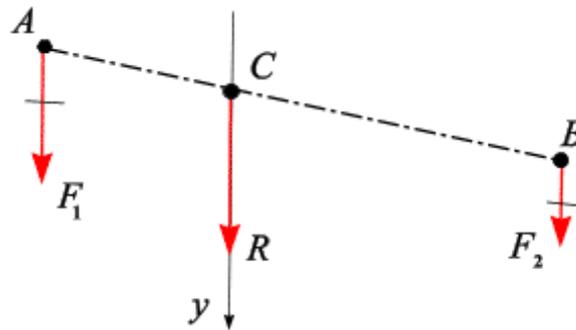


Рис. 2.1

Разложение данной силы на две, ей параллельные. Разложим заданную силу F на две, ей параллельные, рис. 2.2. Проведем через точку C

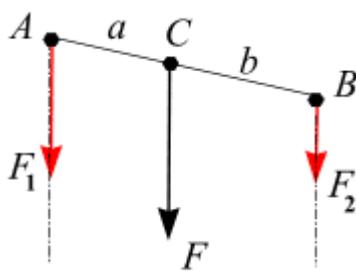


Рис. 2.2

прямую и отложим на ней точки A и B на расстоянии a и b , соответственно. Проведем через точки A и B прямые, параллельные линии действия заданной силе F , и отложим на них силы F_1 и F_2 . Модули этих сил вычислим

$$\frac{F}{a+b} = \frac{F_1}{b} = \frac{F_2}{a} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = F \frac{b}{a+b}; \\ F_2 = F \frac{a}{a+b}. \end{cases}$$

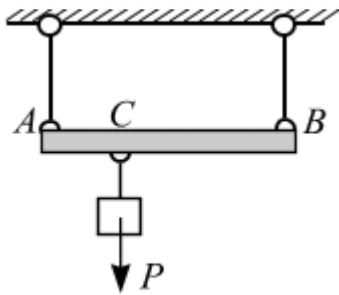


Рис. 2.3

Пример 2.1. К стержню AB , подвешенному на канатах, привязан груз весом $P = 90 \text{ кН}$. Вычислить натяжение канатов, если $AC = 0,3 \text{ м}$, $CB = 0,6 \text{ м}$ (рис. 2.3). Собственным весом стержня пренебречь.

Решение. Стержень AB находится в равновесии под действием трех сил: сил натяжения T_A и T_B , а также веса P (рис. 2.4). Равнодействующая $R = P$ уравнивает силы T_A и T_B , следовательно:

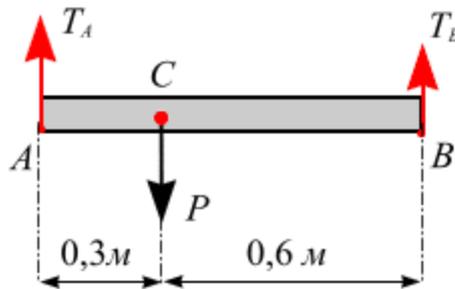


Рис. 2.4

$$\begin{cases} P = T_A + T_B, \\ \frac{P}{0,3 + 0,6} = \frac{T_A}{0,6} = \frac{T_B}{0,3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = P \frac{0,6}{0,3 + 0,6} = \frac{2}{3} P = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60 \text{ кН}; \\ T_B = P \frac{0,3}{0,3 + 0,6} = \frac{1}{3} P = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверка. Балка AB находится в равновесии, следовательно:

$$\sum F_{iy} = T_A - P + T_B = 60 - 90 + 30 = 0.$$

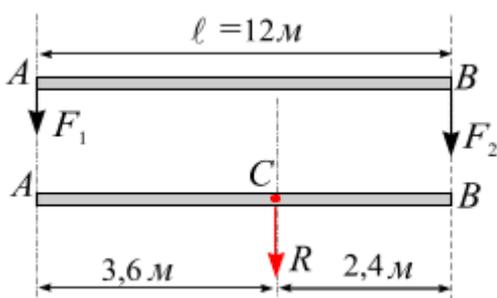


Рис. 2.5

Пример 2.2. На балку AB длиной $\ell = 6 \text{ м}$ (рис. 2.5) приложены силы $F_1 = 8 \text{ кН}$, $F_2 = 12 \text{ кН}$. Заменить силы равнодействующей.

Решение. Равнодействующая двух параллельных сил равна их алгебраической сумме, т. е.

$$R = F_1 + F_2 = 8 + 12 = 20 \text{ кН.}$$

Линия действия равнодействующей делит отрезок AB , соединяющий силы F_1 и F_2 , обратно пропорционально силам (золотое правило). Имеем:

$$\frac{R}{AB} = \frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} \Rightarrow \frac{20}{6} = \frac{8}{CB} = \frac{12}{AC},$$

откуда

$$AC = \frac{6 \cdot 12}{20} = 3,6 \text{ м, } BC = \frac{6 \cdot 8}{20} = 2,4 \text{ м.}$$

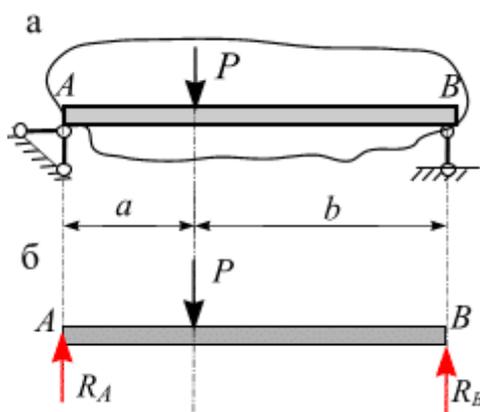


Рис. 2.6

Пример 2.3. Вычислить реакции опор в шарнирно-опертой балке AB , показанной на рис. 2.6 а.

Дано: $P = 9 \text{ кН}$, $a = 6 \text{ м}$, $b = 12 \text{ м}$.

Решение. Отбросим связи и заменим их реакциями (рис. 2.6, б). Реакция шарнирно-подвижной опоры R_B направлена параллельно линии действия внешней силы P , следовательно, их

уравновешивающая сила V_A должна быть им параллельна. Имеем

$$\frac{P}{a+b} = \frac{R_B}{a} = \frac{R_A}{b} \Rightarrow \begin{cases} R_B = P \cdot \frac{a}{a+b} = 9 \frac{6}{(6+12)} = 3; \\ R_A = P \cdot \frac{b}{a+b} = 9 \frac{12}{(6+12)} = 6. \end{cases}$$

Проверка. Балка AB находится в равновесии, следовательно:

$$\sum F_y = R_A - P + R_B = 6 - 9 + 3 = 0.$$

2.2 Распределенные силы

В механике рассматривают силы, приложенные к твердому телу в какой-либо его точке. Такие силы называют сосредоточенными.

В действительности силы бывают приложены к какой-либо части тела. Так как все аксиомы и теоремы статики формулируются для сосредоточенных сил, приложенных к твердому телу, то необходимо рассмотреть способы перехода от распределенных сил к сосредоточенным в простейших, наиболее часто возникающих случаях.

Распределенные силы характеризуются в каждой точке числовым значением и направлением вектора интенсивности этой нагрузки. Величины распределенных сил задаются в каждой точке их *интенсивностями* $q \left(\frac{H}{м} \right)$ – сила действует на единицу длины.

Равномерно-распределенная нагрузка. Пример равномерно-распределенной нагрузки приведен на рис. 2.7, а.

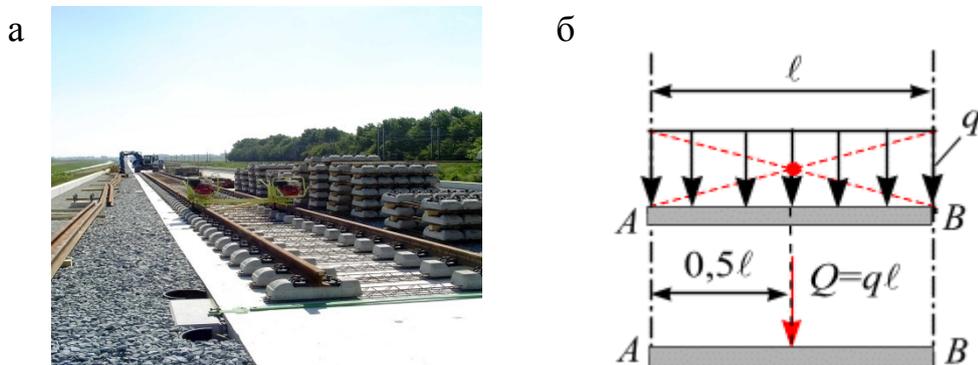


Рис. 2.7

Если сила распределена равномерно (интенсивность постоянная), то ее равнодействующую вычисляют, умножая интенсивность на соответствующую площадь или объем. Пусть на участке AB , длина которого ℓ (рис. 2.7, б), равномерно распределена нагрузка интенсивностью q . Равнодействующая Q направлена параллельно равномерно-распределенной нагрузке, приложена в середине участка AB и равна: $Q = q \cdot \ell$.

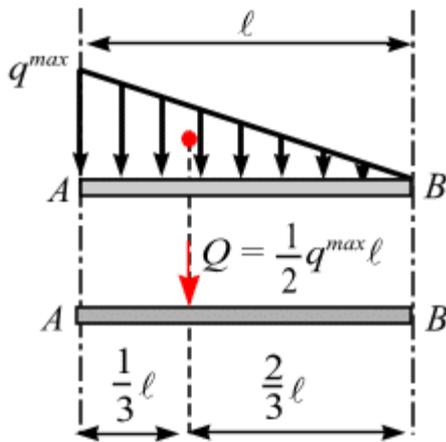


Рис. 2.8

Линейно-распределенная нагрузка. На участок AB (рис. 2.8), длина которого ℓ , приложена линейно-распределенная нагрузка интенсивностью q^{max} .

Равнодействующая Q параллельна q^{max} , приложена в точку, которая делит участок AB в соотношении $\frac{1}{3}\ell : \frac{2}{3}\ell$, и равна: $Q = \frac{1}{2}q^{max} \cdot \ell$.

2.3 Условия равновесия

Для равновесия заданной плоской системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы сил относительно любого центра приведения были равны нулю. Запишем уравнения равновесия:

$$\bar{R} = 0, \quad M_o = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0, \\ \sum M_o(\bar{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

При решении задач на равновесие твердых тел аксиома связи трактуется как метод сечения.

Метод сечения

Метод сечения для удобства запоминания представляется как метод ВОЗАУ.

Выделяем – Отбрасываем – Заменяем – Анализируем – Уравновешиваем.

Выделяем – при решении задач на равновесие твердых тел выделяем твердое тело, равновесие которого рассматриваем, окружая его замкнутой линией.

Отбрасываем опоры, связи и другие элементы конструкций, контактирующие с выделенным твердым телом, равновесие которого рассматриваем.

Заменяем действие отброшенных частей соответствующими реакциями опор или, если разрезаем невесомый стержень, внутренними усилиями. Чертим расчетную схему.

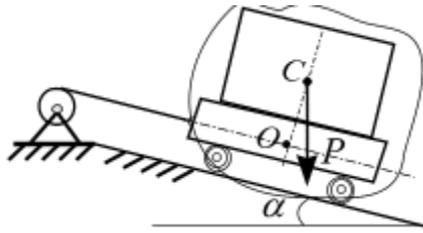
Анализируем полученную систему сил.

Уравновешиваем полученную систему сил.

Пример 2.4. Вагонетка весом $P = 10 \text{ кН}$ удерживается на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ канатом, перекинутым через блок и параллельным этой плоскости (рис. 2.9, а). Вычислить давление колес на плоскость и натяжение каната, если расстояние между колесами равно $1,5 \text{ м}$, $CO = 0,3 \text{ м}$, где точка C – центр тяжести вагонетки.

Решение. Отбросим связи, заменим их реакциями опор: T – натяжение каната, N_1, N_2 – реакции гладкой поверхности (рис. 2.9, б). Начало координат совместим с точкой O , ось Ox направим параллельно поверхности, ось Oy – перпендикулярно поверхности.

а



б

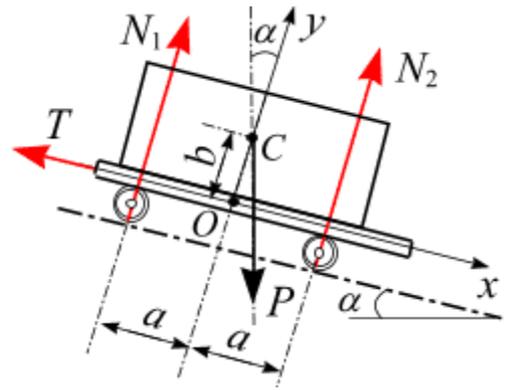


Рис. 2.9

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{iy} = 0, \\ \sum F_{ix} = 0, \\ \sum M_o(F_i) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T + P \sin \alpha = 0, \\ N_1 + N_2 - P \cos \alpha = 0, \\ -N_1 \cdot a + N_2 \cdot a - P \sin \alpha \cdot b = 0. \end{cases} \quad (\text{a})$$

Подставляя числовые значения и решая систему уравнений (а), получим:

$$\begin{cases} T = P \sin \alpha, \\ N_1 + N_2 - 10 \cdot 0,87 = 0, \\ (-N_1 + N_2) \cdot 0,75 - 10 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 10 \cdot 0,5 = 5; \\ N_1 = -N_2 + 8,7; \\ (-N_1 + N_2) \cdot 0,75 = 1,5. \end{cases}$$

Откуда:

$$T = 5 \text{ кн}; N_1 = 3,35 \text{ кн}; N_2 = 5,35 \text{ кн}.$$

Искомое давление вагонетки на поверхность равно по модулю силам N_1 и N_2 , но направлено в обратную сторону.

Моментные точки. Для равновесия произвольной плоской системы сил (F_1, F_2, \dots, F_n) , приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов сил системы относительно каких-нибудь двух любых центров

приведения A и B были равны нулю и сумма проекций сил на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через моментные точки A и B , были равны нулю:

$$\begin{cases} \bar{R} = 0, \\ \bar{M} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum M_A(F_i) = 0, \\ \sum M_B(F_i) = 0, \\ \sum F_x = 0. \end{cases}$$

Центры приведения A и B принято называть *моментными точками*.

Пример.2.5. Вычислить реакции опор балки AB , опертой на шарнирно-подвижную и шарнирно-неподвижную опоры и нагруженной, как показано на рис. 2.10, а. Дано: $P = 10 \text{ кН}$, $Q = 12 \text{ кН}$, $\ell = 6 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Используя метод сечения, отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 2.10, б).

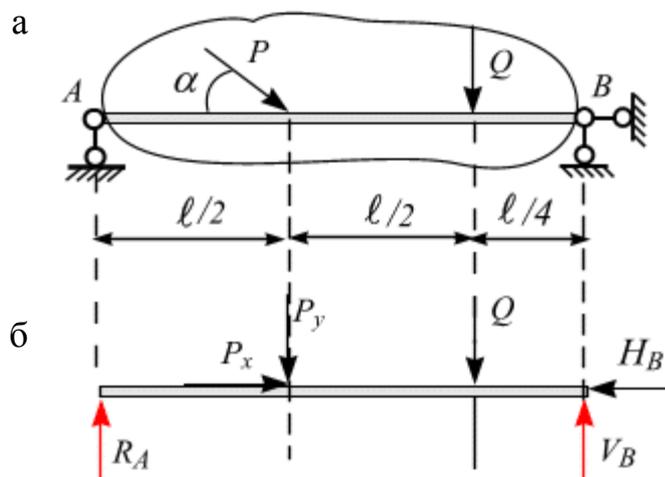


Рис. 2.10

Разложим силу P на составляющие P_x и P_y :

$$P_y = P \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}, \quad P_x = P \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,87 = 8,7 \text{ кН}.$$

За точки приведения примем точки на шарнирах балки, т.е. точку A (точка пересечения линий действий реакции опор V_A и H_B) и точку B (точка пересечения линий действий реакции опор V_B и H_B). Запишем уравнения равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0, \\ \sum F_{ix} = 0; \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_B \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4} \right) - Q \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \right) - P_y \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \\ -R_A \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4} \right) + P_y \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4} \right) + Q \cdot \frac{\ell}{4} = 0, \\ P_x - H_B = 0. \end{array} \right. \quad (a)$$

Подставляя числовые значения и решая систему уравнений (а), получим

$$V_B = \frac{4}{5} \left(Q + \frac{1}{2} P_y \right) = \frac{4}{5} \left(12 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = 11,6 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{4} Q + \frac{3}{4} P_y \right) = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot 5 \right) = 5,4 \text{ кН};$$

$$H_B = P_x = 8,7 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum F_y = R_A - P_y - Q + V_B = 5,4 - 5 - 12 + 11,6 = 0.$

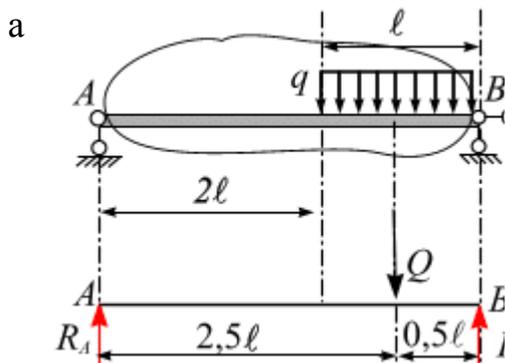


Рис. 2.11

Пример 2.6. Вычислить реакции опор балки AB , опертой на шарнирно-подвижную и шарнирно-неподвижную опоры, нагруженной, как показано на рис. 2.11, а. Дано: $q = 4 \text{ Н/м}$, $\ell = 8 \text{ м}$.

Решение. Отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями

(рис. 2.11, б). Распределенную нагрузку интенсивностью q заменим равнодействующей:

$$Q = q \cdot \ell = 4 \cdot 8 = 32 \text{ кН}.$$

За моментные точки примем точки на шарнирах балки, т.е. точку A (точка пересечения линий действий реакции опор V_A и H_B) и точку B (точка пересечения линий действий реакции опор V_B и H_B). Запишем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B(\ell + 2\ell) - Q(0,5\ell + 2\ell) = 0, \\ -R_A(2\ell + \ell) + Q \cdot 0,5\ell = 0. \end{cases}$$

Подставляя числовые значения и решая систему уравнений (а), получим

$$R_B(8 + 2 \cdot 8) - 32(4 + 2 \cdot 8) = 0 \Rightarrow 24R_B = 640 \Rightarrow R_B \approx 26,7 \text{ кН};$$

$$R_A(2 \cdot 8 + 8) - 32 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow 24R_A = 128 \Rightarrow R_A \approx 5,3 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_y = R_A - Q + R_B = 5,3 - 32 + 26,7 = 0.$$

Ответ: $V_B = 26,7 \text{ кН}; R_A = 5,3 \text{ кН}.$

Пример 2.7. Вычислить реакции в балке AB , рис. 2.12.

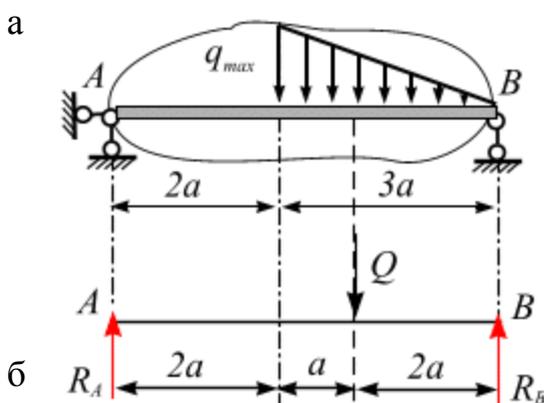
Дано: $q_{\max} = 16 \text{ кН/м}, a = 2 \text{ м}.$

Решение. Отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями. Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 2.12, б). Распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой Q :

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot 3a = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 3 \cdot 2 = 48 \text{ кН}.$$

Линия действия Q делит отрезок, равный $3a$, в соотношении

$$\frac{1}{3} \cdot 3a : \frac{2}{3} \cdot 3a.$$



Запишем уравнения равновесия и решим их.

$$\sum M_A = 0,$$

$$-Q \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3a + 2a \right) + R_B (3a + 2a) = 0,$$

$$-48 \cdot (2 + 2 \cdot 2) + R_B (3 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = 0$$

Рис. 2.12

$$\Rightarrow 10R_B = 288 \Rightarrow R_B = 28,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A (2a + 3a) + Q \cdot 2a = 0,$$

$$-R_A \cdot 10 + 48 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 10R_A = 192 \rightarrow R_A = 19,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{Проверка: } \sum F_{iy} = R_A - Q + R_B = 19,2 - 48 + 28,8 = 0.$$

Пример 2.8. Вычислить реакции опор балки AB , опертой на шарнирно-подвижную и шарнирно-неподвижную опоры, нагруженной, как показано на рис. 2.13, а. Дано: $P = 10 \text{ кН}$, $q = 4 \text{ Н/м}$, $L = 8 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Используя метод сечения, отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 2.13, б).

Распределенную нагрузку интенсивностью q заменим равнодействующей: $Q = q \cdot L = 4 \cdot 8 = 32 \text{ кН}$.

Разложим силу P на составляющие P_x и P_y :

$$P_y = P \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}, \quad P_x = P \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,87 = 8,7 \text{ кН}.$$

За точки приведения примем точку C (точка пересечения линий действий реакции опор V_A и H_B) и точку B (точка пересечения линий действий реакции опор V_B и H_B). Запишем уравнения равновесия:

$$\sum M_C = 0, \quad V_B \cdot 2L - P_y \cdot L - P_x \cdot \left(L + \frac{L}{4}\right) + Q \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right) = 0;$$

$$V_B \cdot 2 \cdot 8 - 5 \cdot 8 - 8,7 \cdot (8 + 2) + 32(4 + 2) = 0;$$

$$V_B = \frac{1}{16}(40 + 87 - 192) = \frac{1}{16}(-65) = -4,1 \text{ кН.}$$

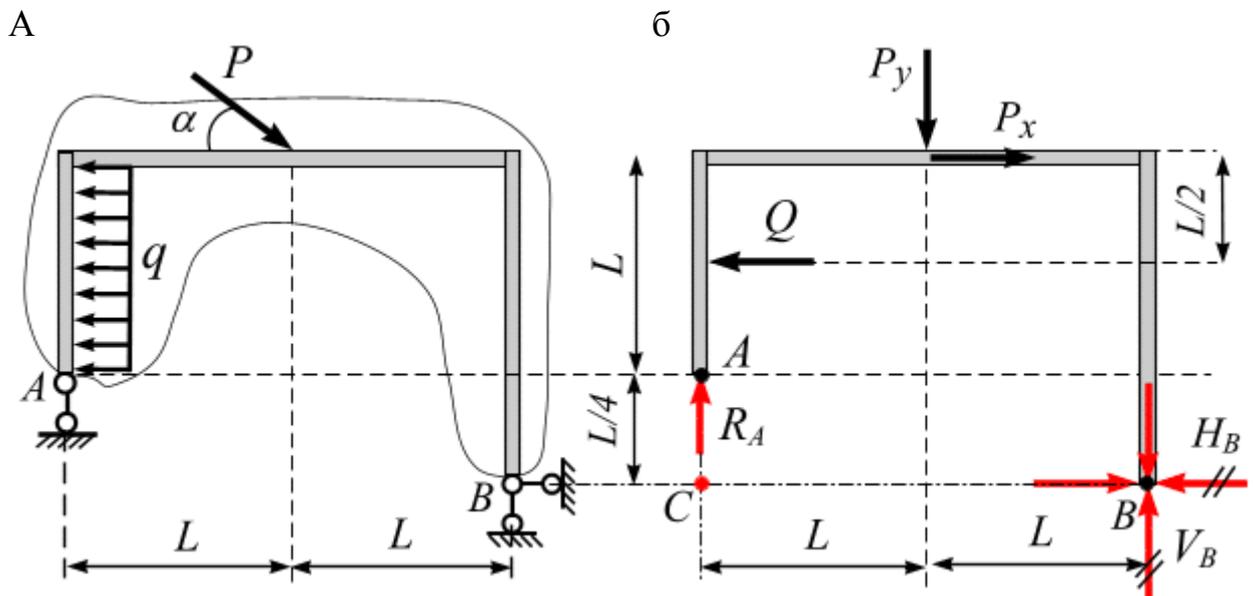


Рис. 2.13

На чертеже меняем направление реакции V_B , рис. 2.13, б.

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A \cdot 2L + Q \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right) - P_x \left(L + \frac{L}{4}\right) + P_y L = 0;$$

$$-R_A \cdot 2 \cdot 8 + 32 \cdot (4 + 2) - 8,7(8 + 2) + 5 \cdot 8 = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{16}(192 - 87 + 40) = \frac{1}{16}(145) = 9,1 \text{ кН;}$$

$$\sum F_{ix} = 0, \quad -Q + P_x - H_B = 0, \quad H_B = -Q + P_x = -32 + 8,7 = -23,3 \text{ кН.}$$

На чертеже меняем направление реакции H_B , рис. 6.16, б.

$$\text{Проверка: } \sum F_y = R_A - P_y - V_B = 9,1 - 5 - 4,1 = 0.$$

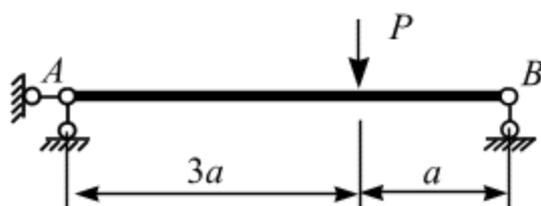
Ответ: $H_B = 8,7 \text{ кН}$, $V_B = 11,6 \text{ кН}$; $R_A = 5,4 \text{ кН}$.



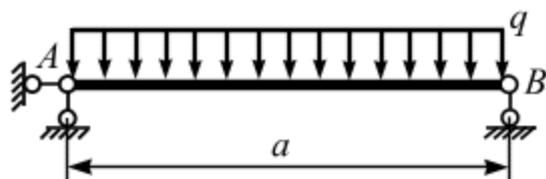
Задание для самостоятельного решения № 3

Вычислить реакции опор в балках, если $P = 10 \text{ Н}$, $q = 4 \text{ Н/м}$, $q_{\max} = 6 \text{ Н/м}$, $a = 2 \text{ м}$.

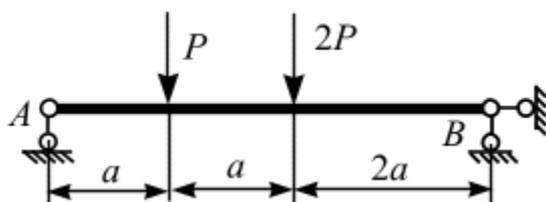
1.



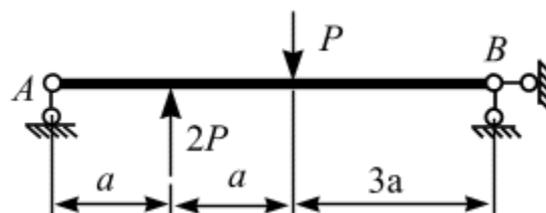
2.



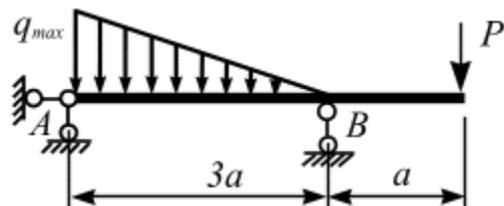
3.



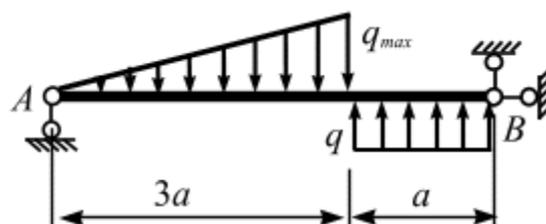
4.



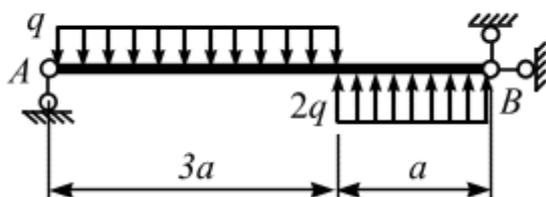
5.



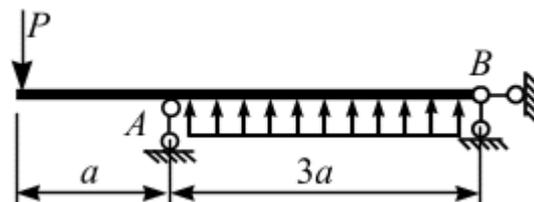
6.



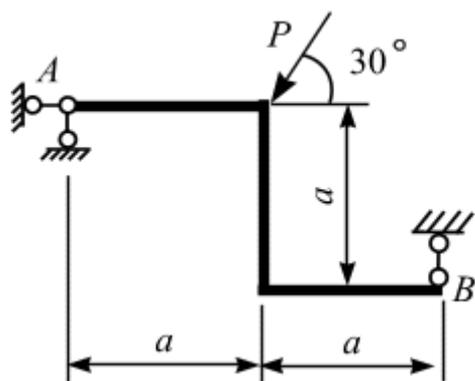
7.



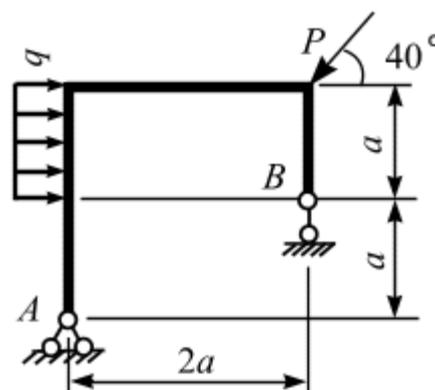
8.



9.



10.



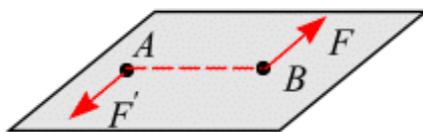
2.4. Пара сил

Парой сил называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны.

Алгебраическим моментом пары называется величина, равная произведению модуля одной из сил пары (например, F') на ее плечо AB – кратчайшее расстояние между линиями действия сил F' и F'' , взятому с соответствующим знаком (рис. 2.14, а, б):

$$m = \pm F' \cdot AB.$$

а



б

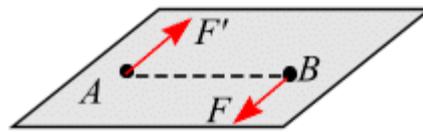


Рис. 2.14

Момент пары *положительный*, когда пара стремится повернуть тело против часовой стрелки, и *отрицательный* – по ходу стрелки (рис. 2.13, а, б).

На практике пару сил заменяют дуговой стрелкой, направленной по направлению пары (рис. 2.14,а, б).

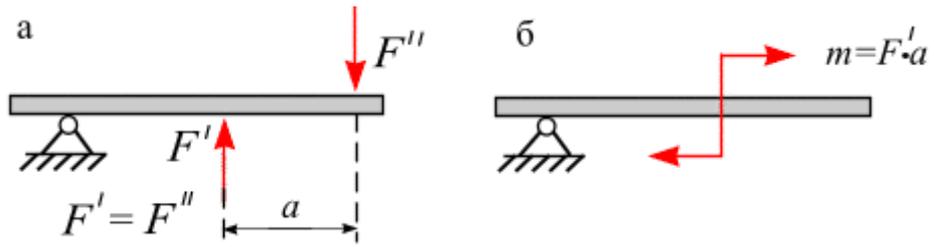


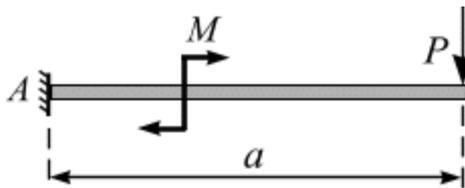
Рис. 2.14



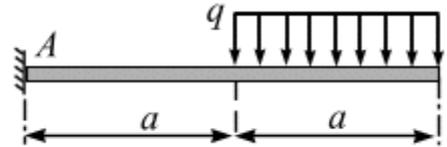
Задание для самостоятельного решения № 4

1. Используя основную форму уравнений равновесия, вычислить реакции опор консольных балок, если $P = 8 \text{ Н}$, $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $q = q_{\max} = 3 \text{ Н/м}$, $a = 2 \text{ м}$.

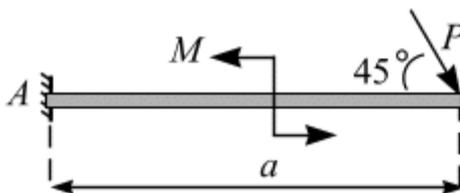
1



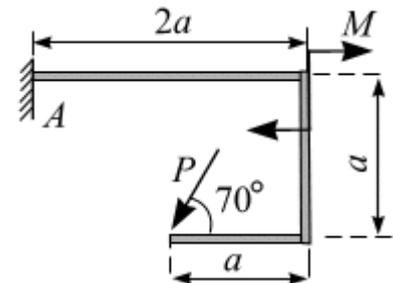
2



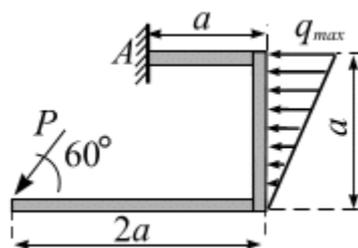
3



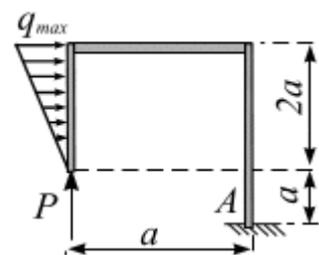
4



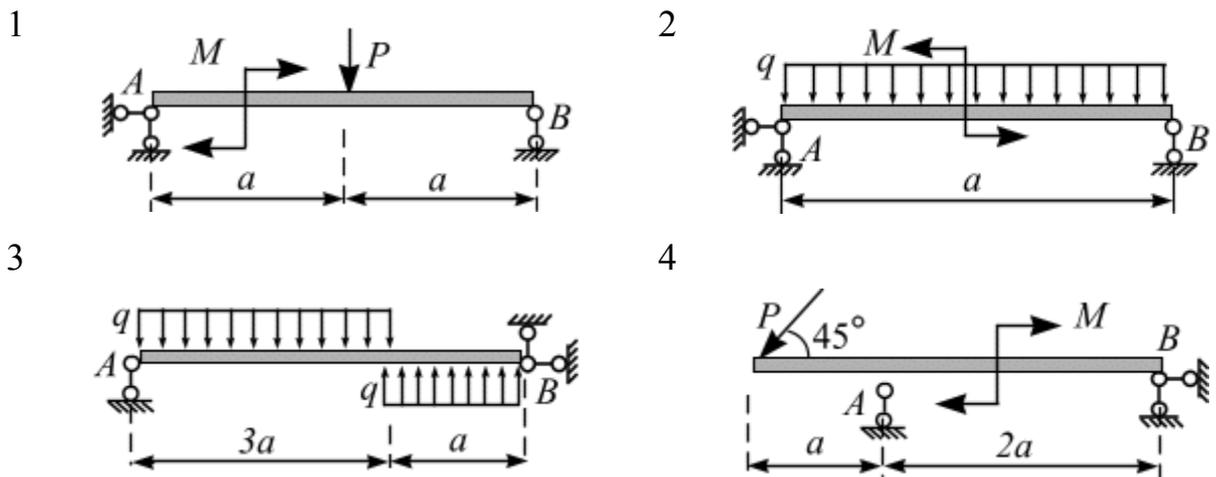
5



6



2. Используя моментную точку, вычислить реакции опор в балках, если $P = 10 \text{ Н}$, $M = 5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $q = q_{\max} = 6 \text{ Н/м}$, $a = 2 \text{ м}$.



Реакция заделки. Рассмотрим твердое тело AB , один конец которого заделан в стену в точке A . Такое крепление тела называют жесткой заделкой (рис.2.15, а).

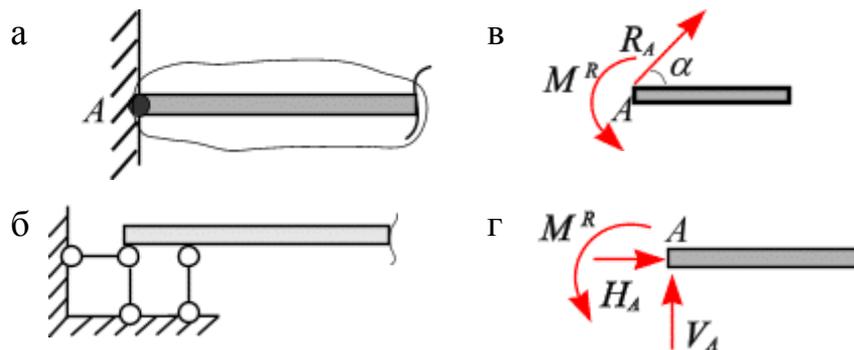


Рис. 2.15

Жесткое закрепление накладывает на тело три связи, оно лишает тело трех степеней свободы. В такой опоре возникают: реактивный момент M^R и реакция \bar{R}_A (рис. 2.15, в). Часто \bar{R}_A раскладывают на вертикальную – V_A и горизонтальную – H_A составляющие опорной реакции (рис. 2.15, г).

Жесткую заделку представляют также в виде опорных стержней (рис. 2.15, б). Твердое тело с одним жестко закрепленным концом называется консольной балкой, или консолью. Балка, в которой количество неизвестных опорных реакций равно количеству независимых уравнений равновесия, называется статически определимой. Если число связей превышает число

уравнений равновесия, то балка называется статически неопределимой.

При вычислении реакций в заделке за точку приведения выбирают точку закрепления консоли в заделку (точка A на рис. 2.15, а).

Пример 2.8. Вычислить реакции в консольной балке. Балка нагружена, как показано на рис.2.16, а. Дано: $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $P = 12 \text{ кН}$, $\ell = 2 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$.

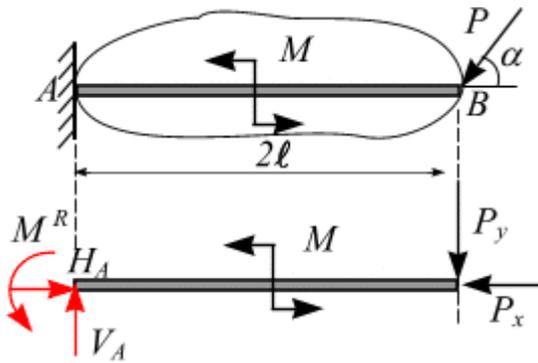


Рис. 2.16

Решение. Применив метод сечения, рассмотрим равновесие балки AB . Отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 2.16, б). Разложим силу P на составляющие:

$$P_x = P \cos \alpha, \quad P_y = P \sin \alpha.$$

Запишем уравнения равновесия и

решим их:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0, \\ \sum F_{iy} = 0, \\ \sum M_A = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A - P_x = 0, \\ V_A - P_y = 0, \\ M_R + m - P_y \cdot 2\ell = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = P_x, \\ V_A = P_y, \\ M_R = -m + P_y \cdot 2\ell. \end{cases}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$H_A = P_x = P \cos \alpha = 12 \cos 60^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН};$$

$$V_A = P_y = P \sin \alpha = 12 \sin 60^\circ = 12 \cdot 0,87 = 10,44 \text{ кН};$$

$$M_R = -m + P \sin \alpha \cdot 2\ell = -6 + 12 \cdot 2 \cdot 2 \sin 60^\circ = -6 + 48 \cdot 0,87 = 35,76 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Проверка: } \sum M_B = M_R - V_A \cdot 2L + m = 35,76 - 10,44 \cdot 2 \cdot 2 + 6 = 0.$$

Ответ: $H_A = 6 \text{ кН}$; $V_A = 10,44 \text{ кН}$; $M_R = 35,76 \text{ кН/м}$.

Пример 2.9. Вычислить реакции в консольной балке. Балка нагружена, как показано на рис. 2.17, а. Дано: $q = 6 \text{ кН/м}$, $a = 1 \text{ м}$.

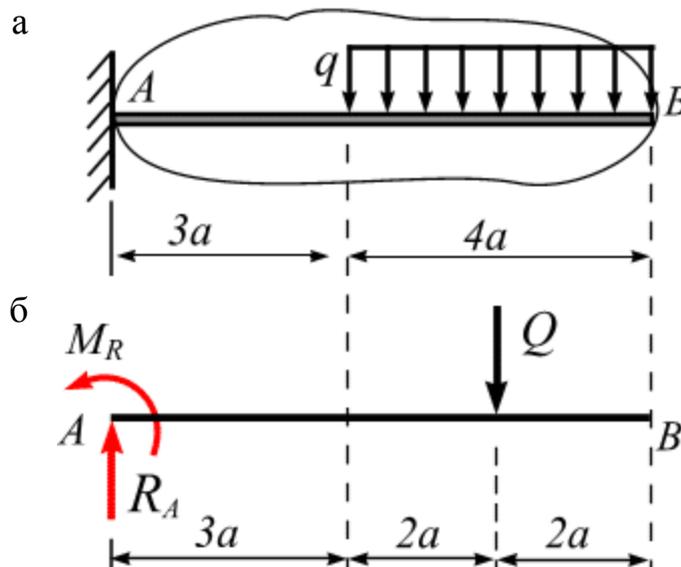


Рис. 2.17

Решение. Применив метод сечения, рассмотрим равновесие балки AB (рис. 2.17, б).

Отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 2.17, б).

Распределенную нагрузку интенсивностью q заменим равнодействующей:

$$Q = q \cdot 4a = 6 \cdot 4 \cdot 1 = 24 \text{ кН}.$$

Запишем уравнения равновесия и решим их:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, \quad -Q \cdot (2a + 3a) + M_R &= 0, \\ -24 \cdot (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) + M_R &= 0, \\ M_R &= 120 \text{ кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad R_A - Q = 0,$$

$$R_A - 24 = 0, \quad R_A = 24 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \text{Проверка: } \sum M_B = M_R - R_A \cdot 7a + Q \cdot 2a = \\ = 120 - 24 \cdot 7 \cdot 1 + 24 \cdot 2 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } R_A = 15,3 \text{ кН}; \quad M_R = 73,9 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Пример 2.10. Вычислить реакции в консольной балке. Балка нагружена, как показано на рис. 2.18, а. Дано: $q_{\max} = 16 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$.

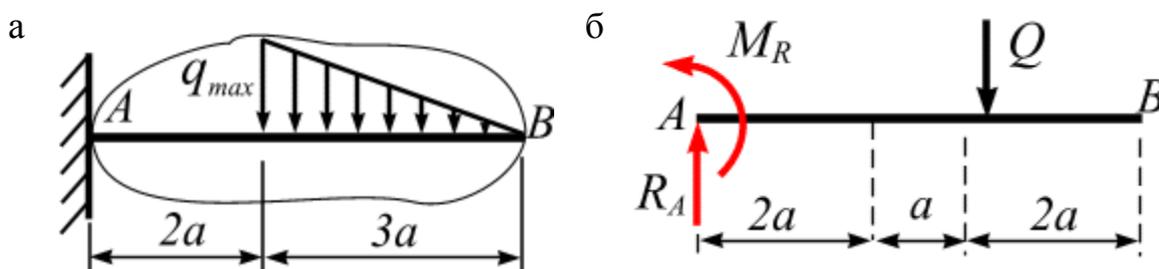


Рис. 2.18

Решение. Применив метод сечения, отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями. Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 2.18, б). Распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой Q :

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 = 16 \text{ кН}.$$

Линия действия Q делит отрезок, равный $3a$, в соотношении $\frac{1}{3} \cdot 3a : \frac{2}{3} \cdot 3a$, рис. 2.18, б.

Запишем уравнения равновесия и решим их.

$$\sum M_A = 0, \quad -Q \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3a + 2a\right) + M_R = 0,$$

$$M_R = 96 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad R_A - Q = 0, \quad R_A = Q = 16 \text{ кН};$$

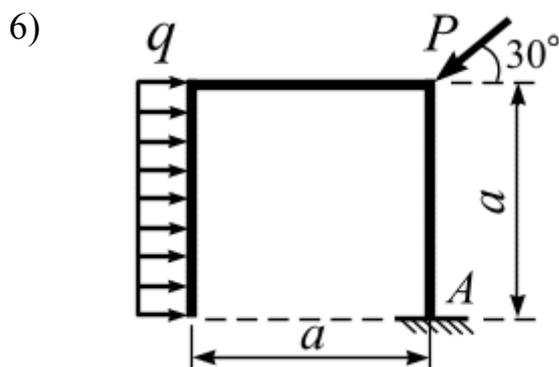
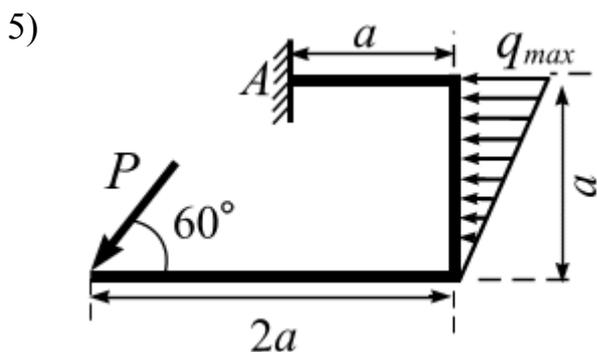
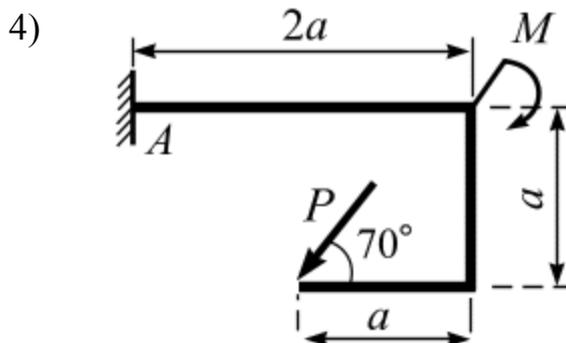
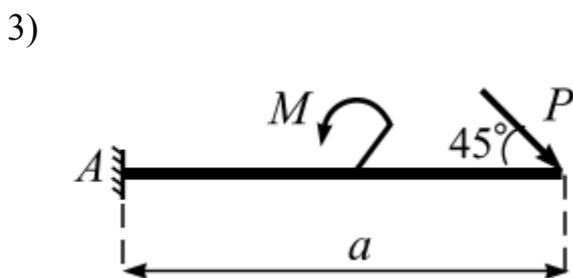
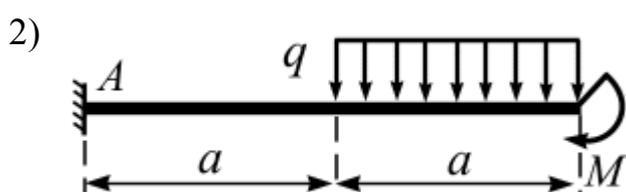
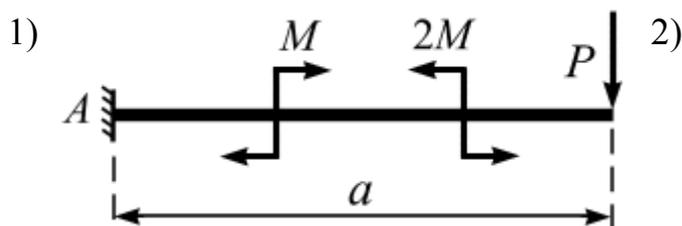
$$\text{Проверка: } \sum M_B = M_R - R_A \cdot 5a + Q \cdot 2a = 96 - 16 \cdot 10 + 16 \cdot 4 = 0.$$

Ответ: $R_A = 16 \text{ кН}$, $M_R = 96 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

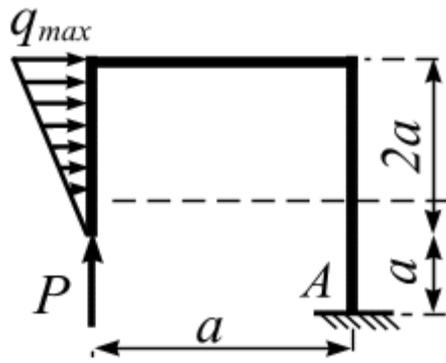


Задание для самостоятельного решения № 5

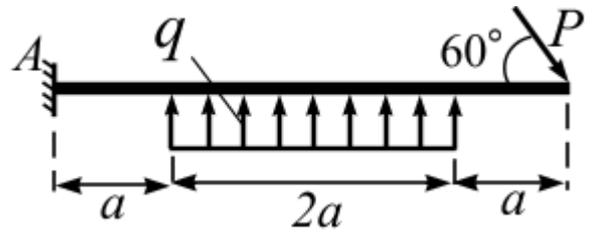
1. Используя основную форму уравнений равновесия, вычислить реакции опор консольных балок, если $P = 8 \text{ Н}$, $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $q = q_{\max} = 3 \text{ Н/м}$, $a = 2 \text{ м}$.



7)

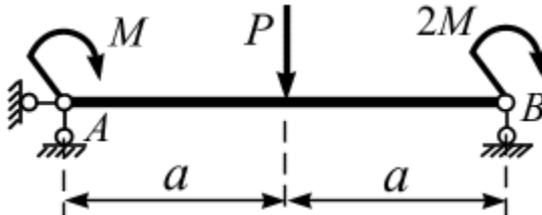


8)

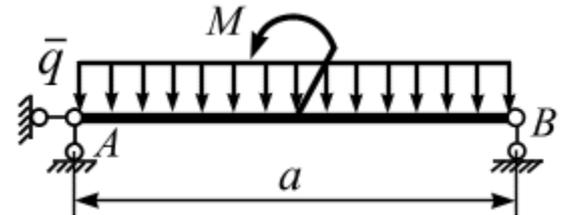


2. Используя моментную точку, вычислить реакции опор в балках, если $P=10 \text{ Н}$, $M=5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $q=q_{\max}=6 \text{ Н/м}$, $a=2 \text{ м}$.

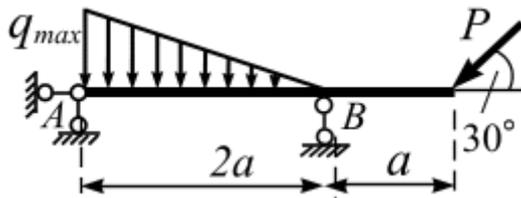
1)



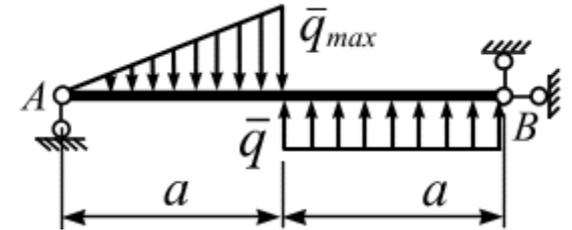
2)



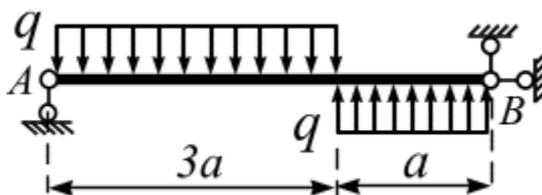
3)



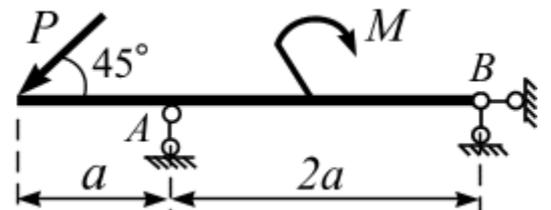
4)



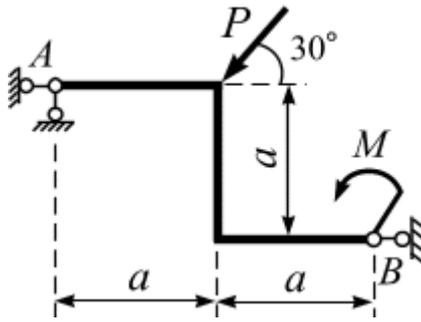
5)



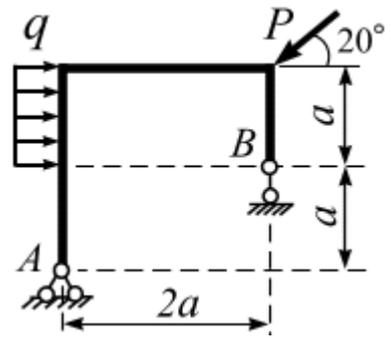
6)



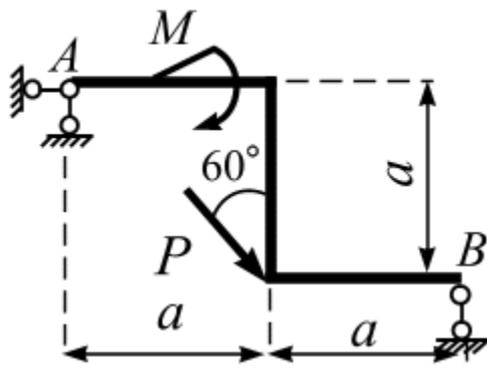
7)



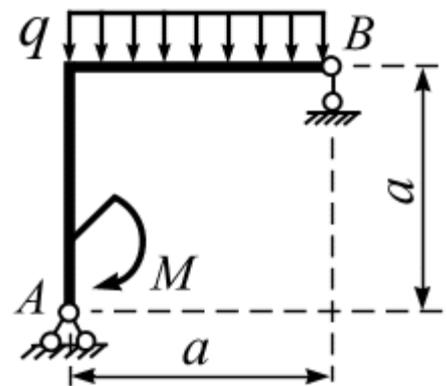
8)



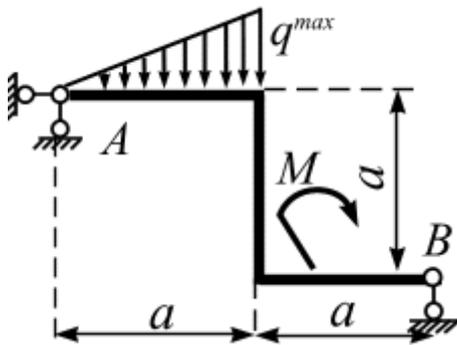
9)



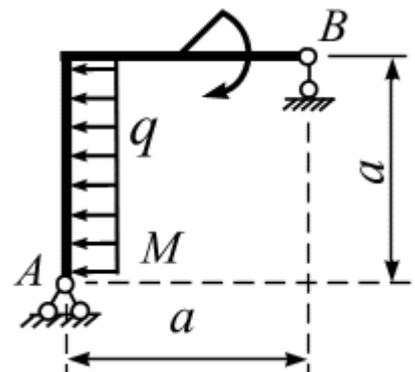
10)



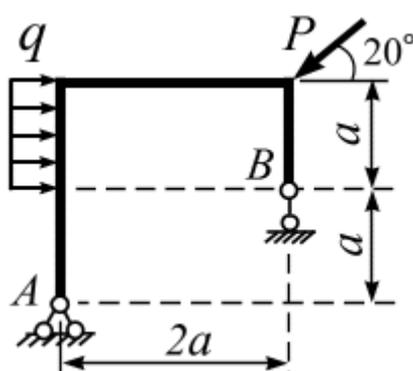
11)



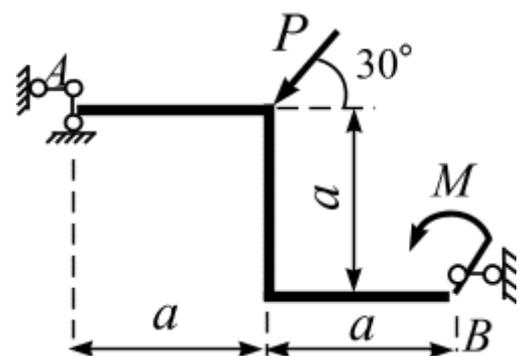
12)



13)



14)



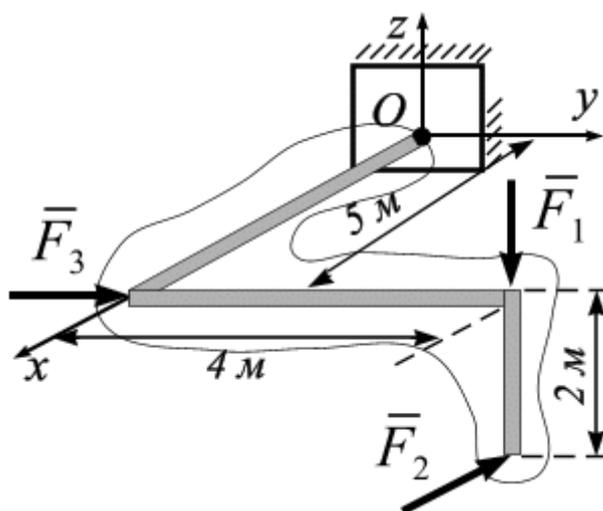
Глава 3. Пространственная система сил



Вспомни теорию

Пространственная заделка. Пример пространственной жесткой заделки представлен на рис. 3.1. Вычислим реакции пространственной заделки. Выберем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 3.1, а.

а



б

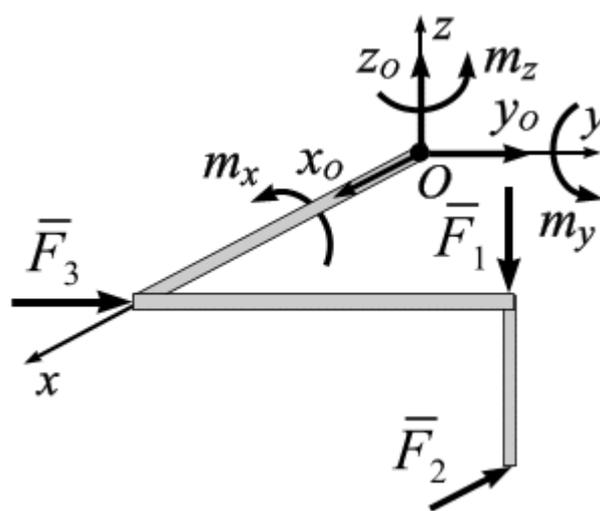


Рис. 3.1

Ломаный брус нагружен силами $\vec{F}_1 \parallel Oz$, $\vec{F}_2 \parallel Ox$, $\vec{F}_3 \parallel Oy$.

Пространственная жесткая заделка лишает защемленный конец ломаного бруса всех шести степеней свободы, которыми обладает твердое тело в пространстве: перемещения в трех ортогональных направлениях и вращения в каждой из плоскостей.

Используя аксиому связей, отбросим заделку и заменим ее шестью реакциями связей: x_0 , y_0 , z_0 и m_{Ox} , m_{Oy} , m_{Oz} (рис. 3.1, б). Для определения реакций воспользуемся условиями равновесия пространственной системы сил.

$$\sum F_x = 0, \quad x_O - F_2 = 0, \quad x_O = F_2;$$

$$\sum F_y = 0, \quad y_O + F_3 = 0, \quad y_O = -F_3;$$

$$\sum F_z = 0, \quad z_O - F_1 = 0, \quad z_O = F_1;$$

$$\sum m_x = 0, \quad m_{Ox} - F_1 \cdot 4 = 0, \quad m_{Ox} = F_1 \cdot 4;$$

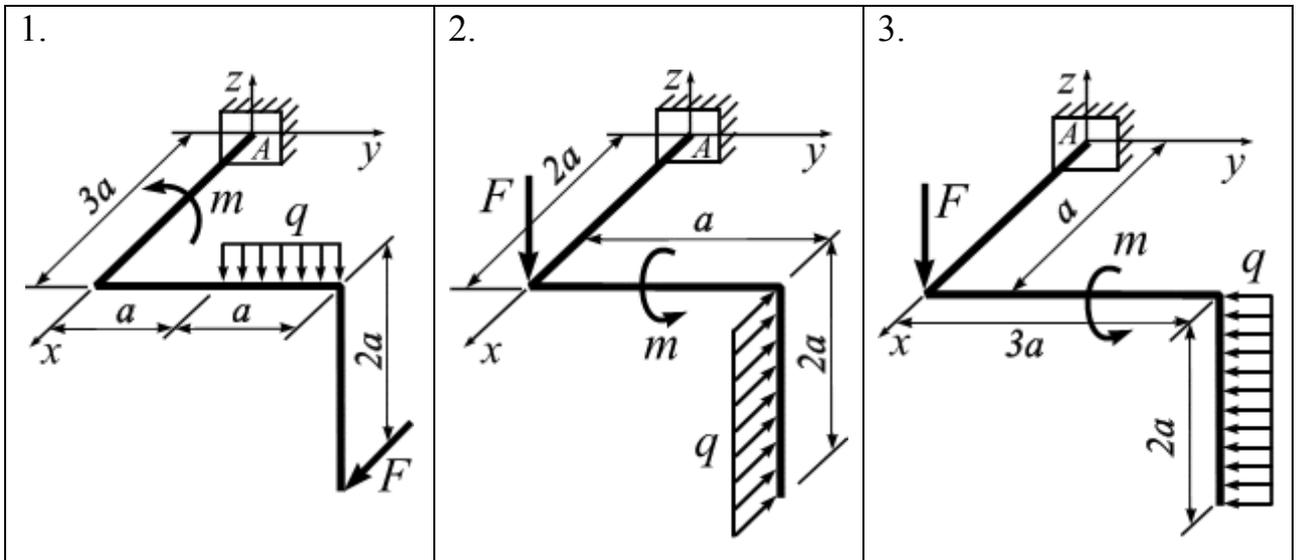
$$\sum m_y = 0, \quad m_{Oy} + F_1 \cdot 5 + F_2 \cdot 2 = 0, \quad m_{Oy} = -(F_1 \cdot 5 + F_2 \cdot 2);$$

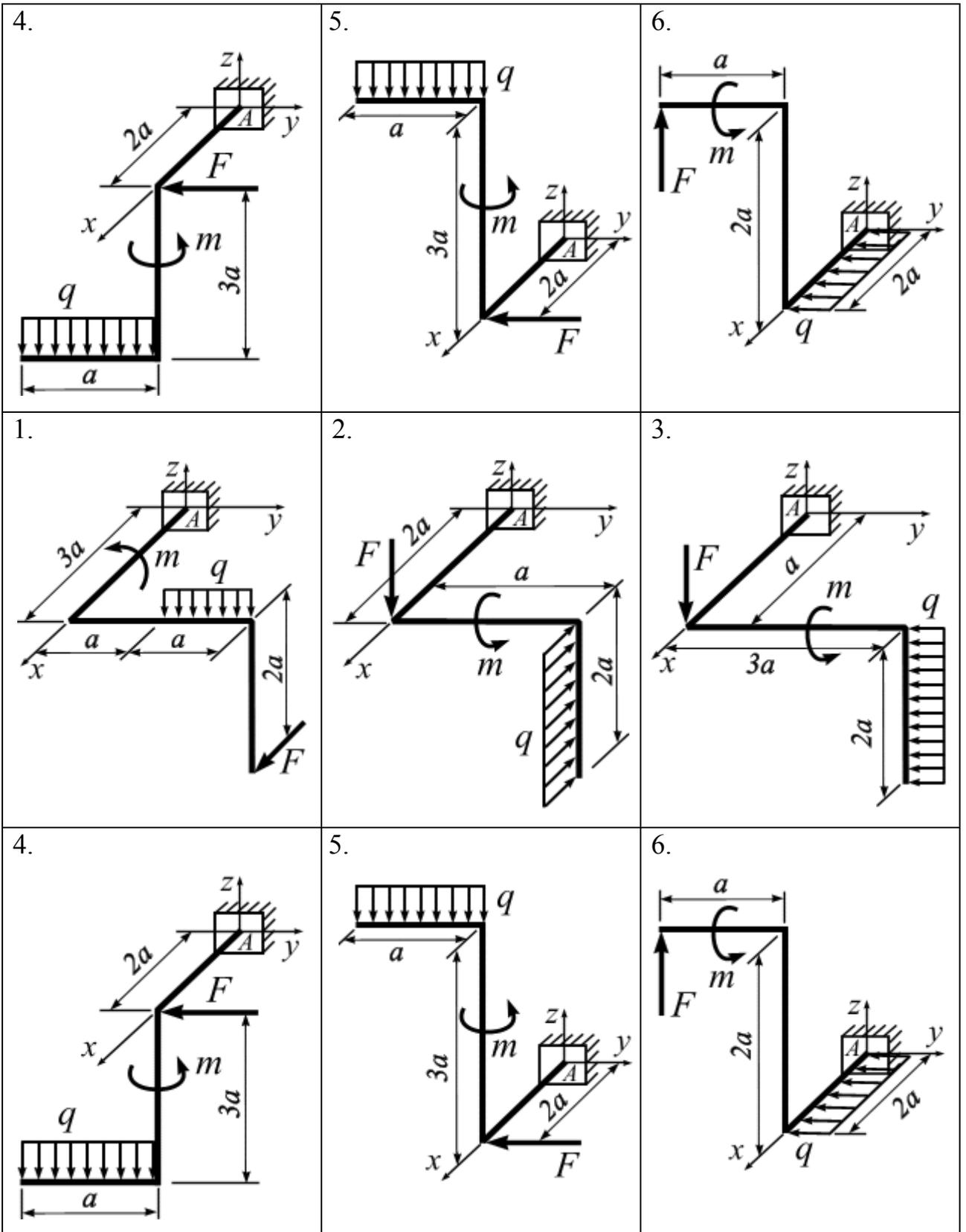
$$\sum m_z = 0, \quad m_{Oz} + F_3 \cdot 5 + F_2 \cdot 4 = 0, \quad m_{Oz} = -(F_3 \cdot 5 + F_2 \cdot 4).$$



Задание для самостоятельного решения №6

Вычислить реакции пространственной заделки, если $F = 6$ кН, $m = 10$ кН·м, $q = 8$ кН/м, $a = 2$ м.





Глава 4. Ферма



Вспомни теорию

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными.

Если ферма в целом под действием сил, приложенных к ее узлам, находится в равновесии, то и любой из ее узлов также будет находиться в равновесии, т.е. внешняя нагрузка, действующая на узел, и внутренние усилия в стержнях, сходящихся в данном узле, взаимно уравновешиваются.

На каждый вырезанный узел фермы действует сходящаяся система сил. Уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил имеют вид:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0.$$

4.1. Способ проекций (способ вырезания узлов)

Задача. Вычислить усилия в стержнях фермы, показанной на рис. 4.1, а.

Решение. Обозначим узлы заданной фермы буквами и пронумеруем стержни (рис. 4.1, б). Реакции опор V_A и V_H вычислим из уравнений равновесия системы параллельных сил:

$$\sum M_A = 0, \quad V_H \cdot 3a - P_2 \cdot 2a - P_1 \cdot 1,5a - P_2 \cdot a = 0, \quad V_H = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_H = 0, \quad -V_A \cdot 3a + P_2 \cdot 2a + P_1 \cdot 1,5a + P_2 \cdot a = 0, \quad V_A = 20 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_y = V_A - P_2 - P_1 - P_2 + V_H = 20 - 10 - 20 - 10 + 20 = 0.$$

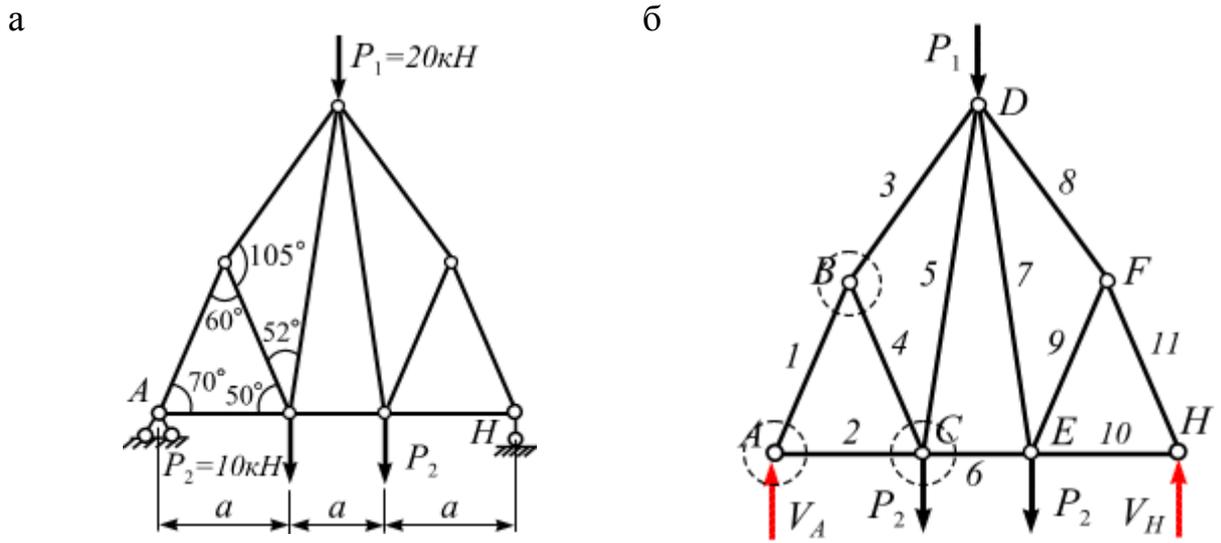


Рис. 4.1

Искомые усилия обозначим символом S_i . Будем мысленно последовательно вырезать все узлы заданной фермы и вычислять соответствующие усилия способом проекций.

Расчет основан на уравнениях равновесия для системы сходящихся сил. Ввиду симметрии фермы и внешней нагрузки, приложенной к узлам фермы, достаточно вычислить усилия в стержнях левой половины фермы, т.к. $S_1 = S_{11}$, $S_2 = S_{10}$, $S_4 = S_9$, $S_5 = S_7$, $S_3 = S_8$.

Расчет начнем с узла, в котором сходится не более двух стержней. В нашем примере это узел A (или H).

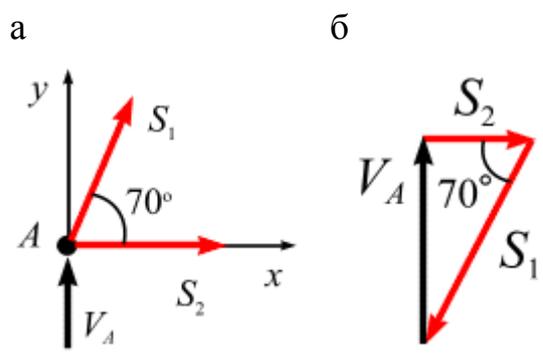


Рис. 4.2

Узел A (рис. 4.2, а):

$$\sum F_{iy} = 0, \quad V_A + S_1 \sin 70^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0, \quad S_2 + S_1 \cos 70^\circ = 0;$$

$$S_1 = -\frac{V_A}{\sin 70^\circ} = -\frac{20}{0,9397} = -21,28 \text{ кН};$$

$$S_2 = -S_1 \cos 70^\circ = -(-21,28) \cdot 0,342 =$$

$$= 7,28 \text{ кН}.$$

Построим из сил: V_A , S_1 , S_2 силовой многоугольник и убедимся, что он замкнутый (рис. 4.2, б).

Узел B (рис. 4.3):

$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$-S_1 - S_4 \cos 60^\circ + S_3 \sin 75^\circ = 0;$$

$$-(-21,28) - 0,5 \cdot S_4 + 0,966 \cdot S_3 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad S_4 \sin 60^\circ + S_3 \cos 75^\circ = 0;$$

$$0,866 \cdot S_4 + 0,259 \cdot S_3 = 0;$$

$$S_4 = 5,7 \text{ кН}, \quad S_3 = -3,344 \cdot S_4 = -19,06 \text{ кН}.$$

Построим из сил S_1 , S_3 , S_4 силовой многоугольник и убедимся, что он замкнутый (рис. 4.3, б).

Узел C (рис. 4.4, а):

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$S_4 \sin 50^\circ + S_5 \sin 78^\circ - P_2 = 0,$$

$$S_5 = \frac{P_2 - S_4 \sin 50^\circ}{\sin 78^\circ} = \frac{10 - 5,7 \cdot 0,766}{0,978} =$$

$$= 5,76 \text{ кН};$$

$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$-S_2 - S_4 \cos 50^\circ + S_5 \cos 78^\circ + S_6 = 0;$$

$$S_6 = S_2 + S_4 \cos 50^\circ - S_5 \cos 78^\circ = 7,28 + 5,7 \cdot 0,643 - 5,76 \cdot 0,208 = 9,75 \text{ кН}.$$

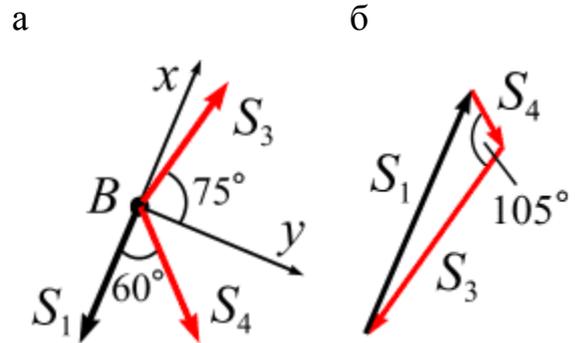


Рис. 4.3

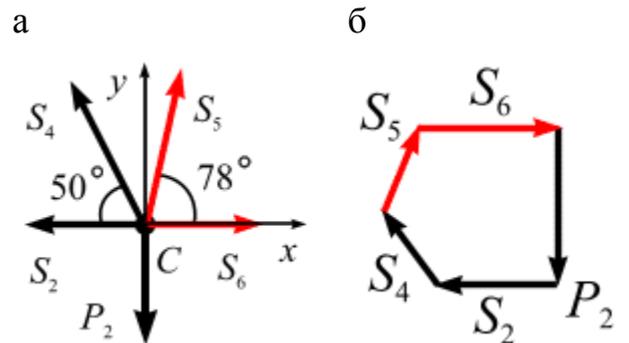


Рис. 4.4

Построим из сил P_2, S_2, S_4, S_5, S_6 силовой многоугольник и убедимся, что он замкнутый (рис. 4.4, б). Результаты вычислений заносим в таблицу:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}
-21,3	7,28	-19,06	5,7	5,76	9,75	5,76	-19,06	5,7	7,28	-21,3

Анализируя полученные результаты, можно отметить, что стержни 1, 4, 9, и 11 – сжаты, а стержни 2, 3, 5, 6, 7, 8 и 10 – растянуты.



Вспомни теорию

4.2. Способ моментной точки (способ сечения)

Способ моментной точки применяется главным образом в тех случаях, когда удастся расечь ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались стержни с неизвестными усилиями, направления линий действий которых не пересекаются в одной точке.

Линии действия трех таких перерезанных стержней обычно пересекаются попарно в двух или трех точках. Точку пересечения линий действия двух стержней называют *моментной точкой* (или *точкой Риттера*). Составляя последовательно уравнения моментов от всех сил (внешних и внутренних), действующих на отсеченную часть фермы относительно этих моментных точек, получаем уравнения, решение которых позволяет вычислить неизвестные усилия.

Рассмотрим ферму, показанную на рис. 4.5, а. Значение внешних сил задано, реакции опор предварительно вычислены. Рассечем ферму сечением $I-I$ (рис. 4.5, а) и рассмотрим левую ее часть. Рассеченные стержни заменим, соответственно, усилиями S_1, S_2, S_3 . Найдем точки пересечения линий действия усилий S_1, S_2, S_3 (на рис. 4.5, б – это точки K и E).

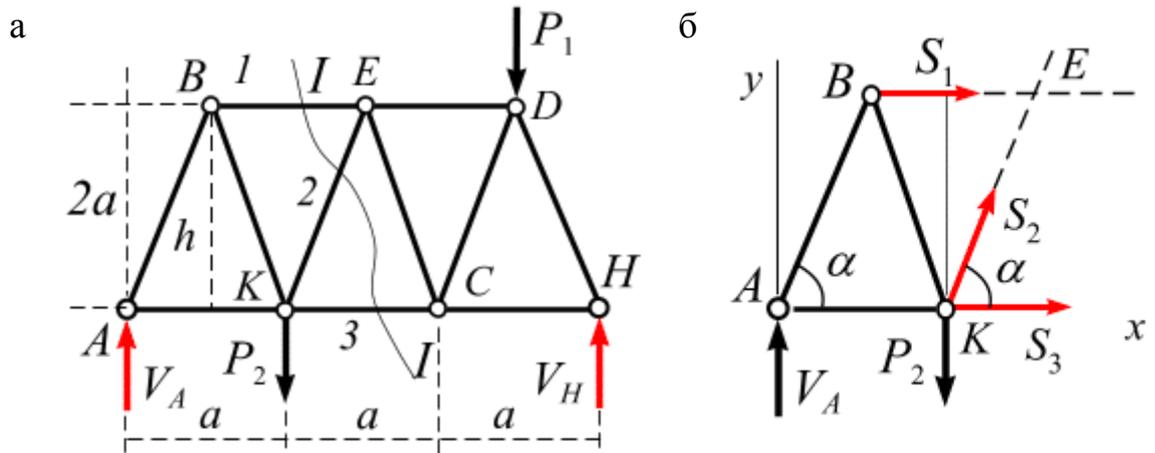


Рис. 4.5

Запишем уравнение моментов относительно моментных точек K и E . Моментной точкой для S_1 является точка K (рис. 4.5, б):

$$\sum M_K = -V_A \cdot a - S_1 \cdot a_1 = 0, \text{ откуда } S_1 = -V_A.$$

Моментной точкой для S_3 является точка E :

$$\sum M_E = -V_A \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) + P_2 \cdot \frac{a}{2} + S_3 \cdot a = 0,$$

$$\text{откуда } S_3 = \frac{1}{2}(3 \cdot V_A - P_2).$$

Линии действия усилий S_1 и S_3 пересекаются в бесконечности, моментной точки для вычисления усилия в S_2 нет, поэтому для вычисления усилия S_2 записываем проекцию всех сил на ось x или y .

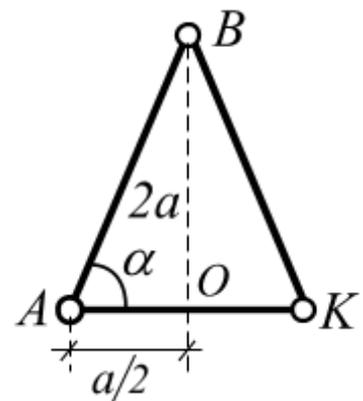


Рис. 4.6

Угол α вычислим из геометрии задачи, рис. 4.6.

Рассмотрим треугольник ABK :

$$AB = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{4} \sqrt{17};$$

$$\sin \alpha = \frac{BO}{AB} = \frac{2a \cdot 4}{a\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{17};$$

$$\cos \alpha = \frac{AO}{AB} = \frac{a \cdot 4}{2 \cdot a\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

Запишем проекцию всех сил на ось Ay :

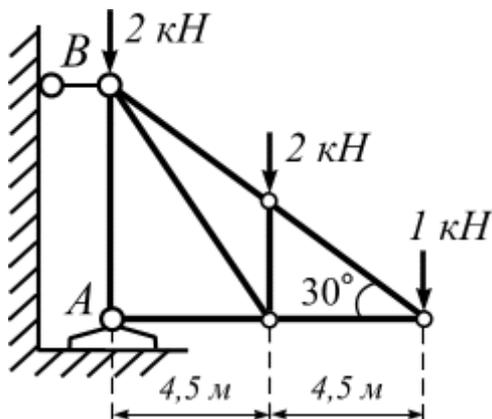
$$\sum F_{iy} = 0, \quad V_A - P_2 + S_2 \cos \alpha = 0;$$

$$S_2 = \frac{1}{\cos \alpha} (-V_A + P) = \frac{\sqrt{17}}{2} (-V_A + P).$$

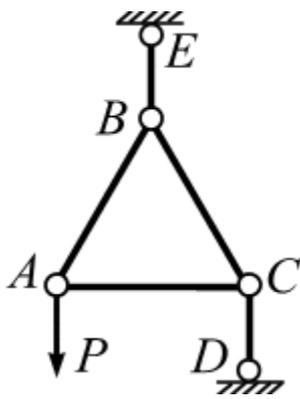
Ответ: $S_1 = -V_A$, $S_3 = \frac{1}{2}(3V_A - P_2)$, $S_2 = \frac{\sqrt{17}}{2}(-V_A + P)$.



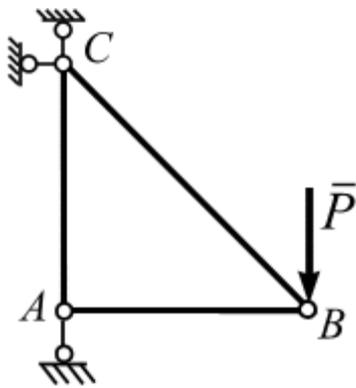
Задание для самостоятельного решения № 7



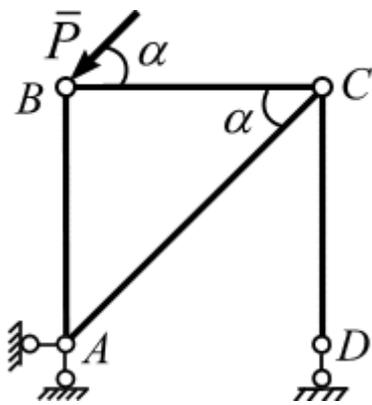
1. Вычислить опорные реакции и усилия в стрелках навесной фермы, изображенной вместе с действующими на неё силами, которая показана на рисунке.



2. К узлу A равностороннего шарнирного треугольника ABC приложена вертикальная сила P . Треугольник удерживается в равновесном положении стержнями BE и CD . Вычислить усилия во всех стержнях, если стержень AC горизонтальный, а стержни BE и CD вертикальные. Весом стержней пренебречь.



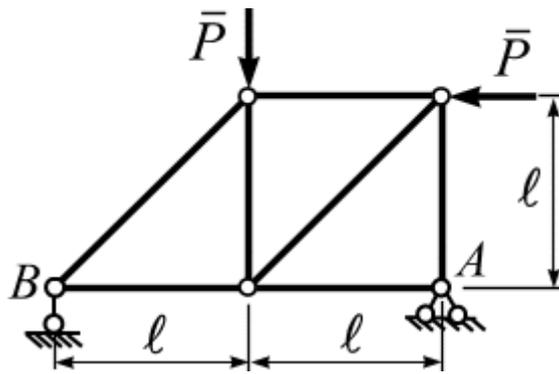
3. Вычислить усилия в стержнях и реакцию шарнира A в стержневой системе, если $\angle CAB = \frac{\pi}{2}$, $AB = AC$, а на узел B действует вертикальная сила \bar{P} . Считать все соединения шарнирными, весом стержней пренебречь.



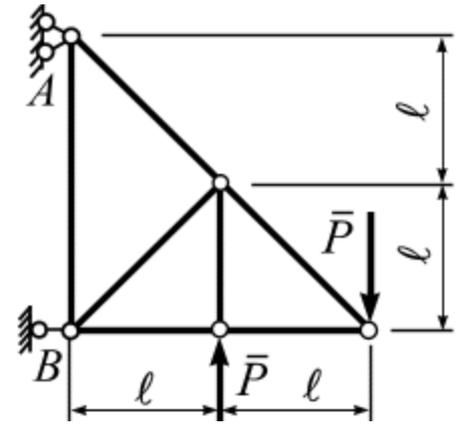
4. В стержневой шарнирной системе стержни AB и CD вертикальные, стержень BC горизонтальный, шарниры A и D неподвижные. На узел B действует сила \bar{F} , параллельная стержню AC . Пренебрегая весом стержней, вычислить возникающие в них усилия и величину реакции шарнира A , если $\angle BCA = \alpha$.

5. Вычислить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, если $P = 10$ Н, $\ell = 2$ м.

9)



10)



Глава 5. Равновесие тел



Вспомни теорию

При решении задач на равновесие составных конструкций, состоящих из твердых тел, необходимо выполнить следующие действия:

- выделить каждое твердое тело и приложить к нему силы реакции отброшенных связей;
- изобразить расчетную схему для каждого выделенного тела и изобразить на них внешние силы и силы реакции, действующие на тело;
- сопоставить число неизвестных величин и число уравнений равновесия для каждого тела; эти числа должны быть равны, если задача является статически определимой;
- выбрать направление осей прямоугольной системы координат для каждого тела;
- составить уравнения равновесия для каждого твердого тела или системы твердых тел, решить систему уравнений равновесия.

5.1. Равновесие конструкций арочного типа

Для расчета конструкций, состоящих из системы тел, соединенных шарнирами, составляют дополнительные уравнения: *сумма моментов сил, действующих на левую (правую) половину составной конструкции относительно врезанного шарнира С, равняется нулю, т.е.*

$$\sum M_C^{лев.} = 0, \quad \sum M_C^{прав.} = 0.$$

Пример 5.1. Две балки AC и CD соединены шарниром C (рис. 5.1). Вычислить реакции опор A , B и D и силы давления на шарнир C , если на балку действуют: пара сил с моментом $m = 200 \text{ Н м}$, силы $P = 80 \text{ Н}$ и $Q = 120 \text{ Н}$, заданы размеры $AE = 4 \text{ м}$, $BE = 2 \text{ м}$, $BC = 3 \text{ м}$, $CH = HD = 2 \text{ м}$.

Решение. Для вычисления реакции опор A , B и D отбросим связи и заменим их действие реакциями связи: V_A , H_A , V_D , V_B (рис. 5.1, б).

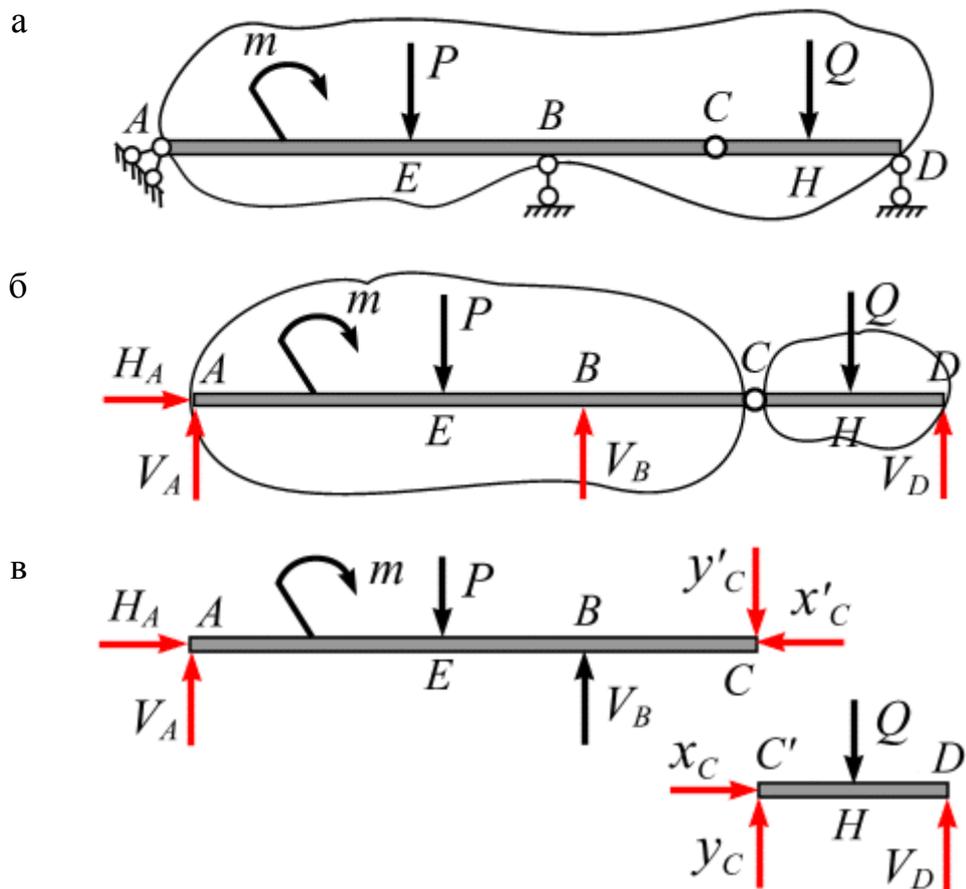


Рис. 5.1

Запишем уравнения связи и решим их:

$$\sum M_C^{npas.} = 0, \quad V_D \cdot 4 - Q \cdot 2 = 0, \quad V_D = \frac{1}{2} \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60 \text{ Н};$$

$$\sum M_A(F_i) = 0, \quad -m + V_B \cdot 6 - P \cdot 4 - Q \cdot 11 + V_D \cdot 13 = 0,$$

$$V_B = \frac{1}{6}(m + P \cdot 4 + Q \cdot 11 - V_D \cdot 13) =$$

$$= \frac{1}{6}(200 + 80 \cdot 4 + 120 \cdot 11 - 60 \cdot 13) = 176,6 \text{ Н};$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad V_A - P + V_B - Q + V_D = 0, \quad V_A = |P - V_B + Q - V_D| = |-36,6| \text{ Н}.$$

Направление реакции \bar{V}_A на схеме (рис. 5.1, б, в) следует поменять.

Для вычисления сил давления на шарнир C пользуемся методом сечений, рис. 5.1, в. При этом, согласно третьему закону Ньютона, силы x_C и y_C , действующие на стержень CD , должны быть направлены противоположно силам x'_C и y'_C , действующим на стержень AC . По модулю они равны.

Рассмотрим равновесие каждого из стержней AC и CD отдельно.

Для стержня CD :

$$\sum F_{ix} = 0, \quad x_C = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad y_C - Q + V_D = 0, \quad y_C = Q - V_D = 120 - 60 = 60 \text{ Н}.$$

Проверим равновесие стержня AC :

$$\sum F_{iy} = 0, \quad -V_A - P - y'_C + V_B = -36,6 - 80 + 176,6 - 60 = 0.$$

Ответ: $V_B = 176,6 \text{ Н}$, $V_A = 36,6 \text{ Н}$, $x_C = 0$, $y_C = 60 \text{ Н}$.

Пример 5.2. Две балки AC и CD соединены шарниром C (рис. 5.2, а). Вычислить реакции опор A , B и силы давления на шарнир C , если на балку действуют $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$.

Решение. Для вычисления реакций опор используем метод сечения, отбросим опоры в точках A и B , рис. 5.2, б.

Запишем уравнение моментов от нагрузки, расположенной слева от шарнира C (на балку AC):

$$\sum M_C^{лев.} = 0, \quad -H_A \cdot 4a + F_2 \cdot 2a = 0, \quad -H_A \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 0, \quad H_A = 10 \text{ кН.}$$

Запишем проекции всех сил на ось x , приложенных к балкам AC и CD (рис. 5.2, б):

$$\sum F_{ix} = 0, \quad -H_A + F_2 - H_B = 0, \quad -10 + 20 - H_B = 0, \quad H_B = 10 \text{ кН.}$$

Запишем уравнение моментов относительно точки A от всех сил, действующих на балки AC и CD :

$$\sum M_A = 0, \quad V_B \cdot 2a - F_2 \cdot 2a - F_1 \cdot 2a = 0, \quad V_B \cdot 2 - 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 0,$$

$$V_B = 30 \text{ кН.}$$

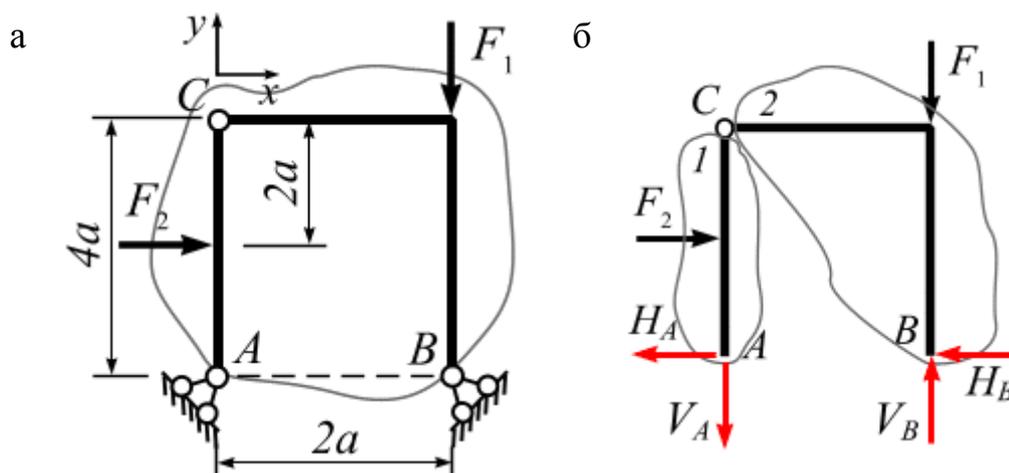


Рис. 5.2

Запишем проекции всех сил на ось y , приложенных к балкам AC и CD (рис. 5.2, б):

$$\sum F_{iy} = 0, \quad -V_A - F_1 + V_B = 0, \quad V_A = -F_1 + V_B = -10 + 30 = 20 \text{ кН.}$$

Вычислим силы давления на шарнир C . Выделим стержни AC и CB . При этом силы x_C и y_C шарнира C , действующие на стержень CD , направлены

противоположно силам x'_C и y'_C , действующим на стержень AC ; по модулю они равны (рис. 5.3).

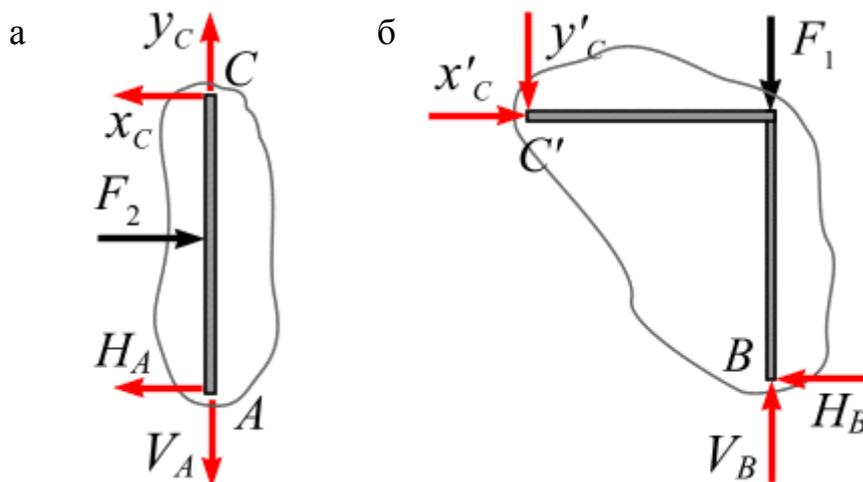


Рис. 5.3

Запишем проекции всех сил на ось x для балки AC (рис. 5.3, а):

$$\sum F_{ix} = 0, \quad x_C - F_2 + H_A = 0, \quad x_C + 20 - 10 = 0, \quad x_C = |-10| \text{ кН}.$$

Запишем проекции всех сил на ось y для балки CB (рис. 9.3, б):

$$\sum F_{iy} = 0, \quad y_C - V_B = 0, \quad y_C - 20 = 0, \quad y_C = 20 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum M_B = 0, \quad V_A \cdot 2a - F_2 \cdot 2a = 20 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = 0.$$

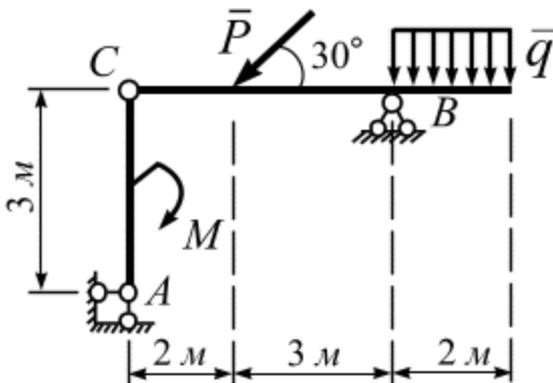
Ответ: $H_A = 10 \text{ кН}$, $V_A = 20 \text{ кН}$; $H_B = 10 \text{ кН}$, $V_B = 30 \text{ кН}$; $x_C = 10 \text{ кН}$,
 $y_C = 20 \text{ кН}$.



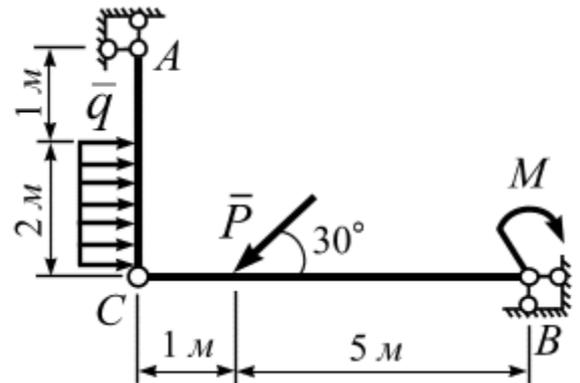
Задание для самостоятельного решения № 8

Шарнирно-опертые балки AC и CB соединены плоским шарниром C . На конструкцию приложена нагрузка: $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $P = 3 \text{ кН}$. Вычислить давление на шарнир C и реакции опор в шарнирах A и B .

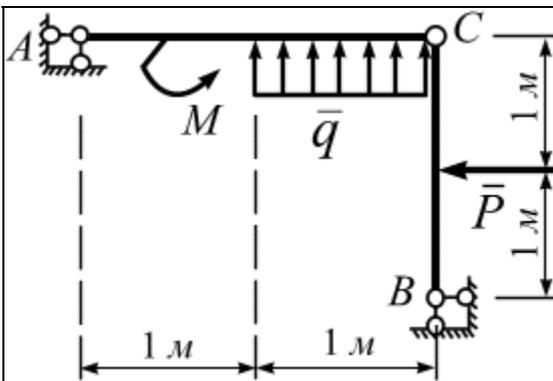
1.



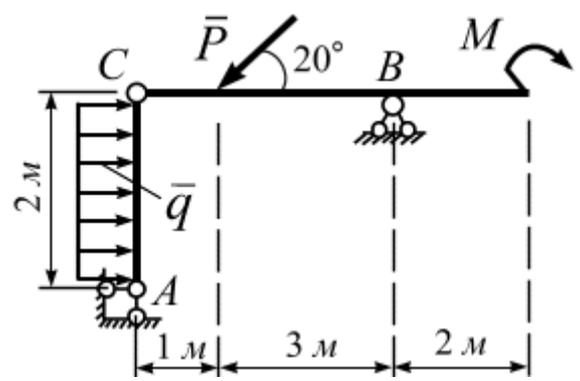
2.



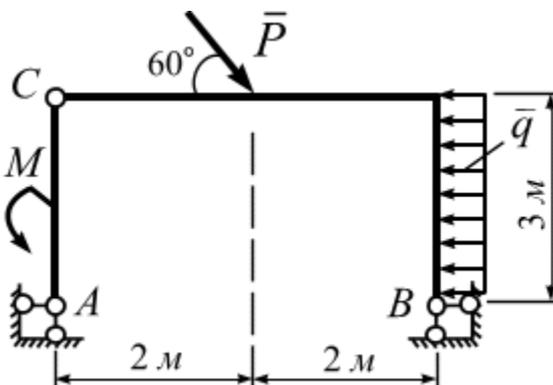
3.



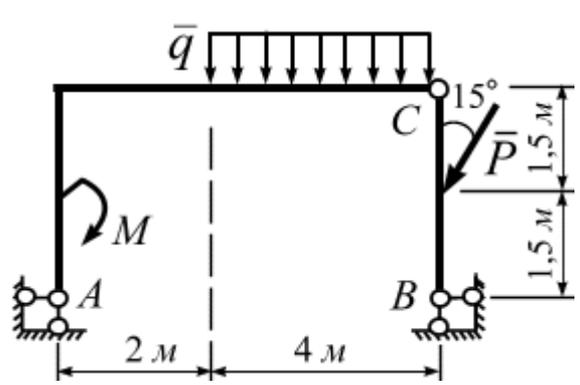
4.



5.



6.



5.2. Равновесие составных конструкций

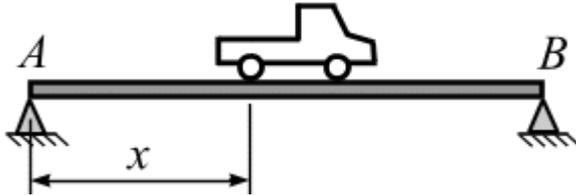


Рис. 9.4

А, при котором давления на опоры А и В будут одинаковы. Расстояние между осями автомобиля равно 2,5 м (рис. 9.4).

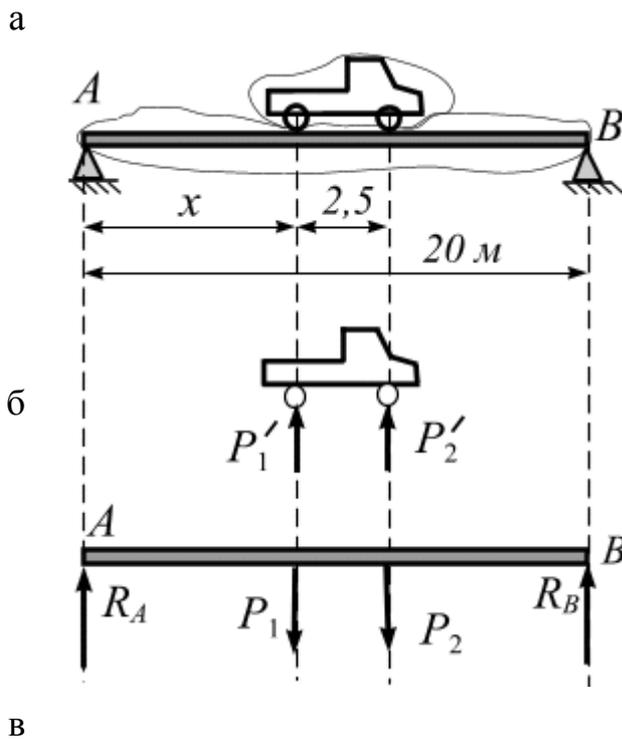


Рис. 9.5

Пример 9.3. На однопролетном горизонтальном мосту АВ длиной 20 м находится автомобиль с нагрузкой на переднюю ось в 10 кН и на заднюю – в 20 кН. Вычислить расстояние от оси заднего колеса автомобиля до опоры

Решение. Используя метод сечения, отбросим опоры и заменим их действие реакциями связи R_A и R_B (рис. 9.5, а, б, в). В точках соприкосновения автомобиля с мостом приложим силы $P_1 = 20$ кН и $P_2 = 10$ кН. Обозначим расстояние от опоры А до оси заднего колеса автомобиля через x . Запишем уравнения равновесия полученной системы сил (рис. 9.5, в):

$$\sum M_A = 0,$$

$$R_B \cdot 20 - P_1 \cdot (2,5 + x) - P_2 \cdot x = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{20} [P_1 \cdot (2,5 + x) + P_2 \cdot x]; \quad (a)$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A \cdot 20 + P_2 (20 - x) + P_1 (17,5 - x) = 0,$$

$$R_A = \frac{1}{20} [P_2 (20 - x) + P_1 (17,5 - x)]. \quad (б)$$

По условию задачи давление на опоры A и B одинаковое, т.е. $R_A = R_B$.
Приравняем правые части уравнений (а) и (б):

$$P_1 \cdot (2,5 + x) + P_2 \cdot x = P_2 \cdot (20 - x) + P_1 \cdot (17,5 - x).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены, получим

$$x(2P_1 + 2P_2) = -P_1 \cdot 2,5 + P_2 \cdot 20 + P_1 \cdot 17,5;$$

$$x(2 \cdot 10 + 2 \cdot 20) = -10 \cdot 2,5 + 20 \cdot 20 + 10 \cdot 17,5;$$

откуда $x \cdot 60 = 550$, $x = \frac{55}{6} = 9\frac{1}{6}$ (м).

Ответ: расстояние от оси заднего колеса автомобиля до опоры A составляет

$$9\frac{1}{6} \text{ м.}$$

Пример 5.4. Балка AB укреплена шарнирно в точке A и удерживается в горизонтальном положении при помощи тросов EF , DE , EK . Вычислить натяжение троса DE , если на балку действуют сила \bar{P} и пара сил с моментом m . Весом балки пренебечь. Размеры указаны на рис. 5.6.

Решение. Рассмотрим равновесие балки AB , для этого выделим балку, отбросим опору A и мысленно разрежем трос EF . Заменяем действие связей реакциями: H_A , V_A , T_E (рис. 5.6, б).

Запишем уравнение равновесия для системы сил на рис. 5.6, б:

$$\sum M_A = 0, \quad -m + T_E \sin \alpha \cdot b - P \cdot a = 0, \quad \text{откуда:}$$

$$T_E = \frac{m + P \cdot a}{\sin \alpha \cdot b}.$$

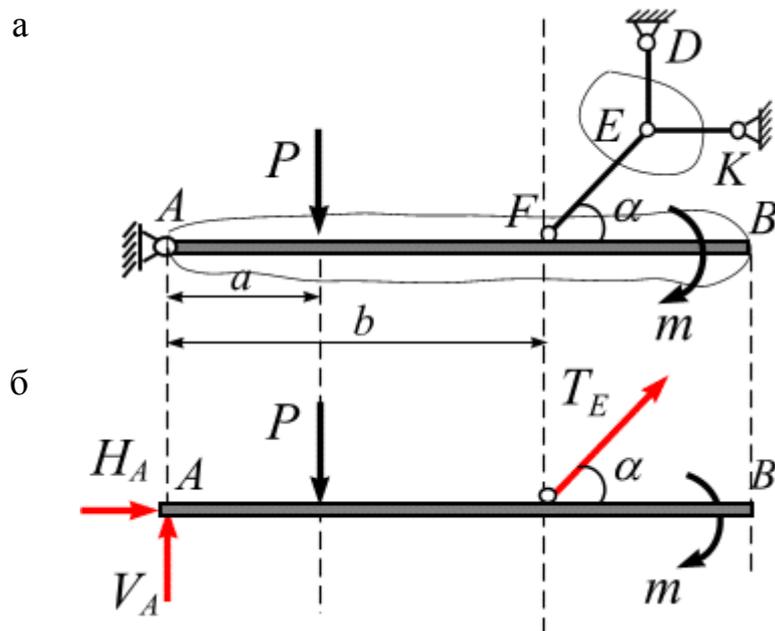
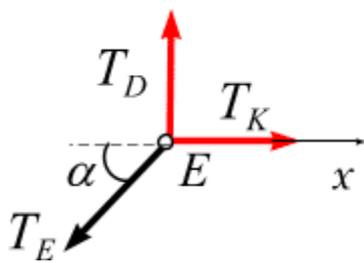


Рис. 5.6

Рассмотрим равновесие узла E (рис. 5.7, в):



$$\sum F_y = 0, \quad T_D - T_E \sin \alpha = 0,$$

$$T_D = T_E \sin \alpha = \frac{m + P \cdot a}{b}.$$

Ответ: $T_D = \frac{m + P \cdot a}{b}.$

Пример 5.5. Вычислить момент m_1 пары сил, которую надо приложить к кривошину AB кривошипно-кулисного механизма для его равновесия, в том положении, когда $AB = AC$, если к кулисе CB приложена пара сил с моментом m , $\angle ACB = \alpha$, $AB = \ell$, трением и весом частей механизма пренебречь (рис. 5.8). Каковы при этом величины реакций шарниров A и C ?

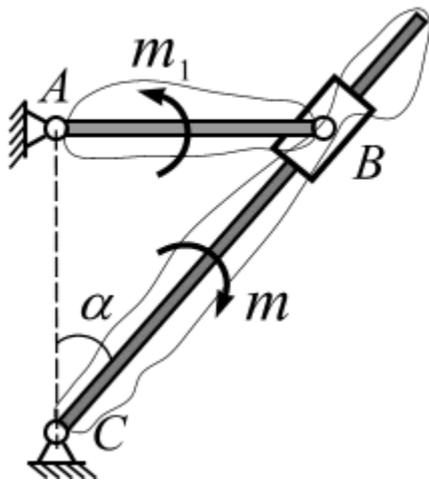


Рис. 5.8

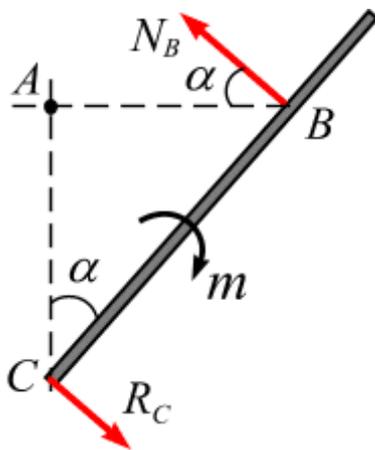


Рис. 5.9

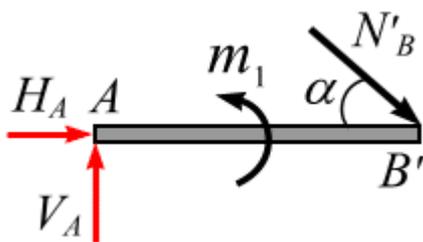


Рис. 5.10

откуда $m_1 = N'_B \sin \alpha \cdot \ell = m \sin^2 \alpha$;

Решение. Выделим кулису CB и кривошип AB , отбросим связи, заменим их действие силами реакции в точках C и B . Рассмотрим равновесие кулисы CB и кривошипа AB .

1. Равновесие кулисы CB . Реакции опор R_C и N_B должны составить пару сил, которая уравновесит пару m по модулю и направлению (рис. 9.9). Реакции равны по модулю, направлены в разные стороны, причем реакция ползуна N_B перпендикулярна стержню BC и направлена вверх, реакция шарнирно-неподвижной опоры R_C направлена вниз, параллельно N_B .

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔCAB :

$$\sin \alpha = \frac{\ell}{CB}, \quad CB = \ell \cdot \sin \alpha.$$

Запишем уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0, \quad \text{откуда}$$

$$R_C \cdot CB - m = 0,$$

$$R_C = \frac{m}{CB} = \frac{m}{\ell} \sin \alpha \Rightarrow R_C = N_B.$$

2. Равновесие кривошипа AB

(рис. 5.10).

$$\sum M_B = 0, \quad -N'_B \sin \alpha \cdot \ell + m_1 = 0,$$

$$V_A = N'_B \sin \alpha, \text{ т.к. } N_B = N'_B = \frac{m}{\ell} \sin \alpha.$$

$$\text{Получаем: } V_A = N'_B \sin \alpha = \frac{m}{\ell} \sin^2 \alpha;$$

$$\sum F_x = 0, \quad H_A - N'_B \sin \alpha = 0, \text{ откуда}$$

$$H_A = N'_B \sin \alpha = \frac{m}{\ell} \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$R_A = \sqrt{(V_A)^2 + (H_A)^2} = \frac{m}{\ell} \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{m}{\ell} \sin \alpha.$$

$$\text{Ответ: } R_A = \frac{m}{\ell} \sin \alpha, \quad R_C = N_B = \frac{m}{\ell} \sin \alpha.$$

Пример 5.6. Заделанный в стену горизонтальный стержень AB соединен со стержнем GD скользящим шарниром G (рис. 5.11). К середине стержня GD приложена горизонтальная сила P ; на стержень AB действуют пара сил с моментом M и вертикальная сила Q .

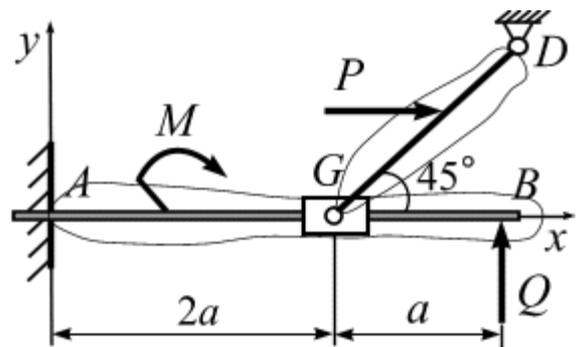


Рис. 5.11

Вычислить реакции опор в заделке, если $P = 4 \text{ кН}$, $M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $Q = 16 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$.

Решение. Составная конструкция состоит из двух тел AB и GD , скрепленных друг с другом ползуном G . Методом сечения выделим тела GD и AB (рис. 5.12) и заменим отброшенные опоры реакциями.

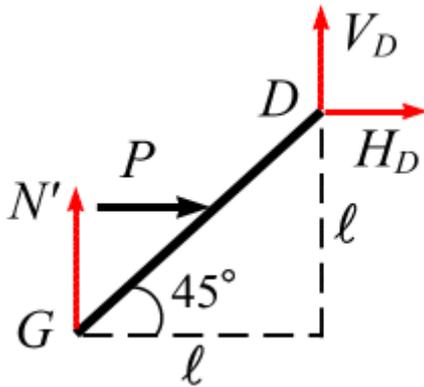


Рис. 5.12

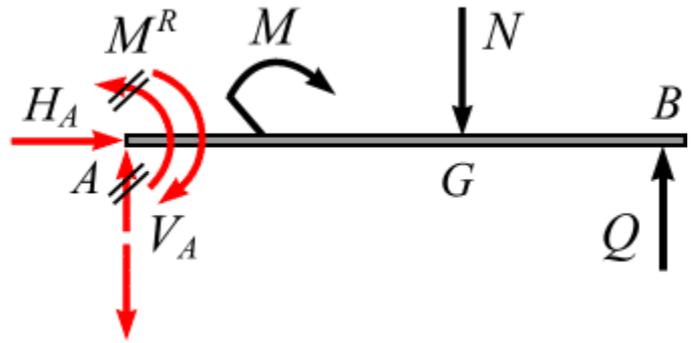


Рис. 5.13

Заметим, что ползун G накладывает одну связь, запрещая точке G , принадлежащей балке AB , перемещаться вертикально, поэтому в точке разрыва на балку AB приложена вертикальная реакция N , направленная, например, вниз, а на балку GD в точке G приложена вертикальная реакция N' , направленная вверх (сила действия равна силе противодействия). Для вычисления реакций опор в заделке балки AB необходимо знать величину и направление силы N .

Для её вычисления рассмотрим равновесие балки GD (рис. 5.12):

$$\sum M_D = 0, \quad -N' \cdot l + P \cdot \frac{l}{2} = 0, \quad \text{откуда} \quad N' = P \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ кН.}$$

Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 9.13). Силы N и N' равны между собой и направлены в разные стороны. Запишем уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0, \quad Q \cdot 3a - N \cdot 2a - M + M^R = 0, \quad 16 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 12 + M^R = 0,$$

откуда $M^R = |-32| \text{ кН}\cdot\text{м};$

$$\sum F_y = 0, \quad V_A - N + Q = 0, \quad \text{откуда} \quad V_A = N - Q = 2 - 16 = |-14| \text{ кН.}$$

Направление реакции V_A и реактивного момента M^R на рис. 5.13 следует изменить.

Ответ: $M^R = 32 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $V_A = 14 \text{ кН}$, $N = 2 \text{ кН}$, $H_A = 0$.

Пример 5.7. Шар весом P и радиусом R опирается на гладкую стенку и однородную гладкую балку (рис. 5.14), заделанную в стену. Вес балки $Q = 4P$, его длина $2\ell = 3R\sqrt{3}$. Вычислить силу давления шара на стенку и реактивный момент в заделке.

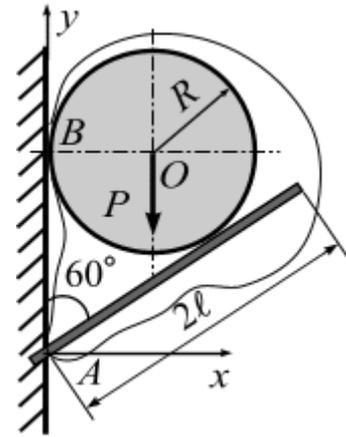


Рис. 5.14

Решение. Отбросим стенку и заменим ее действие реакциями в точках A и B (рис. 5.15, а).

Из геометрии задачи (рис. 9.15, б) вычислим AK и AG :

$$\angle BAO = \angle OAK = 30^\circ;$$

$$\text{из } \triangle AOK: \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{R}{AK}, \quad AK = \frac{R}{\operatorname{tg} 30^\circ} = R\sqrt{3};$$

$$\angle AOK = 60^\circ, \text{ следовательно, } \angle DOK = 30^\circ;$$

$$\text{из } \triangle ACG: \cos 30^\circ = \frac{AG}{\ell} \Rightarrow AG = \ell \cdot \cos 30^\circ = \frac{3R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}R.$$

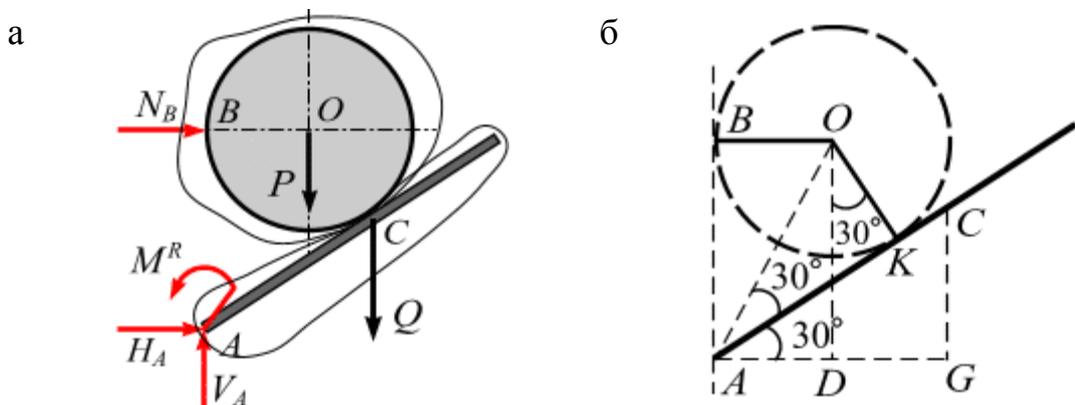


Рис. 5.15

Рассмотрим равновесие шара. Выделим шар, заменим действие балки AB на шар реакцией N_K (рис. 5.16, а). Перенесем силы по линиям их действия в точку O (рис. 5.16, б).

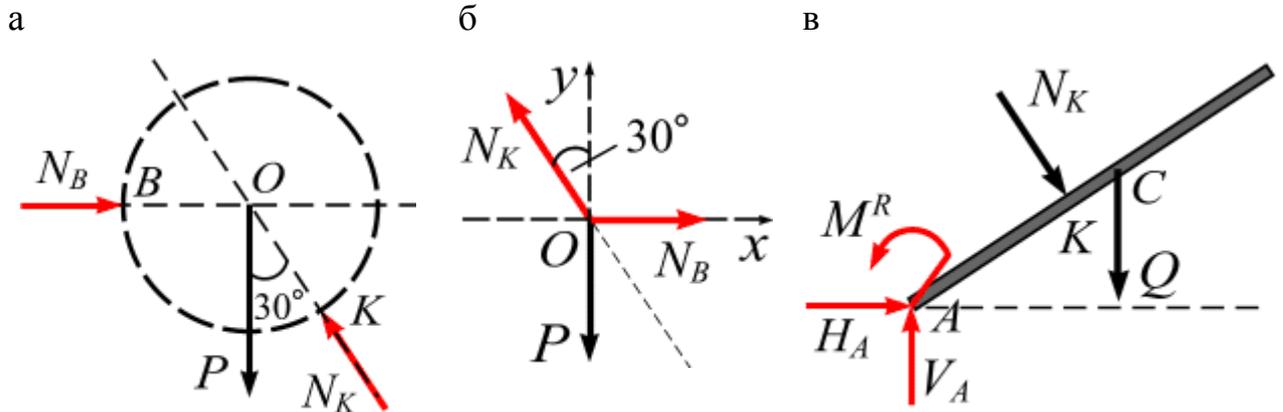


Рис. 5.16

Запишем уравнения равновесия для полученной системы сходящихся сил (рис. 5.16, б):

$$\sum F_y = 0; \quad N_K \cdot \cos 30^\circ - P = 0, \quad N_K = \frac{P}{\cos 30^\circ} = \frac{2P}{\sqrt{3}};$$

$$\sum F_x = 0, \quad -N_K \cdot \sin 30^\circ + N_B = 0, \quad N_B = N_K \cdot \sin 30^\circ = \frac{2P}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{P}{\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим равновесие балки (рис. 5.16, в). Выделим балку, заменим действие шара реакцией N'_K ($N_K = -N'_K$). Запишем уравнения равновесия балки AB :

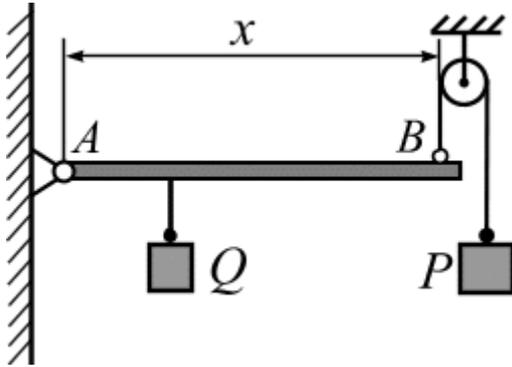
$$\sum M_A = 0, \quad -Q \cdot AG - N_K \cdot AK + M^R = 0,$$

$$M^R = Q \cdot AG + N_K \cdot AK = 4P \cdot \frac{9}{4}R + \frac{2P}{\sqrt{3}} \cdot R\sqrt{3} = 11P \cdot R.$$

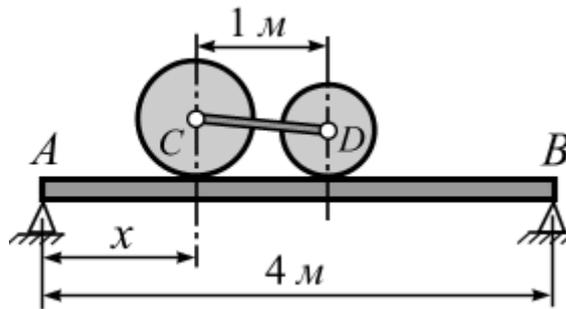
Ответ: $N_B = \frac{P\sqrt{3}}{3}, \quad M^R = 11P \cdot R.$



Задание для самостоятельного решения № 9

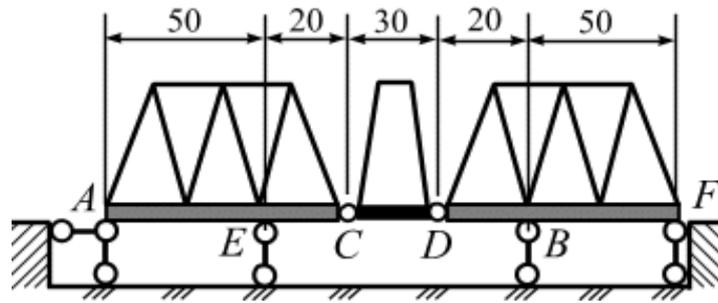


1. Горизонтальный невесомый стержень AB может вращаться вокруг неподвижной оси шарнира A . Точка B закреплена тросом, перекинутым через невесомый блок, с подвешенной гирей весом $P = 150 \text{ Н}$. В точке, находящейся на расстоянии 20 см от конца A , подвешен груз $Q = 500 \text{ Н}$. Вычислить длину стержня AB , если конструкция находится в равновесии.

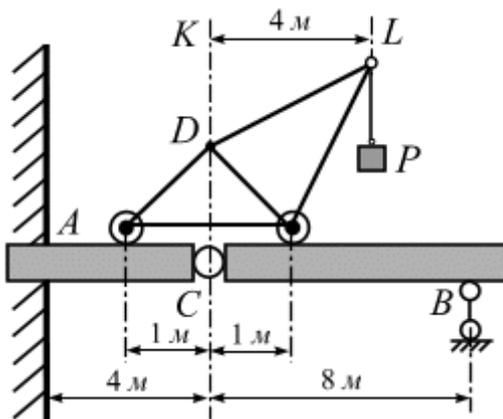


2. На горизонтальную балку, лежащую на двух опорах, расстояние между которыми равно 4 м , положены два груза, связанные между собой стержнем CD , весом, равным 300 Н (вес груза C равен 200 Н , вес груза D равен 100 Н), так, что реакция опоры A в два раза больше реакции опоры B . Расстояние CD между грузами равно 1 м . Пренебрегая весом балки, вычислить расстояние x груза C от опоры.

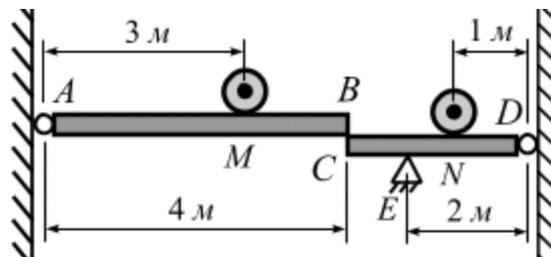
3. Консольный мост состоит из трех частей: AC , CD и DF , причем крайняя опирается на две опоры. Погонная нагрузка на мост равна 6 кН/м . Вычислить давление на опоры A и B , производимое этой нагрузкой; размеры даны в метрах.



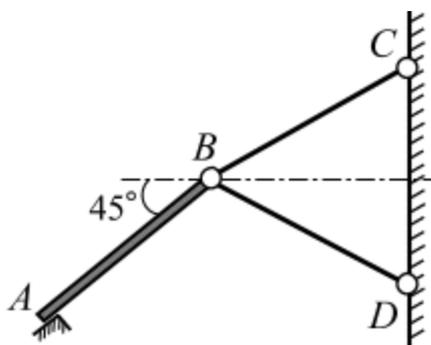
4. Две горизонтальных невесомых балки AC и CB соединены шарнирно в точке C . Конструкция загружена краном весом $Q = 5 \text{ кН}$, несущим груз $P = 1 \text{ кН}$, вылет $KL = 4 \text{ м}$; центр тяжести крана лежит на вертикали CK . Вычислить опорные реакции в точках A и B для положения крана, когда он находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB .



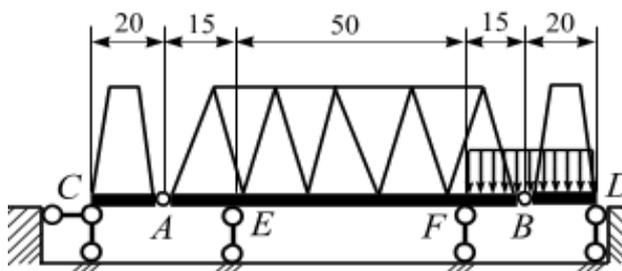
5. Балка $AB = 4 \text{ м}$ весом 200 Н может вращаться вокруг неподвижной оси A и опирается концом B на другую балку $CD = 3 \text{ м}$, весом 160 Н , которая подперта в точке E и соединена со стеной шарниром D . В точках M и N помещены грузы по 80 Н каждый. Размеры указаны на схеме. Вычислить реакции опор.



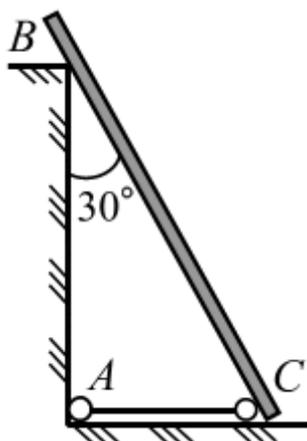
6. Однородная плита AB весом $P = 1000$ H свободно опирается в точке A и удерживается под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту двумя невесомыми стержнями BC и BD . $\triangle BCD$ – равносторонний, точки C и D лежат на вертикальной оси CD . Считая крепления в точках B , C и D шарнирными, вычислить реакцию опоры A и усилия в стержнях.



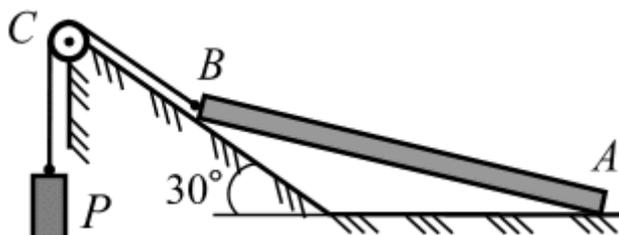
7. Консольный мост состоит из главной фермы AB и двух боковых ферм AC и BD , размеры на схеме заданы в метрах. Собственный вес фермы AB , приходящийся на погонный метр, равен $1,5$ $кН$, для ферм AC и BD – по 1 $кН$. Вычислить реакции опор в момент, когда весь правый пролет FD загружен поездом весом 3 $кН$ на погонный метр. Размеры заданы в метрах.



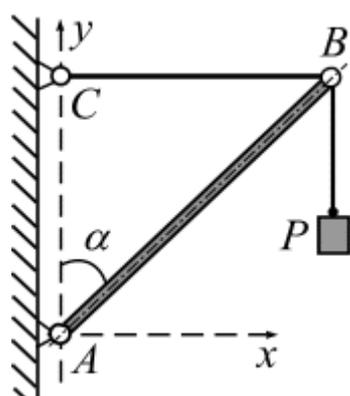
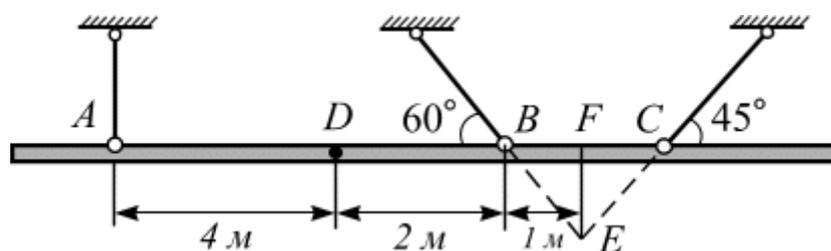
8. Однородная балка $CB = 4$ $м$ весом 600 $кН$ опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой B – на столб высотой 3 $м$, образуя с вертикалью угол 30° . Балка удерживается в таком положении верёвкой AC , протянутой по полу. Пренебрегая трением, вычислить натяжение веревки AC и реакции R_B и R_C .



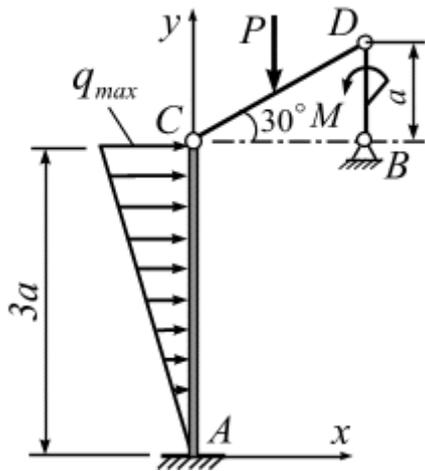
9. Однородный стержень AB весом 1000 Н опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим – на гладкую наклонную поверхность. У конца B стержень поддерживается канатом BC , параллельным наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, вычислить реакции связей.



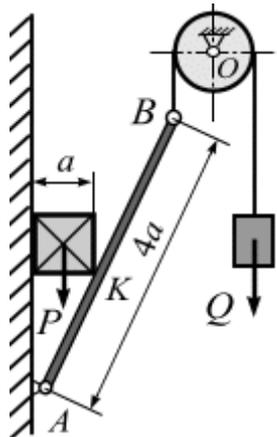
10. На сборке моста пришлось поднимать часть мостовой фермы ABC тремя канатами, расположенными, как указано на рисунке. Вычислить натяжения канатов A и C , если вес этой части фермы 4200 Н , центр её тяжести находится в точке D ; расстояния равны, соответственно: $AD = 4\text{ м}$, $DB = 2\text{ м}$, $BF = 1\text{ м}$.



11. Кран для подъема тяжестей состоит из балки AB , нижний конец которой соединен со стеной шарниром A , а верхний удерживается горизонтальной веревкой BC . Вычислить натяжение веревки и давление на опору A , если вес груза $P = 200\text{ Н}$, вес балки AB равен $Q = 1\text{ кН}$, а угол $\alpha = 60^\circ$.

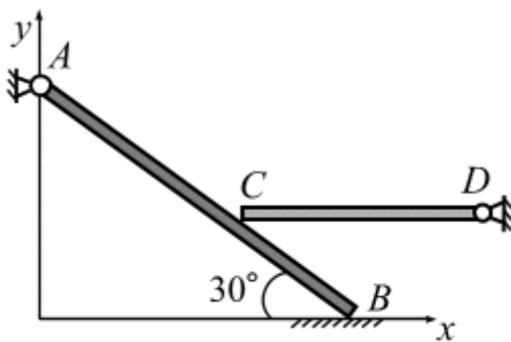


12. Система состоит из трех стержней. К стержню AC приложена линейно распределенная нагрузка интенсивностью $q_{\max} = 5 \text{ кН/м}$. В середину стержня CD приложена сила $P = 3 \text{ кН}$, на стержень BD действует пара сил с моментом $M = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Вычислить усилия в шарнире C , если $a = 2 \text{ м}$.



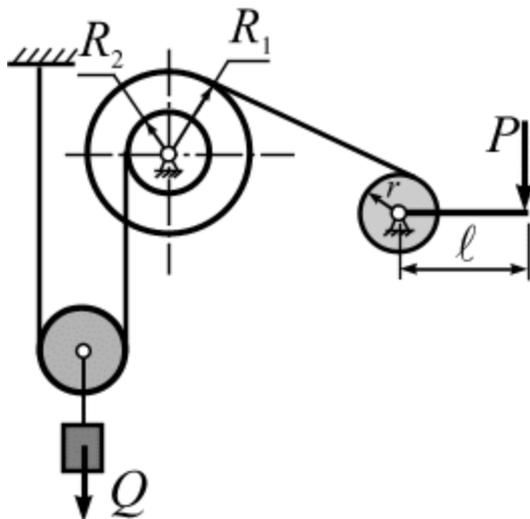
13. Однородный куб веса P опирается одной из сторон на гладкую стену, а ребром – на гладкий невесомый стержень AB , прикрепленный к стене шарниром A . Другой конец стержня скреплен с нитью, переброшенной через блок O и несущей на конце груз Q .

Вычислить вес Q , необходимый для равновесия, и силу давления куба на стенку, если $AK = KB$.



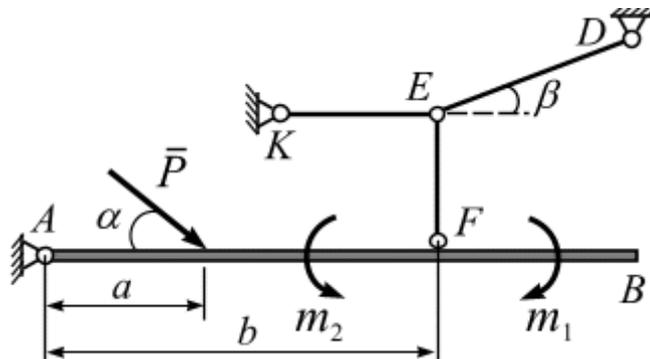
14. Две однородные балки прикреплены к неподвижным шарнирам A и D . Балка CD опирается на балку AB , которая, в свою очередь, опирается на горизонтальную плоскость; $AB = 4\ell$, $CB = \ell$, $CD = 2\ell$.

Вычислить реакцию в шарнире A , если вес балок $P(AB) = 100 \text{ Н}$, $Q(CD) = 70 \text{ Н}$.

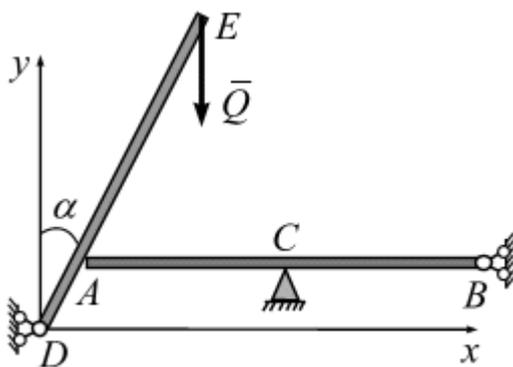


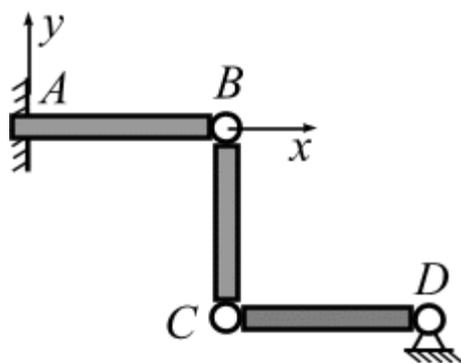
15. Для подъема груза растяжимого троса используется двухступенчатый ворот с полиспастом. Вычислить соотношение между силой P , прикладываемой к рукоятке длиной ℓ , и весом поднимаемого груза Q , если радиусы барабанов равны r, R_1, R_2 .

16. Балка AB закреплена шарнирно в точке F и удерживается в горизонтальном положении тросами KE, EF, ED . На балку действует сила $P=10$ кН и две пары сил с моментами $m_1=5$ кН·м и $m_2=3$ кН·м, $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$. Вычислить натяжение троса DE , пренебрегая весом балки, если $a=3$ м; $b=7$ м.

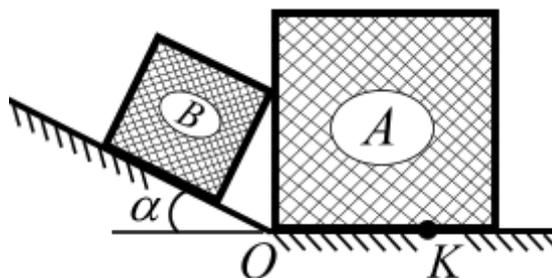


17. Однородная горизонтальная балка AB весом 1 кН опирается на гладкую опору C и поддерживает однородную балку DE весом 2 кН. На балку DE в точке E действует вертикальная сила \bar{Q} модулем 0,5 кН. Вычислить реакцию опоры C , если $AD = DE/4$, $AB = 3$ м, $BC = 1$ м, $\alpha = 30^\circ$.





18. Две однородные горизонтальные балки AB и CD соединены с вертикальной балкой CB при помощи шарниров. Конец A балки AB заделан в стенку, а конец D балки CD закреплен шарниром. Вычислить реакции шарниров и заделки, если вес каждой балки равен $P=10$ кН, а длина 2 м.



19. Два однородных кубических ящика A и B весом P и Q установлены один на горизонтальной шероховатой плоскости с углом трения φ , другой – на гладкой плоскости, наклонной к горизонту под углом α .

Ящик B ребром касается грани ящика A , причем плоскость рисунка является вертикальной плоскостью материальной симметрии. Вычислить зависимость между весами ящиков при равновесии. Где находится точка K приложения равнодействующей нормальных сил реакций горизонтальной плоскости, если ребра ящиков равны a и b , соответственно?

Глава 6. Равновесие при наличии трения



Вспомни теорию

Трением называют сопротивление, возникающее при движении одного тела по поверхности другого. Остановимся на трении скольжения и трении качения.

6.1. Трение скольжения

Трением скольжения называют сопротивление скольжению одного тела по поверхности другого (иногда его называют трением сцепления).

Сила трения скольжения имеет следующие свойства:

1. Сила трения скольжения (при прочих равных условиях) не зависит от размеров трущихся поверхностей.
2. Сила трения скольжения зависит от рода трущихся поверхностей, чистоты их обработки и вида смазки.

Таблица 1

Материалы трущихся поверхностей	Коэффициент трения			
	В состоянии покоя		В состоянии движения	
	насухо	со смазкой	насухо	со смазкой
Сталь – сталь	0,15	0,1-0,12	0,15	0,05-0,1
Сталь – чугун	0,3	-	0,18	0,05-0,15
Мягкая сталь – чугун	0,2	-	0,18	0,05-0,15
Сталь – бронза	0,15	0,1-0,15	0,15	0,1-0,15
Бронза – бронза	-	0,1	0,2	0,07-0,1
Дерево – дерево	0,4	0,2	0,5	0,07-0,15
Резина – чугун	-	-	0,8	0,5

3. Сила трения скольжения (при прочих равных условиях) зависит от скорости движущегося тела, т.е. сила трения при движении одной из поверхностей меньше силы трения «покоя». Согласно экспериментальному закону Амонтона-Кулона, сила трения связана с нормальной реакцией поверхности:

$$F_{mp} = f \cdot N, \quad (6.1)$$

где N – нормальная реакция поверхности, f – коэффициент трения скольжения (безразмерная величина, подсчитывается экспериментально, заносится в таблицы справочников, см. табл.1).

Пример 6.1. Однородный стержень AB длиной L опирается одним концом на гладкую вертикальную стену, а другим B – на шероховатую вертикальную стену (рис. 6.1). Расстояние между стенами $h < L$. Вычислить коэффициент трения стены f , при котором возможно равновесие стержня.

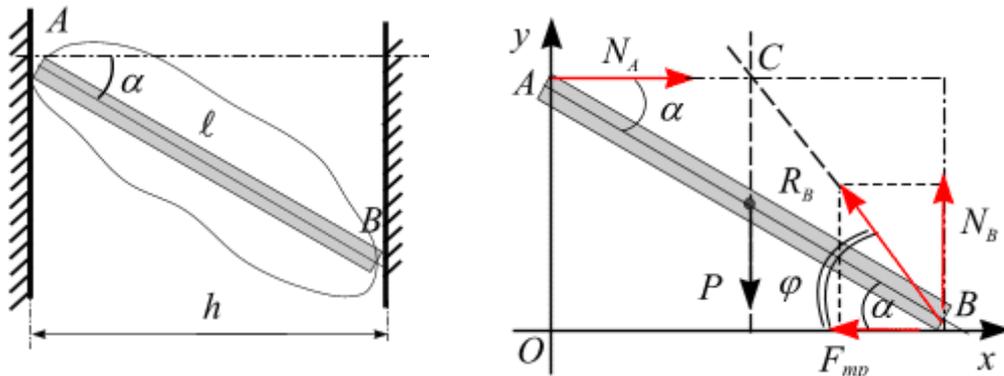


Рис. 6.1

Решение. Рассмотрим случай, когда точка A расположена выше точки B стержня. Выделим стержень AB , рис. 6.1, б. На стержень действует сила тяжести P , приложенная посередине, реакция гладкой стены N_A направлена нормально поверхности и пересекает линию действия веса в точке O . Тогда по теореме о трех непараллельных силах линия действия реакции опоры B должна

пересечь точку O (рис. 6.1, б), которую разложим на нормальную реакцию N_B и силу трения F_{mp} .

Составим условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad N_A - N_B = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad F_{mp} - P = 0;$$

$$\sum M_B(F_i) = 0, \quad P \cdot \frac{h}{2} - N_A \cdot L \cdot \sin \alpha = 0.$$

К этим уравнениям следует добавить неравенство для сил трения:
 $F_{mp} \leq f N_B$.

Из составленных уравнений равновесия вычисляем:

$$N_A = N_B = N, \quad F_{mp} = P, \quad N_A = \frac{Ph}{2L \cdot \sin \alpha}.$$

Из геометрии задачи имеем: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L}$.

Для силы трения F_{mp} имеем:

$$F_{mp} = P, \quad F_{mp} \leq f N_B = f \frac{Ph}{2\sqrt{L^2 - h^2}}.$$

Исключая из них силу трения F_{mp} , после сокращения на P получаем:

$$f \frac{h}{2\sqrt{L^2 - h^2}} \geq 1.$$

Искомое условие для коэффициента трения f при равновесии стержня принимает вид: $f \geq \frac{2\sqrt{L^2 - h^2}}{h}$.

Ответ: равновесие стержня сохраняется при условии $f \geq \frac{2\sqrt{L^2 - h^2}}{h}$.

6.2. Конус трения



Вспомни теорию

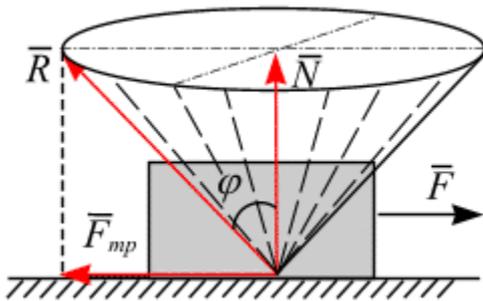


Рис. 6.2

Конусом трения называется пространство, ограниченное конической поверхностью, полученное при вращении полной реакции этой поверхности вокруг нормали (рис. 6.2).

Угол φ , образованный нормалью к поверхности связи и линией действия равнодействующих сил, называется *углом трения* (рис. 6.2).

Угол трения φ связан с коэффициентом трения соотношением:

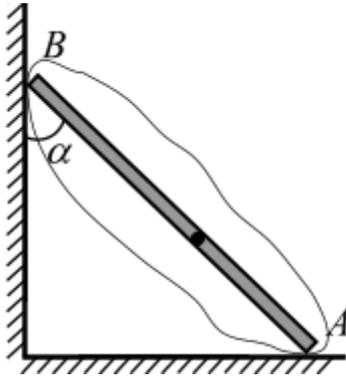
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp}}{N} = \frac{f N}{N} = f. \quad (10.2)$$

Областью равновесия тела на шероховатой поверхности является конус трения.

Для того чтобы тело начало движение, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая активных сил \bar{Q} находилась вне конуса трения.

Пример 6.2. Лестница опирается концами A и B о горизонтальный пол и вертикальную стену (рис. 6.3, а). Пренебрегая весом лестницы, вычислить, при каких положениях стоящего на ней человека система остается в равновесии. Углы трения φ_A и φ_B в точках A и B известны.

а



б

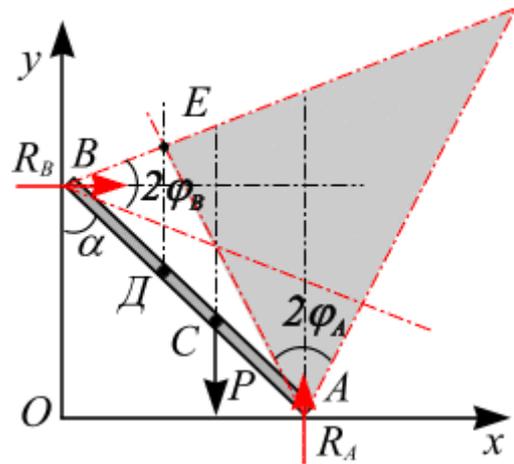


Рис. 6.3

Решение. Решим задачу графически. На лестницу действуют три силы: сила тяжести P , равная весу человека, реакции R_A и R_B . Линия действия реакции R_A находится внутри конуса трения φ_A , а линия действия реакции R_B – внутри конуса трения φ_B . Согласно теореме о трех силах, при равновесии линия действия силы P должна пересекать область пересечения конусов трения φ_A и φ_B (рис. 6.3, б). Следовательно, человек весом P безопасно может подняться только до точки D , т.е. пройти путь AD .

Чтобы человек мог дойти до верхнего конца лестницы, угол α , который она образует с вертикалью, должен быть больше или равен углу трения, т.е.:

$$\alpha \geq \varphi_A$$

(от силы трения вертикальной поверхности этот результат не зависит).

При отсутствии трения на поверхностях линии действия реакций R_A , P и R_B пересекутся в точке O . Поэтому равновесие системы трех сил R_A , R_B и P

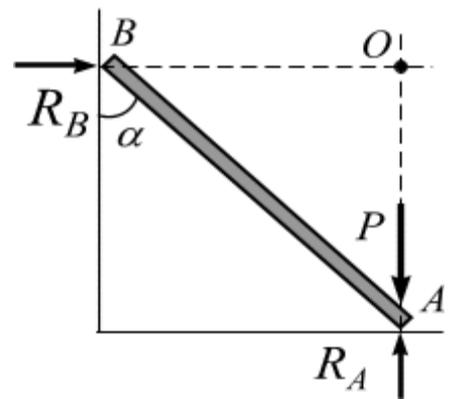


Рис. 6.4

будет возможно только тогда, когда человек стоит в точке A лестницы (рис. 6.4).

Пример 6.3. Вычислить величину силы Q , необходимую для удержания в равновесии бруска весом P на наклонной плоскости при заданных углах α и β и угле трения φ , считая $\alpha > \varphi$ (рис. 6.5).

Решение

1. Рассмотрим движение тела вниз и вверх по наклонной плоскости. Если брусок движется вверх по наклонной плоскости, то сила трения направлена в противоположную сторону. Ось x направим по движению, тогда уравнения равновесия запишутся так:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad -F_{mp} - Q \cos \beta + mg \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y = 0, \quad N + Q \sin \beta - mg \cos \alpha = 0. \end{aligned} \tag{a}$$

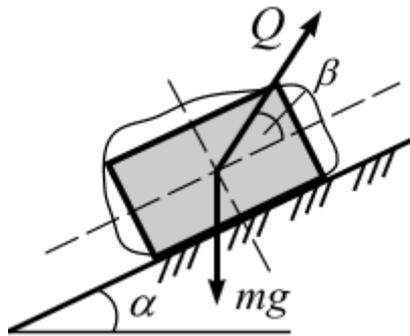


Рис. 6.5

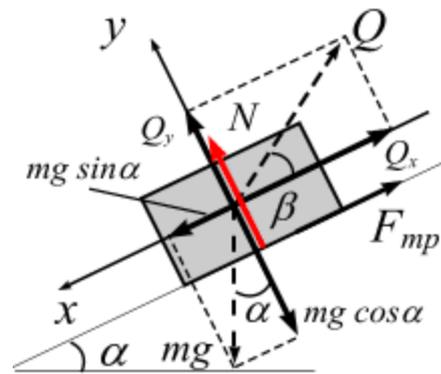


Рис. 6.6

Согласно (10.2) $f = tg \varphi$, а также, зная из (10.1), что $F_{mp} = f N$, из уравнений (a) получим

$$\begin{aligned} -f N - Q \cos \beta + mg \sin \alpha = 0, \\ N + Q \sin \beta - mg \cos \alpha = 0. \end{aligned} \tag{б}$$

Выразим N из второго уравнения (a):

$$N = mg \cos \alpha - Q \sin \beta,$$

и подставим в первое уравнение (б):

$$-f(mg \cos \alpha - Q \sin \beta) = Q \cos \beta - mg \sin \alpha.$$

Выразим из полученного уравнения Q :

$$Q(f \sin \beta - \cos \beta) = mg(f \cos \alpha - \sin \alpha),$$

$$Q = mg \frac{f \cos \alpha - \sin \alpha}{f \sin \beta - \cos \beta}. \quad (\text{в})$$

Подставим значение $f = \operatorname{tg} \varphi$ в уравнение (в), получим

$$Q = mg \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta}.$$

Домножим числитель и знаменатель на $\cos \varphi$:

$$Q = mg \frac{(\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \alpha) \cdot \cos \varphi}{(\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta) \cdot \cos \varphi},$$

раскроем скобки:

$$Q = mg \frac{\sin \varphi \cdot \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \sin \alpha}{\sin \beta \cdot \sin \varphi - \cos \beta \cdot \cos \varphi}.$$

Выполним тождественное алгебраическое преобразование:

$$Q = mg \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{-\cos(\varphi + \beta)} = mg \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}, \quad \text{т.е. } Q = mg \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}. \quad (\text{г})$$

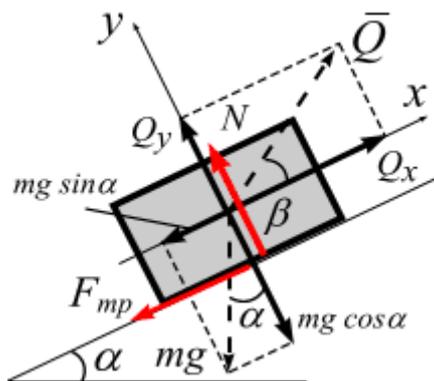


Рис. 6.7

2. Рассмотрим движение бруска по наклонной плоскости вверх. Направим ось x по движению бруска, тогда сила трения будет направлена в обратную сторону (рис. 6.7).

Запишем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad Q \cos \beta - mg \sin \alpha - F_{mp} = 0, \\ \sum F_y = 0, \quad N + Q \sin \beta - mg \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (\text{д})$$

Выразим из второго уравнения системы (д):

$$N = -Q \sin \beta + mg \cos \alpha.$$

Тогда первое уравнение системы (д) примет вид:

$$Q \cos \beta - mg \sin \alpha - fN = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$Q \cos \beta - mg \sin \alpha - f(mg \cos \alpha - Q \sin \beta) = 0.$$

Отсюда:

$$Q = mg \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + \sin \beta}. \quad (\text{ж})$$

Согласно (6.2) $f = \operatorname{tg} \varphi$, т.е. выражение (ж) будет иметь вид:

$$Q = mg \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha}{\cos \beta + \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \beta}.$$

Домножив числитель и знаменатель на $\cos \varphi$, получим:

$$Q = mg \frac{(\sin \alpha + \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha) \cos \varphi}{(\cos \beta + \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \beta) \cos \varphi}. \quad (\text{з})$$

Выполнив алгебраическое преобразование, получим:

$$Q = mg \frac{\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \sin \beta} = mg \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}. \quad (\text{и})$$

Итак, рассмотрев оба направления движения, согласно уравнениям (г) и (и) запишем условия, при которых брусок будет находиться в состоянии покоя на наклонной плоскости:

$$mg \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} \leq Q \leq mg \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}.$$

$$\text{Ответ: } mg \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} \leq Q \leq mg \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}.$$

6.3. Трение качения



Вспомни теорию

Сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого, называется **трением качения**. Если поверхность деформирована, то цилиндр остается в покое до тех пор, пока сила Q не достигнет своего предельного значения (рис. 6.10).

Точка приложения реакции смещена на некоторое расстояние k от вертикали, проходящей через центр цилиндра. Разложим реакцию плоскости \bar{R} на две составляющие: нормальную составляющую \bar{N} и касательную составляющую \bar{R}^τ (рис. 6.10), которая соответствует силе трения качения и обозначается $\bar{F}_{тр.к.}$.

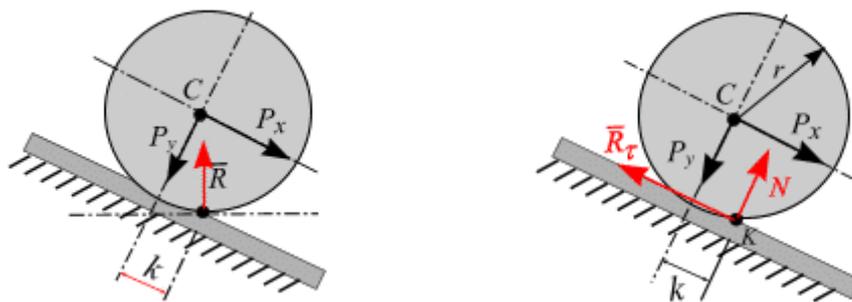


Рис. 6.10

В предельном равновесии пары, создаваемые внешними силами и реакциями поверхности, уравновешиваются, т.е. $N \cdot k = Q \cdot r$, откуда

$$Q = \frac{k}{r} N.$$

То есть уравнение равновесия будет выглядеть:

$$m(Q; F_{mp}) = m(P; N), \text{ или } N \cdot k = Q_{пред.} \cdot r.$$

Моментом трения качения называется произведение коэффициента трения качения на нормальное давление: $M_k = N \cdot k$.

Значение коэффициента трения качения представлено в табл. 2.

Таблица 2

Материалы трущихся поверхностей	Коэффициент трения качения (k), см
Мягкая сталь – мягкая сталь	0,005
Закаленная сталь – закаленная сталь	0,001
Чугун – чугун	0,005
Дерево – сталь	0,03 – 0,04
Дерево – дерево	0,05 – 0,08

Пример 10.5. На наклонной плоскости находится цилиндр. Найти, при каких углах α наклона плоскости к горизонту цилиндр будет находиться в равновесии, если r – радиус цилиндра, f – коэффициент трения скольжения, k – коэффициент трения качения (рис. 6.11, а).

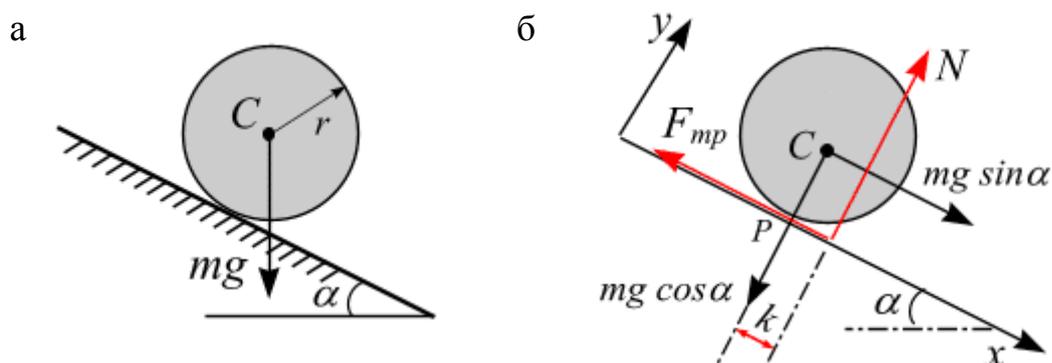


Рис. 6.11

Решение. На тело действуют силы (рис. 6.11): вес $m\bar{g}$, нормальная реакция поверхности \bar{N} и сила трения $\bar{F}_{mp.}$. Сила \bar{N} смещена на расстояние k по направлению движения тела.

Чтобы тело оставалось в равновесии, необходимо, чтобы сила $mg \sin \alpha$ не была по модулю больше силы $\bar{F}_{mp.}$, т.е. $mg \sin \alpha \leq F_{mp.}$ и сила $mg \cos \alpha$ не становилась больше по величине силы N , т.е. $mg \cos \alpha \leq N$.

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0, \quad N - mg \cos \alpha &= 0, \\ \sum F_x = 0, \quad mg \sin \alpha - F_{mp.} &= 0, \\ \sum m = 0, \quad N \cdot k &= r \cdot mg \sin \alpha. \end{aligned} \quad (\text{в})$$

Решая совместно первые два уравнения, получим:

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha, \\ \sin \alpha &= \frac{F_{mp.}}{mg} = \frac{fN}{mg} = \frac{fmg \cos \alpha}{mg} = f \cos \alpha, \\ k \cdot N &= r \cdot mg \sin \alpha. \end{aligned} \quad (\text{г})$$

Подставив в третье уравнение системы (в) полученные выражения, имеем:

$$\begin{aligned} k \cdot mg \cos \alpha &= r \cdot mg \sin \alpha, \quad \text{откуда} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{k}{r}. \end{aligned} \quad (\text{д})$$

Таким образом, вернувшись к неравенству (а), получаем, что для выполнения заданных требований должно удовлетворяться следующее условие:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha &\leq f mg \cos \alpha, \quad \text{или} \\ \operatorname{tg} \alpha &\leq f. \end{aligned} \quad (\text{е})$$

Подставив (д) в (е), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{k}{r} \quad (\text{ж})$$

Отметим, что неравенства (е) и (ж) должны удовлетворяться одновременно. В тех случаях, когда $\frac{k}{r} < f$, происходит потеря равновесия, и цилиндр катится по поверхности; если же $\frac{k}{r} > f$, то цилиндр начинает скользить по поверхности.

Ответ: цилиндр будет сохранять равновесие при условии $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{k}{r}$.

Пример 6.6. Вычислить силу P , необходимую для качения цилиндрического катка диаметром 60 см и весом 300 Н по горизонтальной плоскости (рис. 6.12, а), если коэффициент трения качения $k = 0,5$ см, а угол, составляемый силой \bar{P} с горизонтальной плоскостью, равен $\alpha = 30^\circ$.

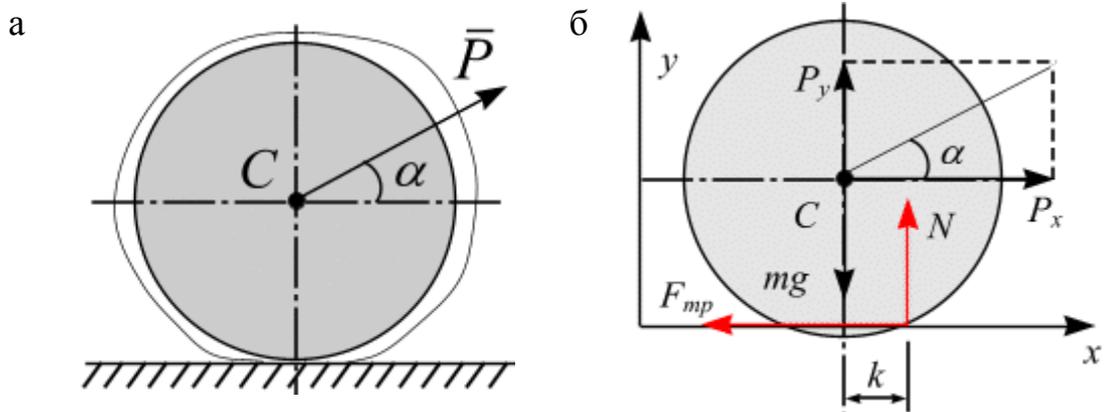


Рис. 6.12

Решение. На цилиндр действуют силы: mg – вес, P – внешняя сила, N – нормальная реакция опоры, F_{mp} – сила трения. Разложим внешнюю силу P на составляющие по осям: $P_x = P \sin \alpha$ и $P_y = P \cos \alpha$ (рис. 6.12, б).

Рассмотрим предельное состояние равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, & P_x - F_{mp.} &= 0, \\ \sum F_y &= 0, & P_y - mg + N &= 0, \\ \sum m &= 0, & k \cdot N &= r \cdot F_{mp.}\end{aligned}\tag{а}$$

Преобразуем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}P \sin \alpha &= F_{mp.}, \\ N &= mg - P \sin \alpha, \\ k \cdot N &= r \cdot F_{mp.}\end{aligned}\tag{б}$$

Решая совместно систему уравнений (б), получим:

$$k(mg - P \sin \alpha) = r \cdot P \cos \alpha.\tag{в}$$

Преобразуем (в):

$$P(r \cos \alpha + k \sin \alpha) = k \cdot mg.$$

Выразим из полученного уравнения искомую силу P :

$$P = k \frac{mg}{r \cos \alpha + k \sin \alpha}.\tag{г}$$

Подставив числовые значения в выражение (г), получим значение силы P :

$$P = 0,5 \cdot \frac{300}{30 \cdot \cos 30^\circ + 0,5 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{150}{30 \cdot 0,87 + 0,5 \cdot 0,5} = 5,69 \text{ Н.}$$

Ответ: $P = 5,7 \text{ Н.}$

!!! Алгоритм решения

При решении задач на равновесие твердого тела **при наличии сил трения скольжения:**

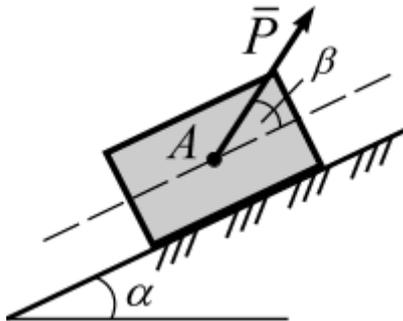
- следует реакцию шероховатой поверхности представить двумя составляющими – нормальной реакцией и силой трения – или же, не раскладывая эту реакцию на составляющие, направить ее под углом трения φ нормально к данной поверхности (при максимальной силе трения);
- составить число неизвестных величин и число независимых уравнений равновесия, которые должны быть равны для статически определенных задач; при этом к уравнениям равновесия твердого тела следует добавить зависимость силы трения от нормального давления $F_{mp} = f \cdot N$;
- выбрать систему координат;
- составить систему уравнений равновесия для сил, приложенных к твердому телу или системе твердых тел;
- решить систему уравнений равновесия, определить искомые величины.

При решении задач на равновесие твердого тела **при наличии трения качения:**

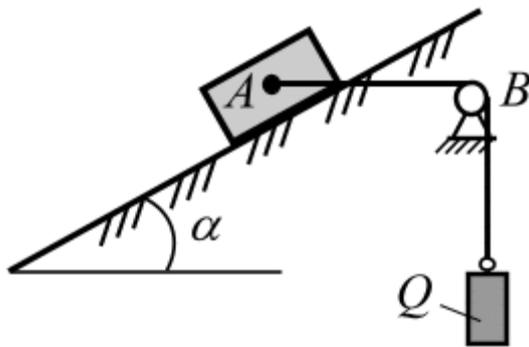
- реакцию шероховатой поверхности надо заменить двумя составляющими – силой трения F_{mp} и нормальной реакцией N , которую нужно направить из точки, отстоящей на расстоянии коэффициента трения качения f_k от нормали, перпендикулярно поверхности;
- сопоставить число неизвестных и число уравнений равновесия, добавив к ним зависимость момента трения от нормального давления; число неизвестных должно быть равно числу уравнений, если задача является статически определимой;
- составить систему уравнений равновесия для твердого тела;
- решив полученную систему уравнений, определить искомые величины;
- сопоставить силу $F = f_k \cdot N/r$ с максимальной силой трения скольжения $F_{mp} = f \cdot N$.



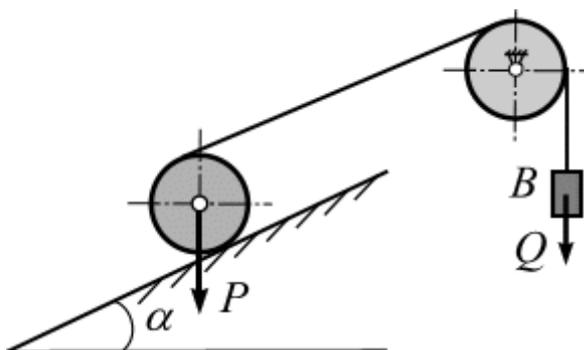
Задание для самостоятельного решения № 10



1. Вычислить величину силы P , необходимую для удержания в равновесии тела A весом Q на наклонной плоскости при заданных углах α и β и при угле трения φ , считая $\alpha > \varphi$.

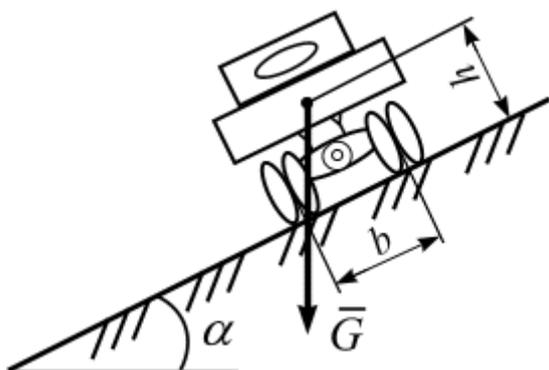


2. Плита A весом P удерживается в равновесии на наклонной шероховатой поверхности при помощи двух одинаково нагруженных тросов, один из которых показан на рисунке. Вычислить вес грузов $Q_1 = Q_2 = Q$, действующий на тросы, если угол трения равен φ , а участок троса AB горизонтальный: $\varphi < \alpha$.

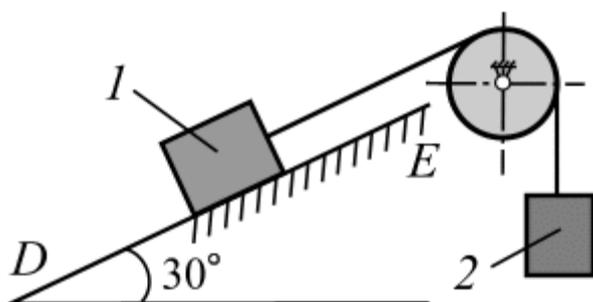


3. Цилиндр весом $P = 10 \text{ Н}$ и радиусом $R = 10 \text{ см}$ находится на шероховатой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Цилиндр связан с грузом B нитью, перекинутой через невесомый блок. При каком весе Q груза B цилиндр не покатится, если коэффициент трения качения равен $\delta = 0,01 \text{ м}$?

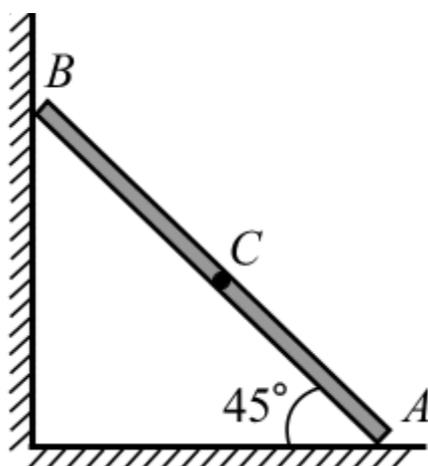
4. Автомобиль веса G стоит на наклонном участке дороги. Высота центра тяжести грузовика над полотном дороги равна h , расстояние между центрами колес b ; коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен f . При каком угле наклона дороги α к плоскости горизонта может произойти опрокидывание грузовика и когда может начаться боковое скольжение?



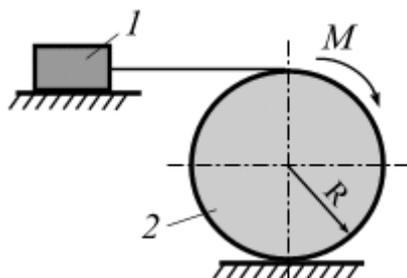
5. На наклонной плоскости лежит груз. Определить в градусах максимальный угол наклона плоскости к горизонту, при котором груз останется в покое, если коэффициент трения скольжения равен $0,6$.



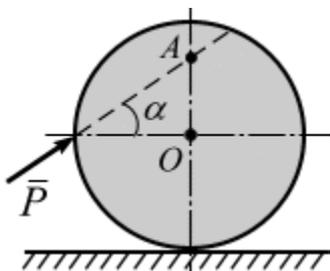
6. Вычислить наименьший вес тела 1 , при котором оно скользит вниз по плоскости DE , если вес груза 2 равен 320 Н , коэффициент трения скольжения между телом 1 и плоскостью DE равен $0,2$.



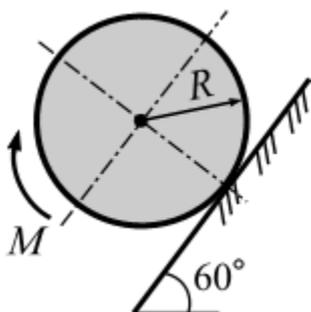
7. Однородный брус AB опирается в точке A на гладкую стену, а в точке B – на негладкий пол. Вычислить наименьший коэффициент трения скольжения между брусом и полом, при котором брус останется в указанном положении в покое.



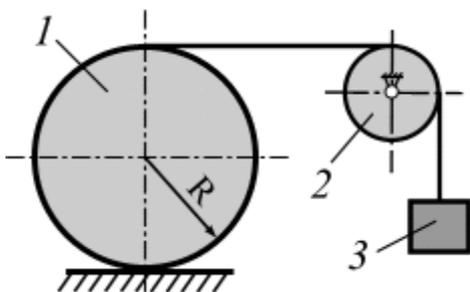
8. Однородный каток весом 4 кН и радиусом $R = 50 \text{ см}$ связан нерастяжимым канатом с телом I . Каток приводится в движение парой сил с моментом $M = 50 \text{ Н}\cdot\text{м}$; коэффициент трения качения катка $\delta = 0,5 \text{ см}$; коэффициент трения тела $f = 0,2$. Определить наибольший вес тела I , при котором оно начнет скользить.



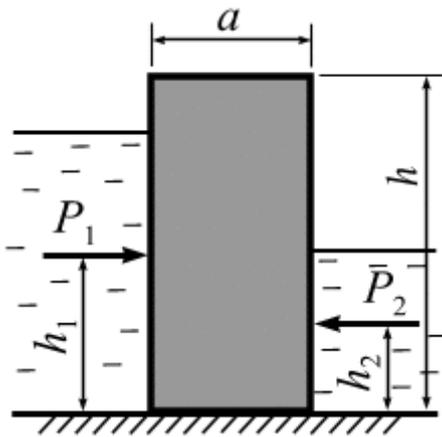
9. Вычислить наименьшую силу P , необходимую для качения катка радиусом $R = 0,3 \text{ м}$, если предельный момент трения качения равен $3,46 \text{ Н}\cdot\text{м}$, угол $\alpha = 30^\circ$, расстояние $OA = 0,2 \text{ м}$.



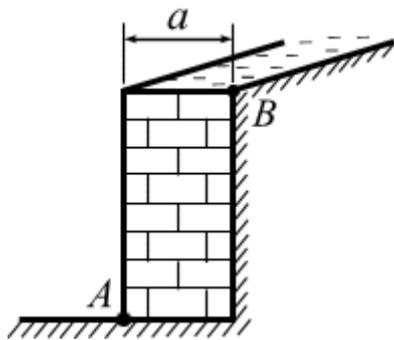
10. К однородному катку радиусом $R = 0,4 \text{ м}$ приложена пара сил с моментом $M = 210 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Каким должен быть наибольший вес катка, чтобы он мог катиться вверх по наклонной плоскости, если коэффициент трения качения $\delta = 0,006 \text{ м}$?



11. Однородный каток I весом 10 кН и радиусом $0,5 \text{ м}$ связан с грузом 3 , вес которого равен 80 Н , горизонтальной нерастяжимой нитью, перекинутой через блок 2 . Вычислить наименьший коэффициент трения качения, при котором каток останется в покое.



12. Вычислить минимальную ширину бетонной плотины прямоугольного сечения по условию устойчивости при опрокидывании, если высота плотины $h = 3,5$ м, удельный вес бетона $\gamma = 22,5$ кН/м³, горизонтальное давление $P_1 = 45$ кН/м, $P_2 = 11,25$ Н/м, $h_1 = 1$ м, $h_2 = 0,5$ м.



13. Земляная насыпь подпирается каменной стеной AB . Вычислить необходимую толщину стены a , предполагая, что давление земли на стену направлено горизонтально, приложено на $1/3$ её высоты и равно 60 кН/м (на 1 м длины стены); удельный вес кладки 20 кН/м³. (Стена должна быть рассчитана на опрокидывание вокруг ребра A).

Глава 7. Центр тяжести плоских фигур



Вспомни теорию

Радиус-вектор центра тяжести тела \bar{r}_C вычисляют по формуле:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{A} \int_S \bar{r} dA,$$

где A – площадь всей поверхности.

Формулы для вычисления координат центра тяжести системы твердых тел:

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{R}, \quad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{R},$$

здесь A_i – площади сечений.

Пример 7.1. Вычислить координаты центра тяжести однородной пластины, показанной на рис. 7.1. Все размеры показаны на рисунке в сантиметрах.

Решение. Проводим оси координат и разбиваем пластину на три прямоугольника (линии разреза показаны пунктиром) (рис. 11.1). Вычислим координаты центров тяжести каждого из прямоугольников и их площади:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \text{ см}, \\ y_1 = 1 \text{ см}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \text{ см}, \\ y_2 = 5 \text{ см}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 5 \text{ см}, \\ y_3 = 9 \text{ см}, \end{cases}$$
$$A_1 = 4 \text{ см}^2, \quad A_2 = 20 \text{ см}^2, \quad A_3 = 12 \text{ см}^2.$$

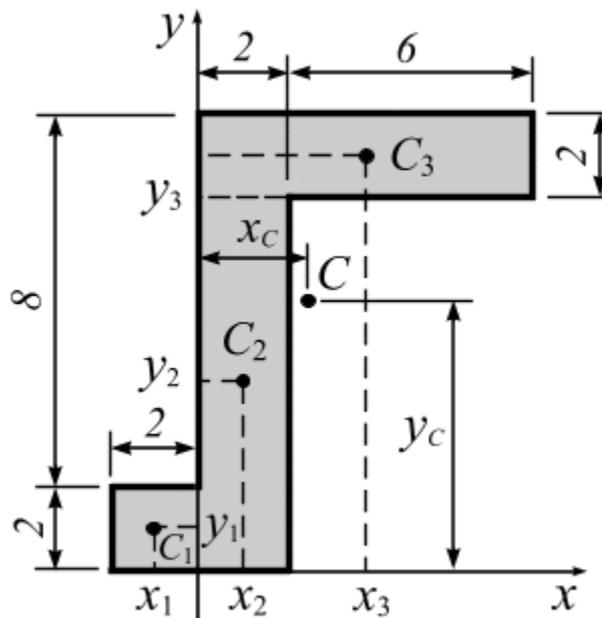


Рис. 7.1

Площадь всей фигуры: $A = \sum_{k=1}^3 A_k = A_1 + A_2 + A_3 = 4 + 20 + 12 = 36 \text{ см}^2$.

Тогда:

$$x_c = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A} = \frac{-1 \cdot 4 + 1 \cdot 20 + 5 \cdot 12}{36} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = \frac{76}{36} = 2,1 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A} = \frac{1 \cdot 4 + 5 \cdot 20 + 9 \cdot 12}{36} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5,9 \text{ см}.$$

Положение центра тяжести совпадает с точкой C (см. рис. 11.1).

Ответ: $x_c = 2,1 \text{ см}; y_c = 5,9 \text{ см}.$

Пример 7.2. Вычислить положение центра тяжести круглой пластины радиусом

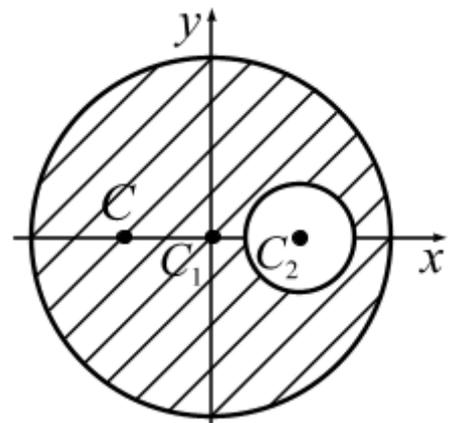


Рис. 7.2

R с вырезом радиуса r (рис. 7.2). Расстояние $C_1 C_2 = a$.

Решение. Центр тяжести пластины лежит на линии $C_1 C_2$ – на оси симметрии. Проводим оси координат, как показано на рис. 7.2.

Для вычисления координаты x_C дополняем площадь пластины A_1 до полного круга, затем вычитаем из полученной площади площадь вырезанного круга A_2 . Тогда:

$$A_1 = \pi R^2, \quad x_1 = 0; \quad A_2 = -\pi r^2, \quad x_2 = a;$$

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

Положение центра тяжести вычислим по формулам:

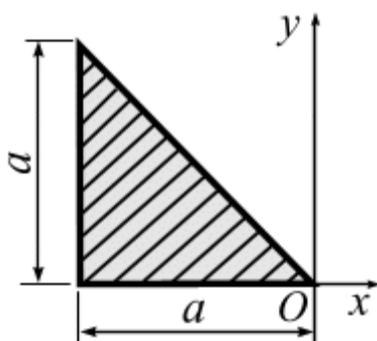
$$x_C = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A} = \frac{0 \cdot \pi R^2 + a \cdot (-\pi r^2)}{\pi(R^2 - r^2)} = -\frac{a \cdot r^2}{\pi(R^2 - r^2)}; \quad y_C = 0.$$

Вычисленный центр тяжести расположен левее точки C_1 .

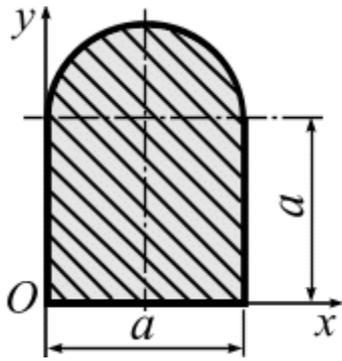
Ответ: $x_C = -\frac{a \cdot r^2}{\pi(R^2 - r^2)}; \quad y_C = 0.$



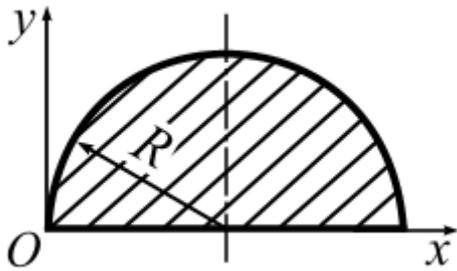
Задание для самостоятельного решения № 11



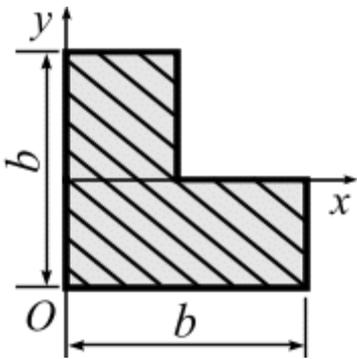
1. Вычислить статический момент площади тонкой пластины в форме прямоугольного треугольника относительно оси Oy .



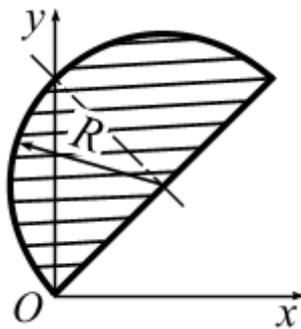
2. Вычислить ординату y_C центра тяжести тела, составленного из квадрата и полукруга.



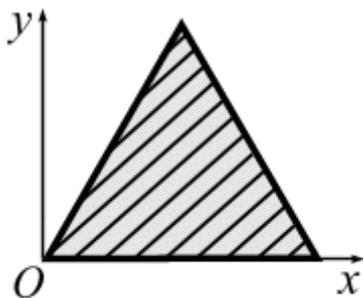
3. Вычислить ординату y_C центра тяжести полукруга радиусом $R = 4$ м.



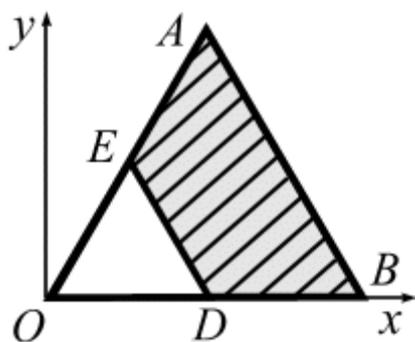
4. Вычислить ординаты центра тяжести x_C, y_C тела, составленного из трёх квадратов.



5. Вычислить абсциссу x_C центра тяжести полукруга, диаметр OA которого наклонен к си Ox под углом 45° , а радиус $R = 3$ см.



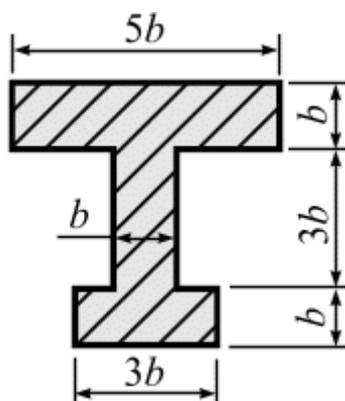
6. Вычислить статический момент пластины, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной ℓ , относительно оси Ox .



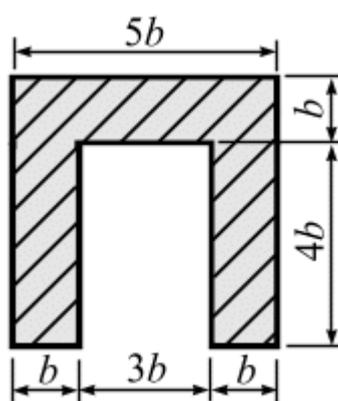
7. Вычислить статический момент относительно Oy площади $ABDE$, оставшейся после удаления из равностороннего ΔOAB со стороной $a/2$.

8. Вычислить положение центров тяжести плоских фигур, если $b = 2$ см.

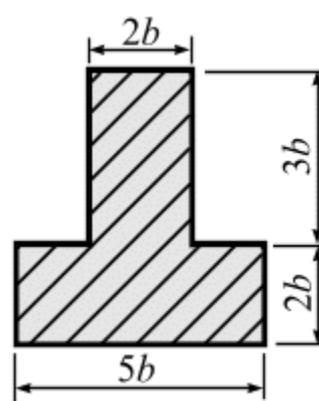
1)



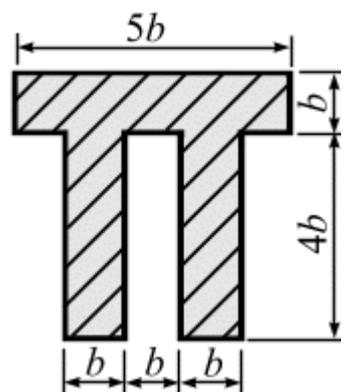
2)



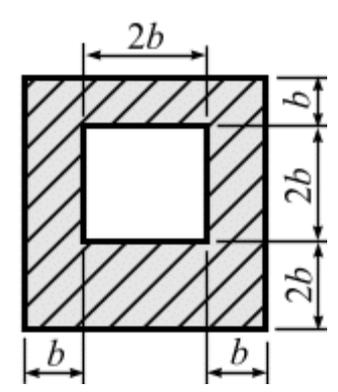
3)



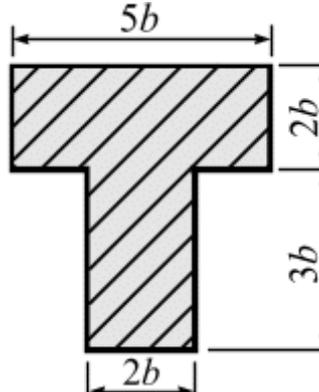
4)



5)



6)



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Богомаз, И. В. Теоретическая механика. Т. 1. Кинематика. Статика: тексты лекций / И.В. Богомаз. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 190 с.
2. Сборник коротких задач по теоретической механике: учеб. пособие для втузов / под ред. О.Э. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.
3. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
4. Сборник задач по теоретической механике / под ред. Н.А. Бражниченко. – М.: Высш. шк., 1974. – 519 с.
5. Сборник задач по теоретической механике / под ред. К.С. Колесникова. – М.: Наука, 1989. – 446 с.
6. Тарг, С. М. Курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 1995. – 416 с.
7. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика. Кинематика: учеб. пособие для студентов техн. вузов. Ч.1 / под ред. М.И. Бать. – СПб.: Политехник, 1995. – 670 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов / под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
9. Соппротивление материалов. Ч. I / И.В. Богомаз, Т.П. Мартынова, В.В. Москвичев. – М.: АСВ, 2007. – 202 с.

Учебное издание

Ирина Владимировна Богомаз
Евгений Александрович Степанов
Евгений Анатольевич Песковский

Статика: сборник заданий, примеры

Учебное пособие

Электронное издание

Электронное издание

Редактор *Н.А. Агафонова*

Корректор *А.П. Малахова*

Верстка *Н.С. Хасанишина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 15.01.20.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 16,25