

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. В. П. АСТАФЬЕВА»

(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики

Кафедра физики и методики обучения физике

Липовцев Андрей Романович

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Разработка элективного курса "Порядок и хаос в физических явлениях" для
учащихся старших классов

Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы

Физика и информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ



Заведующий кафедрой
профессор, доктор педагогических наук
В.И. Тесленко

10. VI 19 ВИТ
(дата, подпись)

Руководитель профессор, доктор физико-
математических наук

В.М. Логинов.

13.05.2019 ЛС
(дата, подпись)

Дата защиты _____

Обучающийся Липовцев А.Р.
(фамилия инициалы)

29.04.2019 Липовцев
(дата, подпись)

Оценка удовлетворительно
(прописью)

Красноярск 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	3
2. ГЛАВА 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К СОЗДАНИЮ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА..	5
3. ГЛАВА 2. РЕГУЛЯРНЫЕ ПРОЦЕССЫ (ПОРЯДОК).....	7
3.1 Математическое определение периодической функции.....	7
3.2. Простейшие физические системы, приводящие к гармоническим колебаниям	8
3.2.1 Физический маятник.....	8
3.2.2 Колебания груза на пружинке.....	9
3.2.3 Движение частицы вблизи минимума потенциальной энергии.....	11
3.2.4 Электрический колебательный контур.....	12
3.3. Разложение Фурье.....	13
3.4. Периодичность десятичной последовательности рациональных чисел...	16
3.5. Нелинейные колебательные процессы.....	21
3.5.1. Автоколебания на примере генератора Ван-дер-Поля.....	21
3.5.2. Частица в потенциальном поле с двумя минимумами.....	25
4. ГЛАВА 3. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (ХАОС).....	28
4.1. Явление динамической стохастичности (Знаменитые модели).....	29
4.1.1. Одномерное отображение типа "палатка"	29
4.1.2. Модель Лоренца.....	30
4.2. Число π . Десятичное представление трансцендентных и иррациональных чисел.....	32
4.2.1. Расчёт показателя Хёрста.....	32
4.2.3. Фазовый портрет от предыстории для числа π	35
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	36

1. Введение

Примерно тысячу лет назад персидский философ, математик, астроном и поэт Омар Хайям (живший в 1048 — 1131 годах нашей эры) говорил о том, что порядок и хаос равноправные участники формирования нашего мира. Порядок и хаос действительно суть две составляющие нашего мира и упорядоченные и хаотические процессы играют первостепенную роль в формировании **разнообразия** окружающей нас действительности. Представляется, что школьникам старших классов нужно расширить кругозор в этом важном вопросе. В связи с этим была поставлена задача разработать **элективный курс по теме "Порядок и хаос в физических явлениях"** для учащихся старших классов.

Обратимся сначала к определениям.

ЯВЛЕНИЕ (феномен) — это непосредственная данность предмета в чувственном восприятии, в опыте воспринимающего сознания.

Что мы будем понимать под "физическим явлением"?

Кипение воды, таяние льда, ветер, гром - относятся к явлениям. Физика изучает механические, электрические, магнитные, тепловые, звуковые и световые явления, их и будем называть физическими явлениями.

В результате осуществления того или иного явления можно заметить визуальное и количественное изменение тех или иных характеристик, используемых для описания данного процесса. И эти изменения протекают в пространстве и во времени.

Физики выделяют два типа процессов:

1. К первому относятся процессы переменная, их характеризующая, в которых переменная и их характеризующая меняются только во времени. Это означает что во всех точках пространства одновременно происходят изменения рассматриваемой физической переменной. *Такие системы называются сосредоточенными.*

2. Второй тип процессов наиболее общий, относится к так называемым *распределенным системам*, где переменная меняются и в пространстве и во времени, так что в разных точках пространства временные изменения разные.

С позиции современной физики процессы, протекающие в сосредоточенных и распределенных средах, разделяются на *процессы регулярного* типа и процессы относящиеся к *случайным* (стохастическим). В соответствии с тем, что говорил Омар Хайям и говорят достижения современной физики, регулярные и случайные процессы являются двумя равноправными составными частями всего того, что происходит в живой и неживой природе.

Если обратиться к повседневному опыту на протяжении всей жизни человека наблюдаются процессы, которые периодически повторяются во времени:

- чередование дня и ночи в течении суток;
- годовичное чередование времен года;
- наблюдаемое положение планет и звезд на небе и т.д.

Из других наблюдений, с которыми мы также сталкиваемся, видим процессы подверженные случайным изменениям:

- случайное изменение освещенности той или иной области (того или иного объекта) обусловленное облачностью;
- направление и скорость ветра, хаотическое колебание листвы в зависимости от направления и скорости ветра.

Более детальное рассмотрение примеров будут произведено в главах 2 и 3.

Суммируя вышесказанное, в силу важности единства и "борьбы" Порядка и Хаоса в окружающей природе, возникает задача привлечь внимание учащихся к этому важному феномену, проиллюстрировав данное противостояние и одновременно гармоничное единение на языке физики с привлечением математики.

Объект исследования: Разработка элективного курса по теме: "Порядок и хаос в физических явлениях" для старших классов.

Предмет исследования: Инструментарий, физические и математические модели, позволяющие продемонстрировать учащемуся общность регулярных и хаотических процессов, способствовать выбору будущей профессии в области точных наук и информатики.

Цель дипломной работы:

Сформировать представление о разнообразии мира живой и не живой природы через симбиоз регулярных и хаотических процессов с помощью элективного курса: "Порядок и хаос в физических явлениях" для учащихся старших классов и способствовать профильной ориентации учащихся.

Реализация поставленной цели потребовала решения ряда конкретных задач:

1. Проанализировать научно-методическую литературу и требований по разработке элективных курсов;
2. Провести необходимый анализ учебной и научной литературы по теме "Порядок и хаос в физических явлениях";
3. Разработать элективный курс по теме "Порядок и хаос в физических явлениях".

Решение поставленных задач потребовало привлечение следующих методов исследования:

1. Структурно-логический анализ и систематизация научного и учебного материала.
2. Разработка учебного материала.

Практическая значимость исследования заключается в том, что:

Разработан элективный курс по физике на тему "Порядок и хаос в физических явлениях", который можно рекомендовать в качестве профильного обучения в основной школе.

2. Глава 1. Необходимые сведения и требования к созданию элективного курса

При написании этого раздела использованы материалы [1].

Элективные учебные курсы в 9-11х классах – это учебные предметы по выбору, направленные на организацию предпрофильной и профильной подготовки обучающихся.

Элективные учебные курсы профильного обучения – обязательные учебные предметы по выбору обучающихся на уровне основного общего и среднего общего образования.

Элективные учебные предметы выполняют три основных функции:

- развитие содержания одного из базовых учебных предметов, что позволяет поддерживать изучение смежных учебных предметов на профильном уровне или получать дополнительную подготовку для сдачи единого государственного экзамена;
- «надстройка» профильного учебного предмета, когда такой дополненный профильный учебный предмет становится в полной мере углубленным;
- удовлетворение познавательных интересов учащихся в различных сферах человеческой деятельности.

Цели и задачи элективных курсов:

1. Цель элективных курсов:

- удовлетворение индивидуальных образовательных потребностей каждого обучающегося.

2. Задачи элективных курсов:

- выработка у обучающихся умений и способов деятельности, направленных на решение практических задач;

- формирование индивидуальной траектории развития профессиональных интересов школьников;
- создание условия для качественной подготовки к государственной итоговой аттестации;
- повышение уровня социализации личности;
- подготовка к осознанному выбору сферы будущей профессиональной деятельности;
- поддержка изучения базовых предметов;
- поддержка изучения профильных (углубленных) предметов.

Организация и порядок проведения элективных курсов:

1. Элективные курсы являются вариативной частью учебного плана.
2. Объем элективных курсов может быть от 8 до 68 часов в год (в нашем случае ориентируемся на 12 часов). В ходе предпрофильной подготовки элективные курсы изучаются в течение одного учебного года. Элективные курсы профильного обучения могут иметь продолжительность от одного года до двух лет.
3. Изучение элективных курсов организуется с использованием учебников, включенных в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования Российской Федерации от 31.03.2014 № 253 «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования» и (или) учебных пособий, а также с использованием художественной литературы, словарей, справочной литературы, электронных образовательных ресурсов.

Учебное пособие может быть представлено в форме видеокурса, интерактивной компьютерной программы.

4. Формы обучения на элективных курсах могут быть как традиционными, так и ориентированными на инновационные педагогические технологии (коммуникативная, групповая, проектно-исследовательская и т. д.).
5. Комплектование групп при изучении элективных курсов осуществляется на основании заявлений обучающихся, исходя из их индивидуальных образовательных интересов и потребностей.

Презентация элективных предметов для обучающихся и их родителей (законных представителей) проводится в апреле-мае предыдущего учебного

года, после чего обучающийся выбирает элективные курсы для изучения в следующем учебном году.

Объём учебной нагрузки в неделю не должен превышать максимально допустимый. Ежегодный набор элективных предметов зависит от образовательных запросов обучающихся, материальных, финансовых и кадровых возможностей учебного заведения.

3. Глава 2. Регулярные процессы (Порядок)

Как уже говорилось в Введении, из повседневных наблюдений в первую очередь обращают на себя внимание периодические процессы.

В качестве примеров рассмотрим колебания физического маятника, колебания груза на пружине, электрический колебательный контур, нелинейные колебательные системы.

Урок I (4 часа). Откуда берутся гармонические колебания?

3.1. Математическое определение периодической функции

Дадим сначала математическое определение периодического процесса.

Для простоты будем говорить о процессах, которые характеризуются одномерной функцией времени $x(t)$.

Функция $x = x(t)$ с областью определения D называется периодической, если существует хотя бы одно число $T > 0$, такое, при котором выполняются следующие два условия:

- 1) точки $t + T$, $t - T$, принадлежат области определения D для любого $t \in D$;
- 2) для каждого x из D имеет место соотношение

$$x(t) = x(t + T) = x(t - T).$$

Число T называется *периодом* функции $x(t)$. Иными словами, периодической функцией является такая функция, значения которой повторяются через некоторый промежуток. Например, функция $y = \sin x$ – периодическая по x функция с периодом 2π (рис. 1).

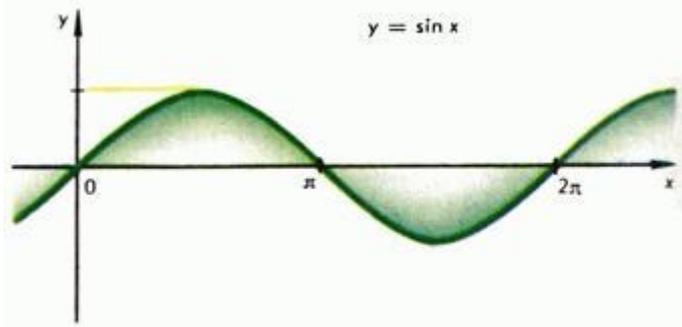


Рис. 1. График функции $y = \sin x$.

Заметим, что если число T является периодом функции $x(t)$, то и число $2T$ также будет ее периодом, как и $3T$, и $4T$ и т.д., т.е. у периодической функции бесконечно много разных периодов. Если среди них имеется наименьший (не равный нулю), то все остальные периоды функции являются кратными этому числу.

3.2. Простейшие физические системы, приводящие к гармоническим колебаниям

3.2.1. Физический маятник

В качестве первого физического примера иллюстрирующего появление периодических гармонических колебаний рассмотрим физический маятник (см. рис. 2): Твердое тело подвешенное в точке A с центром масс в точке C совершает колебания характеризуемое углом отклонения φ от вертикальной оси до прямой AA' проходящие через центр масс тела. Угол φ здесь является обобщенной координатой.

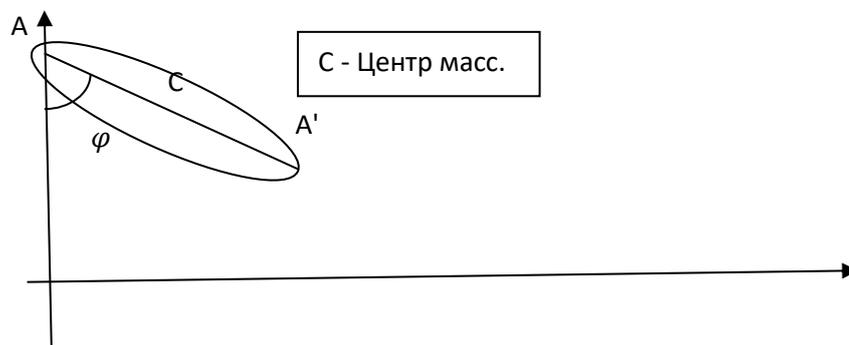


Рис.2

Уравнение движение физического маятника имеет вид (см., на пример, [2])

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi, \quad (2)$$

где m - масса маятника, l - расстояние между точкой подвеса и центром масс и I - момент инерции маятника относительно точки A .

Уравнение (2) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение может быть записано в виде эллиптических функций. Если углы φ отклонения маятника малы, уравнение (2) упрощается, поскольку при малых φ функцию $\sin\varphi$ можно заменить на φ и уравнение (2) преобразуется к виду

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$. Решение этого уравнения можно представить в форме

$$\varphi(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (4)$$

Здесь a и θ произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Например, при $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\dot{\varphi}(0) = \Omega$

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\Omega}{\omega_0 \varphi_0}. \quad (5)$$

Из решения (4) следует что угол φ колеблется по гармоническому закону с частотой ω_0 . При этом период колебаний T равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (6)$$

Период колебаний зависит от массы маятника, его момента инерции относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром масс маятника. Как увидим далее модель, описываемая уравнением (3) является одной из фундаментальных моделей в физике.

3.2.2. Колебания груза на пружинке

Рассматривается груз массой m прикрепленный к пружинке. Считается, что трения груза о поверхность вдоль направления x нет.

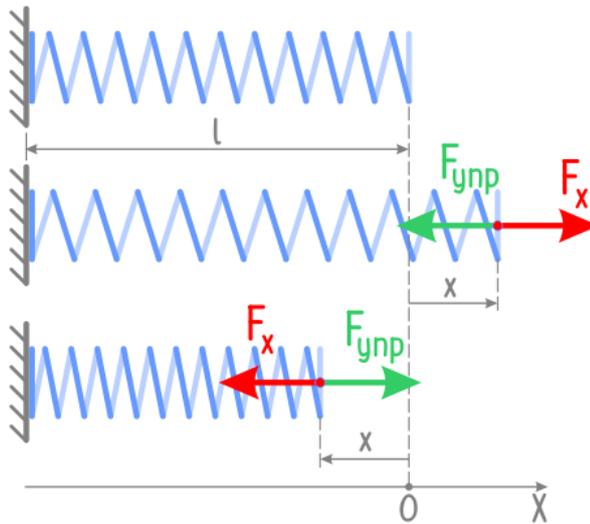


Рис. 2. Груз массой m прикрепленный к пружинке.

Растянем пружину с грузом от положения равновесия на расстояние x .

Считаем пружину упругой, так что возникающая сила упругости описывается законом Гука:

$$F_x = -kx, \quad (7)$$

так что уравнение Ньютона имеет вид:

$$m\ddot{x} = F_x = -kx \quad (8)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (9)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (10)$$

представляет собой квадрат частоты свободных колебаний грузика на упругой пружине. Это уравнение совпадает по структуре с рассмотренным ранее уравнением (3). Поэтому приведем решение уравнения (9):

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (11)$$

Здесь A - амплитуда имеет смысл отклонения груза от положения равновесия по направлению x , а θ - фаза колебаний.

Амплитуда A и фаза θ находятся из начальных условий:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = u_0.$$

Таким образом колебания грузика массой m на упругой пружине представляет собой простое гармоническое колебание с частотой ω_0 и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (12)$$

3.2.3. Движение частицы вблизи минимума потенциальной энергии

Перечисленные выше модели малых колебаний физического маятника и груза на упругой пружине обобщаются моделью движения частицы массы m вблизи минимума потенциальной энергии. Для простоты рассматриваем одномерную задачу, где потенциальная энергия есть функция координаты x . Напомним сначала что такое консервативная сила и как она связана с потенциальной энергией.

Сила называется *консервативной*, если ее работа по перемещению груза из точки 1 в точку 2 не зависит от пути, по которому это перемещение осуществляется, а зависит от координат этих точек. В этом случае силу \vec{F} можно связать с градиентом некоторого скалярного поля $V(\vec{r})$:

$$\vec{F} = -\text{grad } V(\vec{r}) = -\left(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z}\right). \quad (13)$$

В одномерном случае

$$F_x = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (14)$$

Рассмотрим далее движение частицы вблизи минимума потенциальной энергии. Пусть точка минимума расположена в начале координат $x = x_0 = 0$.

Разложим функцию $V(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x_0 = 0$

$$V(x) = V(0) + \frac{dV}{dx}\Big|_{x_0=0} x + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x_0=0} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x_0=0} x^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^4V}{dx^4}\Big|_{x_0=0} x^4 + \dots \quad (15)$$

В точках экстремума первая производная равна нулю, поэтому если $\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x_0=0} \neq 0$ и ограничиться квадратичным приближением получаем:

$$V(x) = V(0) + \frac{kx^2}{2}, \quad (16)$$

где обозначено

$$k = \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x_0=0} \neq 0. \quad (17)$$

Таким образом, задача о движении частицы вблизи минимума потенциальной энергии сводится к задаче о ее движении в квадратичной потенциальной яме:

$$V(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (18)$$

Здесь принято, что потенциальная энергия $V(x)$ отсчитывается от значения $V(0)$.

Зная потенциальную энергию, можно записать выражение для силы. Для частицы в квадратичной потенциальной яме (18) она равна:

$$F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx. \quad (19)$$

Теперь можно записать соответствующее уравнение движения частицы

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (20)$$

где $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_0=0}$ – собственная частота колебаний частицы в яме.

Уравнение вида (20) уже получали в предыдущих двух примерах. Таким образом, поскольку вид потенциала $V(x)$ здесь произволен, важно только что вторая производная от потенциала в точке минимума не равна нулю. Поэтому решение задачи о движении классической частицы массы m вблизи минимумов потенциальной энергии (при условии, что $V'' \neq 0$) имеет универсальный вид. Эта модель относится к фундаментальным, простейшим физическим моделям. Окончательно движение частицы вблизи минимума потенциальной энергии описывается простой гармонической функцией

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (21)$$

2.2.4. Электрический колебательный контур

Приведем еще один пример модели гармонических колебаний возникающие при движении заряженных электронов в *электрическом колебательном контуре* (см. рис. 3) представляющем собой соединенный в цепь конденсатор C и катушку индуктивности L .

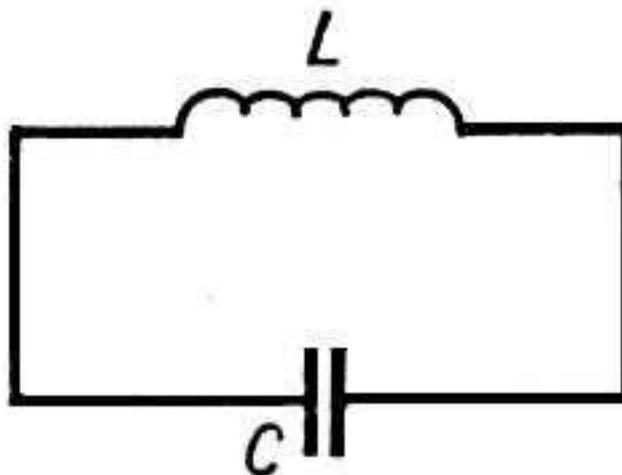


Рис. 3. Электрический колебательный контур.

Для того, чтобы вызвать колебания, нужно присоединить отключенный от индуктивности конденсатор к источнику тока, в следствии чего на обкладках возникнут разноименные заряды величины q_m . Уравнение для изменения тока i в цепи со временем имеет вид [3]:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = 0. \quad (22)$$

Имея ввиду, что ток равен производной от заряда по времени из (22) получаем

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (23)$$

где обозначено

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (24)$$

Формула (24) задает собственную частоту колебаний зарядов. Уравнение (23) совпадает по виду с уравнениями гармонических колебаний, рассмотренными ранее, так что изменение заряда на обкладках конденсатора со временем описывается гармоническим законом:

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (25)$$

Таким образом, физика представляет достаточно большое число примеров систем, в которых возникают периодические движения в виде простых гармонических колебаний.

Урок II. (2 часа). А что говорит математика?

Важную роль при изучении регулярных во времени процессов, в том числе колебательных, играют так называемые *ряды Фурье* [4].

3.3. Разложение Фурье

Определение ряда Фурье

Говорят, что функция $f(x)$ имеет период P , если $f(x + P) = f(x)$ для всех значений x . Пусть период функции $f(x)$ равен 2π . В этом случае достаточно рассмотреть поведение функции в интервале $[-\pi, \pi]$.

1. Предположим, что функция $f(x)$ с периодом 2π абсолютно интегрируема в интервале $[-\pi, \pi]$. При этом является конечным так называемый *интеграл Дирихле*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty;$$

2. Предположим также, что функция $f(x)$ является однозначной, кусочно-непрерывной (то есть имеет конечное число точек разрыва) и кусочно-монотонной (имеет конечное число максимумов и минимумов).

Если условия 1 и 2 выполнены, то ряд Фурье для функции $f(x)$ существует и сходится к данной функции.

Если x_0 – точка разрыва, то ряд Фурье сходится к значению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0 + \varepsilon)].$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}, \quad (26)$$

где коэффициенты Фурье a_0 , a_n и b_n определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (27)$$

Можно использовать другую форму записи разложения в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx + \varphi_n)$$

или

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(nx + \theta_n), \quad (28)$$

где

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad \tan \theta_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Разложение в ряд Фурье четной функции $f(x)$ с периодом 2π не содержит синусов и имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где коэффициенты Фурье определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Аналогично, разложение в ряд Фурье нечетной функции $f(x)$, имеющей период 2π , содержит только синусы и имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

где коэффициенты b_n равны

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Ниже рассмотрим пример разложения функций с периодом 2π в ряд Фурье, предполагая, что такие разложения существуют и сходятся к заданной функции.

Если интерпретировать " x " как время, а " n " как частоту, (формула (28)). Из нее видно, что любую функцию времени можно представить в форме огибающих

большого числа гармонических колебаний с разными амплитудами, частотами и фазами. Это означает также, что любой физический процесс во времени можно интерпретировать как результат действия большого числа независимых гармонических осцилляторов.

В качестве примера рассмотрим некоторую функцию и посмотрим какое количество колебаний или осцилляторов требуется для приемлемой аппроксимации заданной функции (заданного процесса).

Найти разложение в ряд Фурье прямоугольной функции с периодом 2π , определенной в интервале $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Решение.

Вычислим a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

Определим коэффициенты Фурье при $n \neq 0$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\sin nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi n} \cdot 0 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi n} \cdot (\cos \pi n - \cos 0) = \frac{1 - \cos n\pi}{\pi n}.$$

Поскольку $\cos n\pi = (-1)^n$, то

$$b_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n}.$$

Таким образом, разложение в ряд Фурье для рассматриваемой функции имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin nx.$$

Отсюда легко записать несколько первых членов разложения. Для $n = 5$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 - (-1)}{\pi} \sin x + \frac{1 - (-1)^2}{2\pi} \sin 2x + \frac{1 - (-1)^3}{3\pi} \sin 3x + \frac{1 - (-1)^4}{4\pi} \sin 4x + \frac{1 - (-1)^5}{5\pi} \sin 5x + \dots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots.$$

Из рисунка 4 видно, что график рассматриваемой функции хорошо аппроксимируется рядом Фурье с 10 "гармониками", то есть десять осцилляторов достаточно подробно характеризуют моделируемый процесс.

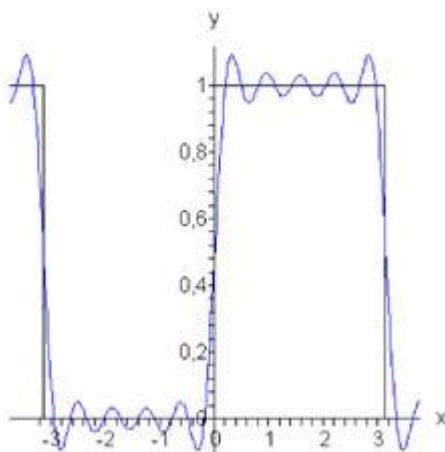


Рис.4. $n = 10$.

3.4. Периодичность десятичной последовательности рациональных чисел

При проведении расчетов часто встречаются рациональные числа, представляющие собой отношения целых чисел. Как следует из математической теории чисел, рациональные дроби в десятичном представлении характеризуются периодичностью последовательности чисел, записанных после запятой. Прежде чем обсуждать некоторые особенности этой периодичности приведем некоторые математические сведения из теории рациональных чисел.

Начнем с математического определения рационального числа. [5, <http://kvant.mccme.ru/pdf/2000/02/kv0200semenova.pdf>]

Рациональное число - это число которое может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где числитель m - целое число, а знаменатель n - натуральное.

Приведем также теорему дающую верхнюю длину периода [5, <http://kvant.mccme.ru/pdf/2000/02/kv0200semenova.pdf>]

Теорема

Десятичное представление дроби m/n , где m, n – натуральные числа, $m < n$, – периодическая дробь, длина наименьшего периода которой не превосходит $n - 1$.

Рассмотрим далее два примера используя инструментарий исследования десятичных последовательностей вещественных чисел с помощью сведения к задаче блуждания частицы по узлам квадратной решетки 10×10 ([6] С.В.Федякин, В.М.Логинов. Программный комплекс для анализа процессов, определяемых десятичным представлением вещественных чисел. Авторское свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2007612069 от 22 мая 2007 г.)

k=132 . Здесь и далее цифры в красных кружках означают вероятность посещения узла (в единицах умноженных на 10^{-2}). Сумма вероятностей по всем узлам равна 1.

k=133

9	25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	25	0.0	0.0	0.0
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.03e	0.0
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	25	0.0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

9	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5	0.0	12.5
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	12.5	0.0	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.03e
0	0.0	0.0	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

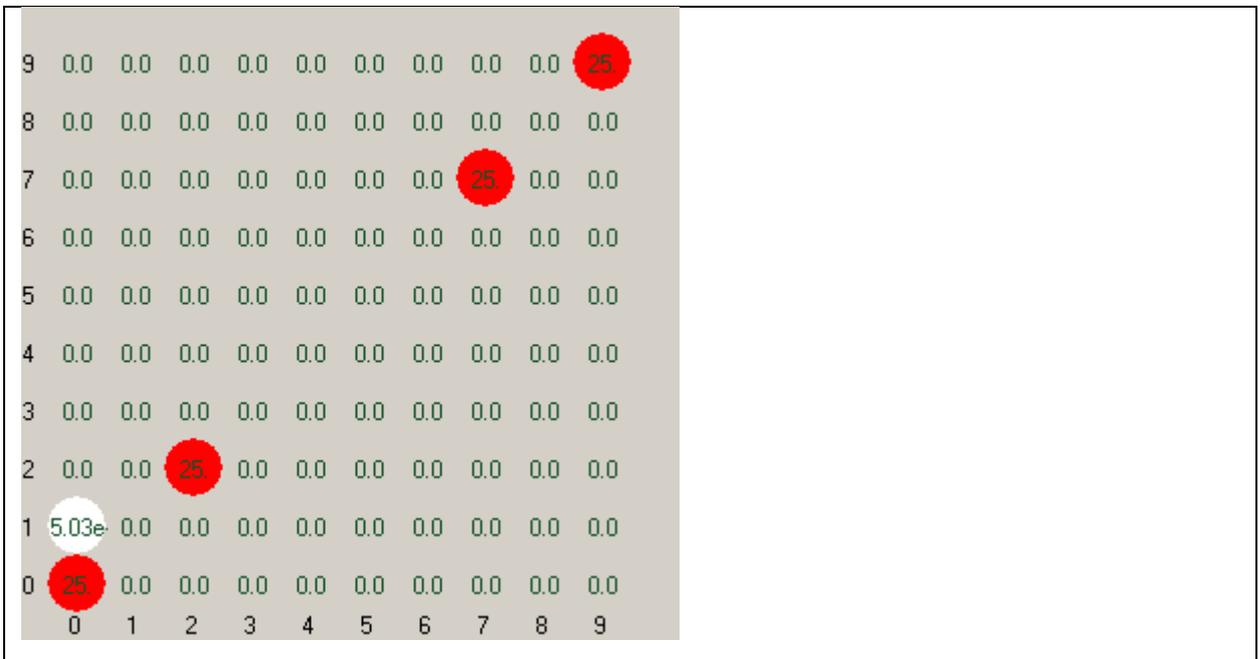
k=135

9	0.0	0.0	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	12.5	0.0	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5	0.0	12.5	0.0
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.03e	0.0	0.0	0.0
0	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5	0.0	0.0	0.0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

k=134

9	0.0	0.0	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5
1	0.0	0.0	5.03e	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	0.0	0.0	12.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.5	0.0	0.0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

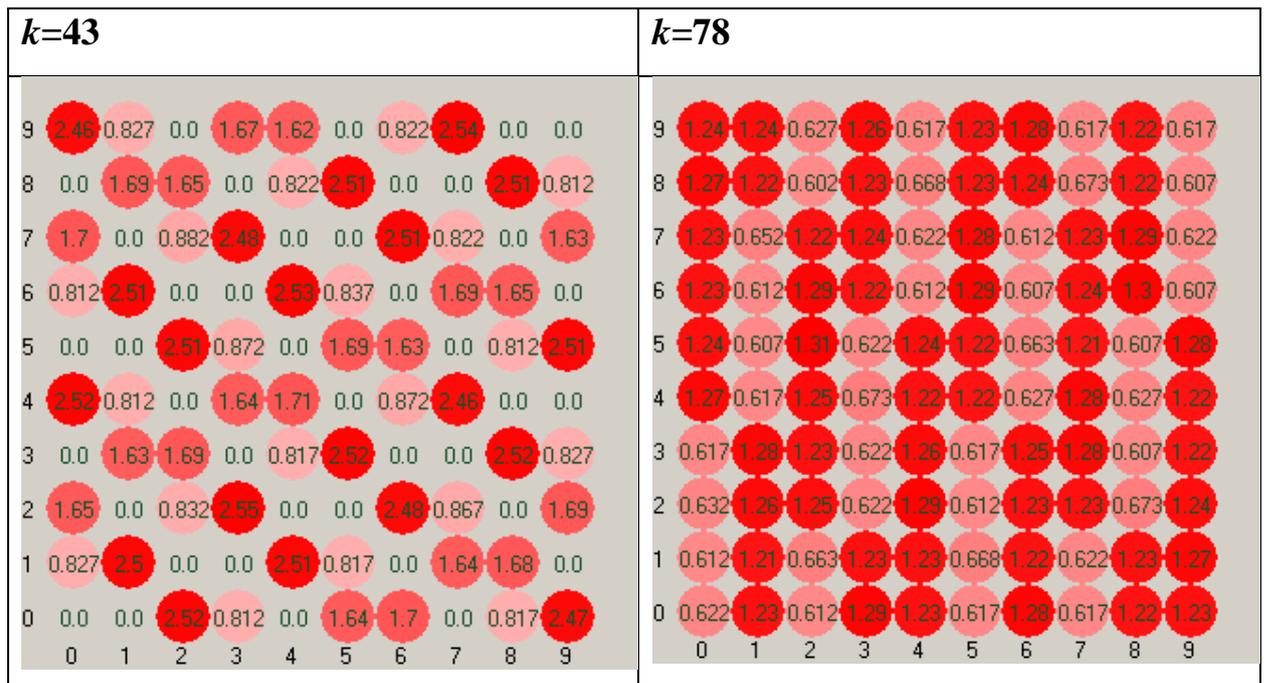
k=136

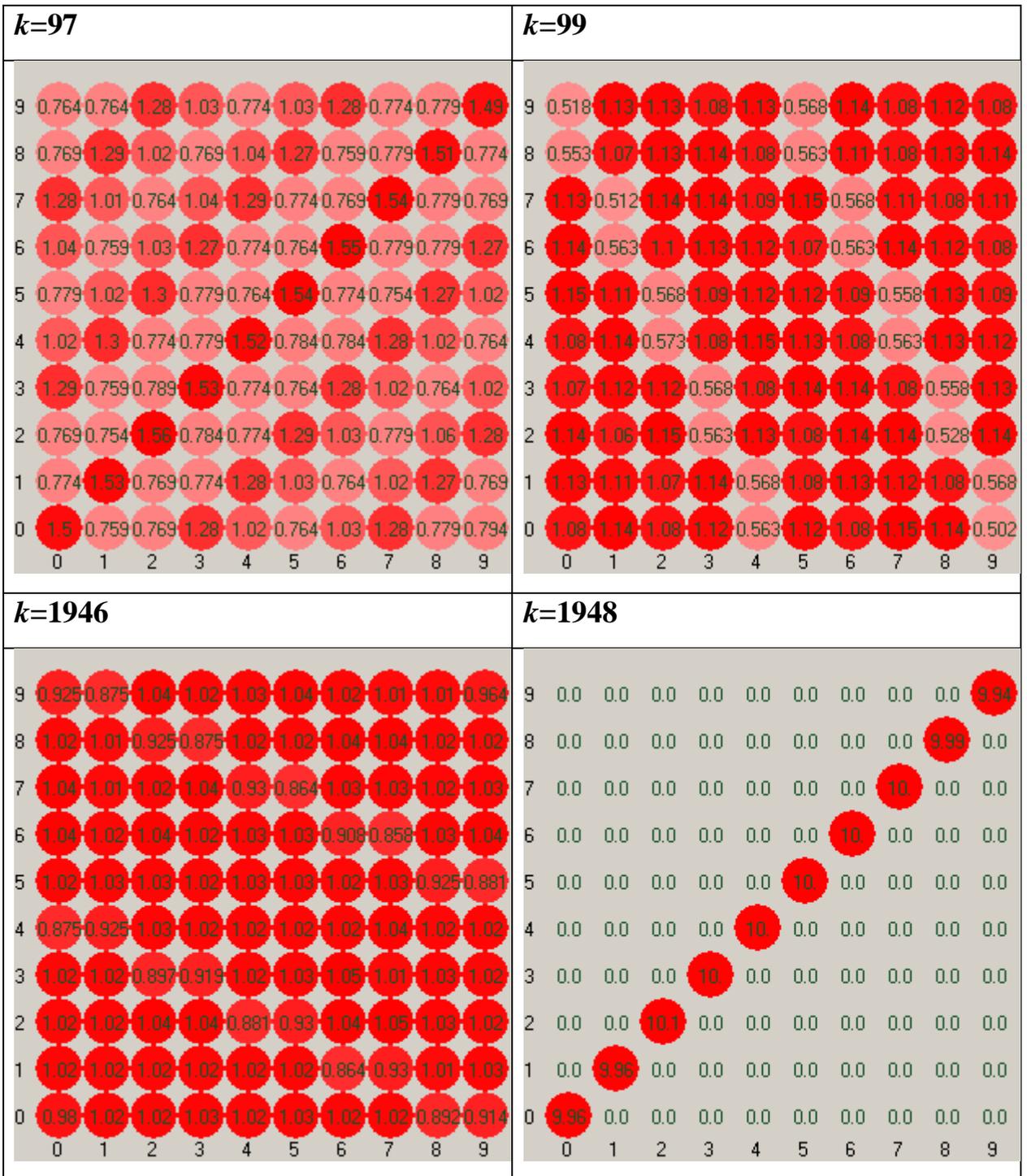


Последняя конфигурация, когда узлы лежат на диагонали квадрата с наибольшей вероятностью посещения, соответствуют условию $x_{n+k} = x_n$, что соответствует стационарному состоянию. Здесь состояние $k = 136$ приведено для иллюстрации, приведенной выше математической теоремы, говорящей о том, что длина периода не может быть больше значения $n - 1$. В нашем случае $n - 1 = 136$. В действительности такая конфигурация посещения частицы узлов появляется впервые при $k = 8$. Первое появление заполнения узлов, лежащих на главной диагонали квадрата, определяют период дроби.

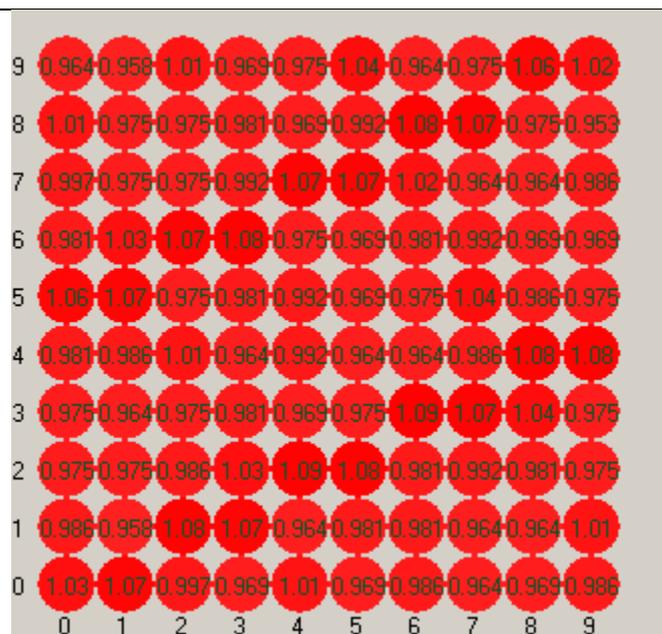
Рассмотрим в качестве второго примера рациональную дробь $3/1949$.

Таблица 2.





$k=1951$



Первое появление заполнения главной диагонали происходит на шаге $k=1948$ в соответствии с математической теоремой, так как $n = 1949$.

3.5. Нелинейные колебательные процессы

3.5.1. Автоколебания на примере генератора Ван-дер-Поля

Автоколебания - это незатухающие колебания поддерживаемые внешними источниками энергии в нелинейной диссипативной системе вид и свойства которых определяются самой системой и не зависят от начальных условий (по крайней мере в конечных пределах). [7, <https://www.iapras.ru/biblio/new/vvedtkv.pdf> Рабинович М.И., Трубецков Д.И. "Введение в теорию колебательных волн"]

Автоколебания принципиально отличаются от других колебательных процессов в диссипативных системах тем, что для их поддержания, вообще говоря, не требуется периодических воздействий извне. Колебания скрипичной струны при равномерном движении смычка, колебания тока в радиотехническом генераторе, колебания воздуха в органной трубе, маятника в "ходиках" - хорошо известные примеры автоколебаний. В простейших автоколебательных системах, или "автогенераторах", обычно можно выделить колебательную систему с затуханием, усилитель, нелинейный ограничитель - звено "обратной связи". Это можно делать, например, в классическом генераторе Ван-дер-Поля. (рис. а, б)

Автоколебания в таком генераторе устанавливаются следующим образом: случайно возникшие в LC -контуре малые колебания через катушку L' управляют анодным током лампы, который (при соответствующем взаимном расположении L и L') усиливает колебания в контуре. При условии, что потери

в контуре меньше, чем выносимая в контур таким образом энергия, амплитуда колебаний в контуре нарастает.

С увеличением амплитуда колебаний вследствие нелинейной зависимости анодного тока от напряжения на сетке лампы поступающая в контур энергия уменьшается и при некоторой амплитуде колебаний сравнивается с потерями. В результате устанавливается режим стационарных периодических колебаний, а котором все потери энергии компенсирует анодная батарея.

Таким образом, для установления автоколебаний принципиальна нелинейность, которая управляет поступлением и потерями энергии источника. Частотные же характеристики источника принципиальной роли не играют.

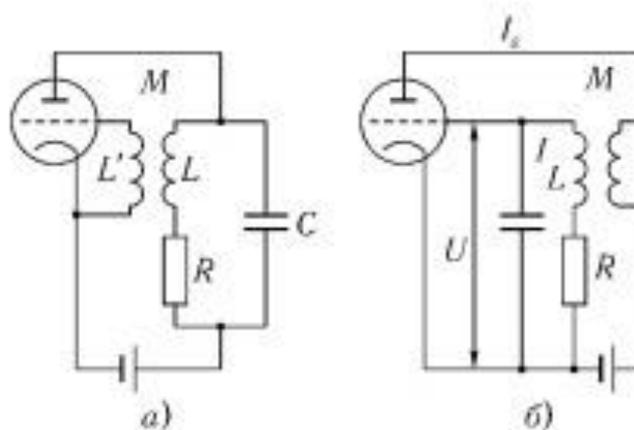


Рис.5. Системы генерирующие автоколебания.

Приведем уравнение (уравнение Ван-дер-Поля) описывающее колебательную систему (рис. 5б) в безразмерных переменных.

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (29)$$

где параметр μ отражает влияние нелинейности на характер протекающих в автогенераторе процессов. При μ стремящимся к нулю уравнение (29) сводится к уравнению линейного гармонического осциллятора. С ростом μ влияние нелинейности будет нарастать. Для визуализации колебательных процессов в (29) воспользуемся модулем "Simulink" пакета MatLab.

Имитационная схема уравнения (29) представлена на рисунке 6.

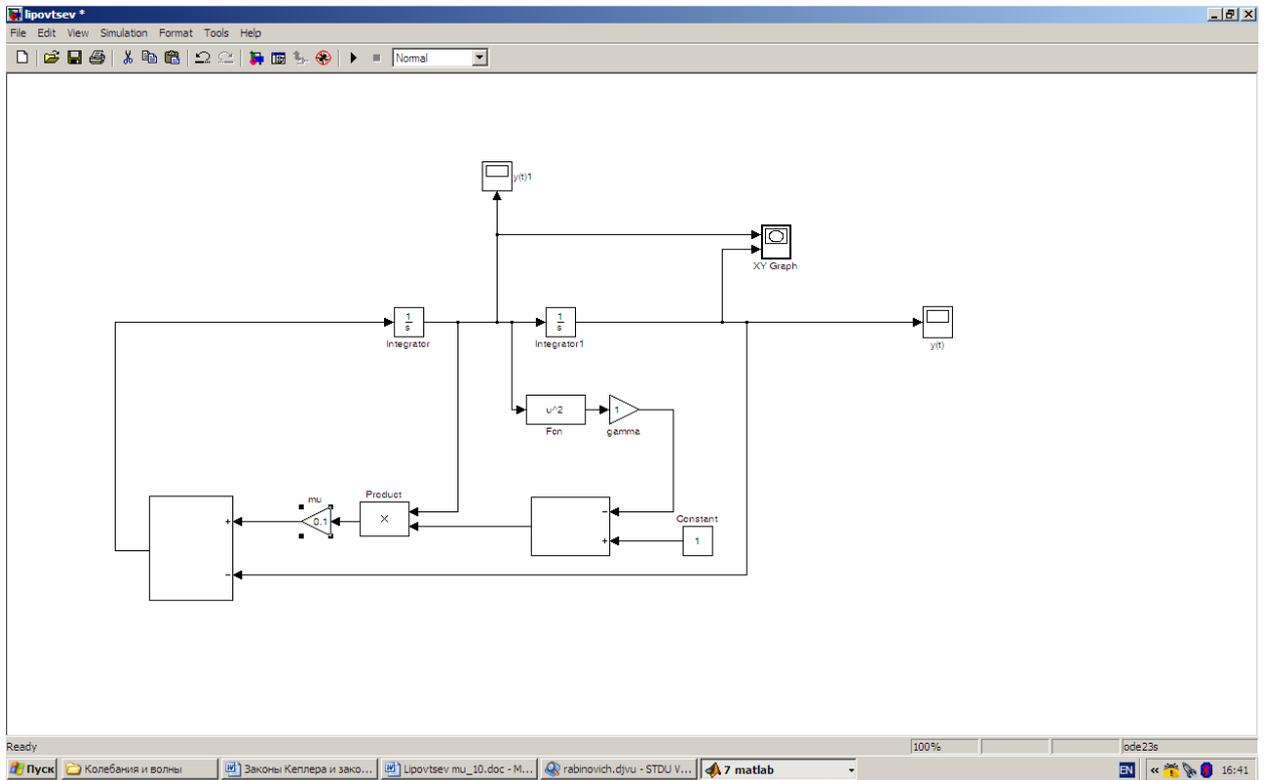


Рис. 6. Имитационная схема уравнения Ван-дер-Поля.

Приведем примеры расчета получающихся колебаний при различных значениях μ . Пусть $\mu = 0.1$, это означает что колебания в системе будут близки к гармоническим колебаниям (см. рисунок ниже).

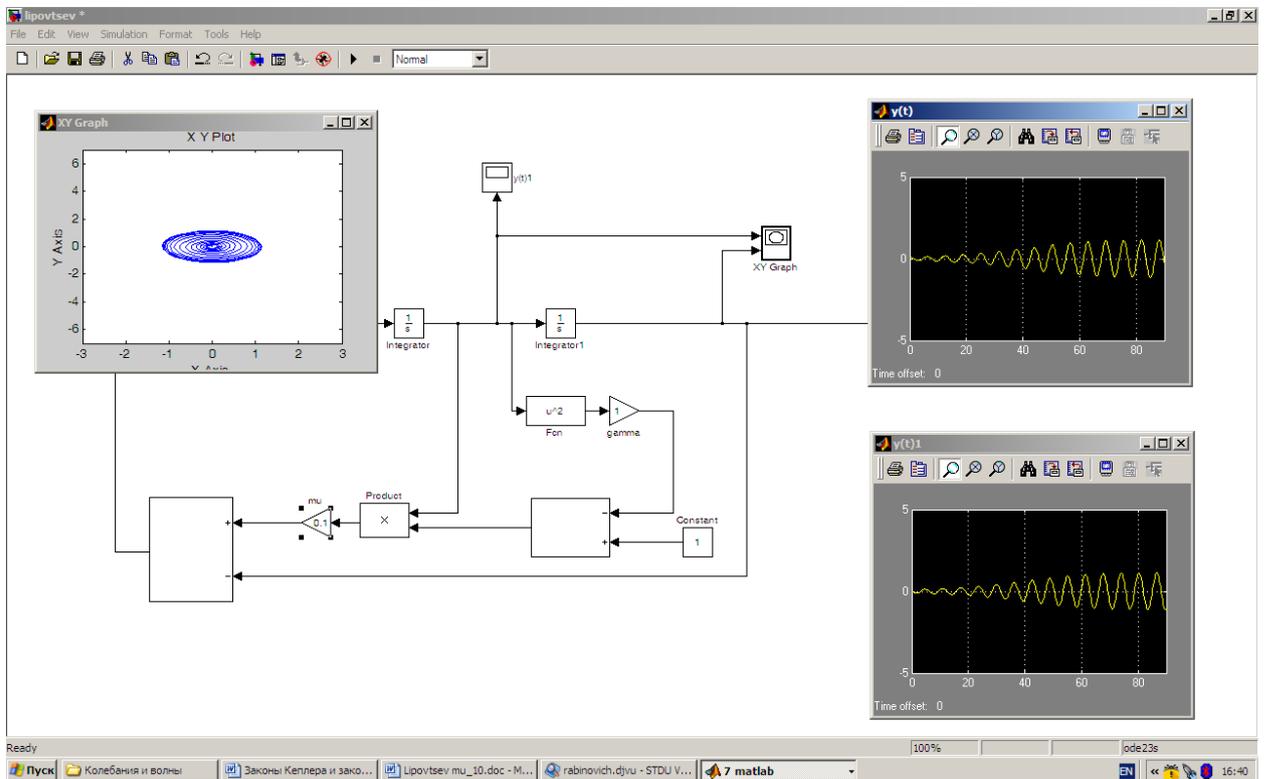


Рис. 7. Элементы имитационной схемы, фазовый портрет (слева), Колебания скорости и координаты (справа) при $\mu = 0.1$.

Для случая $\mu = 1$ получаем *сильно несинусоидальные колебания* вид которых и фазовый портрет представлен на рис.8.

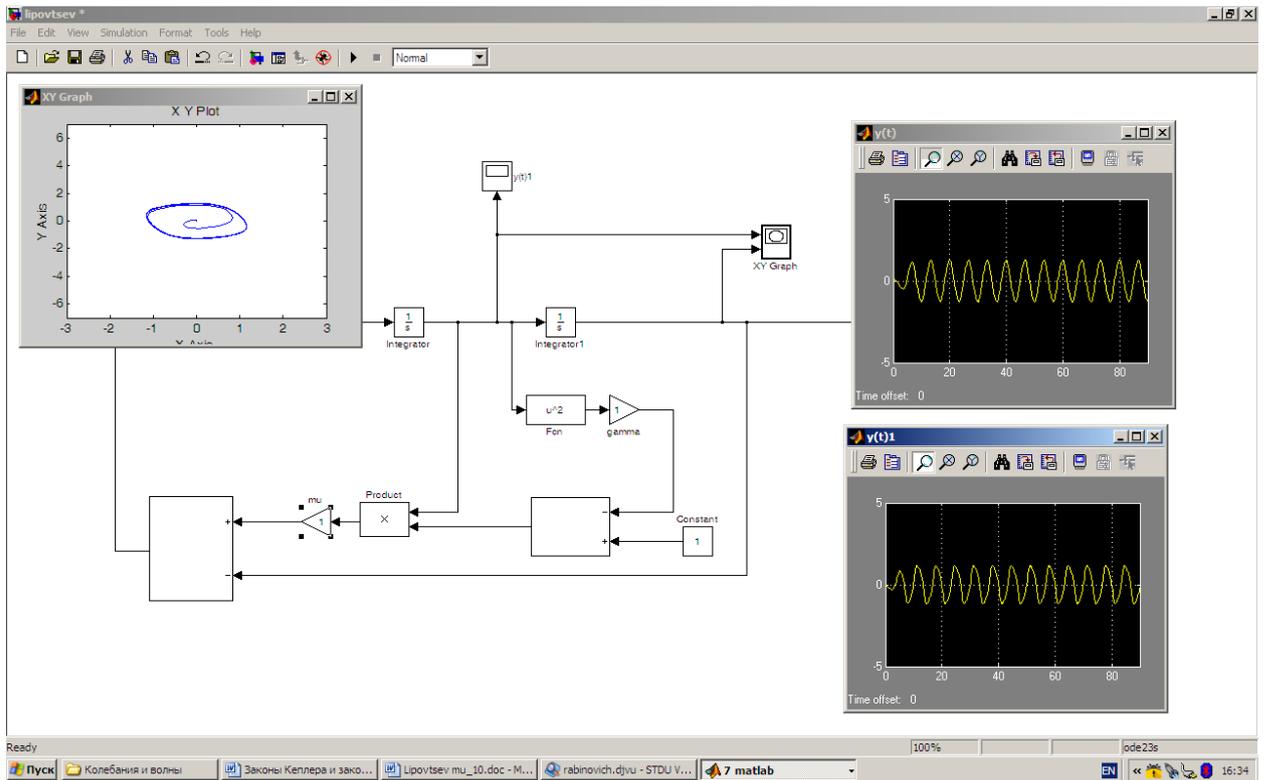


Рис. 8. Элементы имитационной схемы, фазовый портрет (слева), Колебания скорости и координаты (справа) при $\mu = 1$.

И наконец, при $\mu = 10$ приходим к колебаниям, которые называются *релаксационными* (см. рисунок 9).

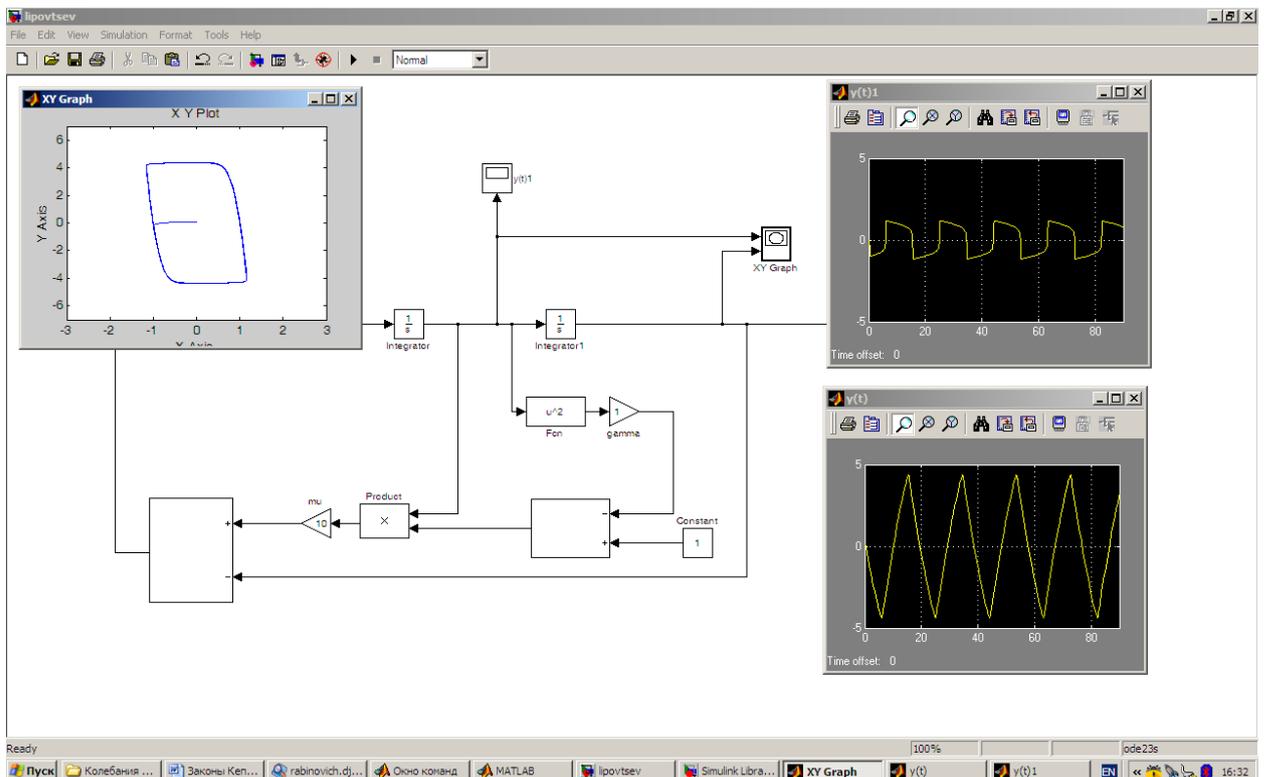


Рис. 9. Элементы имитационной схемы, фазовый портрет (слева), Колебания скорости и координаты (справа) при $\mu = 10$.

3.5.2. Частица в потенциальном поле с двумя минимумами

Рассмотрим еще один пример нелинейной колебательной системы: - частица в потенциальной яме, имеющей два минимума. Уравнение движения такой частицы имеет вид:

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0. \quad (30)$$

При этом потенциальная энергия представляет собой следующий полином четвертой степени:

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4. \quad (31)$$

Ниже изображен график потенциальной энергии и соответствующий ему фазовый портрет траектории рассматриваемого осциллятора [8, <http://www.sgtnd.narod.ru/pabl/rus/neko.htm>, А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, Н.М.Рыскин, Нелинейные колебания].

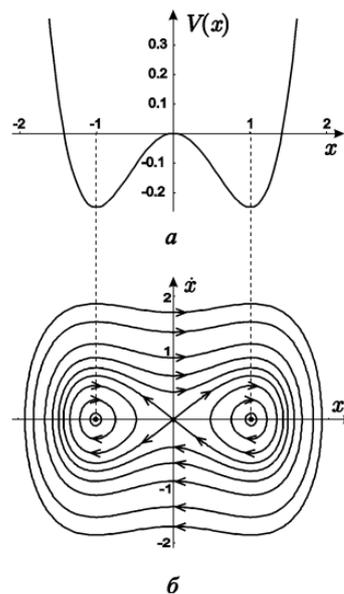


Рис. 9. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) осциллятора (30).

Если частица находится вблизи минимумов ее колебания представляют собой простые гармонические колебания, совпадающие с тем, что мы рассматривали в предыдущих разделах по мере отклонения от точек минимума нелинейность начинает играть все большую роль, частица может подняться выше потенциального барьера и тогда она будет совершать периодические движения в пространстве над двумя потенциальными ямами. Воспользуемся модулем "Simulink" пакета MatLab, чтобы конкретизировать фазовый портрет (б) и характер возникающих колебаний $x = x(t)$.

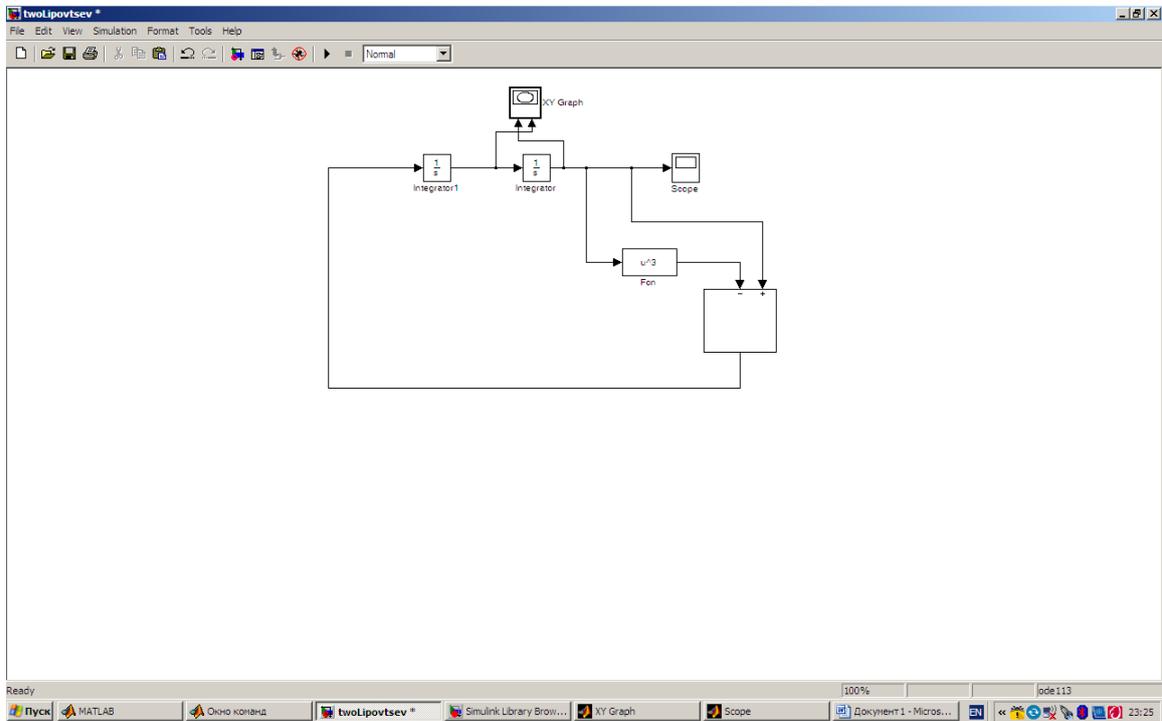


Рис. 10. Имитационная схема задачи о частице в потенциальном поле с двумя минимумами.

Ниже на рисунках 11 - 13 приведены результаты имитационного моделирования при различных начальных скоростях и начальных положениях частицы.

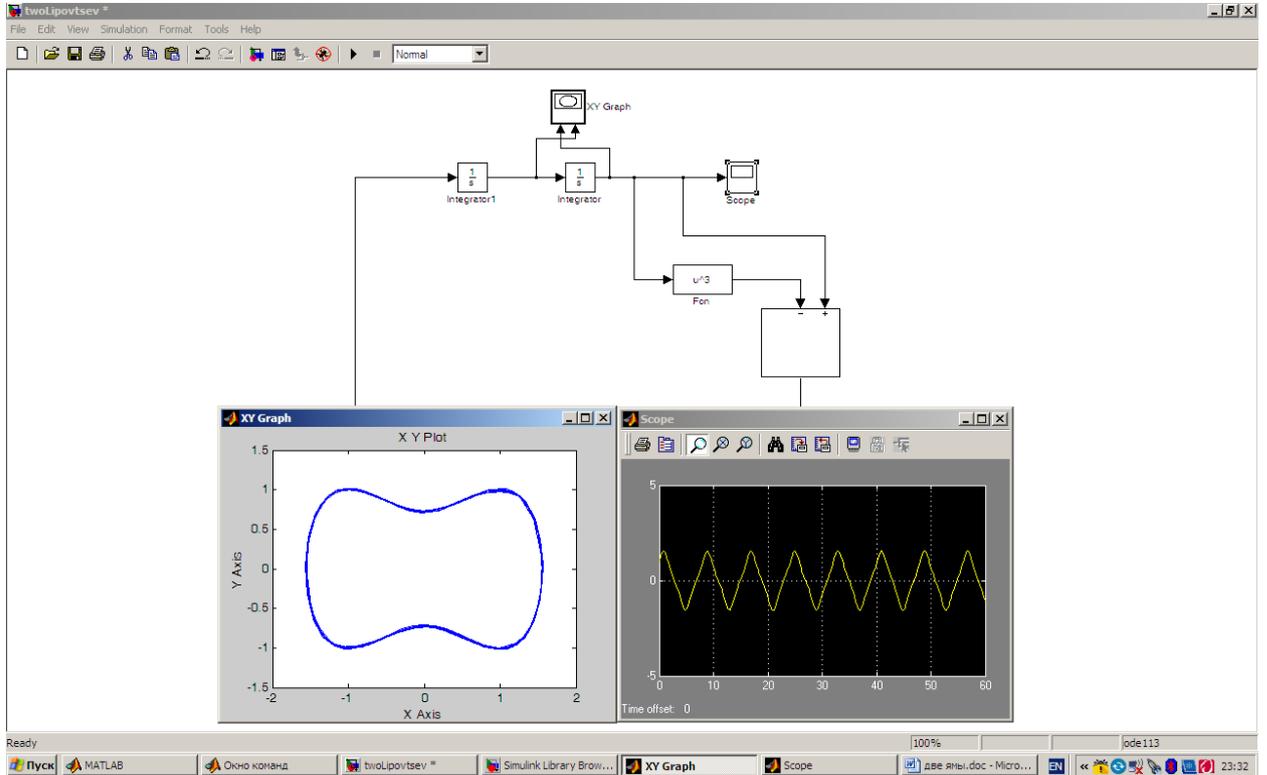


Рис. 11. Элементы имитационной схемы, фазовый портрет (слева), Колебания скорости и координаты (справа) при $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 1$.

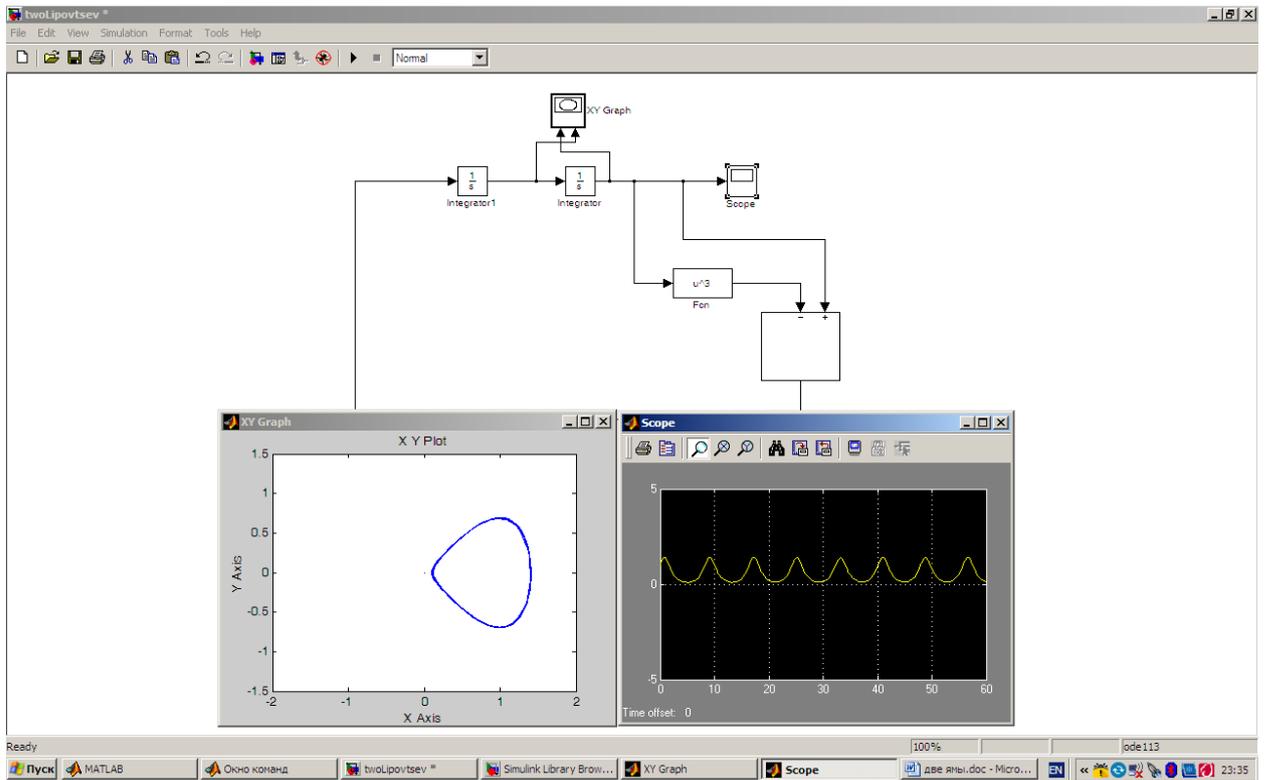


Рис. 12. Элементы имитационной схемы, фазовый портрет (слева), Колебания скорости и координаты (справа) при $\dot{x}(0) = 0.7$, $x(0) = 1$.

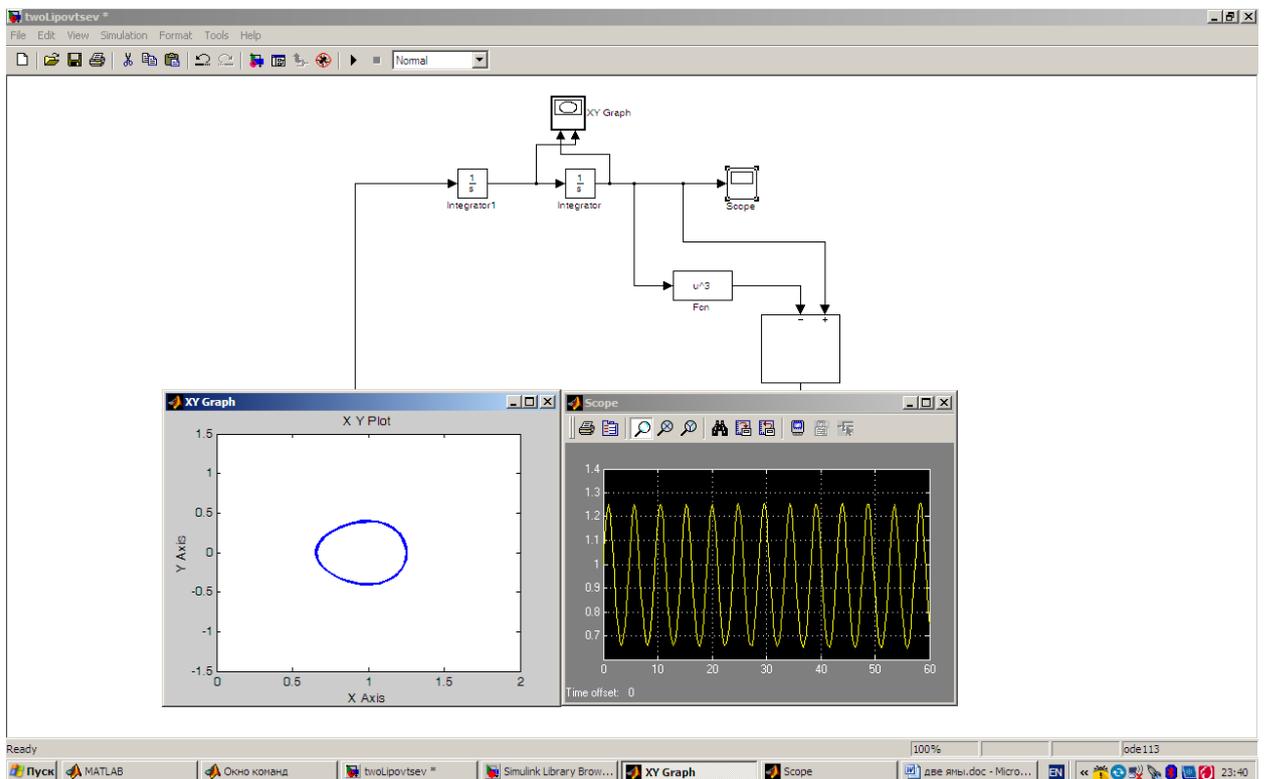


Рис. 13. Элементы имитационной схемы, фазовый портрет (слева), Колебания скорости и координаты (справа) при $\dot{x}(0) = 0.4$, $x(0) = 1$.

Таким образом, в заключение главы отметим, что рассмотренные в ней модели колебательных линейных и нелинейных систем являются базовыми

моделями физики. Они повсеместно используются при описании регулярных процессов, протекающих в природе. Имея ввиду случайные процессы и системы, которые будут обсуждаться в следующей главе, применительно к моделям данной главы отметим, что случайность в них может появиться, например, считая начальные условия неопределенными (задаются случайными скорости и положения). Такой подход достаточно широко используется, когда в разложении Фурье амплитуды и фазы гармоник считаются случайными величинами.

4. Глава 3. Случайные процессы (Хаос)

Не было гвоздя -
Подкова
Пропала.
Не было подковы -
Лошадь
Захромала.
Лошадь захромала -
Командир
Убит.
Конница разбита --
Армия
Бежит.
Враг вступает в город,
Пленных не щадя,
Оттого, что в кузнице
Не было гвоздя.

С. Маршак.

В этом стихотворении С. Маршака показывается насколько могут быть важны случайные факторы, на которые вовремя не было обращено внимание.

Урок IV. (2 часа) Откуда берутся случайные процессы?

В заключении предыдущей главы уже говорилось о том, что сделав начальные условия для системы невзаимодействующих гармонических осцилляторов случайными, получаем, что их амплитуды и фазы в любой последующий момент времени будут не определены и описание состояния системы таких невзаимодействующих осцилляторов нужно проводить используя статистические подходы.

Что это означает?

Это означает, что следует интересоваться не конкретными значениями амплитуд и фаз отдельных осцилляторов, а средними значениями некоторых функций от этих характеристик или вероятностями того, что в тот или иной момент времени та или иная характеристика осциллятора принимает определенные значения. В первом случае это означает, что задачей является

определение так называемых *моментов* (среднее, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса и т.п.).

При построении классической статистической теории, когда движение молекул в газе моделировалось уравнениями Ньютона и считалось что начальные положения и начальные скорости молекул не известны из-за их огромного (порядка 10^{19} молекул в куб. см) количества, поэтому задача интегрирования системы уравнений Ньютона для системы молекул в газе становилась бессмысленной. Польский физик Мариан Смолуховский предложил использовать вероятностные методы для анализа подобных систем и на этом пути удалось построить современную классическую статистическую физику. Если рассматривать газ молекул не как состоящий из классических частиц, а состоящий из частиц квантовых, то статистические методы к таким системам применяются изначально в силу вероятностного характера явлений в микромире.

Во второй половине 20 века был осуществлён серьёзный прорыв в понимании возникновения случайности в разнообразных физических, химических, биологических, социальных и т.п. системах связанных с открытием явления которое названо *динамической стохастичностью*. К открытию этого явления подошли с разных сторон. Одна из практических задач возникла в результате выполнения работ по атомному проекту в США и связана была с необходимостью разработки алгоритмов получения случайных последовательностей. К краткому обсуждению этого вопроса перейдем в следующем параграфе.

4.1. Явление динамической стохастичности (Знаменитые модели)

4.1.1. Одномерное отображение типа "палатка"

[9, <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2021/> Малинецкий Г.Г. Теория самоорганизации. На пороге IV парадигмы, КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2013 Т. 5 № 3 С. 315–366]

Так называется модель, предложенная Дж. Нейманом и Д. Уламом. Она определяет последовательность чисел $\{x_n\}$ по явной формуле:

$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n|, n = 1, 2, \dots, x_1 = \tilde{x}.$$

Эта модель можно рассматривать как динамическую систему в случае дискретной переменной $n = 1, 2, 3, \dots$. Состояние системы в момент n характеризуется числом x_n . Последовательность $\{x_n\}$ однозначно определяется начальным значением \tilde{x} . Можно проверить, что если $-1 \leq \tilde{x} \leq 1$, то все элементы последовательности $\{x_n\}$ будут принадлежать интервалу $[-1, 1]$. Если \tilde{x} - иррациональное число из этого интервала, то и последовательность $\{x_n\}$ чисел не будет периодической.

Физически это означает, что в начальный момент времени траектории этих процессов бесконечно близко к друг другу. Посмотрим, что происходит с траекториями с течением времени.

Можно проверить, что в следующий момент времени $n=2$ расстояние между траекториями $= |x'_2 - x''_2| = 2\varepsilon$, в момент времени $n=3$ расстояние между траекториями $|x'_3 - x''_3| = 4\varepsilon$ продолжая процедуру далее получаем что в момент времени n расстояние между точками траекторий равно $|x'_n - x''_n| = 2^{n-1}\varepsilon$. Видим, что расстояние между траекториями с ростом времени растет по показательному закону, т.е. очень быстро. В силу того, что область значений процесса $x = x_n$ ограничена интервалом $[-1,1]$ это означает, что траектории сильно запутываются и их поведение интерпретируется как случайное.

С каждым шагом расстояние между $|x'_2 - x''_2|$ траекториями увеличивается вдвое. Когда $\varepsilon \cdot 2^n \approx 1$, то зная последовательность $\{x'_n\}$ уже ничего нельзя сказать о поведении $\{x''_n\}$.

Представим теперь, что $\{x'_n\}$ определяет динамику исследуемого объекта, а $\{x''_n\}$ — описывающую его математическую модель. Тогда через $N > \log_2 \varepsilon^{-1}$ шагов мы теряем возможность следить за динамикой объекта, (эту величину, после которой нельзя дать прогноз состояния объекта, исследуя его модель называют *горизонтом прогноза*. За пределами горизонта прогноза используются статистические методы.

Невозможность осуществить прогноз за пределы горизонта прогноза породила ситуацию, для которой сейчас принято определение, *называемое как "эффект бабочки"*. Его можно интерпретировать, например, следующим образом: -взмах крыльев «бабочки» (изменившей, например, начальное состояние атмосферы на очень малую величину ε) может через некоторое время (для атмосферы горизонт прогноза — 2–3 недели) привести к разрушительному урагану за тысячи километров от нее. Отсюда следует, что для достижения максимального эффекта важно взмахнуть в правильное время и в правильном месте.

Другая замечательная модель, иллюстрирующая стохастичность — это модель Лоренца.

4.1.2. Модель Лоренца

Американский метеоролог Эдвард Лоренц в 1963 году опубликовал ставшую знаменитой с тех пор работу «О детерминированном непериодическом течении». Он рассматривал перенос тепла в приземном слое атмосферы земли. В результате упрощений он пришел к следующей системе уравнений, которая сейчас называется системой Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ,\end{aligned}\tag{35}$$

В книге [С.П.Кузнецов, Динамический хаос, <http://www.sgtnd.narod.ru/pabl/rus/dc.htm>] приведена изящная физическая иллюстрация модели Лоренца. В которой рассматривается движение жидкости и перенос тепла в стеклянной трубке, подогреваемой снизу.

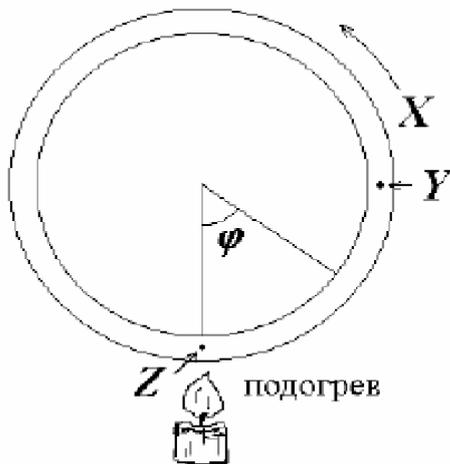


Рис. 14. Конвекция в замкнутой кольцевой трубке.

Процесс конвекции в этой системе описывается системой уравнения Лоренца, в которой $X = X(t)$ характеризует скорость течения жидкости, $Y = Y(t)$ и $Z = Z(t)$ характеризуют отклонение температуры от среднего значения в указанных на рисунке 6 точках. Э. Лоренцем показано, что при значениях параметров $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, 0 < r < 28$ решение системы (35) проявляет нерегулярное хаотическое поведение.

Ниже на рисунке 15 представлена имитационная схема модели Лоренца, фазовые портреты и зависимость $Z(t)$ при упомянутых выше значениях параметров σ, b и $r = 18,5$.

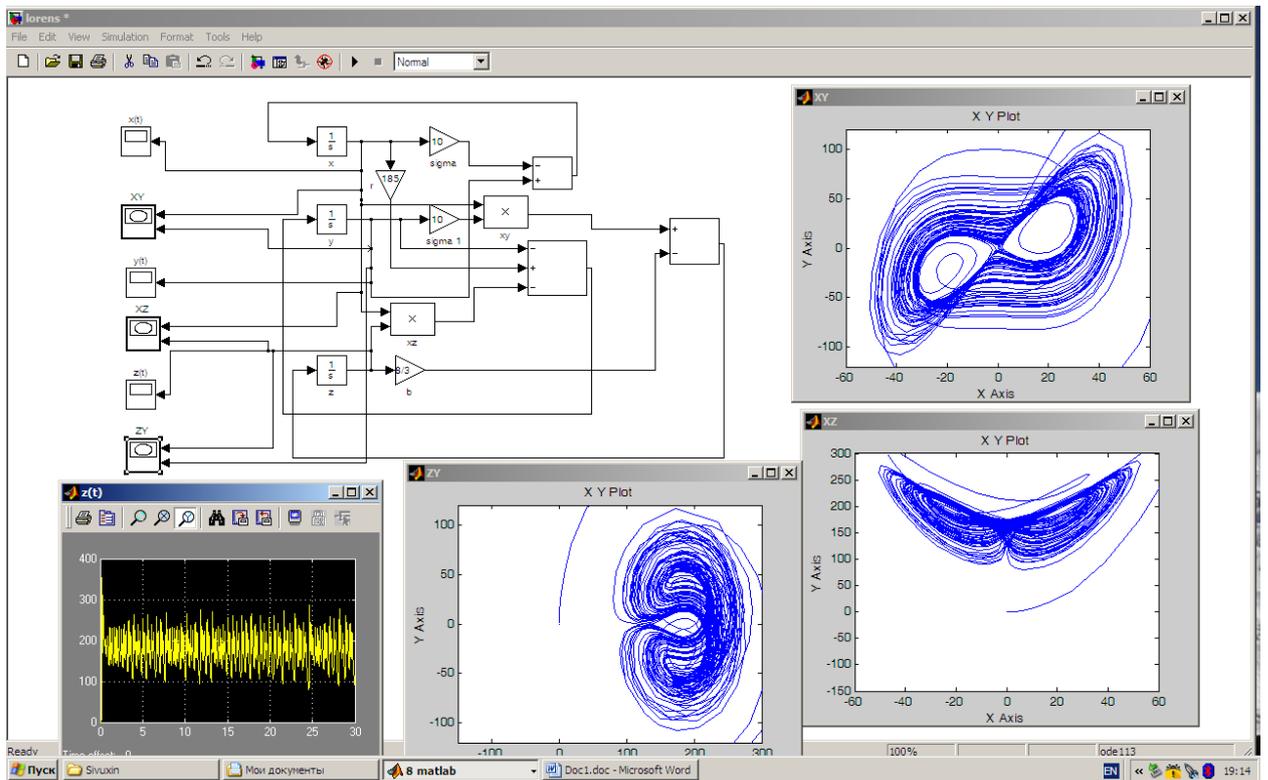


Рис. 15. Имитационная схема модели Лоренца.

Видно, что процесс $Z(t)$ является колебательным со случайными сбоями и случайными изменениями режима колебаний. Аналогичным образом ведут себя процессы $X(t)$ и $Y(t)$. Видно так же что уравнение модели Лоренца не содержит каких-либо случайных факторов, т.е. в детерминированной системе трёх нелинейных уравнений возникают случайные колебания. К настоящему времени в науке накоплена большое число разнообразных моделей, в которых проявляется динамическая стохастичность. Много интересных примеров можно найти на сайте Саратовской группы теоретической нелинейной динамики: <http://www.sgtnd.narod.ru/rus/index.htm>.

4.2. Число π . Десятичное представление трансцендентных и иррациональных чисел

4.2.1. Расчёт показателя Хёрста

Изучая динамику стока реки Нил Хёрст, установил, как оказалось в последствии, весьма универсальную эмпирическую зависимость. Дальнейшие многочисленные исследования разнообразных природных процессов и явлений показали, что многие динамические характеристики (например, такие как температура окружающей среды, сток рек, количество осадков, толщина колец деревьев и т.п.) так же хорошо описываются законом Хёрста. Этот метод исследования получил название: - *метод нормированного размаха или R/S метод*. Значительное развитие R/S метода связано с исследованием динамических процессов, характеризующихся фрактальными свойствами. Было установлено, что по величине показателя Хёрста H можно классифицировать исследуемые процессы. Согласно этой классификации процессы, для которых

$0.5 < H < 1$, относятся к классу *персистентных* - сохраняющих имеющуюся тенденцию, в том смысле, что если приращения динамической характеристики были положительными в течение некоторого времени, то есть происходило её увеличение, то и впредь в среднем будет происходить её рост. И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает, в среднем, продолжение уменьшения в будущем. Чем H больше значения 0.5, тем сильнее тенденция.

Процессам, для которых $0 < H < 0.5$, характерна *антиперсистентность* - рост в прошлом может смениться уменьшением в будущем, и, соответственно, тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем. При этом, чем H меньше значения 0.5, тем больше эта вероятность.

В. Феллером было доказано, что для гауссова случайного процесса с независимыми приращениями и конечной дисперсией показатель Хёрста $H = 0.5$.

Физически случай $H = 0.5$ соответствует классическому броуновскому процессу, для которого отсутствуют какие-либо выраженные тенденции в поведении процесса. Незначительные отклонения H от значения 0.5 в ту или иную сторону характеризует случайные процессы, названные *обобщёнными броуновскими процессами*.

Метод нормированного размаха широко используется в настоящее время при обработке данных мониторинга природных процессов и явлений, при изучении кинетики процессов в физике, химии, биологии и т.п. Суть *R/S* метода заключается в следующем.

Пусть $x(t)$ некоторая случайная величина, рассматриваемая в дискретные промежутки времени t_i в течение периода τ ,

$$\langle x(\tau) \rangle = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} x(t_i)$$

ее среднее значение, а

$$\langle S(\tau) \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\tau} [x(t_i) - \langle x(\tau) \rangle]^2}{\tau}}$$

- стандартное отклонение. Накопившееся отклонение $X(t, \tau)$ значений случайной величины $x(t)$ от ее среднего значения $\langle x(t) \rangle$ за время τ определяется, как

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t [x(u) - \langle x(\tau) \rangle].$$

Размах $R(\tau)$ есть разность $R(\tau) = \max X(t, \tau) - \min X(t, \tau)$, где $1 \leq t \leq \tau$. Как уже упоминалось выше, для многих природных явлений наблюдаемая зависимость нормированного размаха $\frac{R}{S}$ от τ с хорошей точностью описывается соотношением

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H,$$

названным законом Хёрста, а показатель H - постоянной Хёрста.

При математическом моделировании часто возникает задача формирования периодических и стохастических последовательностей, которые имитируют внешние воздействия на изучаемую динамическую систему. Ниже, методом нормированного размаха, систематически исследуются свойства последовательностей, генерируемых десятичными представлениями вещественных чисел. Десятичное представление вещественного числа x имеет следующий вид:

$$x = x_0 + x_1 10^{-1} + x_2 10^{-2} + x_3 10^{-3} + \dots + x_n 10^{-n} + \dots$$

где $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ - целые числа, меняющиеся от 0 до 9. Ниже будем трактовать последовательность значений $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ как значения некоторого процесса $x_i = x(t_i)$ "вычислительные" (или принимаемые) в дискретные моменты времени $t_i = i$ ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$), определяемые положением числа в последовательности. Обозначим процесс, сгенерированный подобным образом, как D_1 :

$$D_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

По величине значения процесса D_1 меняются в промежутке $[0,9]$.

Через D_2 обозначим процесс вида:

$$D_2 = \{x_1 x_2, x_3 x_4, \dots, x_{2n-1} x_{2n}, \dots\}$$

где значение $x_1 x_2$ процесс D_2 принимает в момент времени $t = 1$, значение $x_3 x_4$ - в момент времени $t = 2$..., x_{2n-1}, x_{2n} - в момент времени $t = n$ и т.д. При этом значения процесса D_2 меняются в промежутке $[0,99]$.

Аналогичным образом формируются последовательности, соответствующие процессам D_3, D_4, \dots

Из теории чисел известно, что рациональное число представимо в виде периодической дроби и потому десятичное представление такого числа генерирует некоторый периодический процесс. Для иррациональных и трансцендентных чисел генерируются процессы, схожие со случайными.

Особый интерес здесь вызывает поведение десятичных последовательностей, соответствующих фундаментальным математическим постоянным (число π постоянная Эйлера и т.д.). Разрабатываются новые эффективные алгоритмы и вычислительные технологии, позволяющие вычислять эти постоянные со всё большей точностью, например для числа π достигнута точность порядка десятков триллионов знаков после запятой. На основе этого выявлен ряд интересных свойств этой последовательности, указывающих на её вероятностный характер. В частности, было установлено, что в последовательности D_1 любое значение от 0 до 9 встречается с одинаковой

частотой, для последовательности D_2 любое значение от 0 до 99 и т.д. На основе этого факта была сформулирована гипотеза нормальности числа π

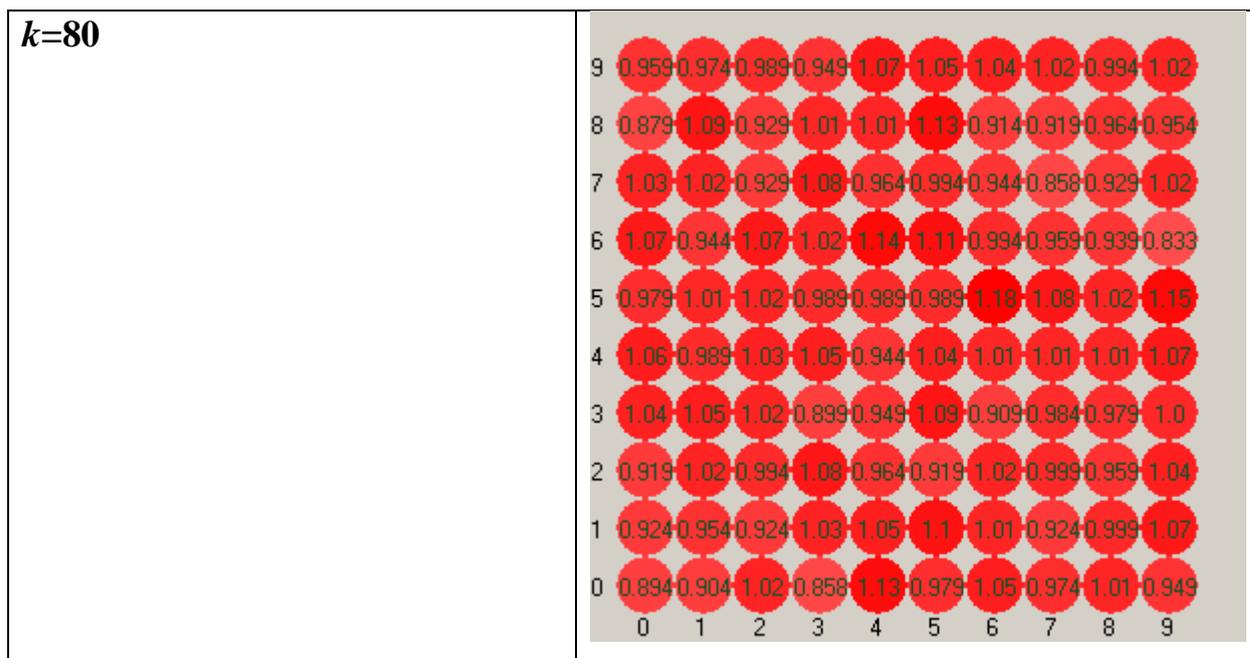
Здесь с помощью R/S метода анализируются процессы D_1, \dots, D_9 , генерируемых десятичными последовательностями трансцендентных вещественных чисел π и e :

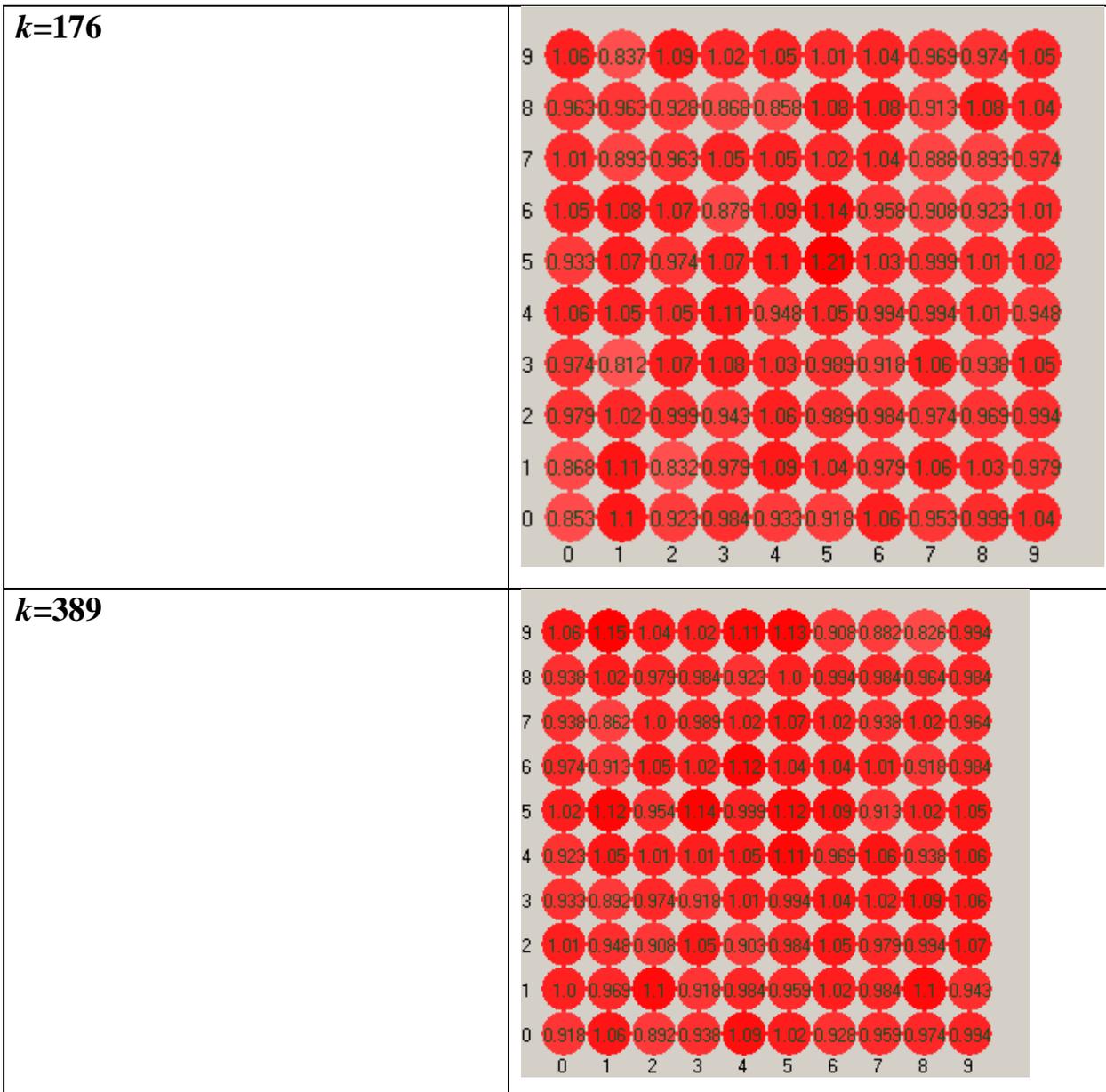
D	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
H_π	0.45	0.50	0.55	0.46	0.56	0.49	0.60	0.50	0.50
H_e	0.49	0.52	0.56	0.48	0.50	0.55	0.42	0.46	0.65

Результаты расчетов показателя Херста для процессов D_1, \dots, D_9 генерируемых числами π и e показывают, что его величина колеблется около значения 0.5 и можно трактовать рассматриваемые последовательности как обобщенные броуновские процессы.

4.2.2. Фазовый портрет от предыстории для числа π .

Выше в параграфе 3.4 для анализа периодичности рациональных дробей использовали компьютерную программу [3]. Сведение задачи анализа поведения числовых последовательностей вещественных чисел в десятичном представлении оказываются удобным и для анализа статистических свойств трансцендентного числа π . Ниже на рисунке приведены фазовые портреты блужданий по решетке 10×10 для некоторого числа "предыстории" k .





Из этих картинок видно, что узлы решетки посещаются практически с одинаковой вероятностью и означает что нет выделенных узлов. Численные эксперименты, которые проводились с большим шагом предыстории на выборке числа π длиной миллион знаков показывает, что эта тенденция сохраняется. Можно с определенной долей уверенности считать, что десятичная последовательность числа π на этой выборке является случайной.

5. Заключение

Представляется, что фактический материал использованный и скомпонованный в данной выпускной квалификационной работе "Разработка элективного курса "Порядок и хаос в физических явлениях" для учащихся старших классов" продемонстрировал разнообразие проявлений регулярных и хаотических процессов на примерах базовых физических и математических моделей. Представляется так же, что по результатам обучения в рамках курса школьники получают представление о важности колебательных линейных и нелинейных моделей, поскольку с их помощью можно генерировать регулярные временные процессы любой природы. В силу общности

колебательных процессов "колебательное мышление" с моей точки зрения должно являться важным инструментарием, помогающим школьнику формировать собственное понимание и находить объяснение тех процессов, которые он наблюдает в живой и не живой природе. Изучение явления динамической стохастичности должно входить в программу современного физического школьного образования. Без осознания того, что регулярные и хаотические процессы - суть две равноправные составляющие, участвующие в формировании богатства окружающего мира. Представляется также важной проиллюстрированная в работе междисциплинарная связь математики и физики в этом вопросе. Фундаментальные математические модели и постоянные (вещественные числа, рациональные числа, иррациональные числа, трансцендентные числа, в частности, число π) иллюстрируют школьнику то, что регулярность и хаос присутствуют и здесь.

В заключении работы следует отметить, что имеется возможность, привлекая творческий потенциал школьников существенно расширить список увлекательных примеров, демонстрирующий единство, противоположность, борьбу и симбиоз порядка и хаоса в соответствии с тем, что говорил тысячу лет назад Омар Хайям:

"Сменяется хаосом в мире порядок давно,
И то, что ушло, никому возвратить не дано.
Причина прозрачна, как в чаше хрустальной вино,
Порядок и хаос Всевышнему любви равно."

[Омар Хайям, Рубаи]

Библиографический список использованной литературы

1. Положение об элективных курсах. [Текст] /— М., 2016. – 5 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. Том I: [Электронный ресурс]/ Сивухин Д.В.//. М.: Наука, 1979, - 520 с. Режим доступа к учебнику: <http://old.pskgu.ru/ebooks/sdvm1.html>.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. Том III.: [Электронный ресурс]/ Сивухин Д.В.//. М.: Наука, 1977, - 704 с. Режим доступа к учебнику: <http://old.pskgu.ru/ebooks/sdve3.html>.
4. Определение ряда Фурье и типичные примеры <http://www.math24.ru/%D0%BE%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%B0-%D1%84%D1%83%D1%80%D1%8C%D0%B5.html>.
5. Л.Семенова, Периодические дроби, Квант, №2, 2000, с.25-29, <http://kvant.mccme.ru/pdf/2000/02/kv0200semenova.pdf>.

6. С.В.Федякин, В.М.Логинов. Программный комплекс для анализа процессов, определяемых десятичным представлением вещественных чисел. Авторское свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2007612069 от 22 мая 2007 г.
7. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебательных волн: [Электронный ресурс]/ Рабинович М.И., Трубецков Д.И.//. М.: Наука, 1990, - 591 с. Режим доступа к учебнику: <http://old.pskgu.ru/ebooks/sdvt2.html>
8. А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, Н.М.Рыскин, Нелинейные колебания <http://www.sgtnd.narod.ru/pabl/rus/neko.htm>,
9. Малинецкий Г.Г. Теория самоорганизации. На пороге IV парадигмы, КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2013 Т. 5 № 3 С. 315–366, <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2021/>.
10. Федер Е. Фракталы [текст]/Е.Федер.-М., Мир. -1991.