МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

Иушина Анастасия Андреевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема: Подготовка школьников к решению заданий школьного курса математики методами функционального анализа

Направление подготовки/специальность 44.03.05 Педагогическое образование
(код направления подготовки/код специальности)
Профиль ______Математика_ и информатика____
(наименование профиля для бакалавриата)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав.кафедрой д.п.н., профессор Майер В..Р.___
(ученая степень, ученое звание, фамилия, ницилы)

__________ «___» _______2016 года

(подпись)

РУКОВОДИТЕЛЬ
к.ф.-м.н.. доцент Калачева С.И.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

Дата защиты ____________________________

Обучающийся Иушина А.А.
(фамилия, инициалы)

____
(дата, подпись)

Оценка______________________________
(прописью)

Красноярск 2016

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Одной из главных дисциплин, изучаемых в 10-11 классах, является алгебра и начала математического анализа. Предпосылками введения математического анализа в школьный курс математики было то, что к концу XVII века накопились важные классы однотипных задач, решаемых методами математического анализа.

Функциональная линия прослеживается в школьном курсе математики начиная с 7 класса. В старших классах в связи с введением понятия производной и связанных с ней элементов функционального анализа возникает потребность обобщить, дополнить и систематизировать вопросы, связанные с исследованием функций. Однако чаще делается акцент на исследование функций с помощью производной и практически не обращается внимание на исследование функций по графику, на анализ и чтение графиков, что требует понимания базовых понятий. Кроме того, задания ЕГЭ также содержат элементы функционального анализа в явном и неявном виде и требуют аккуратного применения знаний данной области на уровне понимания. Достаточно большое количество заданий школьного курса, особенно задания повышенной сложности, используют элементы функционального анализа в неявном виде. Часто такие задания даже сами учителя не могут сразу определить. Это еще раз говорит о том, что необходимо не только усвоение выполнения определенных действий в данном разделе математики, а нужно понимание данного материала.

Несмотря на то, что элементы функционального анализа присутствуют в школьной программе довольно давно и существует много методических разработок в этой области, до сих пор остается проблема, как добиться от школьников понимания самого сложного в школьном курсе математики материала. Это обусловило проблему нашего исследования.

Цель исследования: Разработка рекомендаций по повышению уровня усвоения материала функционального анализа учащимися 10-11 классов.

Объект исследования: Процесс обучения школьников математике.

Предмет исследования: Элементы функционального анализа в школьном курсе математики.

Задачи исследования:

1. раскрыть содержание учебных программ школьного курса математики;
2. показать историю и необходимость появления элементов функционального анализа в школьном курсе математики;
3. на основе анализа программного материала и действующих школьных учебников разработать рекомендации по повышению уровня усвоения школьниками элементов функционального анализа;
4. провести опытно-экспериментальную работу по проверке эффективности разработанных рекомендаций.

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.

1.1. История и значение появления элементов математического анализа в школьном курсе математики.

Одной из главных дисциплин, изучаемых в 10-11 классах, является алгебра и начала математического анализа. Преподавание данной дисциплины возможно на трех уровнях: базовый, профильный и углубленный уровни. Любой из перечисленных уровней является важным для изучения для конкретных учащихся. Учащиеся, желающие продолжить свое образование, обучаться в высшем или среднем специальном учебном заведении, по техническим, экономическим и другим направлениям, могут выбрать профильный уровень изучения математического анализа. Тем учащимся, которые выбрали другое направление дальнейшего образования, может быть достаточно и базового уровня изучения данной дисциплины. Так же, элементы математического анализа являются важным компонентом в ЕГЭ по математике.

Ранее, элементы математического анализа вообще не рассматривались в школьном курсе математики, изучались арифметика, алгебра и геометрия. Математический анализ и вообще вся высшая математика преподавалась только в специализированных учебных заведениях.

Предпосылками введения математического анализа в школьный курс математики было то, что к концу XVII века накопились важные классы однотипных задач: измерение площадей и объемов нестандартных фигур, проведение касательных к кривым. Так же, эти задачи тесно связаны с вычислением мгновенной скорости, ускорения механического движения, с нахождением величины пройденного пути. Появились методы решения этих задач в различных частных случаях, это было необходимо для развития физики, астрономии, техники. К середине XVII века Р. Декарт и П. Ферма представили основы аналитического метода координат, которые позволили сформулировать различные геометрические и физические задачи на языке числовых зависимостей, иначе говоря – числовых функций [6].

В конце XVII века И. Ньютон и Г. Лейбниц независимо друг от друга создали для решения данных задач новый раздел математики, который подытожил и обобщил отдельные результаты предшественников, среди которых и ученый древности Архимед и современники Ньютона и Лейбница – Б. Кавальери, Б. Паскаль, Д. Грегори, И. Барроу. Этот раздел и составил основу математического анализа, изучающего различные развивающиеся процессы, которые в математике называют функциональными зависимостями или функциями.

Итак, математический анализ как раздел математики оформился в конце XVII века, предметом изучения которого являются функции, или, иначе, зависимости между переменными величинами. С возникновением математического анализа математике стало доступно изучение и отражение развивающихся процессов реального мира; в математику вошли переменные величины и движение [9].

В середине XIX века были попытки ввести элементы математического анализа в гимназический курс математики. Это вытекало из проекта нового гимназического устава: «В 1858 г. Ученый комитет составил первый проект нового гимназического устава. В основе этого проекта лежала ценная прогрессивная мысль: дать возможность своим ученикам гимназий уже на школьной скамье определить свою будущую специальность…» [24, с. 213] В эти годы резко возросла потребность в специалистах с техническим и естественнонаучным образованием [12].

После революции 1917 года изучение элементов математического анализа в школьном курсе математики не предполагалось. В первые послереволюционные годы была введена комплексная система изучения математики, которую позже назвали лженаучной. Суть данной системы состояла в чередовании глав арифметики, алгебры и геометрии. В 1932 году каждая из математических дисциплин получила право на отдельное существование в школьном курсе математики. Но математическому анализу в этих курсах не было места.

В 70-е гг XX века вновь возникла идея введения элементов математического анализа в школьный курс математики. В этот период происходила модернизация школьного курса математики группой французских ученых под псевдонимом Н. Бурбаки. Их идея состояла в становлении математики как науки о математических структурах и их моделях. Н. Бурбаки положили в основу то, что все разнообразные разделы математики – это ветви математического дерева, корнями которого являются математические структуры. Позже реализацию этих идей назвали ошибкой века [6].

Курс математического анализа в школьном курсе математики начинается с изучения производных функций и их свойств. Вводится понятие производной, основные формулы и правила. Некоторые авторы учебников предлагают ознакомиться с понятием предела до введения понятия производной. В школьном курсе математики пределы изучаются поверхностно, как базовый элемент. Важным элементом при изучении производной функции является взаимосвязь графиков производной функции и исходной функции. На этом изучение элементов математического анализа в 10 классе завершается.

В первом полугодии 11 класса учащиеся возвращаются к изучению элементов математического анализа. Происходит повторение пределов, производных функции и вводятся новые понятия: определенный и неопределенный интеграл, первообразная функция. Задания, связанные с этими понятиями отсутствуют в ЕГЭ базового уровня. Но знакомство с данными понятиями важно для формирования математической культуры учащихся. В ЕГЭ профильного уровня предлагается решить задание 7, в котором необходимо найти площадь фигуры, определить количество решений уравнения по графику, пользуясь связью первообразной функцией и функцией [28].

Рассматривая место элементов математического анализа в школьном курсе математики, стоит отметить, что авторы современных учебников весьма удачно его расположили. Действительно, начало изучения алгебры в 10 классе связано с понятиями тригонометрии, повторением основных понятий и функций. Второе полугодие посвящено пределам и производным, где полученные ранее знания расширяются и углубляются. Курс математического анализа в старшей школе – важный и основополагающий курс, на который отводится большое количество времени в 10-11 классах. Важно, чтобы учащиеся с самого начала понимали значимость данного раздела для математики и жизни, могли оперировать основными терминами и формулами, умели применить полученные знания на практике.

1.2. Элементы функционального анализа в учебной программе средней общеобразовательной школы и действующих школьных учебниках математики – анализ теоретического и практического содержания.

Функция является одним из фундаментальных понятий в математике. Поэтому ведущей линией в школьном курсе математики становится именно функциональная линия. Это происходит ввиду того, что функция описывает взаимосвязь реальных объектов, отражает динамику мира. В школьном курсе математики изучаются два компонента функциональной линии. Первый компонент это непосредственно понятие функции и ее свойства. Второй - решение задач с использованием функций, уравнений, неравенств. Второй компонент отражает практическую направленность функциональной линии и отвечает за формирование умения исследовать явления мира на языке математики.

В XVIIв. под функцией понимали формулу, то есть выражение, состоящее из постоянных и переменных. Такое определение функции ограничивало ее понятие: функции, заданные таблицей или графиком не имели место быть.

Затем функцию стали представлять как зависимость одной величины от другой. Но и такое определение имеет ограничения, так как понятия величины и зависимости никак не объяснялись. Сегодня наиболее популярным определением функции является следующее: *функцией называется правило, по которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие единственный элемент y множества Y*. Заметим, что в данном определении нет неявных понятий: величина, изменение, зависимость. Такое определение является статистическим. В школьном курсе математики рассматриваются числовые функции, то есть множества X и Y-числовые.

Главной целью изучения функций в ШКМ является формирование у учащихся понятия функции как модели, которая описывает зависимости процессов действительности. Так же, изучение материала функциональной линии воспитывает математическую культуру, раскрывает общенаучную роль математики и осуществляет эстетическое воспитание.

Понятие функции имеет большой объем и сложность, но, несмотря на это, функции вводятся уже в 7 классе средней школы. В 5 и 6 классах изучаются формулы, прямая и обратная пропорциональность, что является пропедевтикой к изучению темы «Функции». Как правило, функции изучаются в следующем порядке: сначала изучаются линейные функции, затем квадратичные, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Но такая последовательность изучения не обязательна, авторы учебников могут отклоняться от такой линии. Ниже приведены анализы учебников трех авторов, где видны различия в порядке изучения функций.

Существует три направления процесса введения функций в школьном курсе математики. Первое направление это изучение способов задания функции, свойств, области определения, области значений на основе координатного метода. Второе направление предполагает изучение отдельных классов функций более подробно. Третье направление расширяет имеющиеся знания алгебры путем введения функции и действий с ней.

При введении понятия функции по первому направлению делается акцент на единственности соответствия элемента y элементу x. Важную роль играет введение различных способов задания функции и перевод из одного способа задания в другой. Это важно ввиду практической направленности, так как в различных заданиях удобны разные способы задания функции.

Изучение функций по второму направлению может проводиться, как дедуктивным способом, так и индуктивным, то есть изучение свойств всего класса функций, а затем конкретной функции, либо изучение свойств класса через свойства данной функции.

Третье направление опирается на знания, полученные на пропедевтическом этапе изучения функций. То есть, на прямую и обратную пропорциональность.

Класс линейных функций вводится с помощью построения графика некоторой линейной функции. Здесь важно понимать, что график одной конкретной функции не приведет к пониманию свойств всего класса линейных функций. Для введения линейных функций используется метод «загущения» точек на графике функции. Метод заключается в том, что учащиеся ставят несколько точек и замечают, что все точки лежат на одной прямой. Для проверки вычисляется значение функции любого произвольного аргумента и отмечается, что она так же лежит на получившейся прямой. Свойства класса линейных функций рассматриваются на различных примерах. Далее приходит понимание того, что для построения линейной функции достаточно лишь двух точек.

Изучение класса квадратичных функций начинается с изучения параболы. В отличие от линейной функции, не все имеют явный геометрический смысл. Поэтому, здесь применятся метод геометрический преобразований. Так, учащиеся могут построить график квадратичной функции на основе параболы, либо по точкам.

При изучении степенных, показательных и логарифмических функций самое важное – это ограничение области определения функции и ограничения на параметры.

При введении тригонометрических функций большое внимание уделяется следующим свойствам: четность и нечетность функции, непрерывность и периодичность функции. Формирование понятия непрерывности происходит при построении графиков.

Важным понятие в функциональной линии является понятие обратной функции. Здесь выясняется, как монотонность обратной функции зависит от исходной.

Важнейшим элементом функциональной линии в школьном курсе математики является исследование функций. Не всегда свойства и графики очевидны, как в случаях с элементарными функциями, где можно построить график путем преобразований, поэтому необходимо проводить исследования функций.

Существует два способа исследования функций: по графику и по формуле.

С помощью графика можно узнать:

- Область определения функции
- Область значений функции
- Нули функции
- Промежутки возрастания и убывания функции
- Точки максимума и минимума
- Наибольшее и наименьше значение функции
- Точки перегиба функции

Важно обращать внимание учащихся на исследование функции по графику, так как в ЕГЭ по математике базового уровня встречаются задания на чтение графиков.

При исследовании функции по формуле, можно узнать не только свойства функции, но так же сделать схематичный рисунок графика функции и понять, как она выглядит на плоскости. Для такого исследования необходимо уметь находить производную функции.

Схема исследования функции с помощью производной выглядит следующим образом:

- Область определения функции, область значений функции
- Нули функции
- Вертикальные асимптоты
- Промежутки знакопостоянства функции
- Четность/нечетность, периодичность функции
- Монотонность функции, экстремумы функции
- Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба функции
- Горизонтальные и наклонные асимптоты

Область определения функции это множество значений аргумента, при котором функция имеет смысл. Нахождение области определения функции это очень важный шаг в исследовании функции, так как дальнейшее исследование будет проводиться на области определения. Вид формулы указывает на наличие ограничений, например, дробь с переменной в знаменателе, переменная под корнем четной степени или в показателе корня, переменная в степени с отрицательным или не целым показателем, переменная под знаком логарифма или в основании логарифма, переменная под знаком тангенса, котангенса, арксинуса и арккосинуса.

Если в граничных точках области определения односторонние пределы функции бесконечны, то функция имеет вертикальные асимптоты в этих точках. Асимптоты – это линии, к которым приближается график на бесконечности.

Четность и нечетность функции показывают на симметрию графика относительно оси ординат и начала координат соответственно. Если $f(-x) =$

$f(x)$, то функция является четной. Если $f(-x) = -f(x)$, то функция является нечетной. Функция может быть и не четной и не нечетной, тогда говорят, что эта функция – функция общего вида.

Для исследования функции на монотонность, первым делом необходимо найти производную данной функции, затем найти критические точки. Критические точки – это внутренние точки области определения функции, в которых производная не существует или равна нулю. Далее необходимо определить знак (знак «+» соответствует возрастанию функции, «-» - убыванию) на каждом из интервалов, получившихся путем разбиения области определения критическими точками. Точки экстремума – это точки, проходя через которые, функция меняет знак.

Для нахождения промежутков выпуклости и вогнутости функции необходимо найти вторую производную, нули числителя и знаменателя второй производной. Далее необходимо определить знак (знак «+» соответствует промежутку вогнутости функции, «-» - промежутку выпуклости) на каждом из интервалов, получившихся путем разбиения области определения полученными точками. Точкой перегиба является точка, проходя через которую функция меняет направление выпуклости. Другими словами, функция является выпуклой, если ее график расположен не выше касательной к нему; вогнутой, если график функции расположен не ниже касательной к нему. Так же, выпуклость и вогнутость можно называть выпуклостью вверх и выпуклостью вниз соответственно.

Если функция определена на бесконечности, то есть смысл найти горизонтальные и наклонные асимптоты. Наклонные асимптоты необходимо искать в виде прямых $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Если $k = 0$ и b не бесконечно, то асимптота горизонтальна.

Проведя исследование функции можно схематично построить график данной функции. Первым шагом является построение асимптот, нанесение на график точек максимумов и минимумов, точек перегиба функции. Для удобства дальнейшего построения можно схематично нанести на график промежутки монотонности и выпуклости функции. В завершении работы проводим линии графика через нанесенные точки, приближая к асимптотам и следуя схематичным стрелочкам.

Рассмотрим примерное планирование для 10-11 классов в таблице 1 относительно элементов функционального анализа.

Таблица 1.

Примерное тематическое планирование для учащихся 10-11 классов

Содержание	**Требования к уровню подготовки учащихся**
Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла	**Знать:** как вычислять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса градусной и радианной меры угла, используя табличные значения; формулы перевода градусной меры в радианную меру и наоборот.
Формулы суммы и разности тригонометрических функций	**Знать** формулу синуса, косинуса разности двух углов; формулу тангенса и котангенса суммы и разности двух углов. **Уметь:** преобразовывать простейшие выражения, используя основные тождества, формулы приведения.
Тригонометрические функции и их графики	**Знать** тригонометрическую функцию $y=sinx$, ее свойства и построение графика; тригонометрическую функцию $y=cosx$, ее свойства и построение графика.
Функции и их графики	**Знать** графики основных функций **Уметь:** строить графики функций.
Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций	**Знать** графики четных и нечетных функций, тригонометрических функций. **Уметь** определять вид функции по графику.
Возрастание и убывание функций. Экстремумы	**Знать** какие функции возрастающие, какие убывающие. **Уметь** находить экстремумы функций.

Исследование функций	**Уметь** исследовать функции, строить графики.
Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания	**Знать** основные свойства гармонических функций. **Уметь** применять гармонические функции к описанию физических процессов
Приращение функции	**Знать** определение приращения функции **Уметь:** определять приращение функции при приращении аргумента
Понятие производной	**Знать** понятие о производной функции, физическом и геометрическом смысле производной. **Уметь**: использовать алгоритм нахождения производной простейших функций.
Понятие о непрерывности и предельном переходе	**Знать** определение предела числовой последовательности; свойства сходящихся последовательностей. **Уметь:** находить предел числовой последовательности, используя свойства сходящихся последовательностей.
Правило вычисления производных	**Знать:** формулы дифференцирования, правила дифференцирования. **Уметь:** находить производные суммы, разности, произведения, частного; производные основных элементарных функций.
Производная сложной функции	**Уметь:** находить производные сложных функций.
Производные тригонометрических функций	**Уметь:** находить производные тригонометрических функций.
Применение непрерывности	**Знать** определение предела числовой последовательности; свойства сходящихся последовательностей. **Уметь:** находить предел числовой последовательности, используя свойства сходящихся последовательностей.
Касательная к графику функции	**Уметь:** составлять уравнения касательной к графику функции по

	алгоритму.
Приближенные вычисления	**Знать** применение производной для приближенных вычислений. **Уметь** применять производные для вычислений.
Производная в физике и технике	**Знать** определение скорости, ускорения. **Уметь** находить силу, кинетическую энергию и т.д.
Признак возрастания (убывания) функции	**Уметь:** исследовать простейшие функции на монотонность и на экстремумы, строить графики простейших функций.
Критические точки функции, максимумы и минимумы	**Уметь:** исследовать простейшие функции на монотонность и на экстремумы, строить графики простейших функций
Примеры применения производной к исследованию функции	**Уметь,** пользуясь планом, исследовать функцию и построить её график.
Наибольшее и наименьшее значения функции	**Уметь:** исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций
Определение первообразной	**Уметь** находить первообразные для суммы функций и произведения функции на число, используя справочные материалы. **Знать,** как вычисляются первообразные.
Основное свойство первообразной	**Знать** применение первообразной **Уметь:** находить график первообразной, проходящей через заданную точку.
Три правила нахождения первообразных	**Знать** понятие первообразной суммы. Разности. **Уметь:** вычислить первообразную от суммы, разности функций; вычислять первообразную от функции с множителем.
Показательная функция	**Знать** определение показательной функции. **Уметь:** определять свойства различных показательных функций;

	строить графики показательных функций; исследовать графики показательных функций.
Логарифмическая функция. Понятие обратной функции	**Уметь** выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения логарифма; проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих логарифмы.
Производная показательной функции. Число *е*	**Уметь:** находить функцию, обратную данной и строить ее график, вычислять производную и первообразную показательной функции и строить ее график.
Производная логарифмической функции	**Уметь:** вычислять производные логарифмической функции; извлекать необходимую информацию из учебно-научных текстов.
Степенная функция	**Уметь:** строить графики степенных функций.

В результате изучения математического анализа на базовом уровне учащийся должен уметь:

— вычислять производные и первообразные элементарных функций, используя справочные материалы;

— исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простейших рациональных функций с использованием аппарата математического анализа;

— использовать приобретенные знания для решения прикладных задач на наибольшее и наименьшее значения, на нахождение скорости ускорения;

В результате изучения элементов функционального анализа в школьном курсе математики учащийся должен уметь:

— определять значения функции по значению аргумента при различных способах задания функции;

— строить графики изученных функций;

— описывать по графику и в простейших случаях по формуле поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения;

— решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков;

— использовать приобретенные знания и умения для описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков [35].

Анализ действующих учебников.

Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. «Алгебра 7 класс» 2013г., «Алгебра 8 класс», 2013г., «Алгебра 9 класс» 2014г.

В данных учебниках прослеживается следующая функциональная линия: $y = kx + b$, $y = kx$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^n$, где $n \in N$.

В учебнике для 7 класса понятие функции вводится в п. 12, § 5, II гл. как зависимость одной переменной от другой. В этом же пункте рассматриваются понятия аргумента, значения функции, области определения функции. В п. 13 рассматривается вычисление значения функции по формуле. Определение графика функции дается в п. 14. Следующий параграф называется «Линейная функция», но прежде чем перейти непосредственно к определению линейной функции, в п. 15 рассматривается прямая пропорциональность. В качестве дополнительного материала дается п. 17 «Задание функции несколькими формулами». В п. 23, §8, III гл. вводятся степенные функции $y = x^2$, $y = x^3$ и их графики. В этом же пункте рассматриваются некоторые свойства данных функций. Так же учащимся предлагается графический способ решения уравнений [15].

В учебнике для 8 класса, в п. 8, §3, I гл. вводится понятие обратной пропорциональности, рассматриваются некоторые свойства, отмечается, что графиком данной функции является гипербола. В п. 15, §5, II гл. вводится функция $y = \sqrt{x}$, рассматривается ее график и некоторые свойства. Для дополнительного изучения в п. 42, §13, IV гл. предлагается познакомиться с функциями $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойствами [16].

В учебнике для 9 класса вся I гл. посвящена изучению квадратичной функции. Перед изучением новых функций, авторы учебника напоминают основные понятия: функция, аргумент, значение функции, область определения функции, график функции. Кратко рассматриваются уже изученные функции и их графики. В п.2 вводятся новые свойства функций: даются определения возрастания и убывания функции. В п. 5, §3 вводится квадратичная функция $y = ax^2$, ее график и свойства. В п. 6 рассматриваются графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$. В п. 7 предлагается алгоритм построение графика квадратичной функции. В п. 8, §4 вводится степенная функция $y = x^n$с натуральным показателем. При рассмотрении свойств данной функции, отмечается, что при четном n, свойства аналогичны свойствам функции $y = x^2$, при нечетном n – свойствам функции $y = x^3$. В качестве дополнительного материала в п. 10 предлагается изучить дробно-линейную функцию $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ и ее график, которым является гипербола [16].

Теоретический и практический материал данных учебников оснащен множеством примеров, наглядными графиками, таблицами и иллюстрациями. Алгоритмы, определения, новые понятия особым образом выделяются среди текста. Предлагается познакомиться с выдержками из биографий ученых, которые, так или иначе, имеют отношение к изучаемой теме. Задания практической части выстроены индуктивным способом. Среди всех заданий выделены задания для обязательного изучения, задания повышенной трудности и задания для повторения. В конце каждого пункта предлагается ответить на вопросы по изученному материалу. После каждой главы имеется пункт «Для тех, кто хочет знать больше» с дополнительным материалом, как теоретическим, так и практическим.

Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. «Алгебра 7 класс» 2011г., «Алгебра 8 класс» 2012г., «Алгебра 9 класс» 2012г., «Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы» 2012г.

В данных учебниках прослеживается следующая функциональная

линия: $y = kx + b$, $y = kx$,$y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = cosx$, $y = sinx$, $y = tgx$

В учебнике для 7 класса в §30, VI гл. вводится понятие функции, четкого определения не дается, понятие вводится с помощью примеров. В отличие от учебников, рассмотренных выше, здесь не дается определений аргумента, области определения функции. Рассмотрены способы задания функции и определение графика функции. В §31 вводится функция $y = kx$ и ее график. Линейная функция $y = kx + b$ вводится в §32, рассматривается ее график относительно функции $y = kx$. Больше в 7 классе никакие функции не рассматриваются [2].

В учебнике для 8 класса, в §35, V гл. вводится определение квадратичной функции и только после этого вводится функция $y = x^2$ как частный случай квадратичной функции. Рассматривается ее график и понятие вершины параболы. В следующих двух параграфах авторы учебника предлагают вернуться к функциям $y = ax^2$ и $y = ax^2 + bx + c$, и рассмотреть их более подробно. В §39 дается алгоритм построения графика квадратичной функции. Отмечается, что функция принимает свое наибольшее или наименьшее значение в точке, которая является абсциссой вершины параболы. В §41, VI гл. предлагается рассмотреть, как решить квадратное неравенство с помощью графика квадратичной функции. В качестве дополнительного материала авторы учебника предлагают рассмотреть в §43 исследование квадратичной функции [3].

В учебнике для 9 класса III гл. называется «Степенная функция». Только сейчас авторы учебника предлагают познакомиться с понятием области определения функции. В следующем параграфе рассматриваются возрастание и убывание функции. В §14 вводятся понятия четности и нечетности функции. Далее, в §15 изучается функция $y = \frac{k}{x}$, отмечается, что эта функция выражает обратную пропорциональную зависимость. Рассматриваются график и свойства данной функции [4].

В учебнике для 10-11 классов в §6, II гл. вводится понятие степенной функции. Рассматривается свойство ограниченности функции. В следующем параграфе рассматриваются взаимно обратные функции. Дается определение обратимой функции. Следующая III гл. посвящена изучению показательной функции. В §11 рассматриваются ее график и свойства. IV гл. называется «Логарифмическая функция», но прежде чем изучать непосредственно функцию, вводится понятие и свойства логарифма. В §18 рассматривается логарифмическая функция, ее свойства и график. В VII гл. авторы учебника предлагают познакомиться с тригонометрическими функциями. Сначала, в §38 изучаются множество значений и область определения тригонометрических функций. В §39 рассматриваются свойства: четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций. В следующих трех параграфах изучаются свойства и графики функций $y = cosx$, $y = sinx$, $y = tgx$ соответсвенно. Дополнительно, как более сложный материал дается §43 «Обратные тригонометрические функции». В IX гл. рассматривается применение производной к исследованию функций: возрастание и убывание функций, экстремумы функций, наибольшее и наименьшее значения функций, как дополнительный материал – выпуклость графика функций, точки перегиба [1].

Теоретическая часть учебников данных авторов подкреплена всяческими примерами, задачами с решениями. Алгоритмы, определения и понятия выделены среди остального текста. Задания практической части разделены на обязательные, дополнительные и трудные задания. В теоретической и практической части имеются рисунки, таблицы, графики. В каждой главе дается более сложный материал для дополнительного изучения. Среди практических заданий встречаются блоки «Проверь себя!», где даны задания к этому материалу. В начале каждой главы предлагаются изречения известных ученых.

Никольский С.М., Потапов М.К. «Алгебра 8 класс»2014г., «Алгебра 9 класс» 2014г., «Алгебра и начала математического анализа 10 класс» 2013г., «Алгебра и начала математического анализа 11 класс» 2013г.

В данных учебниках прослеживается следующая функциональная линия: $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$, $y = x^n$, $y = x^{2m}$, $y = x^{2m+1}$, $y = \sqrt[n]{x}$,, $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

В отличие от других авторов, авторы данных учебников вводят понятие функции в 8 классе. §1, I гл. учебника для 8 класса так и называется «Функции и графики». В данном параграфе вводится понятие функции посредством примеров и задач. Рассматривается определение графика функции, области определения функции, способы задания функции. В §2 последовательно рассматриваются функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, их графики и свойства, вводится понятие четной и нечетной функции. В §6, III гл. предлагается изучить линейную функцию. Начинается изучение линейной функции с прямой пропорциональной зависимости, рассматривается ее график. Затем изучается непосредственно линейная функция, ее график. В качестве дополнительного материала изучаются функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$. В следующем параграфе изучается квадратичная функция $y = ax^2$, где $a > 0$

и затем, где $a \neq 0$. Далее рассматривается график функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. В следующем пункте рассматривается квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$. В §8 вводится обратно пропорциональная зависимость: $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, затем, где $k \neq 0$. В следующем пункте вводится дробно-линейная функция и ее график. В качестве дополнительного материала дается пункт «Построение графиков функций, содержащих модули» [24].

В учебнике для 9 класса впервые упоминается о функциях в дополнительном материале к I гл. в пункте «Производные линейной и квадратичной функции». В §4, II гл. вводится степенная функция $y = x^n$, ее свойства и график. В этом же параграфе рассматриваются графики и свойства функций $y = x^{2m}$ и $y = x^{2m+1}$. В следующем параграфе изучается корень n-ой степени и вводится функция $y = \sqrt[n]{x}$. Больше в 9 классе функции не рассматриваются [25].

В учебнике для 10 класса рассматриваются показательная, логарифмическая и тригонометрические функции. На изучение показательной функции выделен всего один пункт в §4 «Степень положительного числа». Далее изучается логарифм, его свойства и вводится логарифмическая функция, ее свойства и график. В качестве дополнительного материала даются степенные функции, вида $y = x^{\beta}$. В §10, II гл. вводятся тригонометрические функции: $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$. Рассматриваются их свойства и графики [21].

В учебнике для 11 класса в §1 рассматриваются элементарные функции, область определения и область изменения функций, ограниченность функций, возрастание и убывание функций, нули функции, четность и нечетность функций, исследование функций и построение их графиков элементарными методами. В качестве дополнительного материала рассматриваются графики функций, содержащих модули и графики сложных функций. В §2 « Предел функции и непрерывность» рассматривается понятие предела функции, понятие непрерывности функции, разрывные функции. В

§3 рассматривается понятие обратной функции. В качестве дополнительного материала даются взаимно обратные и обратные тригонометрические функции. В §5 «Применение производной» рассматриваются максимум и минимум функции, возрастание и убывание функции. Дополнительно рассматривается выпуклость функции и экстремумы функции с единственной критической точкой. Далее рассматривается построение графиков функций с применением производной. Далее в учебнике упоминается о функциях в §12, II гл. в пункте «Метод интервалов для непрерывных функций». Так же дополнительно дается целый параграф «Использование свойств функций для решения уравнений и неравенств» [22].

Учебники содержат достаточно наглядного материала: таблицы, графики, иллюстрации. Содержатся исторические справки, выдержки из биографий ученых. Правила, формулы, теоремы, понятия выделены среди остального текста. Практическая часть разделена на задания базового уровня, профильного уровня, задания для устной работы, задания повышенной трудности, задания для повторения. Имеется дополнительный материал для самостоятельного, более глубокого изучения.

1.3. Элементы функционального анализа в программе ЕГЭ.

Уже второй год ЕГЭ по математике делится на базовый и профильный уровень. В 2015 году в Красноярском крае сдавали ЕГЭ профильного уровня 67,18% учащихся, это 10777 человек, из которых 96,64% - выпускники 2015 года [33].

В ЕГЭ базового уровня встречается два задания на действия с функциями: задание 11 и задание 14. Задание 11 включает в себя следующие требования (умения):

— описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках

— определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций;

И следующие знания:

— Табличное и графическое представление данных

— График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях

Задание 14. Требования (умения):

— Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции

Знания:

— Функция, область определения функции

— Множество значений функции

— График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях

— Понятие о производной функции, геометрический смысл производной [33].

В ЕГЭ профильного уровня заданий на исследование функций также два: задание 7 (задание 8 в 2015г.) и задание 12 (задание 14 в 2015г.). Задание 7 является заданием со сложностью базового уровня и представляет собой чтение графика производной функции. Это задание стало традиционным в ЕГЭ, тем не менее, в 2015 году оно вызвало затруднение у учащихся: процент выполнения задания упал с 47,24% до 40,53% по сравнению с 2014 годом. Задание 12 является заданием повышенного уровня и представляет собой нахождение наибольшего или наименьшего значения данной функции на данном отрезке. В этом задании так же упал процент выполнения на 2,18%, всего 25,81% учащихся набрали максимальный балл [33].

Пример задания 7 [14]:

На рисунке (см. рис. 1) изображен график $y = f'(x)$ - производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $y = f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.

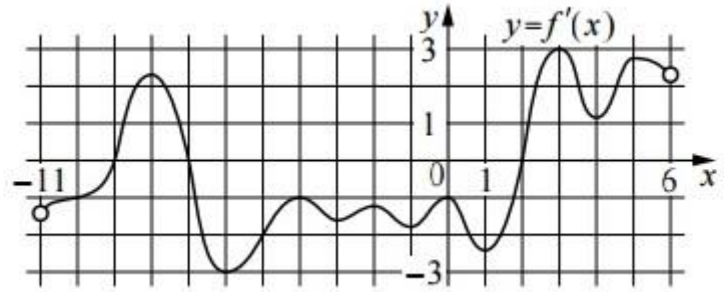


Рис. 1.

В течение последних пяти лет такие здания выполняют меньше половины учащихся. Как говорилось выше, процент выполнения этого задания в 2015 году составляет всего 40,53% учащихся. При изучении начал математического анализа акцент смещен на формальные вычисления, нежели на понимание базовых понятий, поэтому задания данного типа не выполняются или выполняются неверно.

Пример задания 12 [32]:

Найдите точку максимума функции

Это задание выполнили всего четверть учащихся. Типичные ошибки, при выполнении этого задания: неумение находить производную функции, неверное вычисление корней уравнения при нахождении нулей функции. Учащиеся путают понятия наибольшего (наименьшего) значения функции и точки максимума (минимума) функции. Так же, многие учащиеся ошибочно предполагают, что в функцию нужно подставлять только нули функции и игнорируют значения на концах отрезка, но бывает, что наибольшее (наименьшее) значение функции возникает на концах отрезка.

Глава II. Рекомендации по обучению школьников элементам функционального анализа.

2.1. Анализ действующей школьной программы в отношении повышения эффективности обучения элементам функционального анализа.

Целью повышения эффективности математического образования является обеспечение более высокого уровня знаний, умений и навыков по математике, подготовка учащихся к продолжению образования.

Функциональная линия прослеживается в школьном курсе математики начиная с 7 класса. Возникает потребность обобщить, дополнить и систематизировать вопросы, связанные с исследованием функций. В старших классах делается акцент на исследование функций с помощью производной и практически не обращается внимание на исследование функций по графику, на анализ и чтение графиков. Школьный материал содержащий элементы функционального анализа достаточно объемен, если охватить его целиком, начиная с 7 по 11 класс. Однако его содержание расположено по всему курсу математики дискретно, что затрудняет учащимся понимание функциональной линии в целом и ее значение. В тоже время, элементы функционального анализа в различных форме и объеме присутствуют во многих сферах науки и жизни. Кроме того, задания ЕГЭ также содержат элементы функционального анализа в явном и неявном виде и требуют аккуратного применения знаний данной области на уровне понимания. Использование обычных алгоритмов при решении задач данного раздела не всегда означает понимание выполняемых действий.

Анализ школьной программы и опыт действующих учителей позволяет утверждать, что повысить эффективность обучения функциональному анализу с помощью обычных уроков и методов, используемых при их проведении в 10 классе практически невозможно. Формат обычных уроков и объем изучаемого в 10-11 классах материала требует применения форм обучения подразумевающих выход за рамки отведенного школьной программой количества занятий по математике. Поэтому для решения описанной выше проблемы целесообразно ввести элективный курс, направленный на систематизацию, обобщение и выработку понимания материала функционального анализа.

2.2. Требования к разработке и проведению элективного курса.

Элективный курс – это обязательный курс по выбору для учащихся 10-11 классов.

Целью введения элективных курсов в школу является социализация учащихся, индивидуализация обучения, формирование осознанности выбора будущей профессии [10].

Элективные курсы помогают учащемуся определиться с выбором дальнейшего направления обучения и с выбором профессии: убедиться в правильности своего выбора, либо в обратном. Так же, элективные курсы помогут расширить и более глубоко изучить выбранную область для изучения.

Функции, выполняемые элективными курсами, могут быть различными. Они зависят от целей и задач обучения на профильном уровне.

Элективный курс может использоваться для повышения уровня знаний по базовым учебным предметам, для реализации межпредметных связей и изучения смежных учебных предметов, для связки представлений, полученных на разных предметах, в одну целую картину. Так же, учащиеся, которые изучают предмет на базовом уровне, могут посещать элективный курс для подготовки к экзамену на повышенном уровне. Элективный курс может быть ориентирован на подготовку к будущей профессиональной деятельности или на совершенствование навыков познавательной и организационной деятельности. Все перечисленные функции могут как выполняться в комплексе, так и по отдельности.

Приведем следующую классификацию элективных курсов:

— предметные

— межпредметные

— по предметам, не входящих в учебный план

Предметные элективные курсы так же можно разделить на несколько групп. Их задача – углубить и расширить знания по базовым предметам учебной программы.

Элективные курсы повышенного уровня. Они направлены на изучение предмета на углубленном уровне. Каждый раздел курса углубляется в большей или меньшей степени [26].

Так же существуют элективные спецкурсы, где углубленно изучаются только отдельные темы основного курса. Их отличие от элективных курсов повышенного уровня в том, что здесь выбранная тема изучается еще более глубоко, чем на курсах повышенного уровня.

С помощью элективных курсов можно углубленно изучать даже такие темы, которые не входят в основную программу, такие курсы так же называются спецкурсами.

При проведении прикладных элективных курсов учащиеся знакомятся с применением знаний на практике. Происходит развитие интереса к современной технике и производству.

Существуют элективные курсы, которые позволяют изучить методы познания природы. Часто используются компьютерные программы для моделирования.

Будет интересным элективный курс по истории предмета. Причем предмет как может входить в учебную программу, так и не входить в нее.

Отдельно выделяются элективные курсы, посвященные изучению методов решения задач и составлению задач на основе экспериментов, например, физических, химических или биологических.

Межпредметные элективные курсы удовлетворяют цель общекультурного развития, поддерживают и развивают интересы учащихся к различным областям знаний, которых нет в учебном плане.

Прикладные элективные курсы, обеспечивают знакомство обучающихся с важнейшими способами применения знаний по предмету на практике, развитие их интереса к современной профессиональной деятельности. К прикладным элективным курсам относятся социальные практики (волонтерское движение и патронат, шефство над воспитанниками учреждений дошкольного образования, участие в инициативах, имеющих социально значимую ценность для общества).

Преимущество элективных курсов состоит в том, что учащиеся самостоятельно могут их выбрать. Основными мотивами выбора, которые следует учитывать при разработке и реализации элективного курса, могут быть:

— подготовка к ЕГЭ по профильным предметам;

— приобретение знаний и навыков, освоение способов деятельности для решения практических, жизненных задач, проблем (уход от традиционного школьного «академизма»);

— возможности для успешной карьеры, продвижения на рынке труда;

— любопытство;

— поддержка изучения базовых курсов;

— профессиональная ориентация;

— интеграция имеющихся представлений в целостную картину мира

Как и на любой другой курс, на элективные курсы накладываются определенные требования: элективный курс должен быть ориентирован на современные образовательные технологии, учебные нагрузки должны соответствовать нормативам, программа элективного курса должна соответствовать принятым нормам, курс должен быть краткосрочен, по принятым нормам это 17 либо 34 часа [7].

Элективный курс должен быть оформлен в систему учебно-методического комплекса, как для учителя, так и для учеников.

Основные элементы учебно-методического комплекса элективного курса:

— Программа курса
  - o Аннотация
  - o Место курса в образовательном процессе
  - o Цели и задачи изучения курса
  - o Основные компоненты содержания курса
  - o Методы и формы обучения
  - o Результаты изучения курса
  - o Формы контроля уровня достижения учащихся и критерии оценки

— Учебно-методический план

— Учебное пособие для учащихся

— Методические рекомендации/ Разработка занятий

— Хрестоматия/ Список литературы

Аннотация должна быть краткой, но емкой по содержанию. Учащийся должен получить достаточно полное представление о курсе.

Место элективного курса необходимо показать, чтобы видеть, какое соотношение курса с предметами, какие межпредметные связи реализуются при прохождении элективного курса, какие навыки при этом развиваются, создаются ли условия для профессионального определения, удовлетворяется ли познавательный интерес учащихся .

Цель элективного курса должна отражать для чего он изучается , удовлетворяет ли он потребности потребителей. Потребителями в данной ситуации являются не только учащиеся, но и учителя, школьное сообщество, родители.

После формулировки целей формулируются и задачи курса. Задачи элективного курса должны отражать, что необходимо для достижения цели, что конкретно нужно будет делать учителю и учащемуся при изучении элективного курса [8].

Раздел программы «Основные компоненты содержания курса» отражает подробное содержание теоретических и практических занятий. Здесь расписываются все лекционные занятия, все практические работы, все семинарские занятия, все самостоятельные и контрольные работы, прописываются методы, идеи и формы проведения каждого занятия, методы и виды деятельности, также указывается, какие разделы школьных курсов должны быть предварительно освоены.

Методы и формы обучения должны соответствовать возрастным и индивидуальным особенностям учащихся. Поэтому элективный курс должен содействовать становлению целостного мировоззрения, основываться на обучении через сотрудничество, учитывать индивидуальные способы обработки информации об окружающем мире, содержать в себе интерактивность.

Программа должна состоять из различных видов практикумов: групповой работы с коллективным анализом, самостоятельного подбора литературы, использование электронных средств хранения информации: Интернет-ресурсов, различных энциклопедий, облачных дисков, самостоятельное написание докладов по заданной теме и выступление с ними [31].

Важной функцией учителя становится деятельность, направленная на достижение общей цели через взаимопомощь, сотрудничество.

Цели элективного курса определяют формы организации занятий. Учащиеся должны получить представление о будущей профессиональной деятельности, поэтому стоит подобрать подходящие формы и методы обучения.

Требования накладываются и на методику проведения элективных курсов: тематика должна быть актуальной и социально значимой, поддержка базовых курсов школьной программы, включение учащихся в практическую деятельность, подкованную теоретическими занятиями, формирование организационных способностей.

Результатом изучения элективного курса станет индивидуальная образовательная траектория, построенная на полученных знаниях, умениях и навыках, освоенных видах деятельности. Результаты могут быть оформлены в шаблон «знать/ уметь», либо в компетентностном подходе. В случае компетентностей учащегося описывается уровень достижения в следующих областях: работа в группе, работа с информацией, решение проблем.

Формы контроля необходимо описывать полностью, то есть и промежуточный контроль и итоговый. Итоговый контроль можно оценивать в формате «зачет/незачет», а так же по балльной шкале.

Контроль учащихся проводится для своевременной коррекции знаний и деятельности учителя и как инструмент мотивации к дальнейшей учебной деятельности. Контроль проводится не обязательно в виде самостоятельных и контрольных работы, могут использоваться такие виды контроля как: творческие и исследовательские задания, наблюдение за активностью работы на уроке, оценки педагогов по другим предметам и т.д.

Итоговый контроль после изучения всего элективного курса может быть как накопительным, то есть либо совокупность выполненных работ - портфолио, либо суммирование баллов, полученных в ходе изучения курса [34].

В тематическом плане элективного курса должно быть отражено содержание всех тем с указанием отведенного на них времени.

Учебное пособие для учащихся может быть представлено в различных видах: курс видео-лекций, компьютерная программа с интерактивной поддержкой, учебник. Учащийся должен иметь возможность самостоятельно получить необходимые знания, что избавляет учителя от необходимости традиционного чтения лекций.

Учебное пособие для ученика должно содержать схемы курса и его разделов, рубрикация, словарь, контрольные, проблемные и творческие вопросы и задания, задания к иллюстрациям, шрифтовые выделения (термины, смысловые акценты, примеры, интересные факты и т.п.).

Так же, учебное пособие может быть полезно и после окончания школы.

Методические рекомендации и разработка занятий должны помочь с организацией учебного процесса, как учителю, так и учащемуся. Сюда входят: подробно расписанные конспекты занятий, сборки заданий для каждого урока.

Если элективный курс основан на текстах, которые являются оригинальными и труднодоступными, то необходима подготовка хрестоматии. В противном случае будет достаточно составить список литературы и указать, к какой теме лучше применить тот или иной ресурс [13].

2.3. Программа элективного курса.

Разработанный нами элективный курс предназначен для учащихся 10-х классов. Причем, учащиеся могут обучаться как на профильном уровне, так и на базовом.

Анализируя результаты пробных экзаменов, а так же результаты экзаменов прошлых лет, можно сделать вывод о том, что с заданиями, содержащих элементы функционального анализа справляются менее половины учащихся. Причем, это не только задания на исследование функций с помощью производной, но и задания на чтение и анализ графиков [33].

Данный курс рассчитан на 17 часов. В начале изучения курса упор делается на исследование функций по графику, затем – на исследование функций с помощью производной.

Целью курса является систематизация знаний учащихся по элементам функционального анализа.

Задачи курса:

— Мотивация учащихся на сдачу ЕГЭ профильного уровня

— Формирование у учащихся навыков решения заданий на умение работать с функциями

— Систематизация знаний по темам функционального анализа

Планируемые результаты.

Учащийся должен уметь:

— описывать по графику поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения;

— вычислять производные и первообразные элементарных функций, используя справочные материалы;

— исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простейших функций с использованием аппарата математического анализа.

В данном курсе используется рейтинговая система. По окончании курса подсчитываются баллы учащихся и выставляются оценки в зависимости от количества набранных баллов.

В течение курса проводится две контрольные: после первых 7 занятий и по окончании курса. Также, проводится диагностическая работа в виде входного теста, состоящего из 5 заданий ЕГЭ прошлых лет.

Проводятся тестовые и самостоятельные работы. Так же, учащимся предлагается заработать дополнительные баллы, например, подготовить доклад по теме, заранее согласовав с учителем, подготовить презентацию программы для работы с функциями и прочее. По окончании курса учащимся выставляется зачет.

Учебные занятия строятся в форме практических работ, семинаров, контрольных работ. Проводятся фронтальная, групповая, парная, индивидуальная и самостоятельная работы. Занятия имеют следующую структуру: организационный момент, целеполагание, актуализация знаний, введение нового материала, усвоение и закрепление знаний, подведение итогов, постановка домашнего задания.

Баллы учащиеся получают за активную работу на уроке, за посещение, за выполнение домашнего задания, за выполнение контрольных работ, за доклады, творческие задания.

Максимум можно набрать 90 баллов. Для получения зачета учащемуся необходимо набрать 60 баллов.

Урок 1. Вводное занятие. Функции и их графики.

На уроке проходит актуализация понятия функции, видов функции, графиков, свойств, схемы исследования функции. Урок проходит в виде беседы, коллективной работы. Результатом домашней работы становится таблица свойств функций.

Цель урока обобщить знания о функциях, их свойствах и графиках.

В течение урока будут актуализированы основные понятия, с которыми будет проходить дальнейшая работа.

Урок 2. Нахождение области определения функции по графику и по формуле.

В большинстве задач на построение графиков функций мы встречались с такой ситуацией: функция задана формулой, требуется построить её график. Но представляет значительный практический интерес другая задача: задан график функции, с помощью которого требуется перечислить основные свойства этой функции.

Урок проходит в форме коллективной работы и индивидуальной работы с последующим обсуждением. На уроке актуализируются знания, связанные с областью определения функции: что означают выколотые точки, как записывается ответ и прочее.

Урок направлен не только на задания функционального анализа. Умея находить область определения функции по формуле, легко найти ОДЗ неравенства или уравнения.

В конце урока можно предложить учащимся решить самостоятельную работу с дальнейшей проверкой по эталону.

Пример заданий для самостоятельной работы:

Вариант 1.

1. Какое из выражений не имеет смысла при x=2 и x=3?

А. $\frac{x-2}{x-3}$ Б. $\frac{x-3}{x-2}$ В. $\frac{x}{(x-2)(x-3)}$ Г. $\frac{(x-2)(x-3)}{3}$

2. Какое из чисел не входит в область определения выражения $\sqrt{4-x}$?

А. -6 Б. 0 В. 4 Г. 8

3. Даны выражения

1. $\frac{x}{x-5}$ 2. $\frac{x-5}{x}$ 3. $\frac{x-\frac{1}{x}}{5}$

Какие из них не имеют смысла при x=0?

А. Только 1 Б. 2 и 3 В. Только 2 Г. 1, 2 и 3

4. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{-2x}$?

А. При x≥0 Б. При x≤0 В. Ни при каких x Г.При любых x

2 вариант.

1. Какое из выражений не имеет смысла при x=1 и x=5?

А. $\frac{x}{(x-5)(x-1)}$ Б. $\frac{(x-5)(x-1)}{x}$ В. $\frac{x-1}{x-5}$ Г. $\frac{x+5}{x-1}$

2. Какое из чисел не входит в область определения выражения $\sqrt{x+2}$?

А. 2 Б. 0 В. -4 Г. -2

3. Даны выражения:

1. $\frac{x}{x-1}$ 2. $\frac{x-1}{x}$ 3. $\frac{x}{x+1}$

Какие из них не имеют смысла при x=1?

А. 1 и 2 Б. 1 и 3 В. Только 1 Г. 1,2 и 3

2. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{1-x}$?

А. При x≥1 Б. Ни при каких x В. При x≤1 Г. При любых x

Урок 3. Нахождение области значений по графику и по формуле.

У учащихся часто встречаются ошибки, связанные с отсутствием умения отличать область определения функции от области значений функции. Поэтому целью урока становится формирование умения различать эти понятия и умения находить область значений функции по графику и по формуле.

Урок проходит в виде короткого объяснения материала и индивидуальной работы с последующим обсуждением.

Индивидуальную работу можно организовать в виде работы по карточкам.

Пример карточек:

1 вариант.

Найти область определения и область значения функций по графику (см. рис. 2).

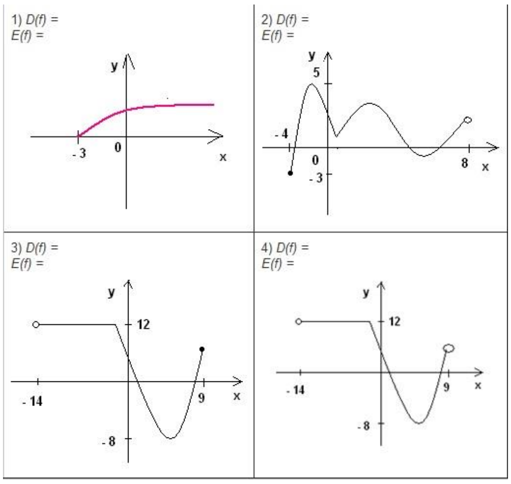


Рис .2

2 вариант.

Найти область определения и область значения функций по графику (см. рис.3).

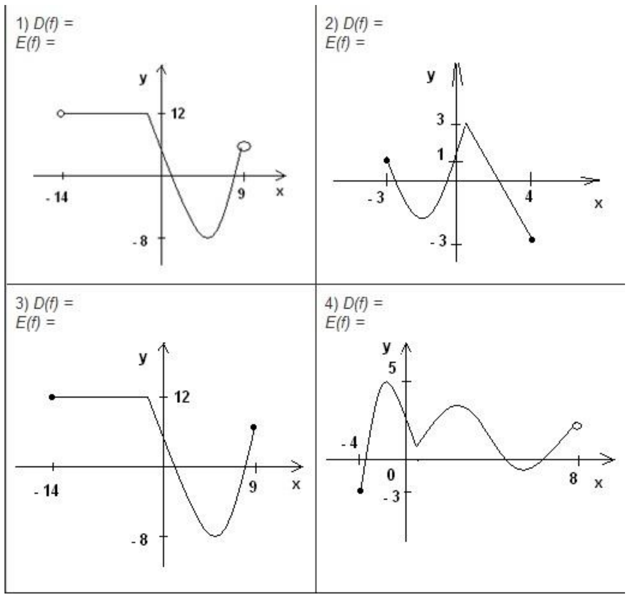


Рис. 3

Урок 4. Нахождение нулей функции по графику и по формуле.

Данный урок поможет не только в исследовании функций, но и в решении уравнений и неравенств.

Урок построен на практической работе. Цель практической работы состоит в формировании умения находить нули функции, как по графику, так и по формуле.

Урок 5. Исследование функции на монотонность по графику.

Урок проходит в форме семинарского занятия, к которому учащиеся предварительно подготовились самостоятельно.

Также, урок может быть построен с помощью ИКТ технологий, например, построить графики функций в программе Advanced Grapher и исследовать на монотонность.

На уроке могут использоваться следующие вопросы для обсуждения:

1. Сколько раз график функции пересекает ось Ox?
2. Сколько раз график возрастающей функции пересекает ось Ox?
3. Сколько раз график убывающей функции пересекает прямую $y=c$?
4. Сколько точек пересечения может иметь график возрастающей функции с прямой $y = x$?

5. Сколько точек пересечения может иметь график убывающей функции с прямой $y = x$?

6. Верно ли, что если функция возрастает на интервалах $(a; b)$ и $(b; c)$, то она возрастает и на интервале $(a; c)$?

7. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; c]$ и убывает на отрезке $[c; b]$. Обязательно ли значение $f(c)$ является ее наибольшим значением на отрезке $[a; b]$?

8. Может ли быть монотонной сумма двух функций, каждая из которых не является монотонной?

Урок 6. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции по графику.

Урок проходит в форме коллективной работы, коллективного обсуждения.

Целью урока является формирование умения находить точки максимума, точки минимума, наибольшее и наименьшее значение функции по графику, находить количество этих точек.

Интересным для учащихся будет следующее задание: используя среду «Statum 2000» расставить точки экстремума на графики заданных функций (см. рис 4, рис. 5, рис. 6).

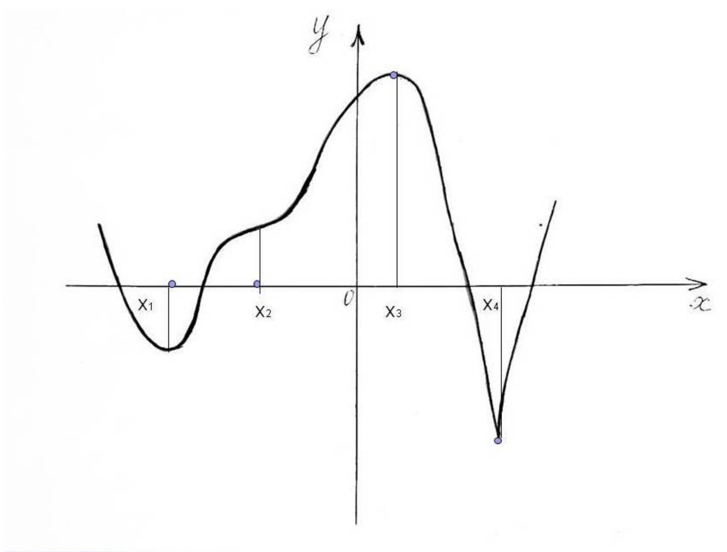


Рис. 4

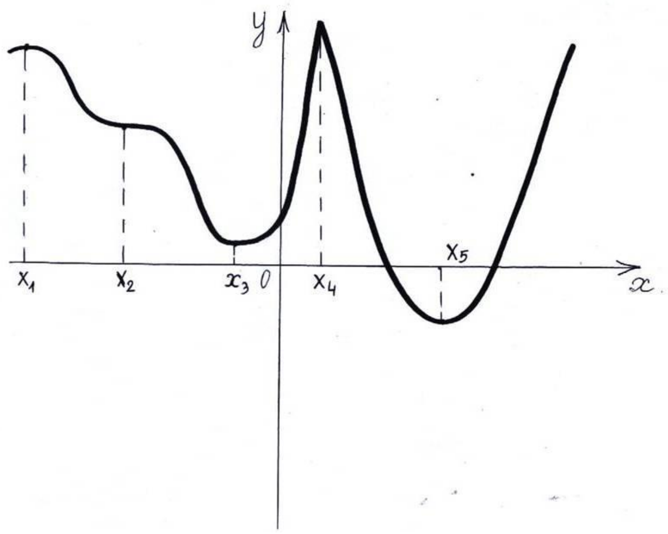


Рис.5

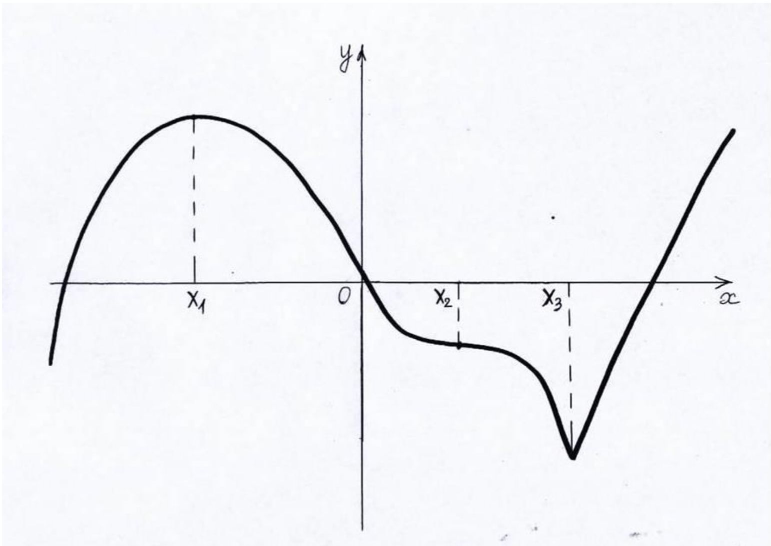


Рис.6

Урок 7. Нахождение точек перегиба по графику функции.

Целью данного урока является формирование умения находить промежутки выпуклости вверх, выпуклости вниз, точки перегиба функции по графику. Учащиеся самостоятельно изучают материал, подготовленный учителем, затем обсуждают коллективно и выполняют практические задания.

Для наглядности теоретического материала можно использовать следующие графические иллюстрации. Они удобны тем, что при смене направления выпуклости меняется цвет графика функции (см. рис.7, рис.8, рис. 9. рис.10, рис.11, рис.12, рис.13).

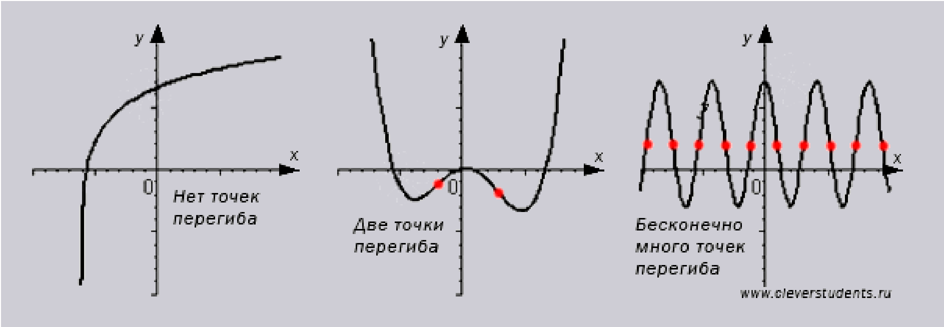


Рис. 7

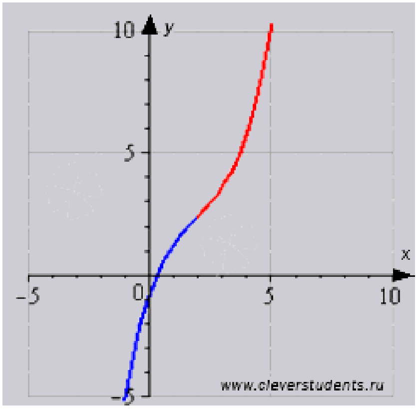


Рис. 8

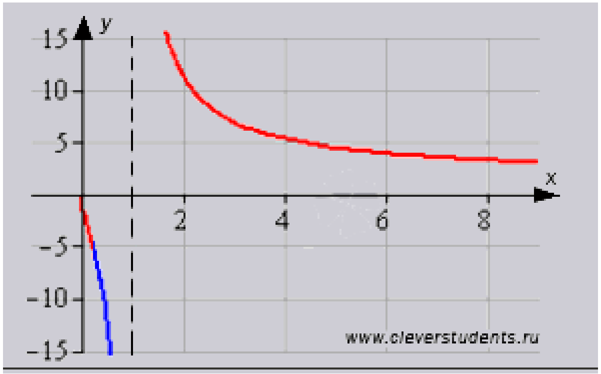


Рис. 9

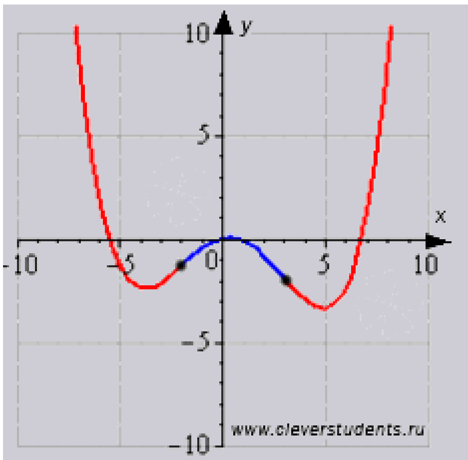


Рис. 10

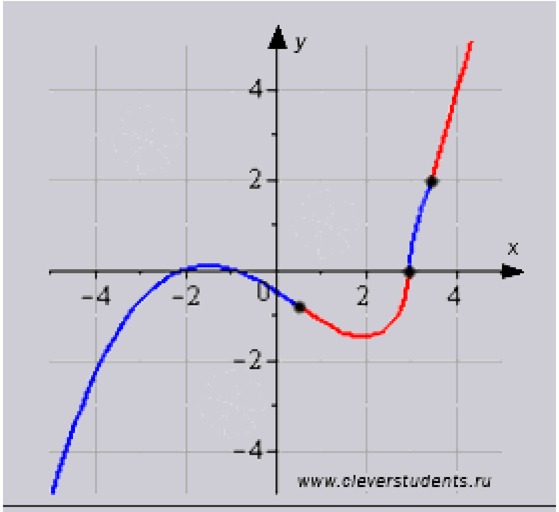


Рис. 11

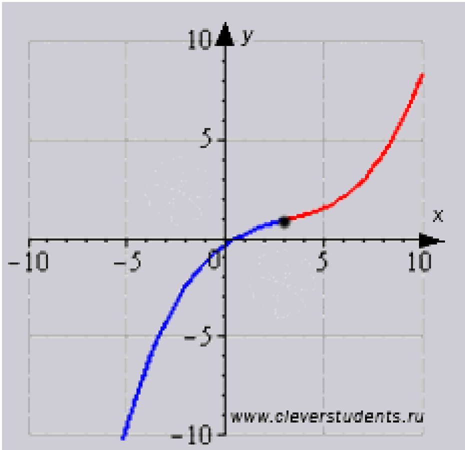


Рис. 12

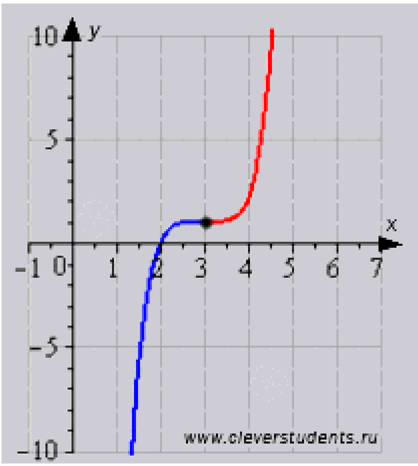


Рис. 13

Урок 8. Контрольная работа по теме «Исследование функций по графику».

Контрольная работа представляет собой работу по карточкам.

Исследовать функцию по ее графику (см. рис. 14):

— область определения функции

— область значений функции

— нули функции

— промежутки возрастания и убывания

— точки максимума и минимума

— наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

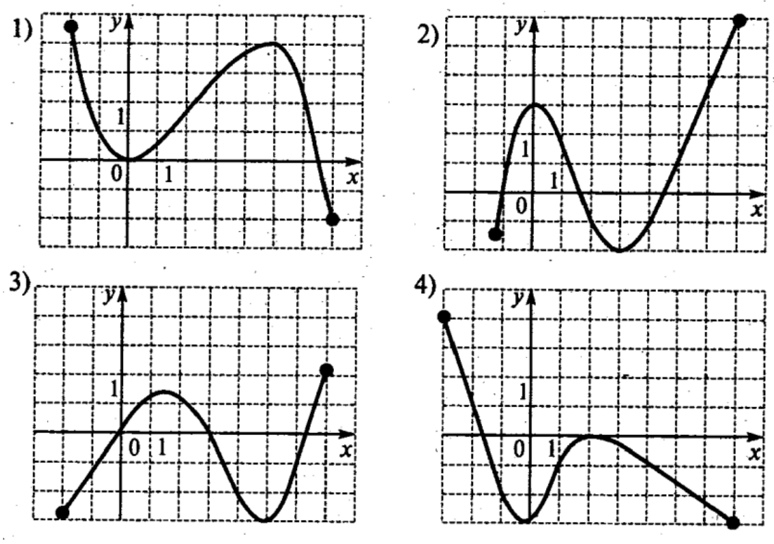


Рис. 14

Урок 9. Исследование функции на монотонность с помощью производной.

Целью урока является формирование умения учащихся исследовать функцию на монотонность с помощью производной.

На данном уроке теоретический материал объясняется учителем с примерами. Учащиеся в малых группах составляют алгоритм исследования функции на монотонность с помощью производной. Затем выполняют практические задания. Для актуализации знаний можно провести математический диктант (см. рис. 15).

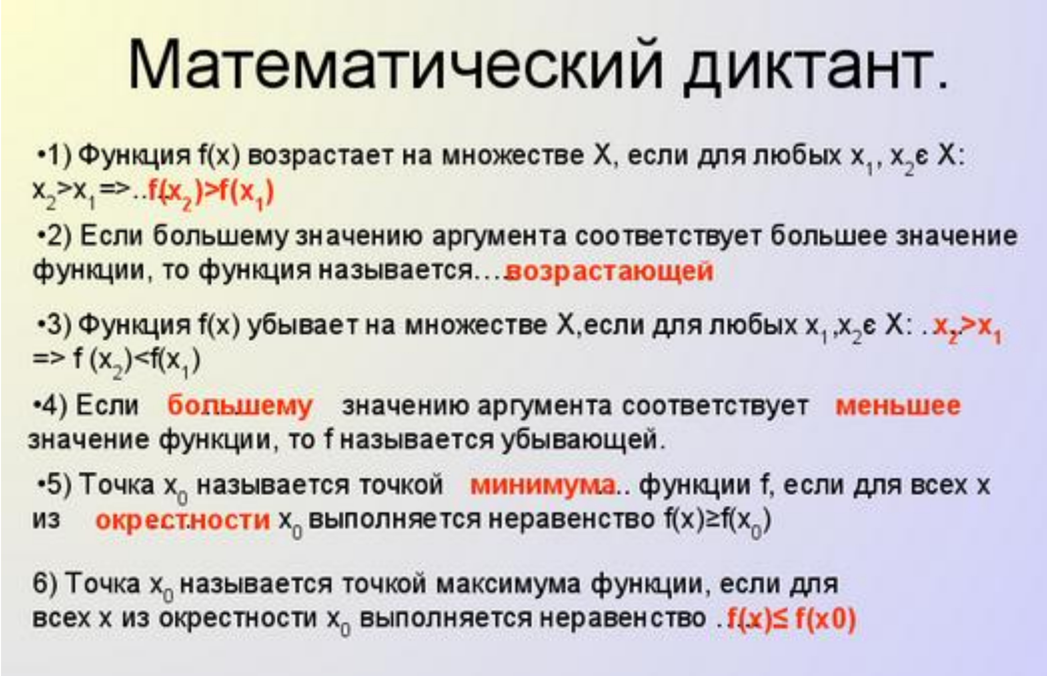


Рис. 15

Примеры заданий:

Исследовать функцию на монотонность и экстремумы:

$$y = (x-5)^2(2x+8)$$

С классом анализируем работу ученика 10 класса и ставим оценку. (Все задания надо оформить разным цветом). Включается легкая музыка.

1. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы

$$y = x^3 - x^2 + 6x - 19$$

2. Докажите, что функция *y=sinx-5x* является убывающей на всей числовой прямой.

3.По графику исследуйте функцию на монотонность и экстремумы.

Функция возрастает на *(-∞;-8]*, *[4;8)*, убывает на *[-8;4]*, *(8;+∞)*,

x=-8 – точка максимума

x=4 – точка минимума

x=8 – точка разрыва

4. Сделать эскиз графика.

Функция возрастает на *(-∞;-6]*, *[2,7]* , убывает на *[-6;0)*, *(0;2]* , *[7;+∞)*.

5.При каких значениях параметра р функция $y = x^3 + px^2 + 5x - 14$ возрастает на всей числовой прямой?

Урок 10. Нахождение экстремумов функции с помощью производной.

Урок проходит в виде семинара, к которому учащиеся подготовились заранее.

Учащиеся самостоятельно составляют алгоритм нахождения экстремумов функции.

Примеры заданий:

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ на отрезке $[0{,}5; 2]$

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$

Найдите наименьшее значение функции $\sqrt{x^2 + 12x + 40}$

Найдите наименьшее значение функции $y = 2cos - 11x + 7$

Урок 11. Вертикальные асимптоты.

Целью урока становится формирование умения у учащихся находить уравнения вертикальных асимптот, находить вертикальные асимптоты по графику, формулировать условие существования вертикальных асимптот.

Примеры заданий:

1. Найти невертикальные асимптоты графика функции $y = \frac{3x}{x-2} + 10$
2. Определить все имеющиеся асимптоты графика функции $y = \frac{x^2+2x}{x-1}$ и изобразить поведение этого графика возле его асимптот.

Урок 12. Горизонтальные и наклонные асимптоты.

Урок проходит в форме коллективной работы. Задания разбираются у доски с совместным обсуждением.

Цель урока – формирование у учащихся умения находить уравнения горизонтальных и наклонных асимптот, умения видеть на графике горизонтальные и наклонные асимптоты, формулировать условие существования асимптот.

Примеры заданий:

Используя рассмотренные примеры, найдите уравнения асимптот графиков функций:

$$y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

$$y = \frac{4 - x^2}{5x^2 + 1}$$

$$y = \frac{4x^2 + 3}{x + 4}$$

Урок 13. Четность и нечетность функций.

Цель урока – формирование понятия четности и нечетности функции, умения определять и использовать эти свойства при исследовании функций и построении графиков функций.

После объяснения теоретического материала учителем, учащиеся выдвигают гипотезы о сочетании четных и нечетных функций:

Правило: сумма двух чётных функций –

Пример:

Правило: сумма двух нечётных функций –

Пример:

Правило: сумма нечётной и чётной функций -

Пример:

Правило: произведение двух чётных функций -

Пример:

Правило: произведение двух нечётных функций -

Пример:

Правило: произведение нечётной и чётной функций -

Пример:

Правило: отношение двух чётных функций -

Пример:

Правило: отношение двух нечётных функций -

Пример:

Правило: отношение нечётной и чётной функций -

Пример:

Также, проводится проверочная работа.

Задания для проверочной работы:

Вариант 1

1. Докажите, что данная функция является четной или нечетной:

а) $y=x^4-2x^2-\sin^2 5x$

б) $y=5x^3+\sin\frac{x}{2}$

в) $g(x)=|x|\sin 3x\cdot tg5x$

2. Привести примеры чётных и нечётных функций.

Вариант 2

1.Докажите, что данная функция является четной или нечетной:

а) $y=x^6-3x^2+\sin^2 3x$

б) $y=3x^3-6\cos\frac{x}{3}$

в) $y=|x|\cos 2x\sin^3 5x$

2. Привести примеры чётных и нечётных функций.

Вариант 3

1. Докажите, что данная функция является четной или нечетной:

а) $y=x^2-2x^4-\sin^{10} 5x$

б) $y=3x^7+\sin\frac{x}{7}$

в) $g(x)=|x|\sin 2x\cdot tg3x$

2. Привести примеры чётных и нечётных функций.

Вариант 4

1.Докажите, что данная функция является четной или нечетной:

а) $y=x^8-2x^2+\sin^4 x$

б) $y=x^3-4\cos\frac{x}{2}$

в) $y=|x|\cos 6x\sin^5 3x$

2. Привести примеры чётных и нечётных функций.

Вариант 5

1. Докажите, что данная функция является четной или нечетной:

а) $y=x^{14} - 4x^6 - sin^4 3x$

б) $y = 15x + sin\frac{x}{6}$

в) $g(x) = |x| \sin 8x \cdot tgx$

2. Привести примеры чётных и нечётных функций.

Вариант 6

1.Докажите, что данная функция является четной или нечетной:

а) $y=x^{22} - 5x^{10} + sin^2 x$

б)$y = 7x^7 - 3cos\frac{x}{6}$

в) $y=|x| \cos 4x \sin^3 9x$

2. Привести примеры чётных и нечётных функций.

Урок 14. Периодичность функций

Цель данного урока заключается в формировании понятия периода, периодической функции, формировании умения строить графики периодической функции по частям, формировании умения определять значение функции в любой точке, зная период и значение функции в одной точке.

По окончании изучения данной темы учащимся предлагается проверочная работа в виде заданий на карточках (см. рис. 16).

Вариант №1	**Вариант №2**
1. Докажите, что число $T = \frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = \sin 4x$.	1. Докажите, что число $T = 6\pi$ является периодом функции $y = \cos\frac{x}{3}$.
2. Найдите наименьший положительный период функции $y = \cos\frac{x}{4}$	2. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin 6x$
Вариант №3	**Вариант №4**
1. Докажите, что число $T = \frac{\pi}{3}$ является периодом функции $y = \cos 6x$.	1. Докажите, что число $T = 3\pi$ является периодом функции $y = \sin\frac{2x}{3}$.
2. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin\frac{x}{3}$	2. Найдите наименьший положительный период функции $y = \cos 3x$

Рис. 16

Урок 15. Нахождение точек перегиба с помощью производной.

Целью урока станет формирование понятия второй производной, умения вычислять вторую производную, формирование умения находить промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью производной.

Учащимся предлагается самостоятельно составить алгоритм нахождения точек перегиба функции.

Примеры заданий:

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика

1. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{4} + 2$

2. $f(x) = 1 + 4x^2 - \frac{2x^4}{3}$

Исследовать график функции $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ на выпуклость, вогнутость и перегибы.

Исследовать график функции $f(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$ на выпуклость, вогнутость и найти точки перегиба, если они существуют.

Вопросы для обсуждения:

1. Может ли точка перегиба функции быть ее точкой экстремума?

2. Может ли всюду выпуклая вверх (вниз) функция иметь более одного экстремума?

3. Докажите, что у любой дважды дифференцируемой функции между двумя точками экстремума лежит хотя бы одна точка перегиба.

4. Докажите, что у любой дважды дифференцируемой функции между точками перегиба функции может и не быть точек экстремума.

Урок 16. Подготовка к контрольной работе.

Целью данного урока становится систематизация и обобщение знаний по теме элективного курса.

Учащимся предлагается задать вопросы по темам, которые остались для них непонятными. Работа проходит в форме коллективного обсуждения, разборами заданий на доске, как учителем, так и учащимися.

Урок 17. Контрольная работа.

Цель урока – итоговый контроль знаний учащихся по теме «Исследование функций по графику и с помощью производной».

Примеры заданий для контрольной работы:

Определите по графику (см. рис 17, рис. 18):

Область определения функции

1. Область значений функции
2. Нули функции
3. Промежутки монотонности
4. Экстремумы функции

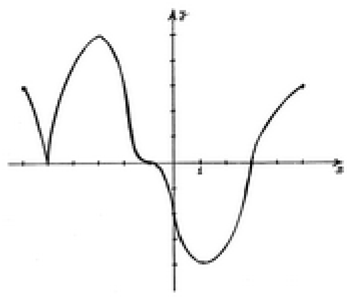
1. 

Рис. 17

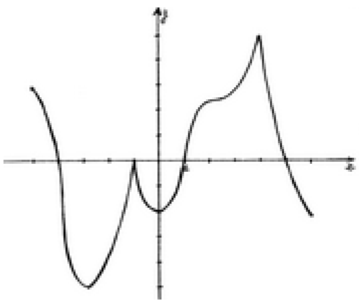
2. 

Рис. 18

Исследуйте функцию с помощью производной:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
2. $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

Определите интервалы возрастания и убывания функции

$y = x^3 - 24x$

Найдите точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 3]$

2.4. Конспекты уроков по программе элективного курса.

Конспект урока. Урок №1

Тема: Функции, их свойства и графики

Класс: 10 класс

Цели урока:

- образовательные: обобщить знания по теме «Функции, их свойства и графики»

- развивающие: развитие логического и критического мышления

- воспитательные: воспитание культуры математической речи

План урока:

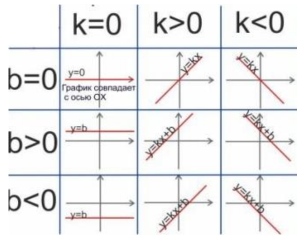
1. Организационный момент (3 мин)
2. Целеполагание (3 мин)
3. Актуализация знаний (8 мин)
4. Закрепление знаний (25 мин)
5. Подведение итогов (2 мин)
6. Постановка домашнего задания (2 мин)

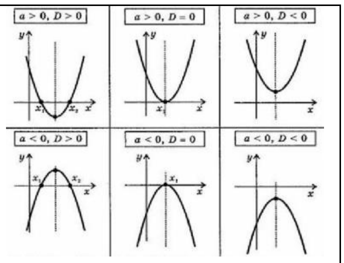
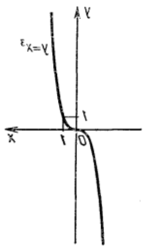
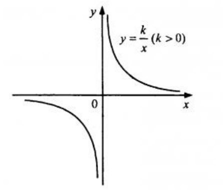
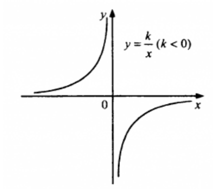
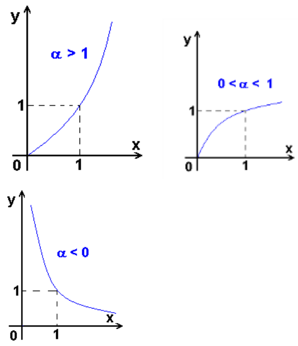
№	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Вид доски
1.	Здравствуйте, садитесь. Сегодня мы начинаем изучать курс, посвященный элементам математического анализа. Элективный курс будет разбит на две	*Успокоились, сели, слушают учителя.*	

	части: исследование функций с помощью графика и исследование функций с помощью производной.		
2.	Понятие функции в математике является одним из основных, так как многие понятия алгебры и геометрии трактуются на функциональной основе. Использование свойств функции лежит в основе метода решения различных математических задач. Как вы думаете, какова тема урока? Верно. Поставим задачу урока.	Функции, их графики и свойства. Основной задачей нашего урока будет обобщение знаний о функциях, их свойствах и отработка умений строить графики функций.	Функции, их графики и свойства.
3.	Вспомним, что такое функция?	Функция – это зависимость переменной *у* от переменной *х*, при которой каждому значению	

	Что называется графиком функции?	переменной x соответствует единственное значение y. Графиком функции называется множество точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значению аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.	
	Какие свойства функции вы знаете?	Область определения функции, область значений функции, нули функции, промежутки возрастания и убывания функции, точки максимума и минимума функции, наибольшее и наименьшее значение функции.	
	Что такое область определения функции?	Областью определения функции называют множество всех значений, которое может принимать ее аргумент.	
	Что такое область значений функции?	Область значений функции – это множество всех значений y.	

	Что такое нули функции?	Это такое значение аргумента, при котором функция обращается в нуль.	
	Что такое промежутки возрастания и убывания функции?	Функция называется возрастающей на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция называется убывающей на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.	
	Что такое точки максимума и минимума функции?	Точка x_0 называется точкой максимума функции, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $y(x) \leq y(x_0)$. Точка x_0 называется точкой минимума функции, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство	

		$y(x) \geq y(x_0)$.	
4.	Какие виды функций вы знаете? Какая функция называется линейной? Что является графиком линейной функции? Вспомним, как выглядит график линейной функции при различных k и b. Для этого заполним таблицу. Что такое квадратичная функция?	Линейная, квадратичная, кубическая, степенная, обратная пропорциональность. Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$,где k - угловой коэффициент, b - свободное число, x - аргумент, y - функция Прямая Квадратичой называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a≠0. Здесь x - независимая переменная, или аргумент; y - зависимая переменная, или функция; a, b, c - конкретные числа, параметры, коэффициенты.	

	Что является графиком квадратичной функции? Посмотрим, как ведет себя график квадратичной функции при различных значениях коэффициентов. Заполним таблицу.	Парабола	 
	Что такое кубическая функция?	Функция вида $y = x^3$.	
	Что является графиком кубической функции?	Кубическая парабола, проходящая через начало координат.	
	Что такое функция обратной пропорциональности?	Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ и является числом.	
	Что является графиком обратной пропорциональности?	Гипербола.	
	Как меняется график в зависимости от k?		
	Что такое степенная функция?	Функция вида $y = x^a$.	
	Как изменяется график		

	функции в зависимости от a?		
5.	Подведем итоги урока. Что мы делали на уроке? Приведите пример, где в жизни встречаются графики функций?	Мы вспомнили, как выглядят графики функций, как они меняются в зависимости от параметров и коэффициентов. Вспомнили свойства функций, их определения. Снаряд, брошенный с земли, летит по параболе. Функция $y = \sqrt{x}$ схожа с процессом роста дерева, т.е. чем выше дерево, тем меньше нам заметен его рост.	
6.	Запишите домашнее задание. Дома вам предстоит написать свойства всех функций, которые мы сегодня повторили. Лучше будет оформить их в таблицу для наглядности.	*Записывают домашнее задание.*	

Конспект урока. Урок №2

Тема: Нахождение области определения функции по графику

Класс: 10 класс

Цели урока:

- образовательные: формирование умения находить область определения функции по графику, умения находить область определения кусочной функции;

- развивающие: развитие умения обосновывать свое решение, развитие умения находить свои ошибки;

- воспитательные: воспитание умения вести индивидуальную, групповую дискуссию, самостоятельного поиска решения, конструирования обобщенного способа решения задачи.

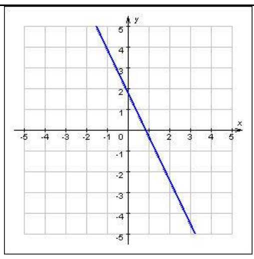
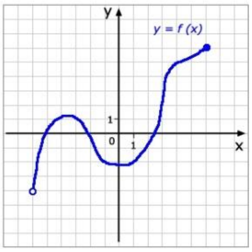
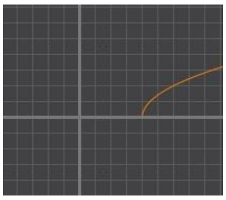
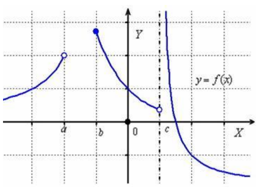
План урока:

1. Организационный момент (2 мин)
2. Проверка домашнего задания (7 мин)
3. Целеполагание (2 мин)
4. Актуализация знаний (5 мин)
5. Закрепление знаний (25 мин)
6. Подведение итогов (2 мин)
7. Постановка домашнего задания (2 мин)

№	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Вид доски
1.	Здравствуйте, садитесь.	*Сели, приготовились к учебной деятельности.*	
2.	Проверим домашнее задание. К доске выйдут 5 человек: первый запишет свойства линейных функций, второй – свойства	*Учащиеся выходят к доске, записывают свойства функций, затем все вместе проверяют.*	*На доске появляются решения домашнего задания*

	квадратичных функций, третий – кубической функции, четвертый – обратной пропорциональности, пятый – степенной. Не забываем, что свойства могут измениться от значений параметров и коэффициентов.		
3.	В большинстве задач на построение графиков функций мы встречались с такой ситуацией: функция задана формулой, требуется построить её график. Но представляет значительный практический интерес другая задача: задан график функции, с помощью которого требуется перечислить основные свойства этой функции. Начнем с области определения функции. Сформулируйте тему	Нахождение области	

	урока.	определения функции по графику.	
4.	Вспомним, что такое область определение функции? Как обозначается область определения функции? Как найти область определения функции по формуле? Как найти область определения по графику, не имея формулы? Как понять, входят ли концы промежутка в область определения функции?	Областью определения функции называют множество всех значений, которое может принимать ее аргумент. $D(f)$ Ищем в функции операции, приводящие к недопустимым значениям, например деление на ноль или корень четной степени из отрицательного числа. Затем определяем аргументы, которые не приводят к недопустимым значениям. Смотрим, для каких иксов существует нарисованная на графике функция. Если функция в точке не существует, то она будет выколота, т.е. не закрашена.	

5.	На доске вы видите график функции. Назовите область определения данной функции.	Вся числовая прямая	
	Найдите область определения следующей функции.	От -6 до 6	
	Концы графика входят в область определения? Почему?	6 входит, -6 не входит Точка -6 выколота, значит значения в этой точке не существует	
	Можем ли мы в таком случае сказать, что область определения данной функции (-5;6]?	Нет, не можем, потому что функция существует в точках 5,7; 5,9; 5,9999 и т.д.	
	Найдите область определения следующей функции.	$D(f)$= [4;∞)	
	Как вы думаете, какого вида функция здесь использована?	Степенная, где $0<a<1$	
	Посмотрите на следующий график.		
	Как называется такой график?	График кусочной функции	

	Сколько «кусков» функции видите? Начнем по порядку, с левого «куска». Верно. Что можно сказать о втором «куске»? Верно. Что можно сказать о последнем «куске»? Почему мы не включили 1 в область определения, ведь мы не видим выколотую точку? Так как это целый график, а не три отдельных, необходимо собрать все вместе. Какая область определения у данного графика?	Три Область определения левого «куска» (-∞;-2). -2 не входит в область определения, т.к. точка выколота. Его область определения равна [-1;1). -1 входит в область определения, т.к. точка закрашена, а 1 не входит, т.к. точка выколота. Его область определения равна (1;∞). Потому что через точку 1 проходит асимптота, график к ней стремится, но никогда не заденет. (-∞;-2)∪ [-1;1)∪ (1;∞)	
6.	Подведем итоги урока. Чем мы занимались на уроке? Что вам понравилось на	Мы находили область определения функций по графикам. Находить область	

	уроке? *Выставляет оценки за урок тем кто отвечал у доски с домашним заданием и тем кто активно работал на уроке.*	определения кусочной функции.	
7.	Запишите домашнее задание. Каждый должен нарисовать произвольно по три графика и найти область определения функций этих графиков.	*Записывают домашнее задание.*	

Конспект урока. Урок №9

Тема: Монотонность функции

Класс: 10 класс

Цели урока:

- образовательные: формирование умения исследовать функцию на монотонность, находить производную функции, находить стационарные точки, пользоваться признаками монотонности;

- развивающие: развитие умения применять знания в конкретной ситуации, формулировать и излагать свои мысли;

- воспитательные: воспитание умения вести индивидуальную, групповую дискуссию, самостоятельного поиска решения, конструирования обобщенного способа решения задачи.

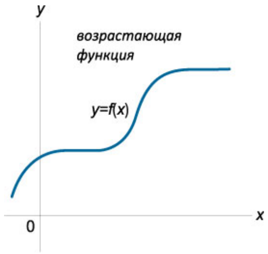
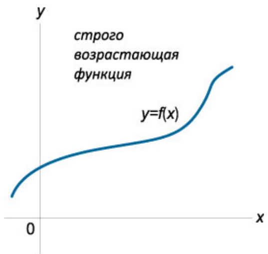
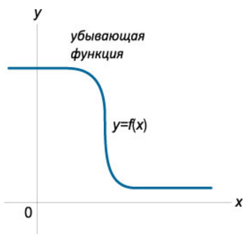
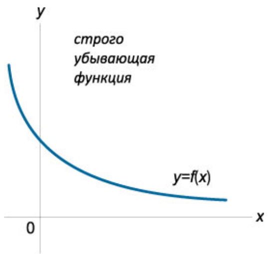
План урока:

1. Организационный момент (2 мин)

2. Проверка домашнего задания (7 мин)
3. Целеполагание (2 мин)
4. Актуализация знаний (10 мин)
5. Закрепление знаний (20 мин)
6. Подведение итогов (2 мин)
7. Постановка домашнего задания (2 мин)

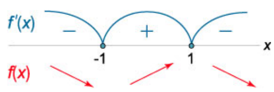
№	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Вид доски
1.	Здравствуйте, садитесь.	*Сели, приготовились к уроку, успокоились.*	
2.	Что вам было задано на прошлом уроке? К доске два человека, один строит график и описывает свойства функции $y = \sin(x+t)+m$, второй – $y=\cos(x+t)+m$. Остальные проверяют верно ли у них решено.	Построить график и описать свойства функции $y = \sin(x+t)+m$ и $y = \cos(x+t)+m$, где $t \in \left\{\pm\frac{\pi}{6}; \pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ и $m \in \{\pm1; \pm2\}$	*На доске появляются решения домашнего задания*
3.	Какие свойства функций мы уже изучили?	Область определения функции, область значений функции, нули функции, вертикальные асимптоты, промежутки знакопостоянства функции, четность и нечетность	

	Вспомним схему исследования функций. Какое свойство идет дальше? Какова тема сегодняшнего урока?	функции, периодичность функции. Монотонность функции Исследование функций на монотонность	
4.	Что такое монотонность функции?	Убывающие и возрастающие функции вместе образуют класс монотонных функций.	
	Что такое возрастающая функция?	Функция называется возрастающей на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.	$f(x)\uparrow: x_1 < x_2 => f(x_1) \leq f(x_2)$
	Что такое убывающая функция?	Функция называется убывающей на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.	$f(x)\downarrow: x_1 < x_2 => f(x_1) \geq f(x_2)$
	Что изменится в записи, если сказать не возрастающая функция, а строго возрастающая функция?	Знак $\leq$ изменится на $<$	$f(x)\uparrow: x_1 < x_2 => f(x_1) < f(x_2)$
	Аналогичная ситуация	Знак $\geq$ изменится на $>$	$f(x)\downarrow: x_1 < x_2 => f(x_1) > f(x_2)$

	со строго убывающей функцией. Как вы это понимаете? К доске пойдут два человека. Один построит графики возрастающей и строго возрастающей функции, второй – убывающей и строго убывающей функции.	*Выходят к доске, строят схематично графики, поясняют*	
	С помощью чего определяется монотонность функции?	По знаку первой производной функции	
	Дома вы должны были вспомнить теорему о необходимом и достаточном условии монотонности функции.	Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была возрастающей на интервале *(a,b)* необходимо и достаточно, чтобы первая производная функции была неотрицательна всюду на	$f'(x) \geq 0, \forall\, x \in (a, b)$

		данном интервале. Аналогичный критерий действует для случая функции убывающей на интервале *(a,b)*.	$f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$
5.	Вспомним алгоритм исследования функции на монотонность. Найдите интервалы монотонности функции $f(x) = x^3 - 12x + 5$ Следуем алгоритму. Найдем область определения функции. Найдем производную данной функции. Найдем стационарные точки	1. Найти *D(f)* 2. Найти *f'(x)* 3. Найти стационарные точки 4. Расположить *D(f)* и стационарные точки на координатной прямой 5. Определить знаки производной на каждом интервале 6. Применить теорему 7. Записать ответ Область определения данной функции (-∞; +∞) *Один человек выходит к доске и находит производную функции* *Один человек выходит к доске и находит стационарные точки*	Найти *D(f)* Найти *f'(x)* Найти стационарные точки Расположить *D(f)* и стационарные точки на координатной прямой Определить знаки производной на каждом интервале Применить теорему Записать ответ $f'(x) = (x^3 - 12x + 5)' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$ $3(x^2 - 4) = 0$ $x^2 = 0$

	Расположим стационарные точки на координатной прямой	*Один человек выходит к доске и на координатной прямой отмечает стационарные точки*	$x_{1,2} = \pm 2$
	Определим знаки производной на каждом интервале	*Один человек выходит к доске и определяет знаки производной. Берет произвольную точку из каждого промежутка и считает значение функции в этой точке*	
	Запишем ответ		$f'(x) > 0$ на (-∞;-2)∪ (2;+∞) $f'(x) < 0$ на (-2;2)
	Посмотрите на доску. Найдите интервалы монотонности следующей функции.		$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
	Следуем тому же алгоритму. Чему равна область определения данной функции?	Вся числовая прямая	$x^2 + 1 = 0$ $x^2 = -1$
	Найдите производную данной функции.	*Один человек выходит к доске и находит производную функции*	$f'(x) = \dfrac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$
	Найдем стационарные точки.	*Один человек выходит к доске и находит стационарные точки*	$1 - x^2 = 0$ $x^2 = 1$ $x_{1,2} = \pm 1$

	Отметим стационарные точки на координатной прямой и определим знаки на каждом интервале Запишем ответ	*Один человек выходит к доске, отмечает стационарные точки и определяет знаки производной.*	 $f'(x) < 0$ на $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ $f'(x) > 0$ на $(-1;1)$
6.	Подведем итоги урока. Чем мы занимались на уроке?	Вспомнили определение возрастающей и убывающей функции, теорему о необходимом и достаточном условии монотонности функции. Исследовали функции на монотонность.	
7.	Запишите домашнее задание. Исследовать на монотонность функции. Функции записаны на доске.	*Записывают домашнее задание*	1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 2. $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

2.5. Проведение опытно-экспериментальной работы.

Разработанный нами элективный курс был апробирован на базе МБОУ СОШ №134, г. Красноярск, в 10-м классе. Цели эксперимента состояли в следующем:

— Формирование у учащихся навыков решения заданий на умение работать с функциями

— Систематизация и обобщение знаний по темам функционального анализа

— Повышение уровня понимания изучаемого материала

Эксперимент был разработан и проведен для 10 «Б» класса, изучающих математику на базовом уровне, количество учащихся - 24 человека.

Мною было проведено 3 занятия из разработанного элективного курса.

10 «Б» является единственным десятым классом в данной школе.

Изучение исследования функций с помощью производной необходимо не только учащимся, которые собираются сдавать ЕГЭ профильного уровня, но и для будущих абитуриентов различных ВУЗов. Так же, для удовлетворения познавательных интересов школьников и для расширения кругозора.

Исследование функций по графику необходимо для учащихся, настроенных сдавать ЕГЭ на базовом уровне. Задания 11, 14 и 17 включают в себя элементы, изучаемые в разработанном элективном курсе. Задание 11 представляет собой чтение графиков и диаграмм, задание 14 – анализ графиков и диаграмм, задание 17 требует нахождение ОДЗ.

Затем нами была проведена диагностическая работа, которая помогла выявить пробелы в знаниях учащихся по данной теме. Учащимся были предоставлены 5 заданий из ЕГЭ базового уровня прошлых лет.

Задание 1. На графике (см. рис. 19) показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат - температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°С до температуры 90°С.

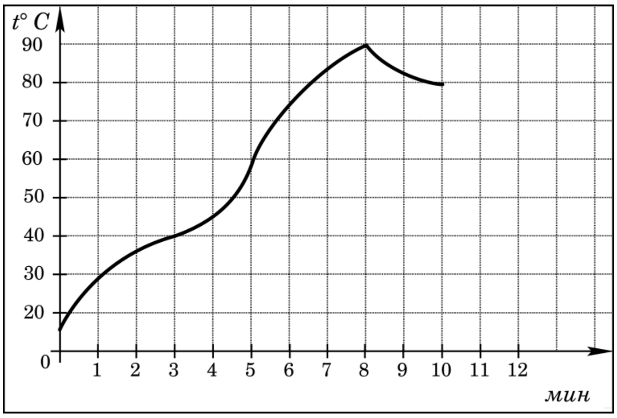


Рис. 19

С этим заданием справились 75% учащихся (18 человек из 24). Ошибки были следующими: неверное определение оси абсцисс и оси ординат, вычислительные ошибки.

Задание 2. На графике (см. рис. 20) изображена зависимость скорости движения легкового автомобиля на пути между двумя городами от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в км/ч, на горизонтальной - время в часах, прошедшее с начала движения автомобиля.

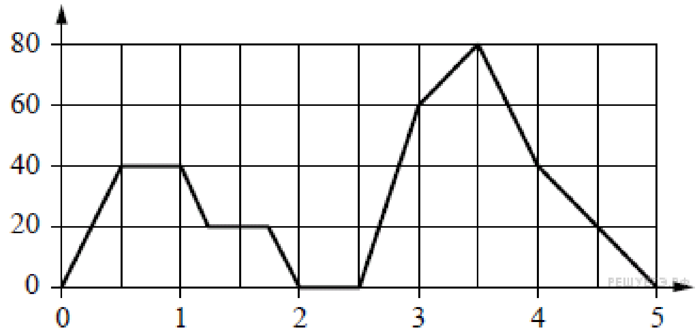


Рис. 20

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику движения автомобиля на этом интервале.

Интервалы времени	Характеристика движения
А) второй час пути Б) третий час пути В) четвертый час Г) пятый час пути	1) автомобиль не разгонялся и некоторое время ехал с постоянной скоростью 2) скорость автомобиля

	постоянно снижалась 3) автомобиль сделал остановку

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

С данным заданием справились 66% учащихся (16 человек из 24). Учащиеся неверно оценивают монотонность функции. Некоторые учащиеся провели неверные логические рассуждения и поэтому тоже получили неверный ответ.

Задание 3. На рисунке (см. рис. 21) показано изменение температуры воздуха на протяжении суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия

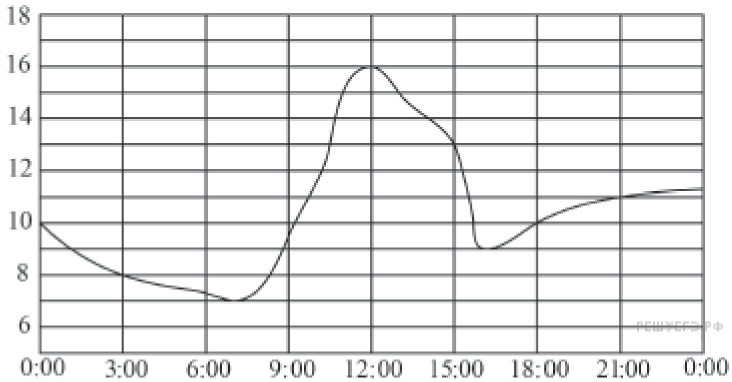


Рис. 21

Пользуясь диаграммой, установите связь между промежутками времени и характером изменения температуры.

Промежутки времени	Характеристика изменения температуры
А) 00:00−06:00 Б) 09:00−12:00 В) 12:00−15:00 Г) 18:00−00:00	1) Температура снижалась быстрее всего 2) Температура снижалась медленнее всего 3) Температура росла быстрее

	всего 4) Температура росла медленнее всего

Запишите в ответ цифры, расположенные в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

С данным заданием справились 79,1% учащихся (19 человек из 24). Ошибки состояли в вычислениях и в анализе графика.

Задание 4. На графике (см. рис. 22) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат – крутящий момент в Н· м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно выражается формулой $v = 0{,}03n$, где n – число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не меньше 120 Н· м? Ответ дайте в километрах в час.

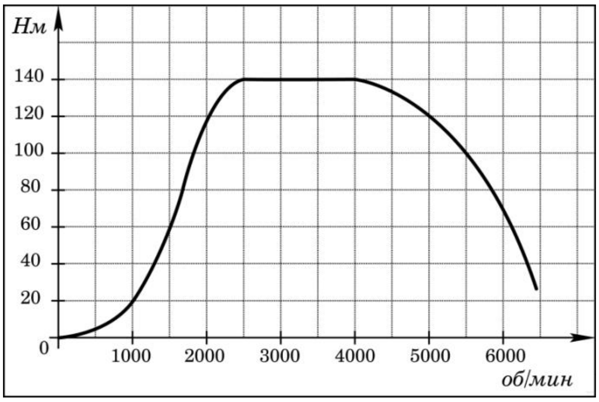


Рис.22

С данным заданием справились 58,3% учащихся (14 человек из 24). Ошибки заключались в неверном анализе графика, неверных вычислениях.

Задание 5. На рисунке (см. рис. 23) жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1920 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.

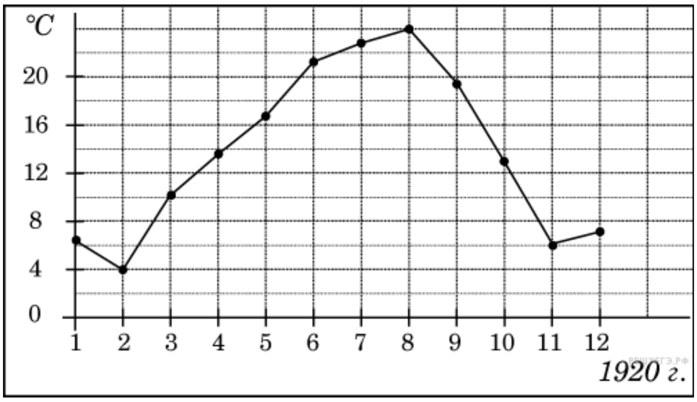


Рис. 23

С данным заданием справились 66% учащихся (16 человек из 24). Ошибки были следующие: неверные вычисления, неверное определения номера месяца, неверное определение наименьшего значения.

Со всеми пятью заданиями справились 29,1% учащихся (7 человек из 24). 12,5% учащихся (3 человека из 24) не справились ни с одним заданием. Результаты диагностической работы отражены в диаграмме 1.

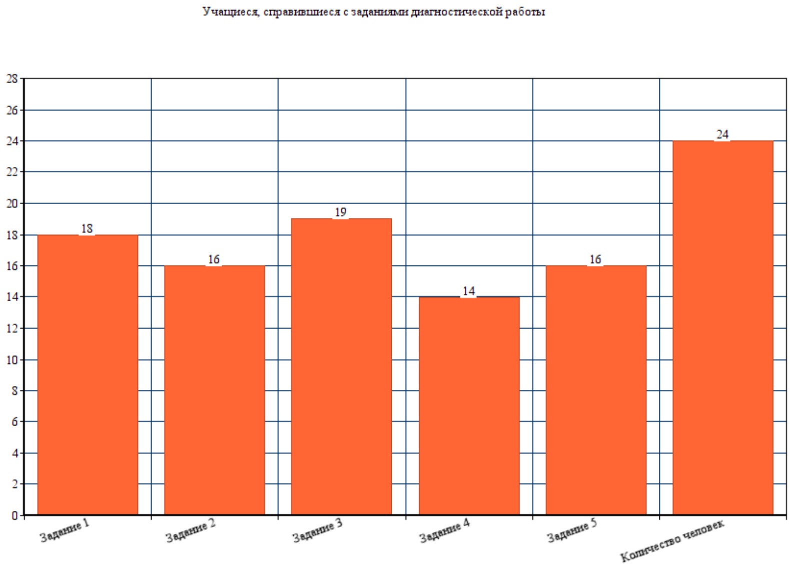


Диаграмма 1. Результаты диагностической работы.

По результатам проведенной диагностической работы можно сделать вывод, что школьники допускают различные ошибки при анализе и чтении графиков. Скорее всего, эта проблема возникает из-за акцента учителей на заданиях более сложного типа. Наш элективный курс предполагает подробное и глубокое изучение даже самых, казалось бы, легких заданий.

Так как нами было проведено всего 3 занятия из всего курса, мы можем судить о его эффективности лишь со слов учителя математики 10 «Б» класса, который продолжил проведение элективного курса по разработанной нами программе: успеваемость учащихся повысилась, причем, не только на уроках математики, но и в смежных дисциплинах; результаты контрольных работ входящих в программу элективного курса и в основную учебную программу, показывают повышение уровня знаний учащихся по данной теме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате изучения поставленной проблемы в методической литературе, статьях педагогов и из опыта педагогической практики - функциональный анализ – самое трудное в школьном курсе математики.

Мы выяснили, что его содержание расположено по всему курсу математики дискретно, что затрудняет учащимся понимание функциональной линии в целом и ее значение, использование обычных алгоритмов при решении задач данного раздела не всегда означает понимание выполняемых действий. В связи с этим перед нами стояла цель разработать рекомендации по повышению уровня усвоения материала функционального анализа учащимися 10-11 классов.

Мы раскрыли содержание учебных программ школьного курса математики, показали историю появления функционального анализа в школьном курсе математики, проанализировали программный материал и действующие школьные учебники. Мы увидели, что формат обычных уроков и объем изучаемого в 10-11 классах материала требует применения форм обучения подразумевающих выход за рамки отведенного школьной программой количества занятий по математике. Поэтому мы разработали рекомендации по повышению уровня усвоения школьниками элементов функционального анализа в виде элективного курса и провели опытно-экспериментальную работу по проверке эффективности разработанных рекомендаций.

Мною было проведено 3 занятия из программы элективного курса, затем проведение занятий продолжил учитель математики по разработанной нами программе. Результаты контрольных и самостоятельных работ показали повышение уровня усвоения учащихся элементов функционального анализа.

Таким образом, все поставленные задачи выполнены, и цель исследования достигнута.

Библиографический список

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Алгебра. 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый уровень. М.: Просвещение, 2012.
2. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2011.
3. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2012.
4. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2012.
5. Высоцкий И.Р., Учебное пособие «ЕГЭ 2015. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 дополнительных заданий части 2», 2015.
6. Глейзер Г.И. История математики в школе: IV-VI кл. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1981.
7. Далингер, В. А. Курсы по выбору и элективные курсы по математике в системе предпрофильного и профильного обучения [Текст]: В. А. Далингер // Актуальные проблемы профилизации математического образования в школе и в вузе: сборник научных трудов и методических работ. – Арзамас, АГПИ, 2004.-С. 214-222.
8. Далингер, В. А. Элективные курсы в системе профильного обучения [Текст]: В. А. Далингер, А. Н. Зубков. // Вестник Омского государственного университета. – 2006. - №6. – С. 26 – 31.
9. Дорофеев Г.В. Математика для каждого / Предисл. Л.Д. Кудрявцева. М.: Аякс, 2009. - 292 с.
10. Ермаков Д.С. Течения и «подводные камни» в море элективных курсов // Народное образование. 2007. №1. С. 155-162.
11. Ермаков Д.С., Петрова Г.Д. Создание элективных учебных курсов для профильного обучения // Школьные технологии. 2003. №6. С. 22-29.

12. Колмогоров А.Н. Современная математика и математика в современной школе // Математика в школе. 1971. № 6; переизд.: На путях обновления школьного курса математики. М.: Просвещение, 2007; Математика в школе. 2007. № 3. С. 10-11.
13. Крутихина, М. В. Элективные курсы по математике [Текст]: учебно-методические рекомендации /М. В. Крутихина, З.В.Шилова. – Киров.: Издательство ВятГГУ, 2006. – 40 с.
14. Лаппо Л.Д., «ЕГЭ 2015, Математика, экзаменационные тесты, профильный уровень, практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ», 2015.
15. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б.:Алгебра 7 класс: Учеб. – М.:Просвещение, 2014г.
16. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б.:Алгебра 8 класс: Учеб. – М.:Просвещение, 2013г.
17. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б.:Алгебра 9 класс: Учеб. – М.:Просвещение, 2014г.
18. Математика: Учеб. пособие для 11 кл. общеобразоват. учреждений / В.Ф. Бутузов, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин и др. - 2-е изд. - М.: Просвещение, АО «Московские учебники», 2008. - 207 с.; ил.
19. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: Методическое пособие для учителя. - М.: Мнемозина, 2008. - 144 с.: ил.
20. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики: Концептуальная методика. Рекомендации, советы, замечания. Обучение через задачи. - М.: «Школа-Пресс», 2007 - 272 с.
21. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2009.
22. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2009.

23.Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2013.
24.Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2014.
25.Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2014.
26.Нифонтов В.И. Структура и содержание учебных программ элективных курсов: методические рекомендации по разработке и оформлению. Екатеринбург: МБУ ИМЦ «Екатеринбургский Дом Учителя», 2012.
27.Петрушко, И. М.. Сборник задач по алгебре, геометрии и началам анализа :учебное пособие/И. М. Петрушко, В. И. Прохоренко, В. Ф. Сафонов.-Изд. 2-е, испр.-СПб.:Лань,2007.-574 с.
28.Саакян С. М., Дудницын Ю. П. Примерное планирование учебного материала по математике в 10-11 классах, Журнал «Математика в школе» №7, с.2-5.
29.Сборник постановлений и распоряжений по гимназиям и прогимназиям Московского учебного округа за 1871-1895 гг. / Сост. В.Чаликов. - М., 1895
30.Федорова Н.Е., Ткачева М.В. изучение алгебры и начал анализа в 10-11 классах: Книга для учителя. - М.: Просвещение, 2009. - 205 с.: ил.
31.Черникова Т.В. Методические рекомендации по разработке и оформлению программ элективных курсов // Профильная школа. 2005. №5. С. 11-16.
32.Ященко И.В.,Учебное пособие «ЕГЭ 2015. Математика. 20 вариантов тестов. Тематическая рабочая тетрадь», 2015.
33.Аналитические отчеты ФИПИ по результатам ЕГЭ 2010 г. Математика. URL: http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1441039556/matematika.pdf (дата обращения: 14.04.2016).

34. О реализации элективных курсов в профильном обучении. URL: http://www.profile-edu.ru/o-realizacii-yelektivnyx-kursov-profilnogo-obucheniya.html (дата обращения: 14.04.2016).
35. Рабочая программа по предмету «Алгебра» для 11 класса http://st.educom.ru/eduoffices/gateways/get_file.php?id={DBC60777-1025-4191-85CB-BFCEF970C3ED}&name=%D0%90lgebra_11kl_%D0%9Cordkovich.pdf (дата обращения 14.04.2016)
36. Русских Н.Б. Требования к разработке и оформлению программ элективных курсов в профильной школе и курсов по выбору в основной школе – предпрофильная подготовка: методическое пособие. Киров: МОУДПО ЦПКРО, 2006. URL: http://vplicei.org/wp-content/uploads/2013/09/trrazpr.pdf (дата обращения: 14.04.2016).