МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА

(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)

Выпускающая(ие) кафедра(ы) Кафедра математики и методики обучения математике
(полное наименование кафедры)

Ворошилова Алена Анатольевна

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема Методика обучения студентов педагогического университета геометрическим преобразованиям на базе среды «Живая математика»

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления)

Магистерская программа Информационные и суперкомпьютерные технологии в математическом образовании
(наименование программы)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ КГПУ им. В.П. Астафьева ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Заведующий кафедрой
д.п.н., к.ф-м.н., профессор Шкерина Л. В.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)
10.12.2018
(дата, подпись)

Руководитель магистерской программы
д.п.н., к.ф-м.н. профессор Майер В. Р.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)
05.12.18
(дата, подпись)

Научный руководитель
д.п.н., к.ф-м.н. профессор Майер В. Р.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)
04.12.18
(дата, подпись)

Обучающийся Ворошилова А.А.
(фамилия, инициалы)
04.12.18
(дата, подпись)

Красноярск 2018

РЕФЕРАТ

Методика обучения студентов педагогического университета геометрическим преобразованиям на базе компьютерной среды Живая математика

Methods of teaching geometric transformations to students of pedagogical University on the basis of computer environment Geometer's Sketchpad

Данная магистерская диссертация состоит из 82 страниц из них:

– приложения – 9 листов;
– реферат – 3 листа;
– оглавление - 1 лист;
– введение - 6 листов;
– первая глава - 18 листов;
– вторая глава - 39 листов;
– заключение - 2 листа;
– библиографический список – 3 листа.

Количество иллюстраций магистерской диссертации составляет 43 рисунка.

Объект исследования: процесс обучения студентов – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды Живая математика.

Object of research: the process of teaching students-future teachers of mathematics geometric transformations using the environment of Geometer's Sketchpad

Цель исследования*:* теоретически обосновать, разработать и экспериментально проверить методику обучения студентов бакалавриата –

будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды Живая математика.

Purpose of research: to theoretically substantiate, develop and experimentally test the methodology of teaching undergraduate students – future teachers of mathematics geometric transformations using the environment Geometer's Sketchpad.

Диссертация посвящена использованию информационных технологий в процессе математической подготовки бакалавров – будущих учителей математики, с целью повышения качества математической подготовки, развития исследовательской деятельности студентов.

Dissertation is devoted to use of information technologies in educational process, for the purpose of increase of level of mathematical thinking, the development of research activities.

Преподавание геометрии не может обойтись без наглядности. В тесной связи с наглядностью обучения находится и его практичность. Ведь именно из жизни мы черпаем конкретный материал для формирования наглядных геометрических представлений, делая обучение согласованным с жизнью ребенка, его опытом. Процесс обучения упрощается при разумном использовании принципа наглядности. Обучение не должно быть перенасыщено иллюстрациями, схемами, таблицами и другими формами наглядности, но в некоторых труднодоступных вопросах применение наглядности необходимо. И именно использование возможностей виртуальной лаборатории «Живая математика» позволяет разнообразить занятия новыми видами деятельности, насытить его наглядной информацией, повысить мотивацию учащихся, интерес к предмету.

В ходе работы над диссертацией , была раработана методика обучения бакалавров – будущих учителей математики по средствам СДГ «Живая математика», также был проведен педагогический эксперимент по апробации разработанной методике в реальном учебном процессе, были изучены анимационные (мультипликационные) возможности этой среды, позволяющие создавать анимационные и мультипликационные GSP-файлы учебной направленности по теме «Геометрические преобразования», выполнен анализ школьных и вузовских учебных пособий по заданной теме.

Практическая значимость данной работы заключается в возможности использования предлагаемой методики при обучении геометрии в вузе с целью повышения качества обучения.

Оглавление

Введение

Преподавание геометрии не может обойтись без наглядности. В тесной связи с наглядностью обучения находится и его практичность. Ведь именно из жизни мы черпаем конкретный материал для формирования наглядных геометрических представлений, делая обучение согласованным с жизнью ребенка, его опытом. Процесс обучения упрощается при разумном использовании принципа наглядности. Обучение не должно быть перенасыщено иллюстрациями, схемами, таблицами и другими формами наглядности, но в некоторых труднодоступных вопросах применение наглядности необходимо. И именно использование возможностей виртуальной лаборатории «Живая математика» позволяет разнообразить занятия новыми видами деятельности, насытить его наглядной информацией, повысить мотивацию учащихся, интерес к предмету.

В процессе изучения геометрии, как известно, у учащихся развивается пространственное мышление как разновидность образного, формируются абстрактные образы, в которых фиксируются формы, величина, взаимное положение объектов, расположение фигур на плоскости и в пространстве относительно заданной точки отсчёта.

Геометрия как учебный предмет способствует развитию таких психических функций человека как мышление, ощущение и интуиция. Только при взаимно дополняющем развитии этих функций, обеспечиваемом межполушарными взаимодействиями головного мозга, из человека получается гармонично развитая личность. [13]

Все эти замечательные характеристики геометрии делают её незаменимым элементом общей культуры, в равной степени нужным художнику и математику, инженеру и физику, биологу и экономисту.

Анализ методической литературы свидетельствует о том, что геометрия в современной общеобразовательной школе становится непреодолимым барьером для многих учащихся. Причину этого многие ученые видят в преобладании в традиционном обучении аналитических методов, наличии непосильных для понимания учеников скрупулезных доказательств очевидных фактов, тогда как логическое мышление школьников, особенно к началу изучения геометрии, развито недостаточно, а образное мышление не окончательно упорядочено. Поэтому целесообразно и психологически обоснованно, особенно на первых этапах изучения геометрии, опираться на наглядно-действенное мышление как первую и основную ступень в развитии мышления, опору для формирования образов и понятий и включить в процесс обучения геометрии практическую, конструктивную деятельность.

Всё это создаёт проблему необходимости разработки методов обучения геометрии, сочетающих наглядность, конструктивную практическую деятельность, словесно-логический анализ.

Таким образом, метод геометрических преобразований, как реализация конструктивного подхода к преподаванию систематического курса геометрии, открывает путь к развитию пространственного мышления.

Метод геометрических преобразований является одной из фундаментальных идей, последовательно применяемых в систематическом курсе школьной и вузовской геометрии, что обусловлено следующими положениями:

- практические операции играют важную роль в мышлении (согласно Ж. Пиаже, все мыслительные операции образуют структуру группы, подобную группе преобразований в геометрии);

- с понятием преобразований связан «групповой подход» в геометрии, в соответствии с которым геометрия изучает свойства фигур, являющихся инвариантами фундаментальной группы преобразований;

- геометрические преобразования являются, ни чем иным, как обобщением понятия о функции, их изучение открывает возможность «обозреть с одной точки зрения, как отдельные части геометрии, так и их взаимные связи» (Ф. Клейн), подчинить единой идее – идее функциональной зависимости – всю школьную и, по возможности, высшую математику;

- большая общность геометрических преобразований позволяет значительно упростить доказательство многих теорем;

- изучение геометрических преобразований способствует формированию пространственного мышления, использование их вооружает учащихся способами (методами) решения задач на построение, которые, в свою очередь, являются одним из эффективных средств развития геометрического мышления школьников;

- геометрические преобразования отражают общие закономерности взаимосвязи явлений природы, изучение их позволяет наиболее полно раскрыть практическую значимость, показать область применения геометрических знаний;

- геометрические преобразования используются не только в курсе геометрии, но и в курсах алгебры (построение графиков функций), физики (механика, оптика), химии (кристаллические тела), черчения (построение изображений в различных проекциях) и др., то есть позволяет укрепить межпредметные связи геометрии с другими дисциплинами. [6]

Анализ основных учебных пособий по рассматриваемой проблеме показывает, что в преподавании геометрии до сих пор недостаточно внимания уделяется геометрическим преобразованиям, в то время как развитие геометрической науки давно показало, что теория геометрических преобразований является одной из фундаментальных областей геометрии.

Многими авторами рассматриваются вопросы построения теории геометрических преобразований, взаимосвязи между видами преобразований, методики их изложения. Но многие аспекты данной проблемы недостаточно разработаны. По-разному решается вопрос о роли геометрических преобразований в логическом построении геометрии, о том, в каком объеме должны изучаться преобразования. В связи с этим не совсем понятно, какие необходимо сделать акценты при подготовке учителя математики к обучению школьников этой важной теме, что может быть решено в вузовском курсе геометрии, что должен взять на себя курс методики обучения математике.

Итак, в процессе обучения школьников геометрическим преобразованиям учитель сталкивается со следующими трудностями:

- не всегда удается осветить вопросы прикладной направленности геометрических преобразований;

- не в полной мере используются возможности геометрических преобразований для установления межпредметных связей геометрии с другими дисциплинами;

- далеко не во всех случаях арсенал традиционных средств обучения достаточен для того, чтобы добиться понимания школьником приёмов и методов использования геометрических преобразований при решении задач;

- недостаточно осуществляется дифференцированный подход к изложению теории геометрических преобразований и подбору соответствующих задач на их применение.

Отмеченные трудности могут быть устранены, либо существенно смягчены, если на уроках геометрии при изучении геометрических преобразований использовать системы динамической математики (СДМ), причём подготовить учителя к их эффективному применению можно в рамках модуля «Преобразования» курса геометрии в педагогическом университете.

Отметим, что СДМ способствуют более глубокому и осознанному усвоению изучаемого материала, так как ученик, освоив основные понятия на уроке, сможет без труда вернуться к просмотренному материалу для закрепления или повторения его во внеучебное время.

Все сказанное определяет актуальность проблемы нашего исследования, которая состоит:

· в необходимости разработки основных методических приёмов обучения будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием системы динамической математики Живая математика;

· в разработке системы динамических GSP-файлов, поддерживающих обучение студентов, будущих учителей математики, геометрическим преобразованиям.

Как уже отмечалось, прерогатива геометрии как учебного предмета общекультурного уровня – развитие абстрактного, логического, пространственного мышления, связь с реальностью – включает ее в число обязательных предметов. Однако, учитывая ее объективную сложность, гуманизация образования требует, чтобы дифференциация обучения математике, в частности геометрии, учитывала потребности всех школьников не только сильных, но и тех, кому этот предмет дается нелегко, чьи интересы лежат в других областях.

Цель исследования: теоретически обосновать, разработать и экспериментально проверить методику обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды Живая математика.

Объект исследования: процесс обучения студентов – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды Живая математика.

Предмет исследования: методика обучения геометрическим преобразованиям студентов бакалавриата – будущих учителей математики на базе Живой математики.

Задачи исследования:

а) проанализировать темы модуля «Преобразования» курса геометрии для студентов бакалавриата, направление подготовки Педагогическое образование, профиль Математика, с точки зрения эффективности использования при их обучении среды Живая математика;

б) изучить методические возможности среды Живая математика как виртуальной лаборатории, позволяющей эффективно использовать эту среду при обучении студентов педагогических вузов геометрическим преобразованиям;

в) разработать методику обучения геометрическим преобразованиям студентов педагогического вуза на базе Живой математики;

г) провести педагогический эксперимент по апробации разработанной методики в реальном учебном процессе и оценить ее эффективность.

Глава 1. Теоретические аспекты методики обучения студентов геометрическим преобразованиям с использованием среды Живая математика

§1. Краткий исторический обзор изучения геометрических преобразований в общеобразовательной школе и педвузе

Как известно, идея характеризовать геометрические свойства фигур как инварианты некоторой группы преобразований была сформулирована Ф. Клейном в его знаменитой «Эрлангенской программе» в 1872 году. С тех пор геометрические преобразования входят в учебные программы высших учебных заведений, а их частные случаи, такие как движения и подобия, изучаются в общеобразовательных школах.

Несмотря на всю актуальность и важность этого понятия в математике и математическом образовании, оказалось, что обучение преобразованиям в школе и даже вузе сопряжено с определёнными трудностями. Такой вывод можно сделать, если обратиться к истории реформ школьного математического образования, когда их авторы в части геометрического содержания переходили ту психологическую черту, за которой средний школьник переставал понимать основные свойства и характеристики такого достаточно абстрактного понятия как преобразование. Перечислим эти реформы, обращая в первую очередь внимание на их роль в обучении движениям и подобиям.

Первая примерная программа по геометрии для школы в нашей стране была подготовлена почти сто лет назад, в 1920 году. Изложение в ней осуществлялось с широким привлечением движений плоскости. В 1922 году в связи с проведением в школе многочисленных педагогических экспериментов, включая отказ от традиционных дисциплин, программа была свёрнута.

В 1933 году школа опять вернулась к предметной системе обучения, перешла на новые учебные планы и программы. Однако программа по геометрии, включая её разделы, связанные с геометрическими преобразованиями, оставалась достаточно сложной. Проработав по ней лишь два года, школа вернулась к традиционному геометрическому материалу и не меняла его более двадцати лет.

В 1957 году произошёл очередной переход на новые программы. Геометрические преобразования вновь были включены в школьный курс геометрии. Однако такие изменения в содержании курса не были подкреплены должным образом методически. В педагогических институтах того времени студенты решали много задач на геометрические преобразования, но вопросу о том как обучать этому школьников уделялось недостаточно внимания. Всё это послужило причиной повторного исключения преобразований из программы.

Очередная попытка обновить содержание школьного математического образования была предпринята в 1968 году. Результатом работы комиссии явился переход школы на новые программы по математике. Геометрические преобразования в очередной раз вводились в программу курса геометрии. Подход к включению этого понятия теперь был более продуманным. Преобразования не просто появлялись как некоторые новые понятия геометрии, они помещались авторами в центр курса, и большинство других понятий увязывалось с ними. Однако и такой подход не принёс успеха. Через некоторое время школа была вынуждена перейти к программам, базирующимся на традиционном, проверенном временем содержании школьного курса геометрии. В этих программах движения и подобия присутствовали, но использовались в основном для решения некоторых задач и доказательства отдельных утверждений.

За прошедшее пятьдесят лет после последней реформы школьного математического образования, программа курса геометрии и содержание этой дисциплины изменились незначительно. Существенно возросло количество учебников по геометрии, в каждом из них представлено авторское видение обучения геометрическим преобразованиям. Наиболее полно и качественно, на наш взгляд, геометрические преобразования представлены в школьном учебнике Смирновых [4], где в течение всего второго полугодия в 8 классе ученики изучают движения (глава VII) и подобия (глава VIII).

Особенностью последних двух десятилетий стало появление на мировом рынке образовательных услуг уникального компьютерного средства обучения математике, так называемых систем динамической математики (СДМ). Всего за каких-то пять – десять лет они стали пользоваться большой популярностью на уроках математики не только в школах тех стран, где эти системы были разработаны, но и во многих других странах. Судя по научно-методическим публикациям, большая часть практикующих учителей и специалистов в области информатизации школьного математического образования считают, что использование в учебном процессе СДМ необходимо и чрезвычайно полезно. И один из основных их аргументов следующий: самостоятельное построение динамической модели математической задачи, поиск и визуализация с помощью этой модели её решения предоставляют учащемуся возможность позиционировать себя как активного участника процесса познания математики.

§2. Система динамической геометрии Живая математика и ее методические возможности как средства обучения геометрическим преобразованиям

В настоящее время в мире насчитывается более пятидесяти систем динамической математики. В России наиболее популярны русскоязычные версии «Живая геометрия» и «Живая математика» [1] программы Geometer’s Sketchpad (США), GeoGebra (Австрия) и Математический конструктор (Россия). Большинство этих систем дают возможность создавать динамические модели геометрических конфигураций любой сложности, решать целый ряд других задач.

Отметим три основных дидактических преимущества использования Живой математики при обучении геометрическим преобразованиям.

Во-первых, это наличие встроенных в систему инструментов, позволяющих создавать с помощью компьютерной анимации динамические модели, визуализирующие большой класс геометрических преобразований плоскости, в частности параллельный перенос, поворот, осевая симметрия и гомотетия.

Во-вторых, это возможность самостоятельно конструировать любые новые геометрические преобразования такие, например, как инверсия, родственное преобразование, аффинное преобразование, гомология, проективное преобразование и целый ряд других, в том числе с использованием аналитических и конструктивных возможностей Живой математики. Можно рассматривать новые преобразования, представляющие собой композиции известных геометрических преобразований.

И, наконец, в-третьих, любые динамические чертежи, визуализирующие те или иные геометрические преобразования, можно эффективно использовать в качестве виртуальных моделей для их изучения, проведения компьютерных экспериментов и исследований, решения творческих задач, что способствует формированию исследовательских компетенций обучающихся [2].

В меню программы «Живая математика» есть вкладка, отвечающая за преобразования, в перечне предложенных преобразований мы можем найти «параллельный перенос», «поворот», «симметрия», «гомотетия», эта возможность позволит облегчить построения в процессе решения задач. А так же позволит более наглядно ввести определение геометрического преобразования.

Для построения образа точки при параллельном переносе в программе «Живая математика» нужно выполнить следующие действия:

1. *Отметить вектор переноса*. Для этого подсвечиваем две точки: первая задает начало вектора переноса, вторая – конец; заходим во вкладку «Преобразования»; выбираем функцию «Отметить вектор».

2. *Выбрать произвольную точку плоскости*. Чтобы выбрать точку, образ которой нужно найти при параллельном переносе, достаточно подсветить эту точку.

3. *Выполнить параллельный перенос*. Возвращаемся в панель меню, выбираем «Преобразования», выбираем вид преобразования параллельный перенос. В появившемся диалоговом окне выбираем функцию «перенос».

После выполнения этой последовательности действий мы получим образ точки при параллельном переносе (на рис. 1 для большей наглядности пары точек «прообраз» - «образ» соединены отрезками со стрелкой на конце, которые построены с помощью собственного инструмента, взятого нами из программы «Готовые инструменты для Живой математики»).

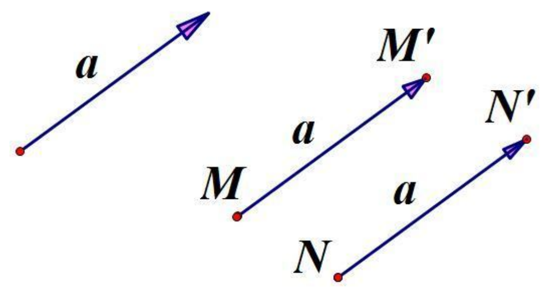


Рис 1 Образ точки при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, построенный в программе «Живая математика»

Для построение образа объекта при повороте в программе «Живая математика» нужно выполнить ряд последовательных действий:

1. *Отметить угол поворота.* Для этого мы последовательно (по часовой стрелке, либо против) подсвечиваем точку на первой стороне угла, вершину угла, затем точку на второй стороне угла. Заходим в меню «Преобразования» и нажимаем отметить угол. В этот момент на чертеже пробегает анимация, свидетельствующая о том, что угол отмечен;

2. *Отмечаем центр поворота*. Двойным щелчком отмечаем точку, вокруг которой будем поворачивать объект. Программа так же реагирует на выбор анимацией;

3. *Выбираем объект*, к которому необходимо применить поворот. Для этого подсвечиваем все составляющие части объекта (точки, отрезки, лучи и т.д.);

4. *Совершаем поворот*. Заходим в меню «Преобразования», выбираем вкладку «поворот». В появившемся диалоговом окне нажимаем «поворот».

Если же необходимо выполнить поворот на угол с уже заданной градусной мерой, то последовательность действий буден немного отличаться, а именно:

1. Отмечаем центр поворота;

2. Выбираем объект;

3. *Совершаем поворот*. Заходим в меню «преобразования», выбираем вкладку «поворот», в появившемся диалоговом окне прописываем градусную меру угла, на который следует выполнить поворот.

После выполнения этой последовательности действий мы получим образ точки при повороте (рис. 2). Построения выполнены по второму алгоритму. Точка О – центр поворота, точка А – «прообраз», А’ – «образ точки» А при повороте на 30 .

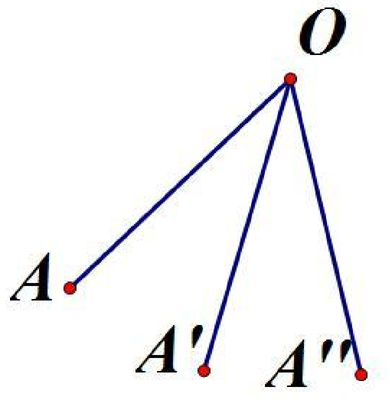


Рис 2 Образ отрезка при повороте на угол 30 вокруг точки О, построенный в ЖМ

На рис. 3 построен образ квадрата ABCD при повороте вокруг точки О (центр поворота) на заданный угол ∠ABC.

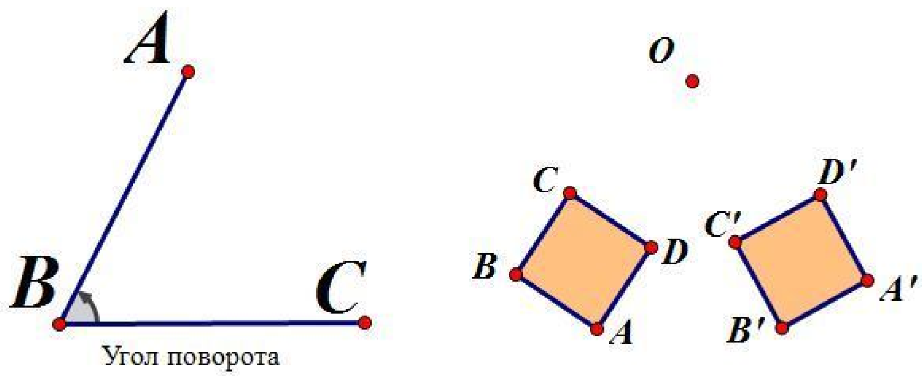


Рис 3 Образ квадрата ABCD при повороте на угол ∠ABC вокруг точки O построенный в ЖМ

Для построения образа объекта при осевой симметрии нужно выполнить ряд последовательный шагов:

1. *Отметить ось симметрии.* Для этого мы подсвечиваем отрезок (или прямую), относительно которой необходимо выполнить данное преобразование. Заходим в меню «преобразование» и нажимаем «отметить ось симметрии»;

2. *Выбрать объект.* Подсвечиваем объект, для которого нужно выполнить преобразование;

3. *Выполнить преобразование.* Возвращаема в меню «преобразование» выбираем преобразование «симметрия»

После выполнения этих действий мы получим образ объекта при осевой симметрии (рис 4).

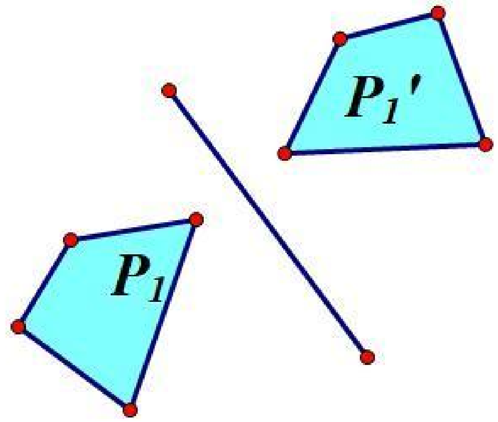


Рис 4 Образ объекта при осевой симметрии

Для того чтобы построить образ объекта при гомотетии в программе ЖМ нужно выполнить следующую последовательность шагов:

1. *Отметить центр гомотетии.* Строим произвольную точку, подсвечиваем ее, заходим в «преобразования» выбираем вкладку «отметить центр».

2. *Отметить коэффициент гомотетии.* Строим отрезок, отмечаем на нем произвольную точку. Подсвечиваем поочередно сначала концы отрезка, затем произвольно выбранную точку. Заходим в меню «преобразования» выбираем пункт «отметить коэффициент»

3. *Отметить объект, для которого нужно применить гомотетию.* Для этого нам достаточно подсветить объект, для которого нужно применить преобразование.

4. *Выполнить преобразования.* Возвращаемся в меню «преобразования» и сейчас нас интересует пункт «гомотетия». В появившемся диалоговом окне нажимаем на кнопку «гомотетия».

После последовательного выполнения данного алгоритма, мы получим образ объекта при таком преобразовании плоскости как гомотетия. (рис 5)

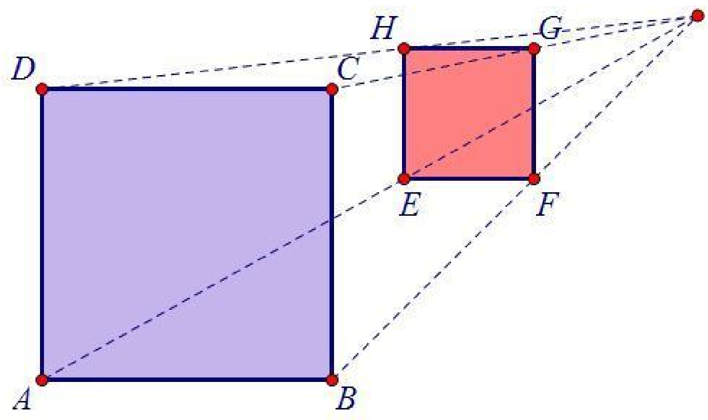


Рис 5 Образ квадрата при гомотетии

§3. Основные компоненты структуры методики обучения геометрическим преобразованиям на базе Живой математики

Перемены в жизни общества трансформируют взгляды на роль и место изучения геометрических преобразований в условиях дифференциального обучения, на содержание программ и систему работы с учащимися профильных классов и классов, непосредственно предшествующих профильным.

Процесс обучения – это не просто механическая совокупность основных элементов, а качественно новое, целостное явление.

Ю.К. Бабанский в структуре процесса обучения выделяет следующие компоненты:

Целевой компонент процесса обучения представляет собой постановку педагогом и принятие обучаемыми целей и задач изучения темы (раздела, курса, учебного предмета).

Стимулирующе-мотивационный компонент процесса обучения отражает меры педагога по формированию познавательных потребностей, стимулированию мотивов учебной деятельности, интересов.

Содержательный компонент процесса обучения – это содержание обучения, определяемое государственными образовательными стандартами, программами, учебниками и учебными пособиями.

Операционно-действенный компонент процесса обучения отражает его процессуальные характеристики, формы, методы, средства.

Контрольно-регулировочный компонент процесса обучения предполагает осуществление контроля педагога и самоконтроля обучаемых с целью установления обратной связи и корректировки хода процесса обучения.

Оценочно-результативный компонент процесса обучения объединяет оценку педагогом и самооценку обучаемыми результатов обучения, установление их соответствия поставленным целям, выявление причин их возможного несоответствия, постановку задач дальнейшей деятельности.

При рассмотрении целей обучения теме «Геометрические преобразования» в педагогическом вузе следует учитывать общие цели обучения математики, цели обучения геометрии в школе, где в будущем будут работать выпускники педвуза, личностные потребности и возможности учащихся.

Цели обучения математике на современном уровне ее развития определены в работе Г.И. Саранцева:

1. Образовательная цель: овладение системой математических знаний, умений, навыков, дающих представление о предмете математики, ее языке, символике, методе познания, математическом моделировании, алгоритме, периодах развития математики, специальных математических приемах.
2. Воспитательные цели: формирование мировоззрения учащихся, логической и эвристической составляющих мышления, воспитание нравственности, культуры общения, самостоятельности, активности.
3. Практическая цель: формирование умений строить математические модели простейших реальных явлений, исследовать явления по заданной модели; приобщение к опыту творческой деятельности и формирование умений применять его, ознакомления с ролью математики в научно техническом процессе, современной науке и производстве []

Таким образом, цель изучения модуля «Геометрические преобразования» в педагогическом ВУЗе следующая: *освоение теоретических положений и математического аппарата разделов геометрии, имеющих приложения к понимаемому в широком смысле школьному курсу геометрии.*

Теоретические основы содержания общего среднего образования разработаны Г.В. Дорофеевым, И. Я. Лернером, М.Н. Скаткиным [] и др. В часности разработаны принципы и критерии отбора содержания школьного математического образования. В педагогике «Принципы указывают на общее направление деятельности по формированию содержания образования…, критерии же реализуют процедуру конструирования, отбор учебного материала, его последовательность» [49].

Содержание темы «Геометрические преобразования» в школьном курсе:

1) в 5-6 классах изучаются отдельные виды преобразований, такие как осевая и центральная симметрия; на этом этапе от учащихся требуется умение строить образ точки (фигуры) при осевой, либо центральной симметрии, находить центр, либо ось симметрии;

2) в 7-9 классах начинается систематическое изучение всех видов геометрических преобразований (движений и подобий); на этом этапе учащиеся должны знать определение каждого вида преобразования, его свойства, уметь решать задачи;

3) в 10-11 классах схема изучения преобразований в пространстве немногим отличается от соответствующей схемы на плоскости: обобщаются на случай пространства некоторые преобразования плоскости (например, параллельный перенос), появляются новые типы преобразований аналогичные плоскостным (отражение относительно плоскости, вращение около прямой и др.). Кроме этого рассматриваются отображения пространства на плоскость, которые не являются преобразованиями, например параллельное и центральное проектирование, некоторые их свойства, изучаются симметрии многогранников, повороты и комбинации движений, выполняются практические работы (построение образов фигур).

На изучение данной темы в школе согласно программе отводится от 8 до 12 часов, в зависимости от учебника, по которому идет преподавание. [1]

Обучение будущих учителей математики геометрии состоит из модулей, один из них, а именно *Модуль 3* посвящен геометрическим преобразованиям. Раздел «Преобразования плоскости и пространства» в программе школы представлен отрывочными знаниями, единичными фактами, поэтому задачи данного модуля:

1) сформировать у студентов полное представление о таких преобразованиях плоскости как движения, подобия, аффинные преобразования, инверсия (инверсия рассматривается с целью продемонстрировать преобразование, не сохраняющее прямолинейность расположения точек), в качестве одного из средств формирования использовать анимационные возможности систем динамической геометрии;

2) познакомить с основной идеей использования перечисленных выше преобразований, при решении задач на построение, доказательство и вычисление, продемонстрировать роль систем динамической геометрии в реализации этой идеи;

3) показать полный набор методов решения задач на геометрические преобразования, который можно использовать при обучении учащихся в школе на уроках и элективных курсах, в том числе на базе систем динамической геометрии.

Во всех модулях курса (табл. №1) рекомендуется активно использовать такие системы динамической геометрии (СДГ) как «Живая геометрия» и «Живая математика» (русскоязычные версии американской программной среды «The Geometer's Sketchpad). Причем СДГ целесообразно применять не только для обучения геометрии и формирования у будущего учителя математики общекультурных и профессиональных компетенций, но и использовать их как средство, позволяющее студенту в будущем формировать у школьников менталитет математика-экспериментатора и математика-исследователя.

Таблица № 1

РПД Модуль № 3 « Геометрические преобразования»

Модули. Наименование разделов и тем дисциплины	Всего часов (з.е.)	Аудиторных часов				Внеауди -торных часов	Формы и методы контроля оценочн. средством № m.n.k m – номер модуля n – номер раздела, k –порядковый номер
		всего	лекций	практ-х заняти й	семина ров		
МОДУЛЬ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	**54 (1,5)**	**36**	**18**	**18**		**18**	
Раздел №1 Движения.	**24**	**16**	**8**	**8**		**8**	
1.1. Примеры движений плоскости и постранства	4	4	2				Самостоятельная работа №3.1.1
1.2. Движения. Свойства движений. Группа движений. Решение задач с помощью движений. Возможности СДГ в решении задач методом движений.	14	10		2		2	
1.3. Композиция двух и трех осевых симметрий. Классификация движений плоскости.	6	6	2	2		2	Контрольная работа №3.1.1
1.4. Аналитическое задание движений.	6	4	2	2		2	
1.5. Симметрии плоских фигур. Группа симметрий квадрата.	4	4	2	2		2	
Раздел №2 Подобия.	**12**	**8**	**4**	**4**		**4**	
2.1. Подобие плоскости и пространства. Свойства подобия. Группа подобий. Аналитическое задание подобия.	6	4	2	2		2	
2.2. Гомотетия. свойства гомотетии. Построение соответственных точек в гомотетии. Аналитическое задание гомотетии. Гомотетия в СДГ.	6	4	2	2		2	Контрольная работа №3.2.1
Раздел №3 Аффинные преобразования плоскости. Инверсия плоскости.	**18**	**12**	**6**	**6**		**6**	
3.1. Аффинные преобразования плоскости. Свойства аффинных преобразований. Группа аффинных преобразований	6	4	2	2		2	

плоскости.							
3.2. Родство. Свойства родства. Построение родства. Задание родства. Родство в СДГ	6	4	2	2		2	Контрольная работа №3.3.1
3.3. Задание аффинного преобразования плоскости.	4	2	2			2	
3.4. Инверсия. Свойства инверсии. Решение задач с помощью инверсии. Инверсия в СДГ	2	2		2			
ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ							Коллоквиум№3.3.

Предусмотрено построение индивидуальных планов, (виды и темы заданий, сроки представления результатов, самостоятельной работы студента в пределах трудоёмкости дисциплины).Предполагается следующая работа студентов над освоением курса:

- освоение основных теоретических положений геометрии;

- решение задач прикладной и исследовательской направленности по геометрии

- работа с литературой и первоисточниками;

- подготовка докладов и сообщений;

- практика создания GSP-файлов в системе динамической геометрии Живая математика;

- разработка компьютерного сопровождения тем курса геометрии;

- исследовательские работы методического характера.

Контроль результатов освоения дисциплины.

- текущий контроль: проводится с целью реализации обратной связи, организации самостоятельной работы и текущей проверки усвоения модулей дисциплины. Методы контроля успеваемости: выполнение самостоятельных работ, решение задач на практических занятиях, посещение лекций, подготовка динамических чертежей (GSP-файлов в среде Живая математика). Форма контроля: выполнение индивидуальных домашних заданий, текстов контрольных и самостоятельных работ, составление конспектов, программ компьютерного сопровождения отдельных тем курса геометрии, разработка динамических чертежей.

- рубежный контроль: проводится между основными разделами дисциплины и модулями с целью определения уровня освоения изученного материала через написание и защиту контрольных работ, сдачу тестов и коллоквиумов.

- итоговый контроль: экзамен по итогам 3 курса и зачет с оценкой по итогам 2 курса проводятся с целью оценки уровня овладения компетенциями в соответствии с ФГОС ВО.

§4. Темы модуля «Преобразования» курса геометрии, удовлетворяющие дидактическим принципам отбора содержания обучения геометрии на базе Живой математики

Обучение математике, как и любому учебному предмету, может стать эффективным средством формирования личности, достичь непосредственной цели - прочного и сознательного усвоения ее содержания - лишь в случае, если в основу обучения будут положены определенные положения, вытекающие из основных закономерностей дидактики, подтвержденные опытом преподавания. Система таких положений, специально ориентированная на особенности математики как учебного предмета. Существуют принципы, характеризующие подход к обучению математике в школе, - принцип воспитания, принцип научности, принцип сознательности обучения, принцип систематичности и др. Владение этими принципами, необходимо будущему учителю для того, чтобы правильно организовать свой труд, грамотно, квалифицированно анализировать различные учебные пособия, которыми ему придется пользоваться в своей работе.

Дидактические принципы - это принципы деятельности, представляющие собой наиболее общее нормативное знание о том, как надо строить, осуществлять и совершенствовать обучение и воспитание. Закономерности этой деятельности являются теоретической основой для выработки норм учебно-воспитательной работы учителя. Однако сами по себе они не содержат конкретных указаний для такой деятельности. Эти указания дают принципы. Таким образом, принципы обучения взаимообусловлены его закономерностями. Например, принцип проблемности в обучении вытекает из закономерности, установленной С. Л. Рубинштейном, состоящей в том, что мышление возникает из проблемной ситуации и направлено на ее разрешение.

В методической литературе по математике общепризнанной является следующая система дидактических принципов:

1. Принцип воспитания в обучении математике.

2. Принцип научности в обучении математике.

3. Принцип сознательности, активности и самостоятельности в обучении математике.

4. Принцип систематичности и последовательности в обучении математике.

5. Принцип доступности в обучении математике.

6. Принцип наглядности в обучении математике.

7. Принцип индивидуального подхода к учащимся в обучении математике.

8. Принцип прочности знаний в обучении математике.

Темы курса «Геометрически преобразования», заявлены нами выше удовлетворяю выделенным принципам, программа « Живая математика» служит вспомогательным инструментом для соблюдения следующих принципов.

Использование информационных технологий в процессе геометрической подготовки учителей математики должно адекватно отражать изменения в методах геометрической науки. Студенты должны понимать и на своем личном опыте почувствовать, какую роль в современной математической деятельности играют компьютерные технологии.

Отсюда вытекает первый принцип – *принцип адекватности*: использование компьютерных технологий в процессе геометрической подготовки учителя математики должны быть в определенном смысле адекватным их использование в геометрической науке.

При переходе от школьной геометрии к вузовской, в которой преобладают аналитические средства исследования, возникает проблема визуализации геометрических объектов и их свойств.

Отсюда вытекает второй принцип – *принцип визуализации*: использование информационных технологий в курсе геометрии вуза, готовящего учителя математики, должно быть максимально ориентировано на визуализацию возможности компьютера.

Применение в образовательном процессе обучающих программных средств как инструмента познания, в большей степени способствует развитию творческого потенциала студентов. Это оправдано дидактически, поскольку предполагает активное использование знаний, умений в области геометрии, без чего не возможно конструирование на экране дисплея соответствующих геометрических объектов.

Отсюда вытекает третий принцип – *принцип использования информационных технологий в качестве инструмента познания*: при изучении курса геометрии в вузе, готовящего учителей математики средствами информационных технологий, необходимо отдавать приоритет тем из них, которые могут быть использованы в качестве инструмента познания.

Большинство студентов должно быть ориентировано на самостоятельную разработку компьютерных моделей. Такая работа требует знание математической теории вообще и геометрической в частности. Успех в этой деятельности приносит студентам большое удовлетворение, поскольку свидетельствует об их профессиональном росте. Таким образом, особое внимание в геометрической подготовке учителей математики должно уделяться активным методам, связанным с применением графических возможностей систем динамической геометрии.

Отсюда вытекает четвертый принцип – *принцип самостоятельности в использовании компьютерных средств:* при использовании компьютерных технологий в курсе геометрии вуза, готовящего учителей математики, особое внимание должно уделяться самостоятельной разработке студентами необходимого материала в СДГ.

в вузовском курсе геометрии необходимо, на наш взгляд, уделять особое внимание вопросам применения информационных технологий в процессе геометрической подготовки школьников. Другими словами, в вузовском курсе необходимо моделировать ситуации, которые могут возникнуть в школе при обучении геометрии с использованием информационных технологий. Это достигается вполне естественно, если в вузовском курсе реализуется профессионально - педагогическая направленность обучения.

Отсюда вытекает пятый принцип – *принцип ориентации на школу:* в процессе применения информационных технологий в курсе геометрии вуза, готовящего учителя математики, необходимо рассматривать вопросы использования компьютерных возможностей в школьном курсе геометрии.

При отборе содержания доминирующим является принцип *самостоятельности в использовании компьютерных средств*. При выборе методов обучения – принцип *использования компьютерных средств в качестве инструмента познания*, и наконец, при выборе форм и средств обучения – все выделенные нами принципы.

Глава 2. Проектирование методики обучения студентов геометрическим преобразованиям с использованием среды Живая математика

§5. Движение: динамические GSP-файлы и методика обучения движению с их помощью

В соответствии с концепцией компьютерной поддержки курса геометрии в педвузе [3] готовить будущего учителя математики к успешному использованию в своей профессиональной деятельности систем динамической математики следует в процессе его обучения в высшем учебном заведении. Причём реализовать эту подготовку можно в рамках вузовского курса геометрии. В курсе геометрии Красноярского педагогического университета модуль «Геометрические преобразования» традиционно изучается в течение четвёртого (для бакалавров профиля математика) или пятого (для бакалавров сдвоенного профиля математика и информатика) семестра.

Приведём краткое содержание этого модуля. Понятие геометрического преобразования. Композиция преобразований, группа преобразований. Движения плоскости и пространства. Классификация движений плоскости. Симметрии фигур. Подобия плоскости и пространства, гомотетии. Аффинные преобразования. Родство. Инверсия. Динамическая визуализация движений, подобий, аффинных преобразований и инверсий. Использование геометрических преобразований при решении задач, в том числе с применением компьютерной анимации. Теоретико-групповой подход к классификации геометрий. Эрлагенская программа Ф. Клейна.

Продемонстрируем особенности применения Живой математики на учебных занятиях по геометрии в педвузе в зависимости от формы обучения: лекция или лабораторное занятие.

Лекция. На каждой лекции в распоряжении преподавателя помимо традиционной маркерной доски должен находиться проекционный экран и персональный компьютер с компьютерной средой Живая математика. Всё, что связано с аналитическими выкладками, выводом формул, формулировками теорем и условием задач оформляется на доске. Все чертежи, имеющие в первую очередь динамический характер, выполняются преимущественно в режиме реального времени в Живой математике, что позволяет продемонстрировать студентам возможности и преимущества этой среды при обучении геометрическим преобразованиям.

Одной из наиболее сложных тем модуля является классификация движений плоскости. К процессу доказательства всех этапов классификационной теоремы, начиная с утверждения о представлении любого движения в виде композиции не более трёх осевых симметрий, и, заканчивая рассмотрением симметрий с конкретным взаимным расположением осей, можно с успехом привлекать студенческую аудиторию. Так при рассмотрении первого этапа, преподаватель создаёт в среде Живая математика собственное преобразование, которое представляет собой

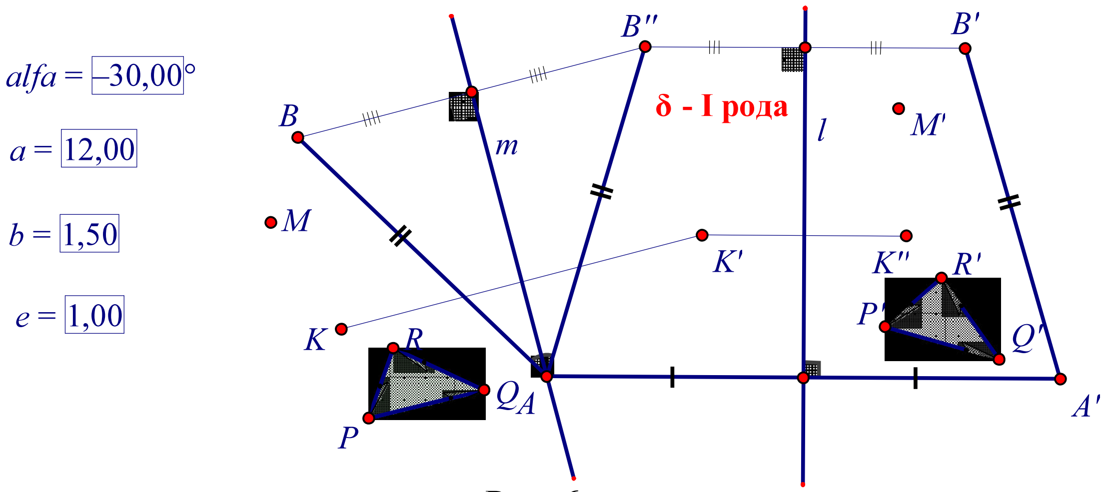


Рис. 6

движение δ, заданное аналитически: $x' = x\cos\alpha - e\cdot y\sin\alpha + a$; $y' = x\sin\alpha + e\cdot y\cos\alpha + b$. Для рассмотрения различных случаев на рабочее поле выводятся параметры α, a, b и e, с помощью которых можно менять виды (первые три параметра) и род ($e = \pm 1$) движения δ в режиме ручной анимации. Чтобы не терять учебное время создать движение следует заранее. Так на рисунке 6 выбрано движение первого рода (e =1).

На рабочем поле Живой математики выбирается произвольная точка M и строится её образ M′ под действием движения δ. Для визуального представления рода движения на экран выводится ориентированный треугольник PQR и его образ P′Q′R′ под действием δ. Перед аудиторией ставится задача подобрать наименьшее, по возможности, число прямых, композиция осевых симметрий относительно которых будет отображать точку M в точку M′. Для этого строятся две произвольные точки A и B и их образы A′ и B′ соответственно под действием движения δ. Если A и B окажутся неподвижными точками движения, то процесс завершается, в этом случае движение представляет собой симметрию плоскости с осью AB или тождественное преобразование. Пусть по крайней мере одна из двух точек A и B не является неподвижной, для определённости будем считать, что точка A отлична от A′. В этом случае обсуждается следующий алгоритм построения искомых осей. Строится серединный перпендикуляр l к отрезку AA′, находится образ AB′′ отрезка A′B′ при осевой симметрии относительно l. В равнобедренном треугольнике BAB′′ строится прямая m, содержащая биссектрису угла BAB′′. Далее студентам предлагается высказать гипотезы по поводу предполагаемых осей. По каждой гипотезе строится траектория произвольной точки K под действием композиции соответствующих осевых симметрий, с помощью мышки точка M совмещается с точкой K, визуально проверяется факт совпадения их образов. В случае, представленном на рисунке 1, наиболее правдоподобно предположение о том, что движение представимо в виде композиции следующих двух осевых симметрий $\delta = S_m \circ S_l$.Если параметру e присвоить значение – 1, что означает, что δ является уже движением второго рода, то правдоподобная гипотеза будет соответствовать представлению движения δ в виде композиции следующих трёх осевых симметрий: $\delta = S_{AB} \circ S_m \circ S_l$. Траектория точки N под действием осевых симметрий S_{AB}, S_m, S_l представляет собой три точки, которые на рисунке 7 обозначены буквами N′, N″, соответственно, причём при анимационном совмещении точек M и N точки M′ и N‴ тоже совместятся. После того как гипотезы подтверждаются серией экспериментов на доске

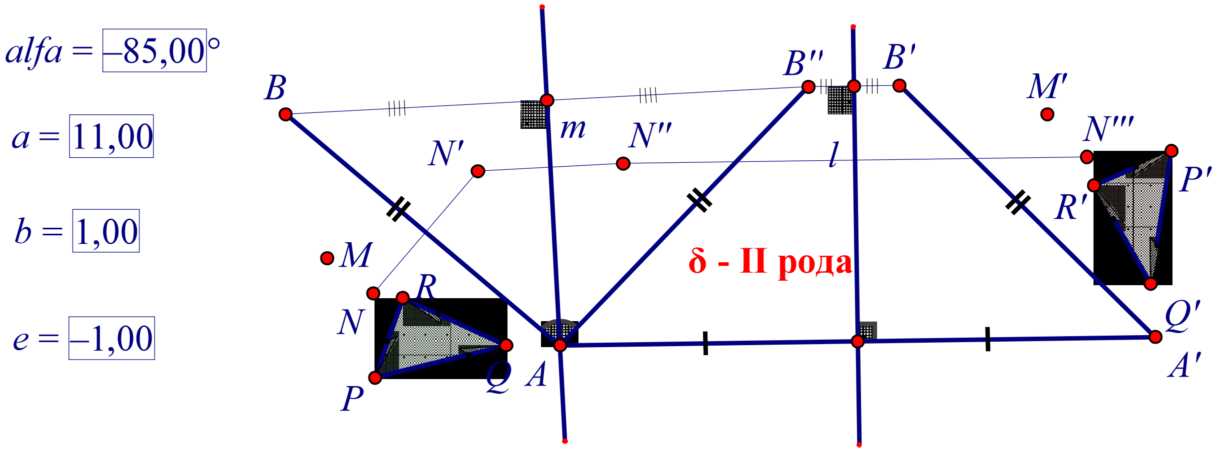


Рис. 7

формулируется теорема о том, что любое движение представимо в виде композиции не более трёх осевых симметрий, приводится её строгое доказательство.

Завершается классификационная теорема исследованием композиции двух и трёх осевых симметрий, с отдельным рассмотрением случаев принадлежности (или отсутствия таковой) осей симметрии одному пучку параллельных или пересекающихся прямых. В этом случае Живая математика может опять помочь студентам самостоятельно сформулировать верную гипотезу. Проиллюстрируем это на примере движения, которое задаётся композицией двух симметрий с осями a и b, принадлежащими пучку прямых с центром O.

На рабочем поле Живой математики строятся изображения двух произвольных прямых a и b (рис. 8), пересекающихся в точке O (можно ограничиться изображением двух пересекающихся отрезков). Отмечается некоторая точка M и строится образ M′ этой точки под действием осевой симметрии с осью a, затем – образ M″ точки M′ под действием второй осевой симметрии с осью b. Преподаватель с помощью мыши перемещает точку M и предлагает студентам понаблюдать за поведением точки M′′. Какое из известных движений плоскости действует на точке M аналогично? Следует отметить, что в большинстве случаев, студенты далеко не сразу формулируют верную гипотезу. Уж очень отличаются по своим свойствам осевая симметрия и поворот плоскости. По истечении некоторого времени выполняются дополнительные построения: Точки M, M′ и M′′ последовательно соединяются друг с другом и с точкой O отрезками, с помощью маркера отмечаются равные углы и отрезки. После этого вероятность сформулировать правдоподобную гипотезу повышается, причём для определения угла поворота помогает измерение угла MOM′′ и угла между прямыми a и b. После формулировки любой ошибочной гипотезы рекомендуется не отвергать её сразу, а построить образ N′ произвольной точки N под действием предлагаемого движения, затем совместить N и M и убедиться в том, что их образы не ведут себя аналогично. Так на рисунке 3 построен образ N′ точки N под действием поворота плоскости вокруг O на направленный угол, равный удвоенному углу между прямыми a и b, в направлении от a к b. После формулировки правдоподобной гипотезы проводится ее строгое математическое обоснование.

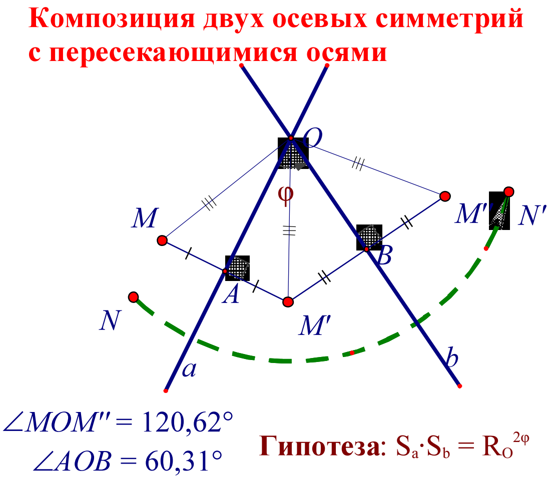


Рис. 8.

Л а б о р а т о р н о е (или лабораторно-практическое) з а н я т и е проводится в аудитории, где кроме обычной доски и преподавательского компьютера, оснащённого проектором, имеется класс персональных компьютеров в количестве, достаточном для работы одной подгруппы. По инициативе преподавателя и по согласованию со студентами решение одной и той же задачи на применение геометрических преобразований с демонстрацией этого решения перед всей аудиторией выполняется одновременно двумя отвечающими. Один из студентов осуществляет необходимые статические чертежи и записи на маркерной доске, второй – работает за преподавательским компьютером, конструируя динамические чертежи, которые необходимы не только для проведения анализа и построения, но и исследования решения задачи. Динамический чертёж удачно дополняет его статический аналог на маркерной доске, позволяя при необходимости безболезненно изменить положение любой точки, отрезка, прямой или окружности, построить образ той или иной фигуры под действием подходящего преобразования. Учебный дуэт, поддерживаемый Живой математикой, студентами коллегами и преподавателем, как правило, успешно и достаточно быстро справляется с задачами любой сложности. Продемонстрируем методику использования Живой математики на примере решения следующей задачи на применение метода подобия.

Задача 1. *Построить квадрат ABCD, вершина A которого совпадает с данной точкой, вершина B принадлежит данной окружности, вершина C – данной прямой.*

При проведении анализа на рабочем поле Живой математики строится изображение точки A, окружности c_1, точки B, принадлежащей c_1, и произвольной прямой a. Далее изображается отрезок AB, который достраивается до квадрата ABCD. Вершина C квадрата с большой долей вероятности окажется за пределами прямой a. Перемещая мышкой точку B по окружности c_1, попытаемся найдём такое ее положение, при котором C окажется на прямой a. Преподавателю следует обратить внимание студентов на то какую траекторию вычерчивает точка C в результате этого перемещения. Более того, целесообразно даже

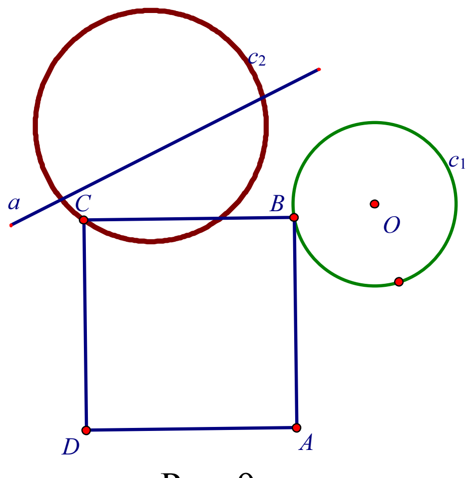


Рис. 9.

сформулировать два наводящих вопроса: 1) *что представляет собой множество всех вершин C квадрата ABCD при фиксированной вершине A, если вершина B пробегает все точки окружности* c_1*?*; и 2) *можно ли по заданным точке A и окружности* c_1 *построить это множество*? По сути, мы ослабляем исходную задачу, отбрасывая требование принадлежности вершины C прямой a. Что дают ответы на поставленные вопросы? Прежде всего это способ построения вершины C, которая должна принадлежать пересечению искомого множества и прямой a.

Живая математика может оказать помощь в поиске ответов на оба вопроса. Если мы заставим точку C оставлять след и начнём перемещать вершину B по окружности c_1, то точка C вычертит линию c_2, похожую на окружность (рис. 9). Чтобы доказать что это окружность и найти способ ее построения следует разобраться в механизме построения произвольной точки этой линии. Будем считать, что B – одна из произвольных точек окружности c_1. Найдём преобразование, которые, во-первых, задаётся с использованием лишь только точки A и вспомогательных инвариантов, и, во-вторых, отображает точку B на точку C. После перебора всевозможных движений и подобий становится понятно, что сначала надо отобразить B на точку B′, лежащую на прямой AC, сделать это удобно с помощью поворота плоскости вокруг точки A на угол 45° (рис. 10). Затем точку B′ отобразить на точку C с помощью гомотетии с центром в точке A и коэффициентом AC/AB′ = AC/AB = $\sqrt{2}$. Поскольку подобие отображает окружность на окружность, то искомое множество представляет собой окружность c_1'', которую можно построить как образ c_1 под действием композиции поворота вокруг A на угол 45° и гомотетии с центром A и коэффициентом $\sqrt{2}$.

Построив окружность c_1'', мы можем найти общую точку C этой окружности и прямой a. Ясно, что построить искомый квадрат, зная его диагональ AC, не представляет труда.

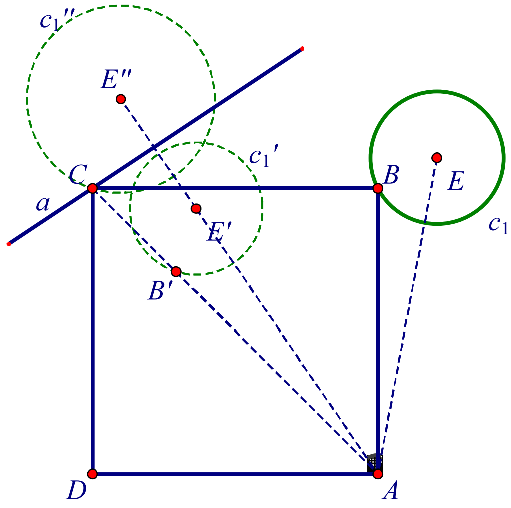


Рис. 10

Задача 2. *В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC E - точка пересечения биссектрисс. Прямые CE и BE пересекают окружность описанную около треугольника ABC в точках D и F. Докажите, что DEAF - ромб.*

Построим произвольный равнобедренный треугольник ABC, биссектрисы углов при основании BC, описанную окружность(рис. 11).

Доказательство.

1. Рассмотрим осевую симметрию S_l относительно биссектрисы l = AE. Поскольку l содержит центр O окружности и является осью симметрии треугольника ABC, то при осевой симметрии окружность и треугольник ABC отображаются на себя. Но тогда D и F симметричны относительно l, отсюда, AD = AF и ED = EF.

2. Рассмотрим равнобедренный треугольник BEC. Обозначим через α величину его углов при основании. Тогда внешний угол ∠DEB = ∠EBC+

+∠ECB = 2α.

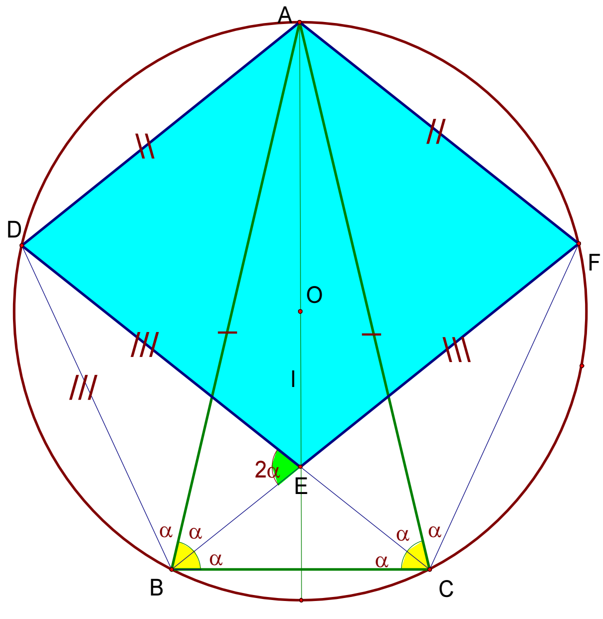


Рис. 11

3. Рассмотрим ΔBDE. Как показано в п.2, $\angle DEB = 2\alpha$. Поскольку $\angle DBA = \angle ABF$ как опирающиеся на дуги равной длины, то $\angle DBE = 2\alpha$. Т.о. ΔBDE равнобедренный. Отсюда, $DE = DB$.

4. Рассмотрим хорды AD и BD. Они равны, т.к. Угол $\angle ACD$ = Угол $\angle DCB = \alpha$?. Итак, DEAF - ромб.

Задача 3. *Даны два одинаково ориентированных правильных треугольника ABC и AB_1C_1. Найти величину угла между прямыми BB_1 и CC_1 и доказать, что $BB_1 = CC_1$.*

В центральной части рабочего поля изобразим требуемые треугольники, длины некоторых отрезков и величины углов выведем на экран (рис 12.)

m $\overline{BB_1}$ = 5,02 см   m $\overline{C_1C}$ = 5,02 см $\angle C_1OB_1$ = 60,00°

Задача допускает решение, не опирающееся на геометрические преобразования, но лишь с использованием поворота плоскости оно становиться простым и изящным:

<u>Решение.</u>

1. Рассмотрим поворот плоскости вокруг A на 60°.

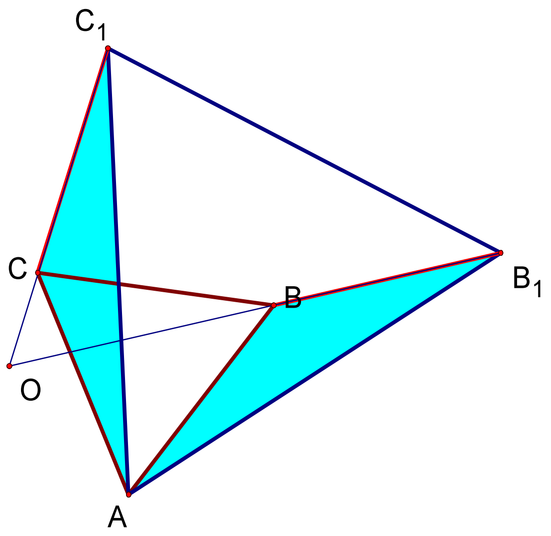


Рис 12

2. При этом повороте точка B отобразится на точку C, а точка B_1 – на точку C_1. Следовательно, треугольник ABB_1 отобразится на треугольник ACC_1.

3. Но тогда $BB_1 = CC_1$ и угол BOC = 60 градусов.

Полученные конструктивным способом результаты вполне согласуются с аналитическими выкладками, которые мы высветили в верхней части рабочего поля.

Задача 4. *Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.*

Поместим в верхней части рабочего поля данные по условию задачи отрезки(рис. 13):

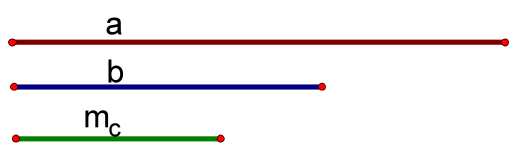


Рис 13

<u>Компьютерный анализ.</u>

1. Построим отрезок $CM=m_c$.

2. Если от C отложить отрезки a и b, то их концы окажутся на двух концентрических окружностях с центром в точке C и радиусов a, b соответственно, построим эти окружности: w_a, w_b.(рис. 14)

3. Выберем на синей окружности w_b произвольную точку A_x.

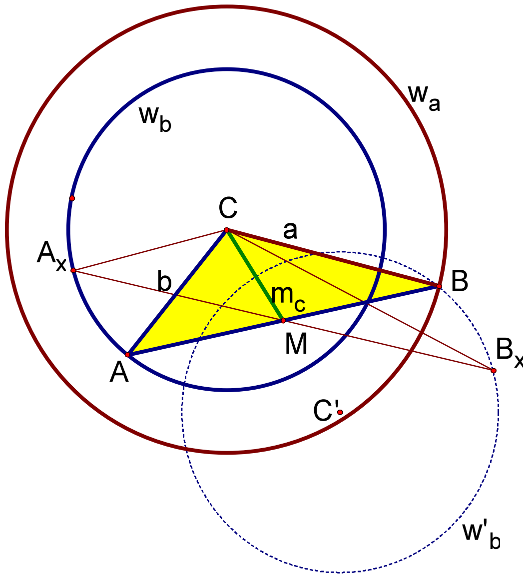


Рис 14

4. Чтобы CM была медианой, необходимо, чтобы M была серединой стороны, противолежащей вершине C. Поэтому построим B_x так, чтобы M была серединой отрезка A_xB_x. В построенном треугольнике A_xB_xC выполняются лишь два из трех требований условия задачи, т.к. сторона B_xC не обязательно равна a.

5. Перемещая A_x по окружности найдем такое ее положение при котором B_x окажется на окружности w_a.

6. Подсветим точку B_x и зададим для нее опцию *Оставлять след*. Анимационно перемещая A_x по w_b, получим след точки B_x в виде окружности w'_b, которая есть образ w_b при повороте $R_M^{180°}$. Построим этот образ с помощью опции *Поворот* меню команд *Преобразования*.

7. Найдем точку B, принадлежащую w'_b и w_a. Строим симметричную ей относительно M точку A. Получим искомый треугольник ABC.

Заметим, что эту задачу можно решить с применением гомотетии. Для этого надо первоначально построить отрезок BC, две концентрических окружности с центром в точке C и радиусов a m_c. Затем с помощью гомотетии с центром в точке B и коэффициентом 2 найти образ второй из них. Общая точка этого образа и окружности с центром в точке В и радиуса а и будет точкой А.

§6. Подобие: динамические GSP-файлы и методика обучения подобию с их помощью

Подобия

Определение. *Подобием* плоскости (пространства) с коэффициентом $k>0$ называется такое преобразование плоскости (пространства), при котором для любых двух точек А и В и их образов A' и B', соответственно, $A'B' = kAB$.

Будем обозначать подобие значком π_k, k называют *коэффициентом подобия*. Если преобразование π_k не меняет ориентацию плоскости, то его называют подобием первого рода, в противном случае – подобием второго рода. Очевидно, любое движение является подобием с коэффициентом 1.

Теорема. *Множество всех подобий плоскости (пространства) является группой относительно операции композиции.*

Доказательство. Ясно, что композиция двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 является подобием с коэффициентом k_1k_2, т.к. если $A'B' = k_1AB$ и $A''B'' = k_2A'B'$, то $A''B'' = k_1k_2AB$. Далее необходимо проверить выполнимость всех аксиом группы, т.е. ассоциативность, существование нейтрального элемента (единицы группы), существование для каждого элемента обратного к нему.

1) *Ассоциативность*. Ассоциативность выполняется для любых преобразований, в частности и для подобий плоскости (пространства). Таким образом, операция композиция ассоциативна, т.е. $\pi_{k1}\circ(\pi_{k2}\circ\pi_{k3}) = (\pi_{k1}\circ\pi_{k2})\circ\pi_{k3}$.

2) *Существование нейтрального элемента*. В качестве нейтрального элемента возьмём тождественное преобразование ε, которое является подобием с коэффициентом 1. В этом случае $\pi_k\circ\varepsilon = \varepsilon\circ\pi_k = \pi_k$.

3) *Существование для каждого элемента обратного*. Действительно, для произвольного подобия π_k рассмотрим преобразование обратное к нему, которое очевидно будет подобием $\pi_{1/k}$.

Теорема доказана.

Гомотетия

Частным случаем подобия является гомотетия. При изучении темы «Подобие», начиная с рассмотрения гомотетии, рекомендуется на каждом лекционном и практическом занятии использовать возможности Живой математики, связанные с применением встроенных в эту среду команд и опций построения гомотетичных образов фигур. Сначала даётся определение гомотетии.

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется такое преобразование плоскости (пространства), при котором произвольная точка M отображается на такую точку M′, что $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Символом H_O^k вводится обозначение гомотетии. После «ручного» построения образа произвольной точки под действием гомотетии, рекомендуется продемонстрировать студентам «гомотетичные» возможности среды Живая математика. Во всех случаях необходимо отметить важнейшую точку этого преобразования, а именно центр гомотетии. Для этого необходимо «подсветить» точку, претендующую на роль центра, зайти в меню «Преобразования» и выбрать команду «Отметить центр».

В отличие от центра гомотетии его коэффициент можно задать несколькими способами, по меньшей мере, тремя. Опишем их.

Первый способ (ручной). Подсвечивается фигура, образ которой необходимо найти, в меню «Преобразования» выбирается команда «Гомотетия…», в появившееся «Окно» вручную с клавиатуры вводится численное значение гомотетии, которое имеет вид дроби, числителем и знаменателем которой могут быть любые действительные числа.

Второй способ (параметрический). На рабочее поле выводится параметр, которому присваивается некоторое числовое значение в виде десятичной дроби (для его изменения можно использовать клавиши «+» или «-»), далее параметр фиксируется как коэффициент (меню «Преобразования», команда «Отметить коэффициент»).

Третий способ (конструктивный). На экране строятся изображения двух отрезков. Первый подсвеченный отрезок будет являться числителем коэффициента гомотетии, второй – знаменателем. Недостаток третьего способа – он не может быть отрицательным.

Плюсы последних двух способов – имеется возможность задавать анимационное изменение коэффициента гомотетии.

Далее формулируются и выводятся некоторые свойства гомотетии, причём в каждом случае для их динамической визуализации используется Живая математика.

1. *Если при гомотетии с центром O и коэффициентом k точки A и B отображаются на точки A′ и B′, то* $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ *(рис 15).*

Доказательство: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$

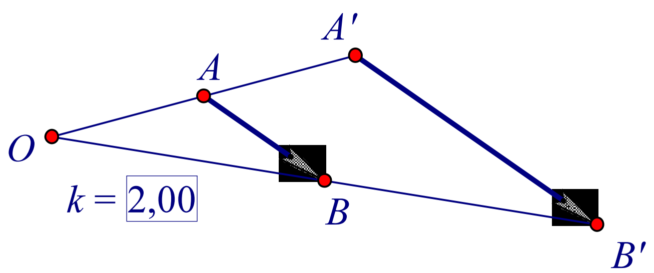


Рис 15

2. *Гомотетия с центром O и коэффициентом k является подобием с коэффициентом* $|k|$.

$$AB = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \left|k\overrightarrow{AB}\right| = |k|\left|\overrightarrow{AB}\right| = |k|AB.$$

3. *Гомотетия сохраняет прямолинейность расположения точек (рис16).*

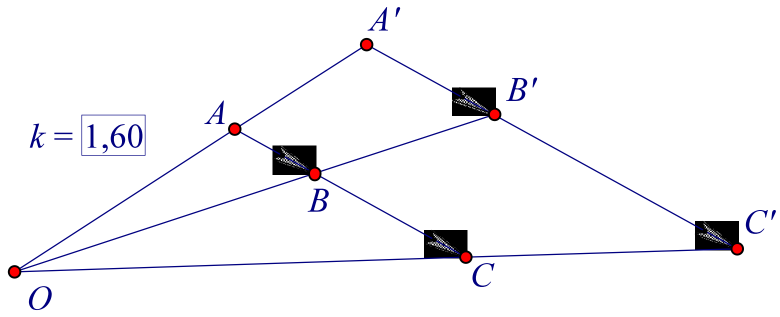


Рис 16.

Пусть A, B и C – три различные точки некоторой прямой. Тогда $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB}$ (*). Пусть точки A, B и C под действием гомотетии с центром O и коэффициентом k отображаются на точки A′, B′ и C′ соответственно. По свойству 1 гомотетии $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Из этих равенств получаем следующие соотношения: $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'C'}$ и $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'}$ (**). Подставляя найденные значения векторов в равенство (*), получим $\overrightarrow{A'C'} = m\overrightarrow{A'B'}$. Отсюда следует, что точки A′, B′ и C′ принадлежат одной прямой.

4. *Гомотетия сохраняет простое отношение трёх точек одной прямой.*

Действительно, из определения простого отношения точек и (**) имеем:

$(AB,C) = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \dfrac{\frac{1}{k}\overrightarrow{A'C'}}{\frac{1}{k}\overrightarrow{B'C'}} = \dfrac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} = (A'B',C')$, т.е. гомотетия сохраняет простое отношение трёх точек одной прямой.

5. *При гомотетии прямая отображается на параллельную ей прямую, плоскость – на параллельную ей плоскость.*

Свойство следует из первого свойства и того, что направление прямой определяется ее направляющим (параллельным ей) вектором.

6. *При гомотетии угол отображается на равный ему угол (рис 17)* .

Свойство следует из свойства 5.

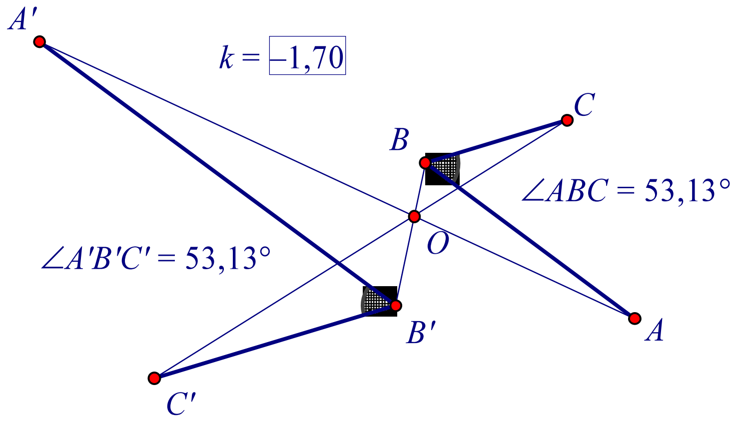


Рис 17

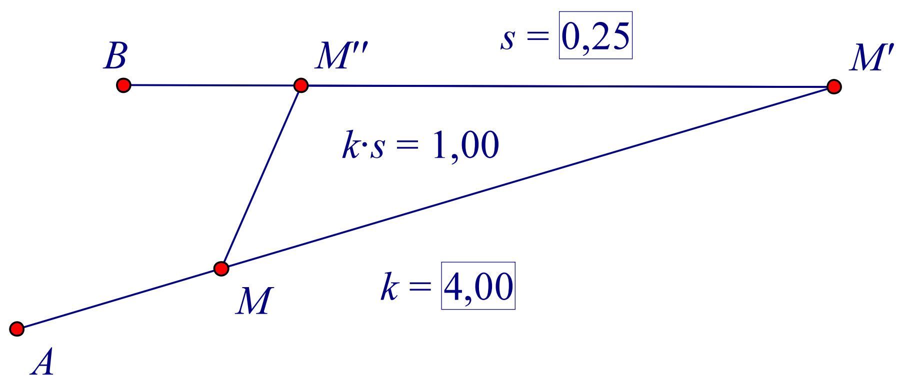
Весьма выигрышно использовать Живую математику при изучении композиции гомотетий. Этому способствует возможность этой компьютерной среды создавать собственные преобразования. В данном случае имеется ввиду композиция двух и более гомотетий.

Композиция гомотетий

Рассмотрим две гомотетии H_A^k и H_B^s. Что будет представлять собой их композиция $f = H_A^k \circ H_B^s$? Здесь многое зависит от коэффициентов k и s гомотетий. Если ks = 1, то f – параллельный перенос, в противном случае f – гомотетия с коэффициентом ks и центром С лежащим на прямой АВ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Композиция двух данных гомотетий с центрами A и B и коэффициентами k и s является параллельным переносом, если ks = 1, и гомотетией с коэффициентом ks и с центром C, лежащим на прямой AB, в противном случае(рис 18).*



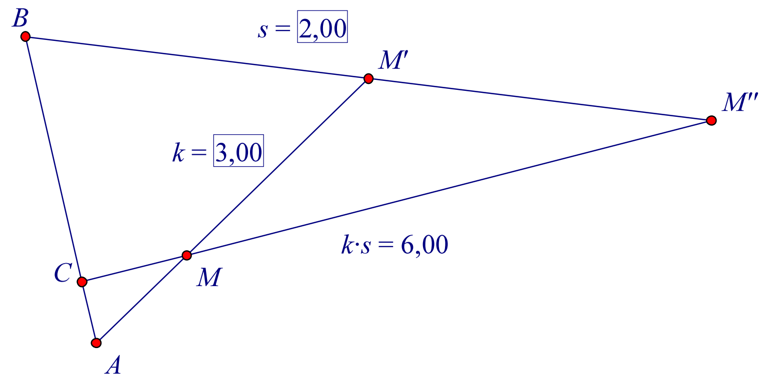


Рис 18

Визуальное сопровождение этой теоремы осуществляется с помощью Живой математики.

В школе и даже в педагогическом вузе обучение решению задач с использованием подобия ограничивается применением гомотетии. Среда Живая математика позволяет рассмотреть задачи на эффективное применение подобий, представляющих собой композицию гомотетии и параллельного переноса, гомотетии и поворота, гомотетии и осевой симметрии. Но этому должна предшествовать теорема о представлении подобия композицией гомотетии и движения, анимационную визуализацию которой прекрасно реализует Живая математика.

Представление подобия в виде композиции гомотетии и движения

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Любое подобие представимо в виде композиции гомотетии и движения.*

Доказательство. Пусть π_k произвольное подобие с коэффициентом k. Выберем произвольную точку A и гомотетию с центром в этой точке и коэффициентом 1/k, которую обозначим $H_A^{1/k}$. Рассмотрим композицию гомотетии и подобия: $H_A^{1/k} \circ \pi_k$. Поскольку произведение коэффициентов этих движений равно единице, то $H_A^{1/k} \circ \pi_k = \delta$ – движение. Домнажая полученное равенство слева на H_A^k, получим, что $\pi_k = H_A^k \circ \delta$. Теорема доказана.

Следствие. *Любое геометрическое свойство фигуры, которое сохраняется одновременно и при гомотетии и при движении, сохраняется и при подобии.*

Например, подобие сохраняет:

а) прямолинейность расположения точек;

б) простое отношение трёх точек одной прямой;

в) параллельность прямых;

г) величину углов.

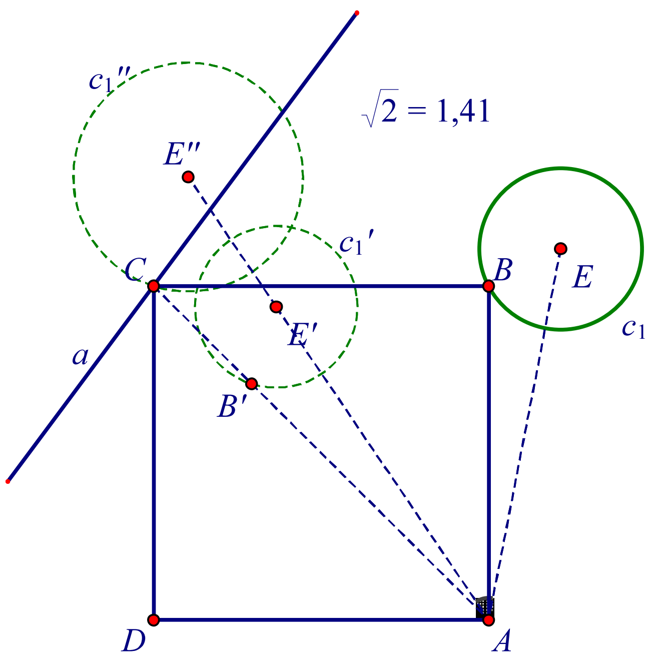
Весьма эффективно применение Живой математики при решении задач методом подобия.

Использование подобия при решении задач

При решении задачи методом подобия рассматривается вспомогательная фигура, которая получается из данной или искомой фигуры или некоторой их части с помощью подходящего подобия. С помощью этой вспомогательной фигуры устанавливается связь между искомой и данными фигурами.

Задача. Построить квадрат, одна вершина которого совпадает с данной точкой, другая принадлежит данной окружности, третья – данной прямой.

Анализ. Рассмотрим подобие, которое представимо в виде композиции поворота вокруг точки A на угол 45° (в этом случае точка B отобразится на точку B′, лежащую на диагонали AC и отстоящую от A на расстоянии AB, которое равно $AC/\sqrt{2}$) и гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $\sqrt{2}$ (при гомотетии точка B′ отобразится на точку C). В итоге, при этом



подобии точка В отобразится в точку С(рис19).

Построение: Но тогда для решения задачи достаточно построить образ c_1'' данной окружности c_1 при этом подобии. Для этого стоятся точки E′ и E″, затем радиус окружности c_1 увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, строится окружность c_1''. Искомая точка С будет принадлежать пересечению данной прямой *a* и окружности c_1''.

§7. Аффинное преобразование: динамические GSP-файлы и методика обучения аффинному преобразованию с их помощью

Рассмотрим преобразования плоскости, которые обобщают рассмотренные ранее движения и подобия плоскости и которое, вообще говоря, уже не сохраняет не только расстояния между точками, не изменяет их в с одним и тем же множителем, но и величины углов.

Определение. Преобразование плоскости, сохраняющее прямолинейность расположения точек и простое отношение любой тройки коллинеарных точек, называется *аффинным* преобразованием.

Будем обозначать аффинные преобразования малыми латинскими буквами α, β, γ, f и т.д. Если аффинное преобразование не меняет ориентацию плоскости, то его называют преобразованием первого рода, в противном случае – второго рода. Очевидно, любые движение и подобием являются аффинным преобразованием 1.

Далее, используя определение аффинного преобразования, доказывается, что множество всех аффинных преобразований представляет собой группу относительно операции композиции. При доказательстве теоремы Живая математика используется как средство динамической визуализации.

Опираясь на эту теорему, выводятся основные свойства аффинных преобразований. Приведём доказательства отдельных свойств, которые поддерживаются соответствующими динамическими GSP-файлами:

1. *Прямая отображается на прямую(рис 20).*

Доказательство: Предположим, что прямая a под действием аффинного преобразования α отображается на множество a′, которое является частью прямой b. Но тогда на прямой b найдутся точки A′ и B′, принадлежащие a′, и точка C′, принадлежащая b и не принадлежащая a′, которые под действием α^{-1} отобразятся на неколлинеарные точки, что противоречит тому, что α^{-1} – аффинное преобразование.

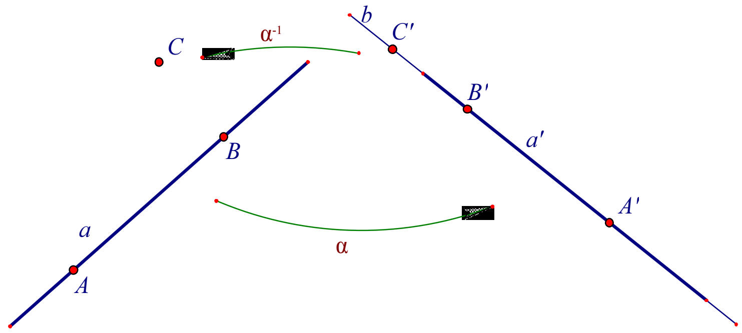


Рис 20

2. *Параллельные прямые в аффинном преобразовании отображаются на параллельные прямые(рис 21).*

Доказательство. Пусть a || b и P′ принадлежит пересечению образов прямых a и b при аффинном преобразовании α. Но тогда преобразование обратное α должно отобразить P′ на точку P, принадлежащую a и b, что невозможно. Отсюда, a′ || b′.

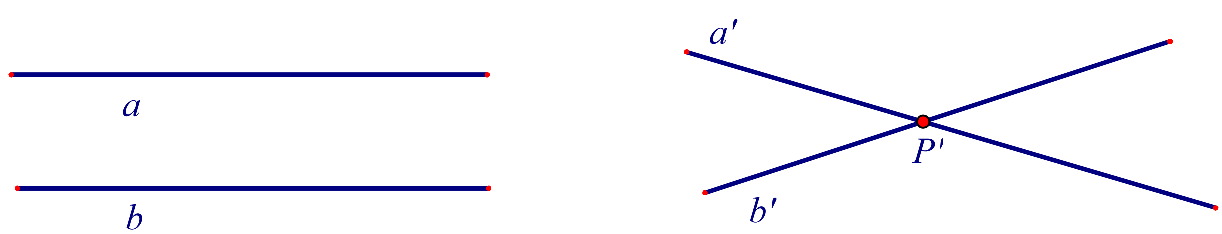


Рис 21

3. *Аффинное преобразование сохраняет отношение длин параллельных отрезков (рис 22).*

Свойство следует из того, что аффинное преобразование сохраняет простое отношение трёх точек одной прямой. Действительно, пусть AB || CD. Рассмотрим на прямой CD точку E такую, что ABEC – параллелограмм. По второму свойству A′B′C′E′ тоже параллелограмм. Так как (CD,E) = (C′D′,E′), то AB/CD = A′B′/C′D′.

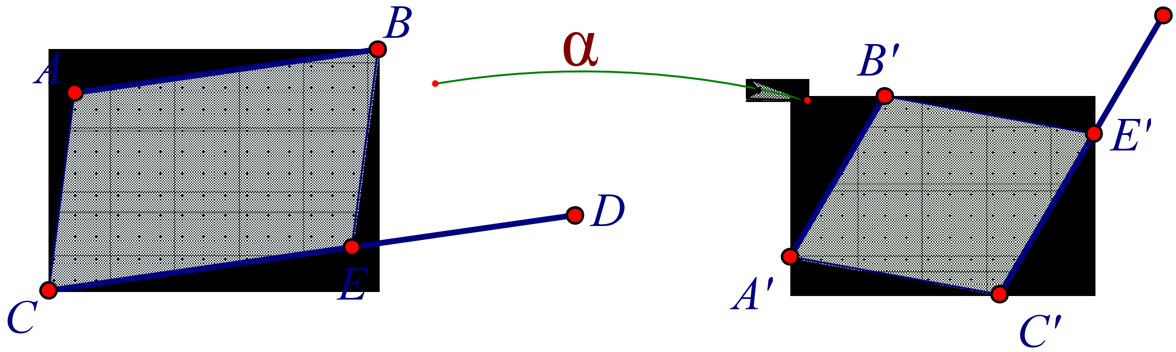


Рис 22

Далее рассматривается вывод формул, представляющих аналитическое задание аффинных преобразований, которые используются в дальнейшем для доказательства теоремы о неподвижных точках и неподвижных векторах.

$$x' = a_1x + b_1y + c_1$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2$$

Одновременно аналитическое задание используется для того, чтобы создать собственное аффинное преобразование в среде Живая математика, подключив для этого не только команду «Определить преобразование…», находящуюся в меню «Преобразования», но и прямоугольную систему координат рабочего поля Живой математики.

Создание собственного аффинного преобразования, зависящего от шести параметров (их значения выводятся на экран и могут быть изменены с помощью введения подходящих чисел с клавиатуры или нажатием на клавиши «+» или «-»), являющихся коэффициентами аналитического задания преобразования, позволяют предварить доказательство теоремы о неподвижных точках и неподвижных векторах учебным экспериментом. Для этого на рабочем поле строится произвольная точка M и её образ M′ под действием заданного преподавателем или студентом аффинного преобразования. Перемещая мышкой точку М, в большинстве случаев можно добиться совпадения этой точки с её образом, а это означает, что в данном конкретном положении на плоскости М будет иметь статус неподвижной точки. Чтобы обнаружить неподвижную точку выбирается такое направление перемещения точки М, которое влечёт за собой уменьшение расстояния между М и М′. В том случае, если такого направления нет, то строится произвольный вектор и подбирается с помощью мышки такое его расположение и такое направление перемещения, при котором вектор остаётся инвариантным.

Учебный эксперимент позволяет студентам самостоятельно сформулировать гипотезу, которая далее после строго математического обоснования получает статус теоремы о неподвижных точках и неподвижных векторах.

Наиболее эффективно применение Живой математики при изучении родственных преобразований, которые играют в группе аффинных преобразований роль, аналогичную роли осевых симметрий в группе движений.

Сначала преподаватель озвучивает определение родственного преобразования или родства.

Определение. Аффинное преобразование плоскости, имеющее, по крайней мере, две различные неподвижные точки, называется *родственным* (или *родством*). Обозначается ρ (или f).

Перед студентами ставится вопрос, не встречали ли они аналогичного понятия в других типах преобразований, в частности среди движений. Далее вводятся основные понятия, имеющие отношение к родству: ось и направление родства.

По теореме о неподвижных точках множество неподвижных точек родственного преобразования– прямая. Эта прямая называется *осью родства(рис 23)*.

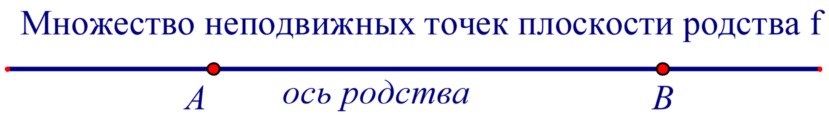


Рис 23

Далее рассматриваются свойства родственных преобразований. Приведём те из них, которые наглядно иллюстрируются динамическими чертежами в среде Живая математика

Соответственные прямые в родстве пересекаются в точке, лежащей на оси родства, либо параллельны ей(рис 24).

Пусть x – ось родства ρ и при родстве ρ прямая a отображается на a′. Если прямая a не параллельна x, то обозначим через A их общую точку. Поскольку A принадлежит оси родства x, то она – неподвижная, т.е ρ(A)=A. Поскольку A принадлежит a, то ρ(A) принадлежит ρ(a) = a′, но тогда прямые a и a′ пересекаются в точке A, лежащей на оси родства x.

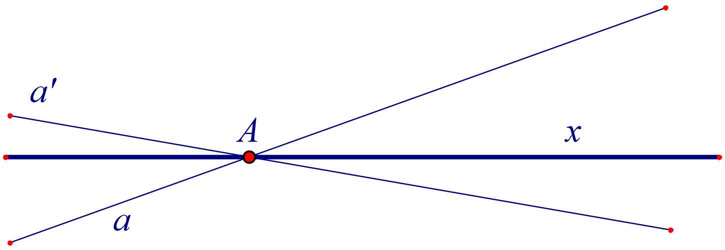


Рис 24

Если прямая a параллельна оси родства x, то по свойству аффинного преобразования образы прямых a и x также параллельны. Но x совпадает со своим образом, отсюда, a′ || a || x (рис 25).

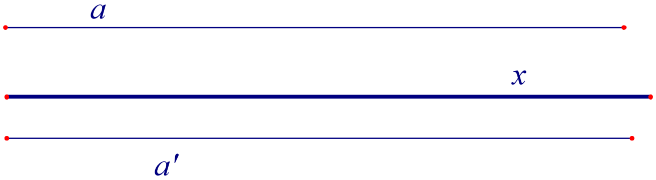


Рис 25

Прямые, проходящие через различные соответственные точки в родстве, параллельны между собой.

Пусть A, A′ и B, B′ – две пары соответственных точек в родстве ρ, имеющей ось x (рис 26).

а) Если прямая AB пересекает ось x в точке P, то по свойству 2 точка P принадлежит прямой A′B′. Так как ρ – аффинное преобразование, то оно сохраняет простое отношение точек одной прямой, отсюда $\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\overrightarrow{PA'}}{\overrightarrow{PB'}}$, но тогда AA′ || BB′.

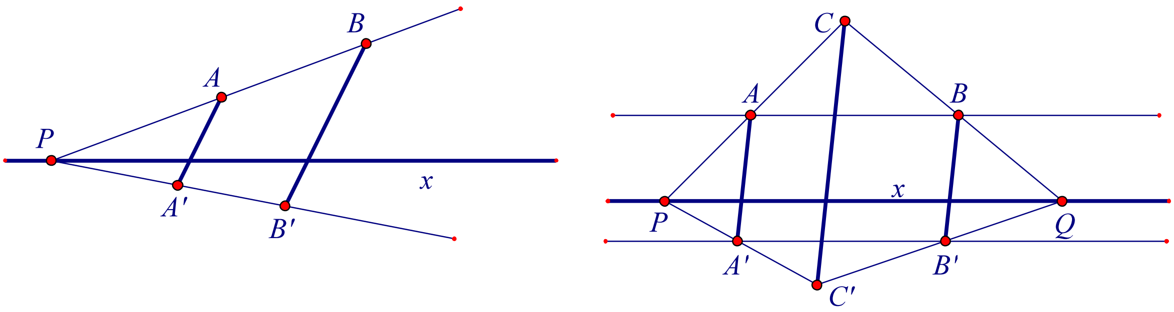


Рис 26

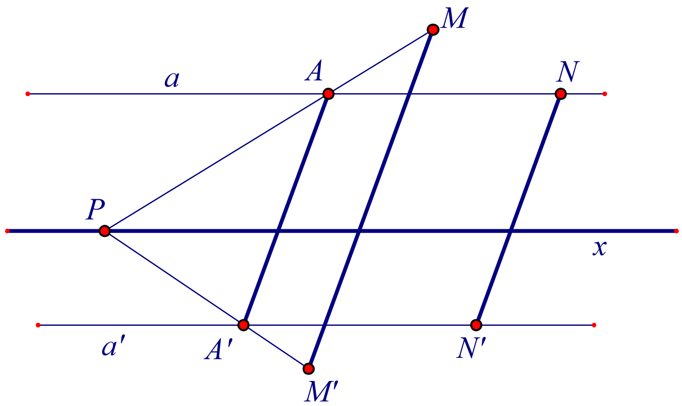
б) Если прямая AB параллельна оси x родства ρ, то рассмотрим вспомогательную точку C, не принадлежащую прямой AB, и не лежащую на оси x. Так как прямая AC не параллельна x, то в соответствии с предыдущим пунктом AA′ || CC′. Аналогично, BB′ || CC′. Но тогда AA′ || BB′.

Определение. Направление, которое задаётся пучком параллельных прямых, проходящих через пары различных соответственных точек, называется *направлением родства*.

Родство однозначно определяется осью и парой соответственных точек, не лежащих на оси родства(рис 27)

Пусть родство ρ с осью x отображает точку A, не лежащую на x, в точку A′. Покажем, что образ любой другой точки определяется однозначно. Действительно,

если а) M – точка, для которой AM – не параллельна x, причём AM пересекает x в точке P, то M′ с одной стороны принадлежит прямой PA′ (свойство 2), а с другой стороны прямая MM′ – параллельна AA′ (свойство 3), т.е. M′ определяется однозначно;



если б) N – точка, для которой AN || x, то N′ определяется однозначно из того, что четырёхугольник A′ANN′ – параллелограмм.

Отметим, что произвольная прямая x и пара точек A и A′ однозначно определяют по указанному в а) правилу родственное преобразование с осью x и парой соответственных точек A и A′.

После доказательства приведённых выше свойств родственных преобразований появляется возможность не аналитически, а конструктивным способом строить образы фигур в родстве, т.е. с помощью циркуля и линейки. На рисунке 28 приведено изображение некоторых фигур и их образов в родстве, заданном осью x и парой соответственных точек A и A′.

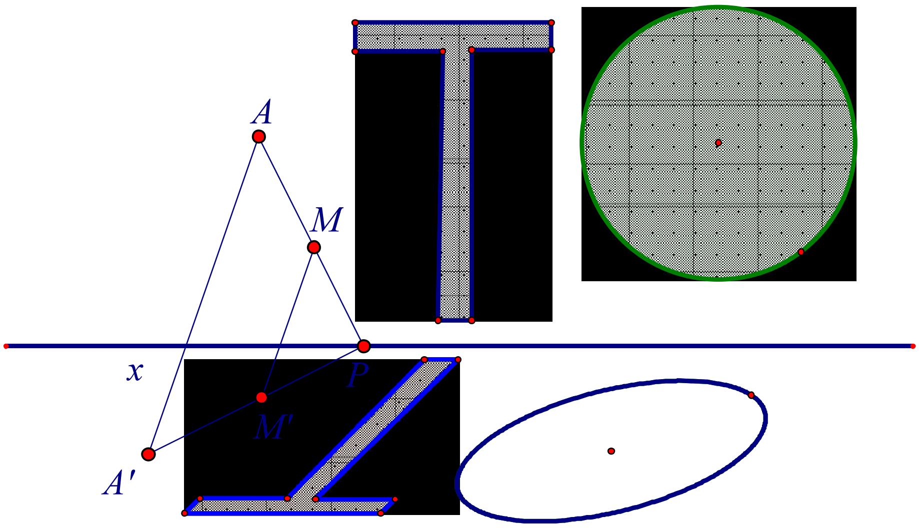


Рис 28

Перемещая мышкой точки A и A′ или сами фигуры, можно наблюдать изменения образов фигур.

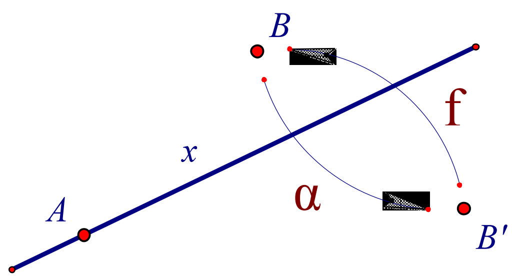
Одна из важнейших теорем теории аффинных преобразований это теорема о представление аффинных преобразований в виде композиции родственных, которая аналогична теореме о представлении движения композицией не более трёх осевых симметрий.

При её доказательстве существенно используется доказанная выше теорема о неподвижных точках и неподвижном векторе. Динамическая визуализация этой теорем прекрасно осуществляется с помощью Живой математики.

Теорема. *Всякое аффинное преобразование представимо в виде композиции не более чем двух родственных(рис 29).*

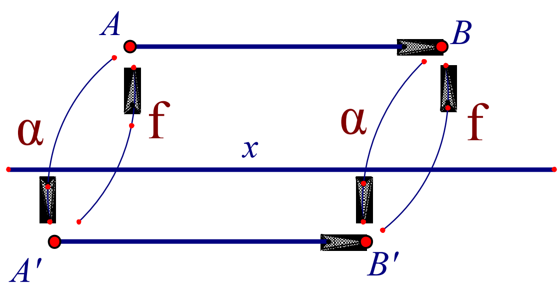
Доказательство. Пусть α – аффинное преобразование. По теореме о неподвижных точках и векторах α имеет неподвижную точку или неподвижный вектор.

1) Пусть α имеет неподвижную точку A. Если все остальные точки тоже неподвижные, то α – тождественное преобразование. Тогда его можно представить в виде композиции любого родства и преобразования обратного к этому родству, т.е. теорема верна. Итак, существует точка, обозначим ее B, которая



отображается на B′, отличную от B. Рассмотрим произвольную прямую x, проходящую через A и не содержащую ни точку B, ни ее образ. Рассмотрим родство f с осью x и парой соответственных точек B′ → B. Очевидно композиция $\alpha\circ f$ отображает точку A на себя и точку B – на себя. Но тогда по теореме 3 $\alpha\circ f$ является либо тождественным преобразованием, либо родством с осью AB. Если $\alpha\circ f = \varepsilon$, то $\alpha = f^{-1}$ – родство по свойству 1. Если $\alpha\circ f = f_2$ - родство, то $\alpha = f_2\circ f^{-1}$ – композиция двух родственных преобразований.

2) Пусть α не имеет неподвижных точек. Тогда по теореме 3 существует неподвижный вектор. Обозначим его $\overrightarrow{AB}$. Неподвижность вектора $\overrightarrow{AB}$ означает не неподвижность точек A и B, а то, что точки A и B отображаются на такие точки A′ и B′ соответственно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Рассмотрим прямую x, параллельную AB и не содержащую ни точки A и B, ни их образы.



Рассмотрим родство f с осью x и парой соответственных точек A′ → A. По свойствам 2 и 3 родство f точку B′ отображает на B. Очевидно композиция $\alpha\circ f$ оставляет точки A и B – неподвижными. Но тогда $\alpha\circ f$ является либо тождественным преобразованием, либо родством f_2 с осью AB. Как и в случае 1 $\alpha = f^{-1}$ или $\alpha = f_2\circ f^{-1}$.

Аффинные преобразования можно использовать при решении задач элементарной геометрии. В качестве примера приведём решение задачи о медианах произвольного треугольника ABC, визуальную поддержку осуществим с помощью динамического чертежа, созданного в среде Живая математика.

Задача. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательско . Рассмотрим треугольник ABC и его медианы AD, BE, CF.

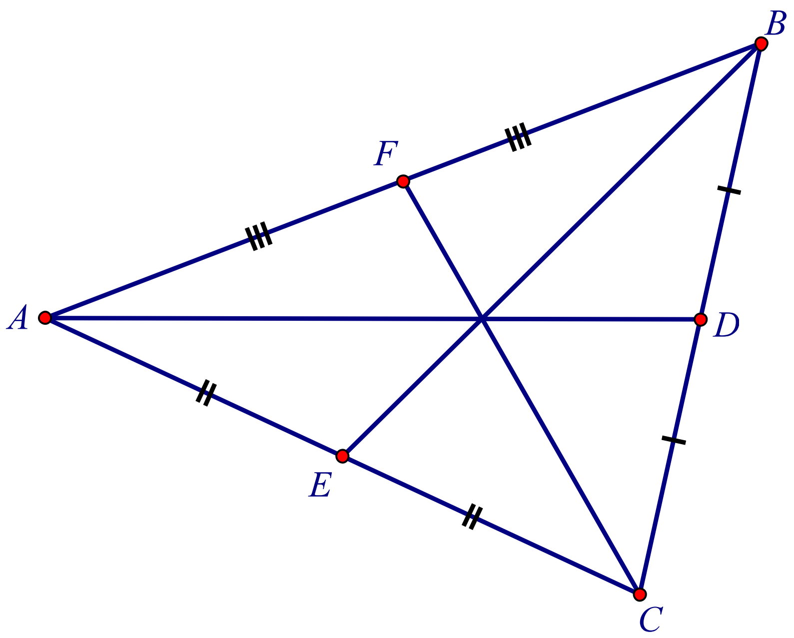


Рис 30

1. Зададим родственное преобразование f осью AD и парой соответственных точек B и C. Так как родство сохраняет простое отношение точек и D - неподвижна, то D, являясь серединой отрезка BC должна быть серединой и его образа, т.е. отрезка B'C' или, что тоже самое (используем то, что B' = C), - отрезка CC'. Но тогда C' = B. Такое родство называется косой симметрией (рис 30)

2. Найдём образ точки F. Отрезок AB отобразится на отрезок AC (так как A принадлежит оси родства, то она неподвижна). Но тогда середина F отрезка AB отобразится на середину E отрезка AC. Аналогично, отрезок AC отобразится на отрезок AB, отсюда, точка E отобразится на точку F.

3. Итак, прямая BE отображается на прямую CF, отсюда, по свойству родства их общая точка принадлежит оси родства AD. Т.е. медианы пересекаются в одной точке.

§8. Инверсия: динамические GSP-файлы и методика обучения инверсии с их помощью

Рассмотрим преобразование, которое, вообще говоря, не сохраняет прямолинейность расположения точке.

Пусть O – произвольная точка и R некоторое положительное число.

Определение. Преобразование плоскости (без точки O), которое произвольной точке M ставит в соответствие такую точку M′, что, во-первых, M′ принадлежит лучу OM, и, во-вторых, $OM \cdot O\,M' = R^2$, называется *инверсией* (плоскости с выколотой точкой O) относительно *базисной* окружности с *центром инверсии* O и *радиусом инверсии* R(рис31).

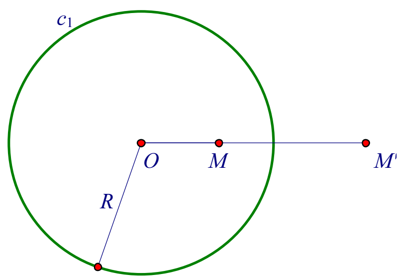
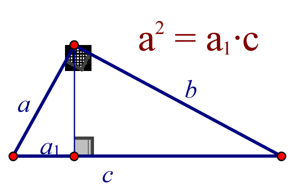


Рис 31

Далее приводится алгоритм построения образа произвольной точки м при инверсии относительно базовой окружности с центров токе O и радиусом R.

Построение инверсного образа точки

Из школьного курса геометрии известно, что в прямоугольном треугольнике квадрат любого катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу.



Воспользуемся этим соотношением для построения образа произвольной точки M при инверсии относительно базисной окружности с центром в точке O и радиусом инверсии R.

Рассмотрим три возможных случая в зависимости от того как расположена точка M по отношению к базисной окружности.

а) М находится внутри базисной окружности. В этом случае выполним следующие построения(рис 32):

1. Построим луч OM;

2. Построим перпендикуляр к OM, содержащий M;

3. Найдём точку A пересечения перпендикуляра и окружности;

4. Построим радиус OA;

5. Построим перпендикуляр к OA, содержащий A;

6. Точка M′ пересечения перпендикуляра с лучом OM – искомая.

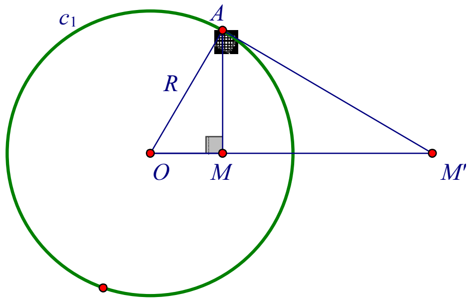


Рис 32

б) М находится вне базисной окружности. В этом случае выполним следующие построения(рис 33):

1. Построим отрезок OM;

2. Построим середину E отрезка OM;

3. Построим окружность с центром в E и радиуса OM/2;

4. Найдём точку A пересечения построенной окружности с базисной окружностью;

5. Построим прямую, перпендикулярную отрезку OM и содержащую точку A;

6. Точка M′ пересечения перпендикуляра с отрезком OM – искомая.

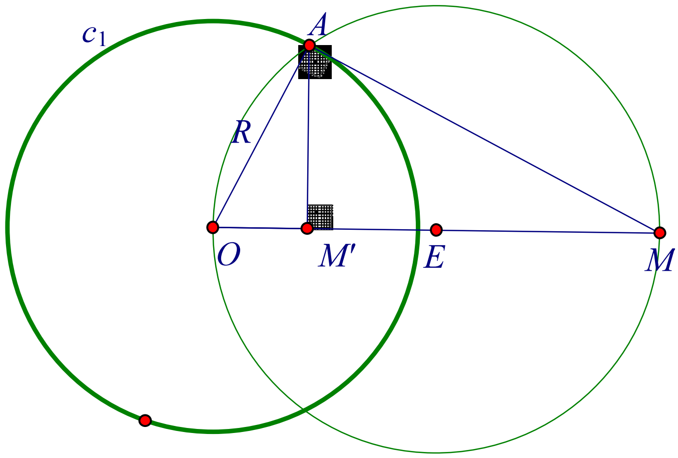


Рис 33

в) Точка M находится на базисной окружности. В этом случае OM = R и из соотношения $OM \cdot OM' = R^2$ следует, что $OM' = R$, т.е. $M = M'$.

Далее рассматривается вывод формул, представляющих аналитическое задание аффинных преобразований, которые используются в дальнейшем для доказательства некоторых свойств инверсии.

Аналитическое задание инверсии

Пусть инверсия задана базисной окружностью c_1 с центром O и радиуса R. Прямоугольную систему координат xOy выберем так, чтобы начало координат совпадало с центром инверсии. Если M – произвольная точка плоскости, отличная от O, то обозначим ее координаты (x,y) и (x′,y′) – координаты образа M′ этой точки в xOy. Из определения инверсии следует, что $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Распишем это векторное равенство в координатной форме и приравняем соответствующие координаты:

$$x' = \lambda x,\ y' = \lambda y \quad (*)$$

Величину λ найдём из равенства $OM \cdot OM' = R^2$, в соответствии с которым $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2} = R^2$ или $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2} = R^2$. Из последнего равенства находим $\lambda = R^2/(x^2+y^2)$. Подставляя найденное значение λ в уравнения (*), получим

$$x' = \frac{R^2 \cdot x}{x^2 + y^2}$$
$$y' = \frac{R^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \qquad (**)$$

Для нахождения образов фигур по задающим их уравнения полезно знать формулы, выражающие нештрихованные координаты (x,y) через штрихованные (x′,y′). Получим формулы (***), аналогичные (**)

$$x = \frac{R^2 \cdot x'}{x'^2 + y'^2}$$
$$y = \frac{R^2 \cdot y'}{x'^2 + y'^2} \qquad (***)$$

Далее формулируются и выводятся некоторые свойства инверсии, причём в каждом случае для их динамической визуализации используется Живая математика.

Свойства инверсии

1. *Если при инверсии M отображается в M′, то M′ отображается в M, т.е. в инверсии любая пара "прообраз - образ" взаимно инверсны (рис 34)*

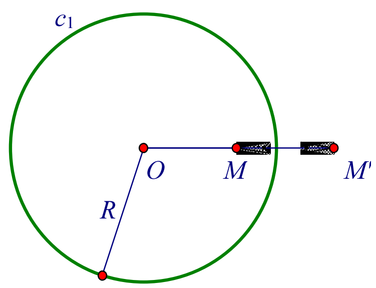


Рис 34

2. *Точки базисной окружности и только они – неподвижны(рис 35)*

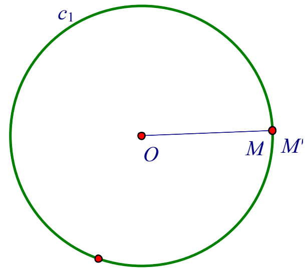


Рис 35

3. *Окружность, не проходящая через центр инверсии, отображается на окружность, а окружность, проходящая через центр инверсии - на прямую* (рис 36).

Если c2 – некоторая окружность, то её уравнение имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ или $x^2 + y^2 -2x_0x -2y_0y + x_0^2+y_0^2 = r^2$ или $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (1)

Подставим в (1) значения x и y из (**), получим:

$$\frac{R^4x'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{R^4y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{aR^2x'}{x'^2+y'^2}+\frac{bR^2y'}{x'^2+y'^2}+c=0$$

После упрощений получаем $cx'^2+cy'^2+aR^2x'+bR^2y'+R^4=0$. (2)

При c=0 (окружность c_2 проходит через начало координат) уравнение (2) является уравнением прямой $ax'+by'+R^2=0$, при $c \neq 0$ – окружностью.

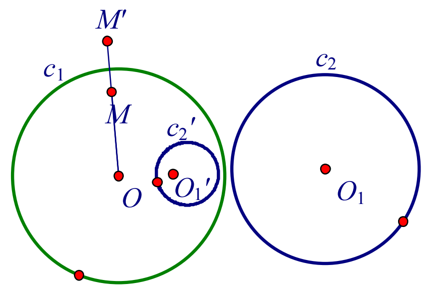


Рис 36

4. *Прямая, не проходящая через центр инверсии, отображается на окружность, проходящую через центр инверсии, а прямая, проходящая через центр инверсии – сама на себя* (рис 37).

Подставим в уравнение прямой $ax + by + c = 0$ значения x и y из (**). Получим $cx'^2+cy'^2+aR^2x'+bR^2y'=0$ (3). При $c \neq 0$ уравнение (3) определяет окружность, проходящую через начало координат (центр инверсии), при c = 0 – прямую, проходящую через O.

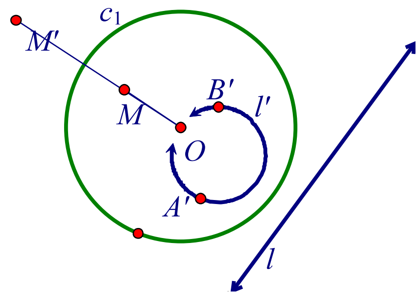


Рис 37

5. *При инверсии сохраняются углы между кривыми* (рис 38).

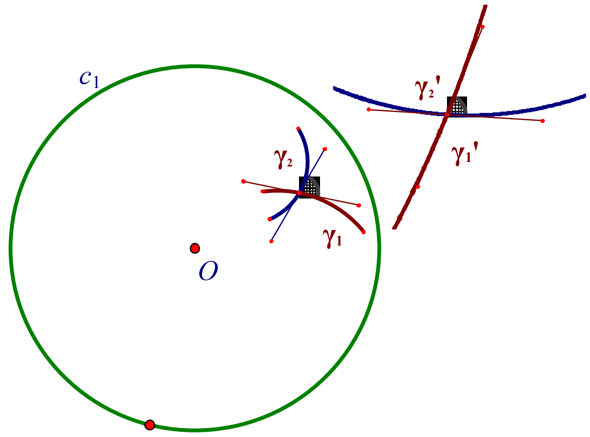


Рис 38

После введение этого свойства дается определение угла между пересекающимися кривыми.

Опр. *Углом между пересекающимися кривыми называется угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения.*

Свойство приводится без доказательства.

Построение образов окружностей и прямых при инверсии

Построения циркулем и линейкой образы окружностей и прямых при инверсии (рис 39).

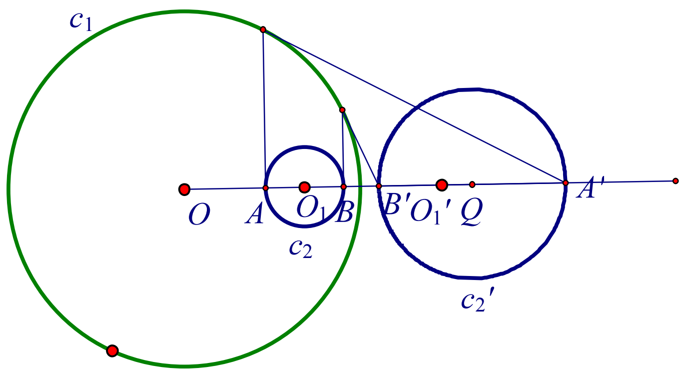


Рис 39

Алгоритм построения образа окружности в случае, когда окружность не содержит точку О , и в случае, если окружность содержит точку О, легко усмотреть из чертежа.

При построении образа прямой, можно воспользоваться тем, что инверсия I совпадает с преобразованием, обратным к инверсии I.(рис 40)

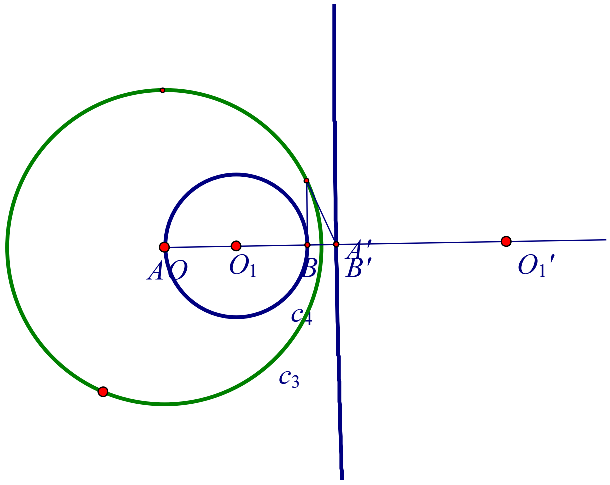


Рис 40

Инверсию можно использовать при решении задач элементарной геометрии. В качестве примера приведём решение задачи об окружности проходящей через две заданные точки, визуальную поддержку осуществим с помощью динамического чертежа, созданного в среде Живая математика.

Задача. *Построить окружность c_x, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной окружности c_2, если A и B лежат вне данной окружности(рис 41).*

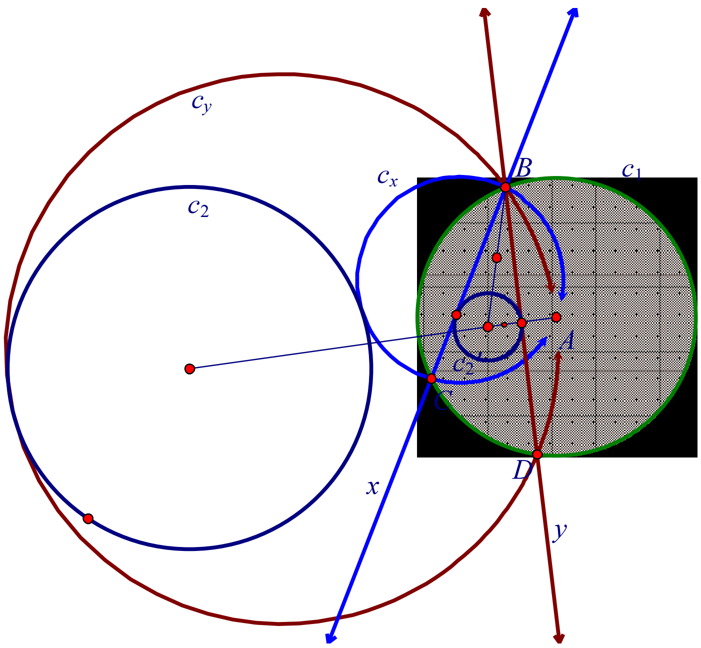


Рис 41

Построение:

1. Базисную окружность c_1 с центром A и радиуса AB.
2. Образ c_2' окружности c_2 при инверсии относительно c_1.
3. Касательные x и y к окружности c_2' из точки B.
4. Образы c_x и c_y прямых x и y соответственно при инверсии относительно c_1.
5. c_x и c_y искомые окружности.

§9. Результаты педагогического эксперимента по апробации разработанной методики

В данном эксперименте принимали участие 3 курса КГПУ им. В.П. Астафьева.

Констатирующий этап эксперимента проводился на базе КГПУ им. В.П. Астафьева. Для диагностики был разработан набор заданий базового уровня сложности. Студентам был предложен контрольный срез, состоящий из восьми вопросов по следующим темам: Симметрия, параллельный перенос, поворот, гомотетия, подобие. Материал взят из школьного курса геометрии.

Для эксперимента были выбраны две группы 31 и 33. Количество студентов, проходивших тестирование в контрольной группе, составляет 26 человек. Количество учащихся, проходивших тестирование в экспериментальной группе, составляет 24 человека.

По результатам первого тестирования были получены данные представленные в таблице 2:

Таблица 2

Результаты входного тестирования учащихся

№ задания	Количество верных ответов	
	Контрольная группа	Экспериментальная группа
1	10	11
2	15	12
3	6	9
4	3	2
5	2	3
6	5	7
7	13	15
8	1	2

На основе результатов тестирования, мы определили процент выполнения каждого из заданий учащимися (таблица 3):

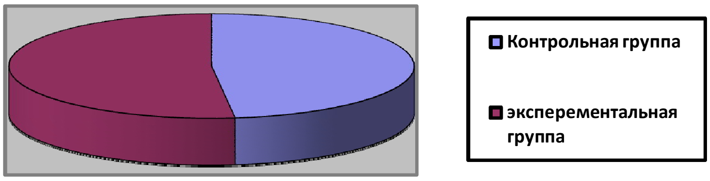
Таблица 3

Результаты входного тестирования учащихся в процентном соотношении

№ задания	Количество верных ответов	
	Контрольная группа 26	Экспериментальная группа 24
1	38 %	45%

2	57 %	50%
3	23%	37%
4	11%	8%
5	7%	12%
6	19%	3%
7	50%	62%
8	4%	8%
процент выполнения по группе	26%	28%

Рис. 42. Диаграмма количества верных ответов в процентном соотношении



Полученные результаты констатирующего этапа эксперимента показали, что есть студенты, которые совсем не обладают навыками решения заданий по теме «Геометрические преобразования», необходимыми для решения школьных задач.

Формирующий этап эксперимента проводился также на базе КГПУ им. В.П.Астафьева. В рамках этого этапа была реализована описанная нами методика обучения будущий учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием программы «Живая математика». В ходе чего, нами было отмечено, что у большинства студентов присутствует повышенный интерес, многие из них проявили инициативу, самостоятельность при решении задач.

По итогам формирующего этапа эксперимента, нами снова была проведена оценка и измерение уровня знаний у учащихся по предмету математика. Для диагностики был использован тот же набор заданий, что и для констатирующего этапа эксперимента:

По результатам итогового тестирования нами были получены результаты приведенные в таблице 4:

Таблица 4

Результаты итогового тестирования

№ задания	Количество верных ответов	
	Контрольная группа	Экспериментальная группа
1	20	20
2	18	19
3	13	17
4	10	18
5	8	17
6	10	10
7	25	13
8	9	21

На основе результатов тестирования, мы определили процент выполнения каждого из заданий учащимися (таблица 5):

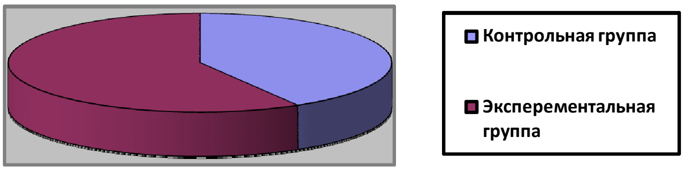
Таблица 5

Результаты итогового тестирования учащихся в процентном соотношении

№ задания	Количество верных ответов	
	Контрольная группа 26	Экспериментальная группа 24
1	76%	83%
2	69%	76%

3	50%	70%
4	38%	75%
5	30%	70%
6	38%	42%
7	96%	51%
8	34%	87%
процент выполнения по группе	49%	69%

Рис. 43. Диаграмма количества верных ответов в процентном соотношении



Полученные результаты заключительного этапа эксперимента показали, что все студенты повысили уровень знаний, необходимых при решении некоторых заданий и готовы применять эти знания и опыт на практике.

Во время проведения эксперимента, в целях диагностики были использованы такие метод тестирование. И комплекс обучающих инструментов: файлы с заданиями и тренажерами, созданные в компьютерной среде «Живая математика».

Заключение

Целью данной исследовательской работы было: теоретически обосновать, разработать и экспериментально проверить методику обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды Живая математика.

Для достижения данной цели, были решены следующие задачи:

а) проанализировать темы модуля «Преобразования» курса геометрии для студентов бакалавриата, направление подготовки Педагогическое образование, профиль Математика, с точки зрения эффективности использования при их обучении среды Живая математика;

б) изучить методические возможности среды Живая математика как виртуальной лаборатории, позволяющей эффективно использовать эту среду при обучении студентов педагогических вузов геометрическим преобразованиям;

в) разработать методику обучения геометрическим преобразованиям студентов педагогического вуза на базе Живой математики;

г) провести педагогический эксперимент по апробации разработанной методики в реальном учебном процессе и оценить ее эффективность.

В первой главе был проведен краткий исторический обзор изучения геометрических преобразований в школьном курсе и в педвузе.

Так же описаны методические возможности программы «Живая математика» при изучении каждого вида преобразований, приведен алгоритм построения образа геометрических фигур. Описаны Основные компоненты (целевой, содержательный, организационный и оценочный) структуры методики обучения геометрическим преобразованиям на базе Живой математики. Выделены основные дидактические принципы отбора содержания обучения геометрическим преобразованиям.

Во второй главе представлена разработанная нами методика, были проанализированы темы Модуля 3 «Геометрические преобразования», представлена схема изложения материала на лекционных занятиях, а так же приведены примеры решения задач. С использованием СДГ «Живая математика», дано обоснование необходимости динамической визуализации данного материала, связанное с важностью и абстрактностью таких ключевых понятий, как преобразование, движение, подобие.

Результаты педагогического эксперимента подтверждают целесообразность выбранной нами методики. Так как проведения лекционных и лабораторно-практических занятий с использованием Живой математики, позволяет строить обучение геометрии в стиле экспериментальной математики с элементами исследования, активно вовлекать студентов в учебный процесс, предоставляет обучающимся возможность самостоятельно формулировать правдоподобные гипотезы, мотивирует к участию в их строгом математическом обосновании.

Таким образом, все поставленные задачи решены, цель исследования достигнута.

К работе прилагается компакт-диск, содержащий мультимедийное пособие по теме: «Движение».

Библиографический список

1. ПРИМЕРНАЯ ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ от 8 апреля 2015 г.

2. Анищенко С.А Лекции по геометрии: уч. пособие. Ч 1-3 Красноярск: КГПУ, 1995-2009

3. Алтынов П.И. Геометрия. Тесты. 7-9 кл. Учебно-методическое пособие. М. Дрофа, 2000 г. 112

4. Атанасян, Л.С. Геометрия, 7-9: учеб. Для общеобразоват. Учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Будузов, С.Б. Кадомцев и др.- М.: Просвещений, 2005.- 384 с.: ил.

5. Гусев В.А. Индивидуализация учебной деятельности учащихся как основа дифференцированного обучения математике в средней школе // Математика в школе. -1990. -№4. с. 27-31.

6. Гусев В.А. Как помочь школьнику полюбить математику? М.: Авагард, 1994. - 168 с.

7. Гусев, В.А. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений/ В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 268 с.

8. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. – М.: ООО Издательство «Вербум-М» «ООО «Издательский центр «Академия», 2003. – 432 с.

9. Дорофеев Г.В. и др. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. -1990. -№4.-с. 15-21.

10. Дорофеев Г.В. Содержание школьного математического образования: основные принципы и механизмы отбора // К концепции содержания школьного математического образования. М.: Изд. АПН СССР, 1991. - с. 5-23.

11. Дрозина В.В. Педагогические условия развития умений творческой самостоятельной работы у школьников (На материале изучения

математических дисциплин). Автореф. дис. канд. пед. наук, Челябинск, 1993.-18с.

12. Еленина А.М. Сборник вопросов и упражнений по геометрическим преобразованиям. Красноярск, 1969.-93с.

13. Желудев И.С. Симметрия и ее приложения. 2-е изд. переработ, и дополн. М.: Энергоатомиздат, 1983.

14.Изучение геометрии в 7 - 9 кл.: Методические рекомендации к учеб.: Книга для учителя/ Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, Ю.А.Глазков и др. - 3-е изд. - М.: Просвещение,2000. -255с.

15.Коджаспирова, Г.М. Технические средства обчечения и методика их использования : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений/Г.М. Коджаспирова, К.В. Петров.-М.: Издательский центр «Академия», 2008.-352с.

16.Методика преподавания избранных тем школьного курса математики: Учебно-методическое пособие для студентов педвузов по физико-математическим специальностям / Под общей редакцией Н.А. Терешина. Балашов: Изд-во БГТШ, 1995.

17. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студ. пед. инс-в по спец. 2104 и 2105 / А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина и др.; Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. М.: Просвещение, 1985. - 336 с.

18.Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для студентов пед. Институтов по спец. А.Я. Блох и др.; Сост. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. - М., Просвещение, 1985. - 336с.

19. Мишин В.И. Геометрические преобразования в курсе планиметрии средней школы. Автореф. дис .канд.пед.наук. М., 1953.-22с.

20. Майер В.Р. Ворошилова А.А. Применение среды Живая математика при обучении геометрическим преобразованиям студентов – будущих учителей математики // Вестник КГПУ им В.П. Астафьева 2018. №10 С.24-29.

21.Майер В.Р. Апакина Т.В. Ворошилова А.А. Системы динамической геометрии как средство обучения геометрическим преобразования будущих учителей математики // Вестник КГПУ им В.П. Астафьева 2016. №9 С.36-42.

22.Погорелов, А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов.- 5-е изд.- М.: Просвещение, 1995.- 383 с.: ил.

23.Погорелов, А.В. Геометрия: Учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов.- 7-е изд.- М.: Просвещение, 2006.- 224 с.: ил.

24.Поурочное планирование к учебнику Погорелова А.В. и др – 4-е изд – М.:2015ю – 115 с

25.Поурочные планы к учебнику Смирнова В.А. Смирновой И.М. – 5-е изд. - М.: 2014. - 205 с

26.Принцип наглядности в дидактике: [Электронный документ].-(http://psylist.net/pedagogika/00320.htm.). 03 апреля 2009.

27.Российская педагогическая энциклопедия: В 2 т. /Гл. ред. В.В.Давыдов. - М.: Большая Российская энциклопедия, 1996. - 608с.

28.Савченко, С.В. Планиметрия. Электронный учебник-справочник. Для школьников и абитуриентов : Наглядное пособие. / С.В. Савченко, С.А. Хованский.- М.: «Кудиц», 1998.- 200с.

29.Смирнова И.М. Смирнов В.А., 2-е изд., испр. - М.: Мнемозина, 2007

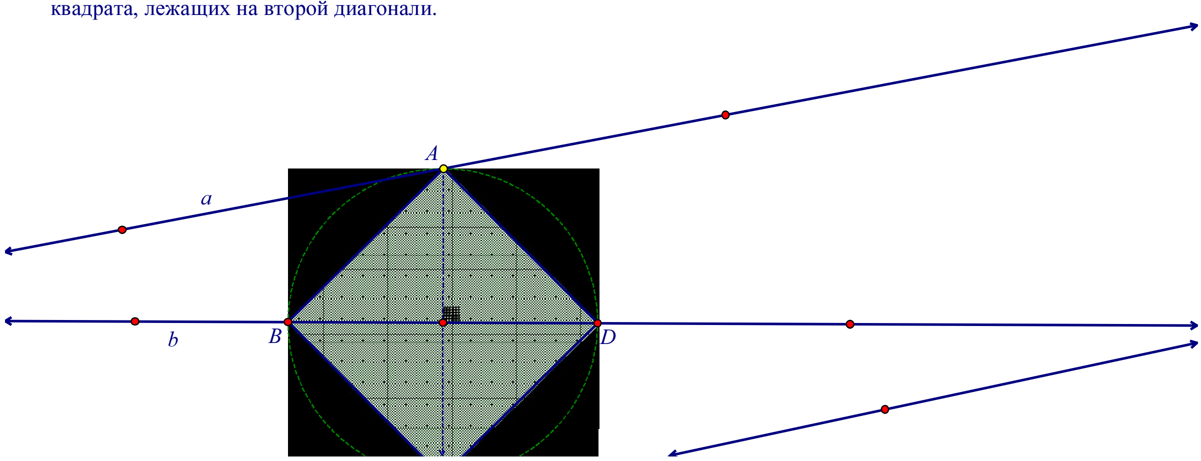
30.УМК «Живая математика»

31.Федеральный закон РФ «Об образовании в Российской Федерации» № 273-ФЗ. Текст с изменениями и дополнениями на 2014 год – М.: Эксмо, 2014. – 144с

Приложения

«Приложение А»

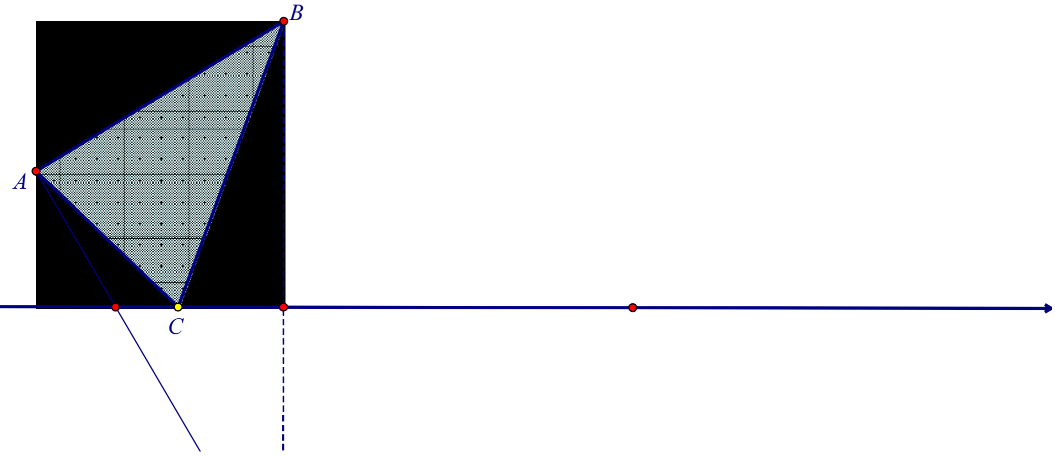
Задача 1. Построить квадрат, если заданы три прямые, одна из которых содержит диагональ квадрата, а две другие - по одной из двух вершин квадрата, лежащих на второй диагонали.



Задача 2. Две точки А и В лежат по одну сторону относительно прямой. Построить точку С на этой прямой, чтобы периметр треугольника АВС был наименьшим.

P_{ABC} = 21,74 см

P_{ABC}
22,24 см
21,54 см
21,34 см
21,48 см
21,74 см



Задача 3. Внутри острого угла CDE дана точка A. Построить треугольник ABC наименьшего периметра с вершинами B и C, лежащими по одной на сторонах угла.

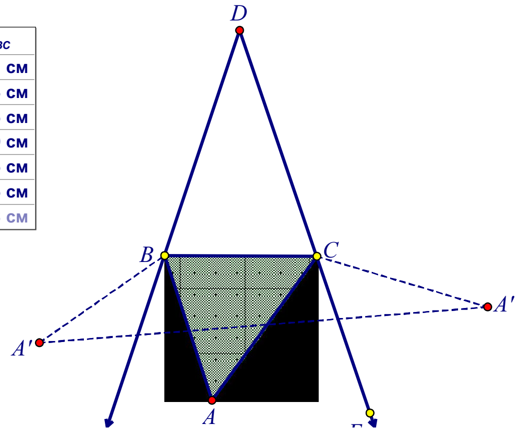
Расположить треугольник правильно

Спрятать объекты для анализа

Показать искомый треугольник

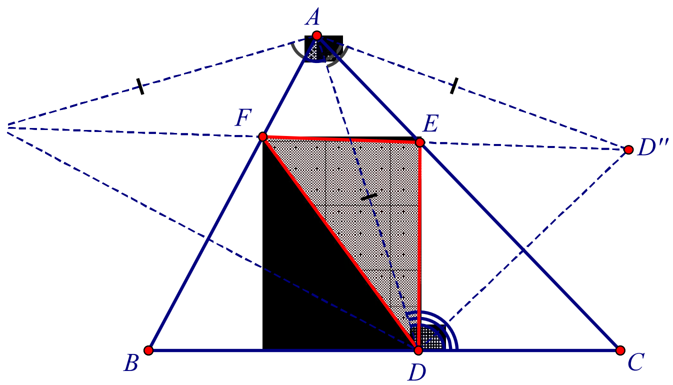
P_{ABC} = 13,28 см

P_{ABC}
15,21 см
14,53 см
14,16 см
14,10 см
14,06 см
14,06 см
13,28 см



Задача 4. В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра так, чтобы его вершины лежали по одной на сторонах данного треугольника.

D = 107,79° AD = 8,14 см AD' = 8,14 см AD'' = 8,14 см $D'D''$ = 15,47 см P_{DEF} = 15,47 см

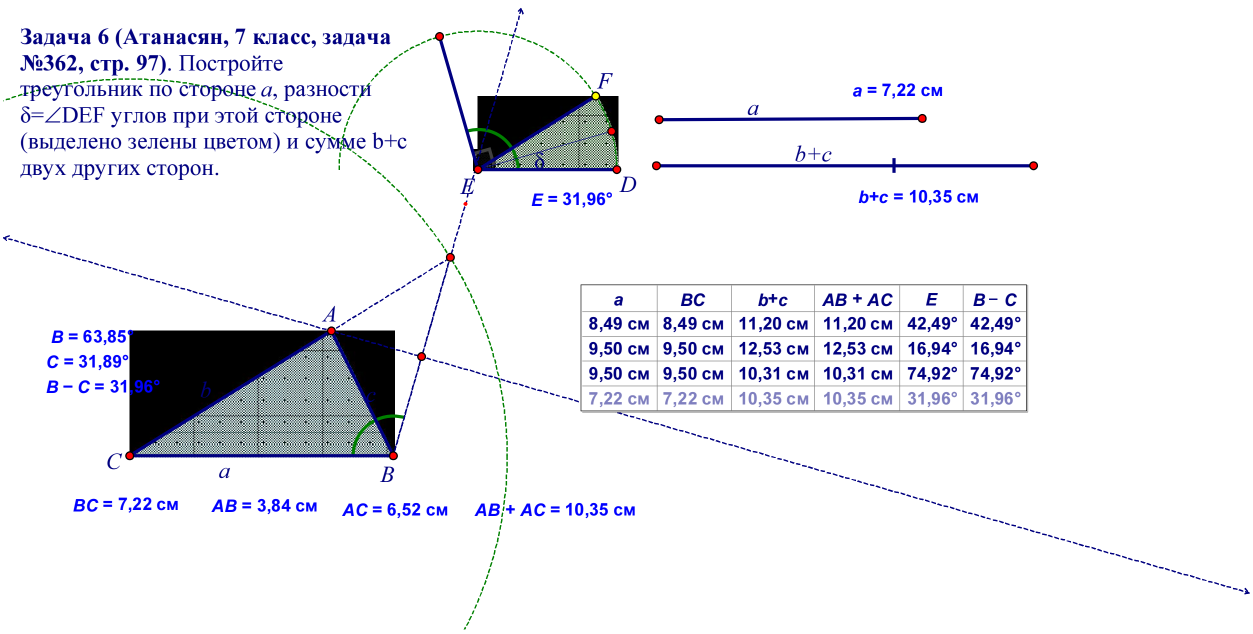


D	AD	AD'	AD''	D'D''	P_{DEF}
131,23°	10,31 см	10,31 см	10,31 см	19,59 см	19,59 см
121,11°	9,05 см	9,05 см	9,05 см	17,21 см	17,21 см
109,33°	8,22 см	8,22 см	8,22 см	15,61 см	15,61 см
90,00°	7,75 см	7,75 см	7,75 см	14,73 см	14,73 см
85,71°	7,77 см	7,77 см	7,77 см	14,77 см	14,77 см
78,61°	7,91 см	7,91 см	7,91 см	15,03 см	15,03 см
69,94°	8,25 см	8,25 см	8,25 см	15,68 см	15,68 см
63,99°	8,63 см	8,63 см	8,63 см	16,39 см	16,39 см
61,97°	8,78 см	8,78 см	8,78 см	16,69 см	16,69 см
107,79°	8,14 см	8,14 см	8,14 см	15,47 см	15,47 см

Переместить D в искомую точку

Анимация D

Задача 6 (Атанасян, 7 класс, задача №362, стр. 97). Постройте треугольник по стороне *a*, разности δ=∠DEF углов при этой стороне (выделено зелены цветом) и сумме b+c двух других сторон.

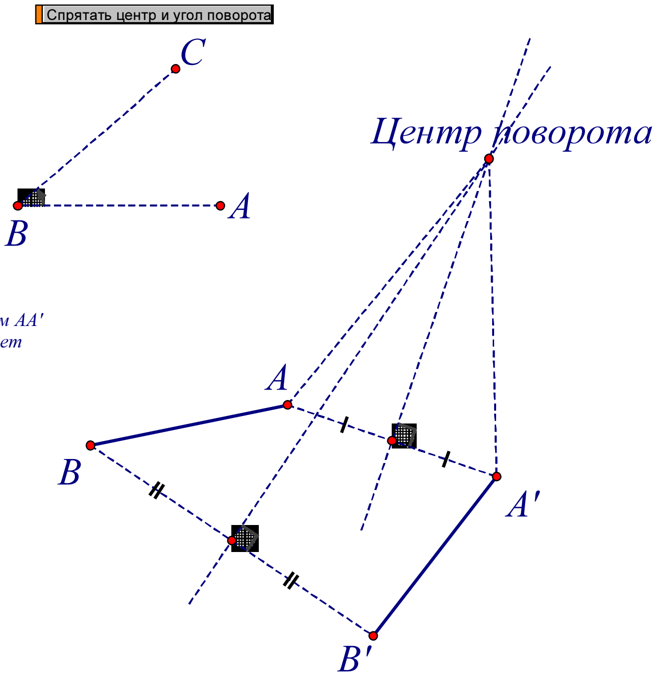


a	BC	b+c	AB + AC	E	B − C
8,49 см	8,49 см	11,20 см	11,20 см	42,49°	42,49°
9,50 см	9,50 см	12,53 см	12,53 см	16,94°	16,94°
9,50 см	9,50 см	10,31 см	10,31 см	74,92°	74,92°
7,22 см	7,22 см	10,35 см	10,35 см	31,96°	31,96°

«Приложение Б»

Черный ящик

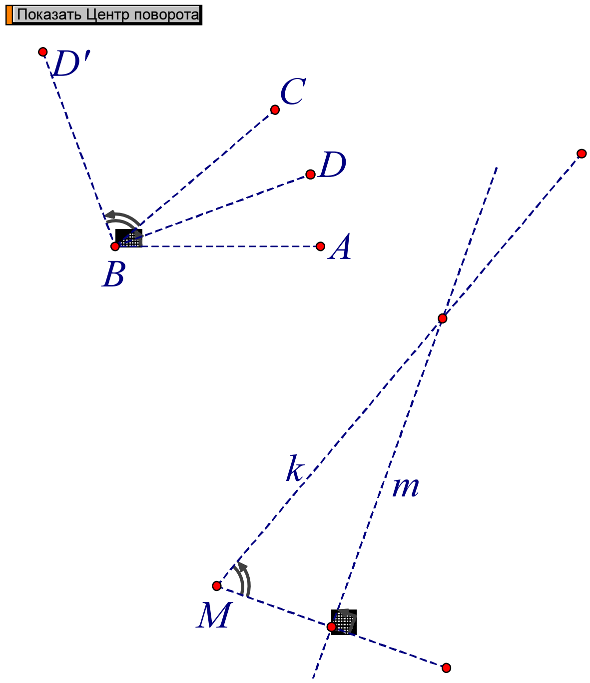
Задача 2. *Даны отрезок AB и его образ A'B' при повороте. Построить центр поворота и угол поворота.*



Решение.
Построим серединные перпендикуляры m и k к отрезкам AA' и BB'их точка пересечения и будет искомой точкой.
"""

Черный ящик

Задача 1. *Даны угол поворота ABC, точка M и ее образ M' при повороте на угол ABC. Построить центр поворота.*



Решение 1.
Построим серединный перпендикуляр m к отрезку MM', зададим для него опцию Оставлять след. Начнем перемещать точку M по рабочему столу, получим пучок прямых с центром в искомой точке.

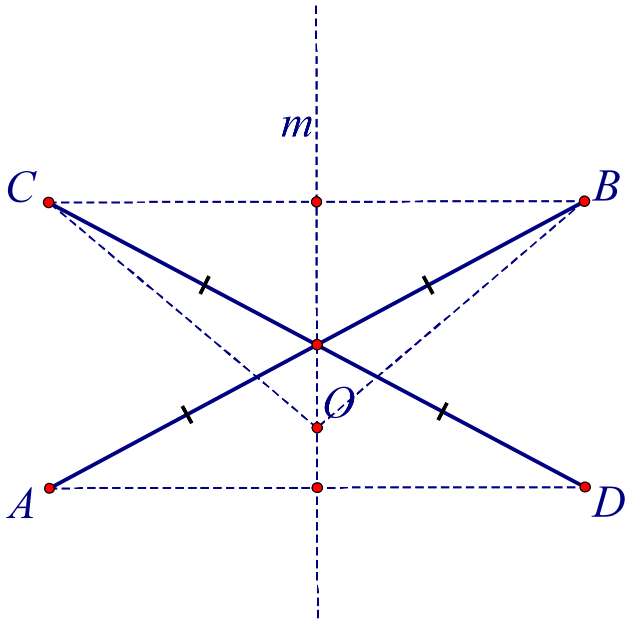
Решение 2.
Построим серединный перпендикуляр m к отрезку MM', построим угол ∠CBD' = 90° - ∠ABC/2, повернем луч MM' вокруг точки M на этот угол, точка пересечения образа луча MM' с серединным перпендикуляром и будет искомой точкой.
"""

Черный ящик

Задача 4. *Даны два отрезка равной длины. Всегда ли существует поворот, отображающий один из этих отрезков на второй?*

Переместить О правильно

Если ACBD - прямоугольник (или квадрат), то в этом случае решений тоже два.



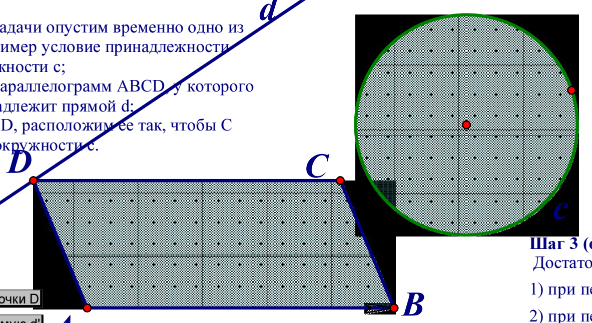
«Приложение В»

Решение задач методом параллельного переноса

Задача 1. Даны отрезок AB, окружность c и прямая d. Построить соответственно на c и d точки C и D такие, что четырехугольник ABCD - параллелограмм.

Шаг 1 (построение чертежа).
В предположении, что задача решена, создаем чертеж на рабочем поле, для этого:
1) построим отрезок AB, окружность c и прямую d;
2) в условии задачи опустим временно одно из условий, например условие принадлежности точки C окружности c;
3) построим параллелограмм ABCD, у которого точка D принадлежит прямой d;
4) перемещая D, расположим ее так, чтобы C оказалась на окружности c.

Анализ



Анимация точки D

Показать прямую d'

Спрятать объект: Надписи

Шаг 2 (выбор вспомогательного преобразования).
1) перемещая точку D про прямой d, можно предположить, что C перемещается по линии, напоминающей прямую;
2) подкрепим свое предположение, для этого зададим для C опцию "Оставлять след", зададим анимацию, увидим, что C вычертит прямую, которая пересечет c в искомых точках;
3) анализируя вычерченную прямую и пары точек A, B и C, D, мы можем сформулировать гипотезу о том, что вспомогательная прямая получается из прямой d при переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$.
4) подкрепим гипотезу заданием переноса вектором $\overrightarrow{AB}$ и построением образа d.

Шаг 3 (отыскание способа построения параллелограмма).
Достаточно найти способ построения C:
1) при перносе на $\overrightarrow{AB}$ точка D отобразится на точку C, т.е. C = D';
2) при перносе на $\overrightarrow{AB}$ прямая d отобразится на прямую d' (для ее построения достаточно построить образ любой точки прямой d и провести через эту точку прямую, параллельную d);
3) так как точка D принадлежит d, то точка D' принадлежит d';

Спрятать объект: Надписи

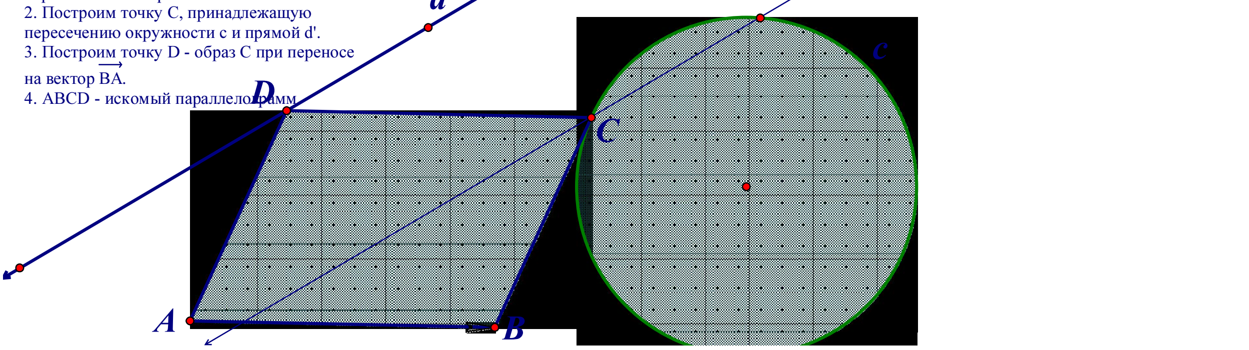
Решение задач методом параллельного переноса

Задача 1. Даны отрезок AB, окружность c и прямая d. Построить соответственно на c и d точки C и D такие, что четырехугольник ABCD - параллелограмм.

Построение

Шаг 1 (построение данных фигур).
Построим отрезок AB, окружность c и прямую d.

Шаг 2 (построение искомой фигуры).
1. Построим прямую d' - образ прямой d при переносе на вектор AB.
2. Построим точку C, принадлежащую пересечению окружности c и прямой d'.
3. Построим точку D - образ C при переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$.
4. ABCD - искомый параллелограмм.

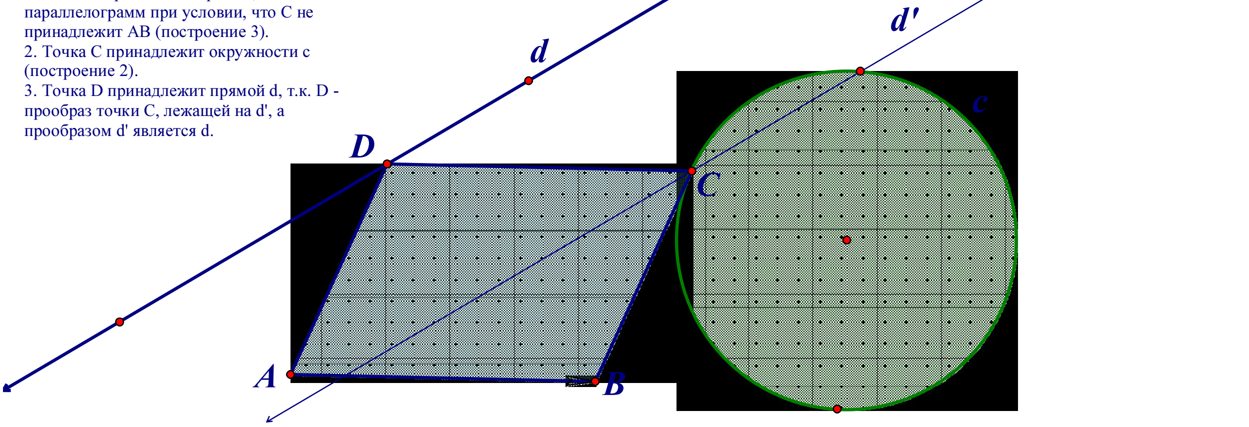


Решение задач методом параллельного переноса

Задача 1. Даны отрезок AB, окружность c и прямая d. Построить соответственно на c и d точки C и D такие, что четырехугольник ABCD - параллелограмм.

Доказательство

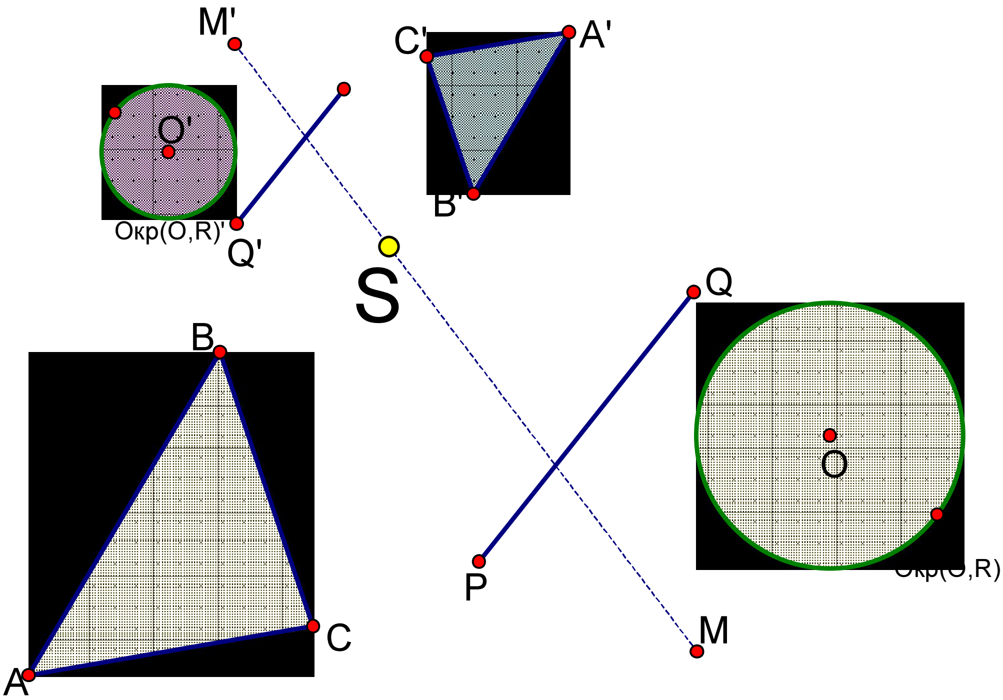
1. Т.к. векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то ABCD - параллелограмм при условии, что C не принадлежит AB (построение 3).
2. Точка C принадлежит окружности c (построение 2).
3. Точка D принадлежит прямой d, т.к. D - прообраз точки C, лежащей на d', а прообразом d' является d.



«Приложение Г»

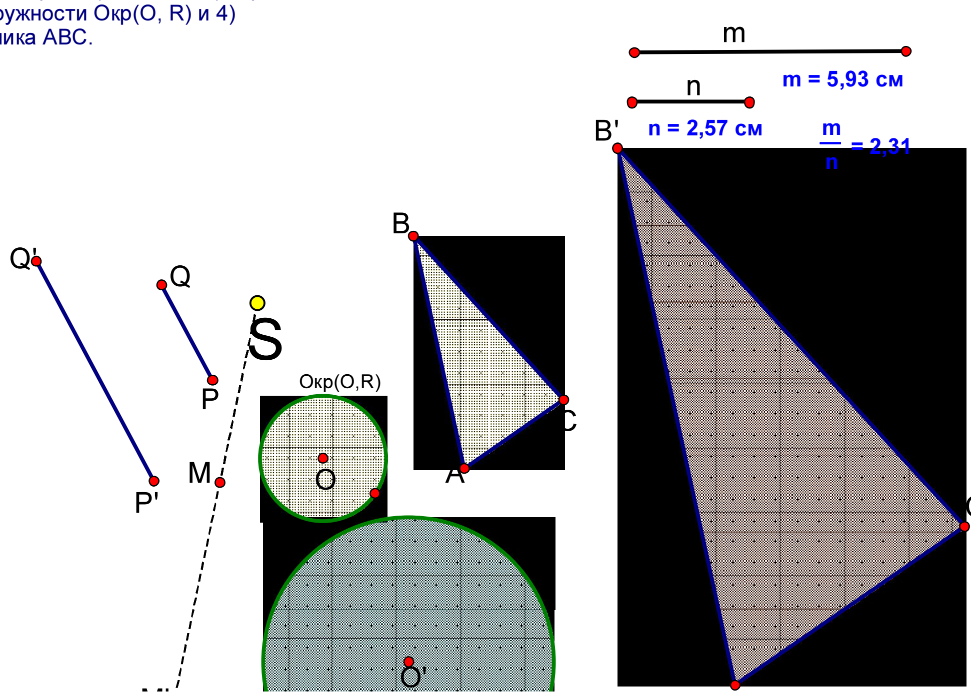
Задача 185 б). Задать гомотетию центром S и коэффициентом б) k= -1/2. Построить образ: 1) точки M, 2) отрезка PQ, 3) окружности Окр(O, R) и 4) треугольника ABC.

Гомотетия



Гомотетия

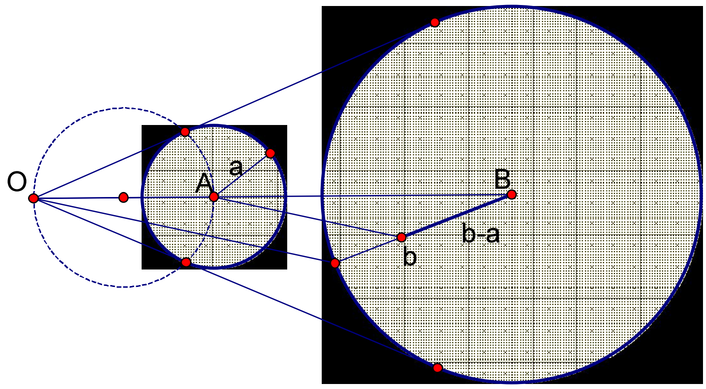
Задача 185 в). Задать гомотетию центром S и коэффициентом в) k=m/n. Построить образ: 1) точки M, 2) отрезка PQ, 3) окружности Окр(O, R) и 4) треугольника ABC.



Задача 188. Постройте центр и найдите коэффициент гомотетии, при которой одна данная окружность отображается на другую данную окружность. Проверьте полученный результат с помощью соответствующих построений и команд Живой геометрии.

Решение.

1. Требуется построить такую точку O, чтобы отношение вектора $\overrightarrow{OB}$ к вектору $\overrightarrow{OA}$ равнялось b/a=k - отношению радиуса b желтой окружности к радиусу a зеленой окружности, т.е. выполнялось OB/OA=b/a.
2. Примем B за центр новой гомотетии, отображающей A в точку O. Найдем коэффициент x этой гомотетии. Поскольку OB/AB = x, то OB/(OB-OA) = x или (OB-OA)/OB=1/x. Отсюда, 1-a/b=1/x. Но тогда x = b/(b-a).
3. Построим отрезок b-a и найдем образ O точки A при гомотетии с центром в точке B и коэффициентом x = b/(b-a).
4. Очевидно, гомотетия, отображающая зеленую окружность на желтую, задается центром O и коэффициентом k=b/a.



«Приложение Д»

Решение задач на построение методом инверсии

Метод инверсии:

Сущность метода инверсии заключается в следующем. Наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются фигуры, инверсные им или их частям. Этого иногда бывает достаточно для нахождения таких связей между искомыми и данными, которые нужны для решения задачи.

Задача 1. *Через две данные точки A и B провести окружность, ортогональную данной окружности c(O, r).*

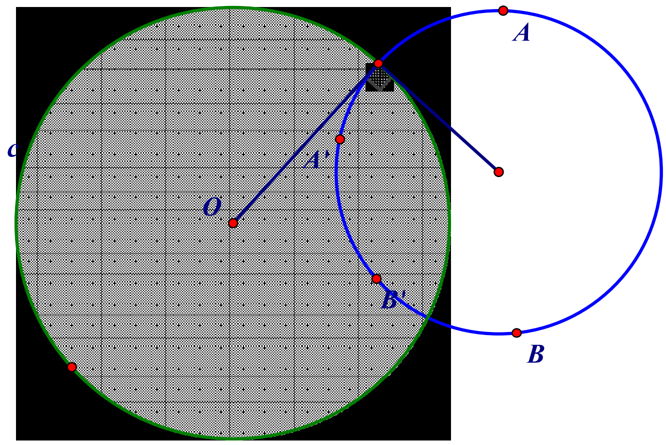
Построение. Примем данную окружность за базисную, построим образ A' точки A, через три точки проведем окружность.

Спрятать точку A'

Спрятать окружность, содержащую A, B и A'

Спрятать точку B'

Спрятать радиусы



Решение задач на построение методом инверсии

Задача 2. Даны отрезок, точка O и две не проходящие через неё прямые a и b. Проведите через точку O такой луч, чтобы произведение его отрезков от точки O до до точек пересечения с данными прямыми было равно квадрату данного отрезка.

Построение. Найдем образ a' прямой a при инверсии с центром O и радиусом R. Общая точка B≠O окружности a' и прямой b будет лежать на искомом луче.

Спрятать базисную окружность

Спрятать пересечение басиса и прямой a

Спрятать образ прямой a

Спрятать окружность, сод O, P, Q

Спрятать первый искомый луч

Спрятать второй искомый луч

Показать проверку