МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В. П. Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)

Выпускающая(ие) кафедра(ы) Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

Кузьмина Оксана Александровна
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема Обучение решению задач на построение методом геометрических мест точек в основной школе с использованием среды Живая математика

Направление подготовки 44.03.05
(код направления подготовки)

Профиль Математика и информатика
(наименование профиля для бакалавриата)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой д.п.н., профессор, Майер В.Р.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)
06.06.2018
(дата, подпись)

Руководитель
д.п.н., профессор, Майер В.Р.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

Дата защиты

Обучающийся Кузьмина О.А.
(фамилия, инициалы)
06.06.18
(дата, подпись)

Оценка
(прописью)

Красноярск 2018

Оглавление

Введение

Актуальность: Как известно, решение геометрических задач на построение циркулем и линейкой способствует развитию исследовательских умений школьников, формирует поисковые навыки решения задач прикладной направленности, положительно влияет на математическую подготовку школьника. В последние годы в образовательной практике учителей математики стали использоваться так называемые системы динамической геометрии (СДГ), которые созданы для поддержки большинства тем элементарной математики, включая решение конструктивных задач. Таким образом, разработка компьютерного сопровождения средствами СДГ Живая математика тем школьного курса геометрии, связанных с решением задач на построение циркулем и линейкой (конструктивных задач), представляется актуальным.

Проблема исследования: Проблема заключается в поиске ответа на вопрос: какой должна быть методика применения СДГ "Живая математика" при обучении геометрии в основной школе, чтобы большинство школьников научилось решать элементарные задачи на построение методом геометрических мест точек?

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс в основной школе, ориентированный на использование в обучении математике систем динамической геометрии.

Предмет исследования: методика обучения геометрическим построениям на плоскости в основной школе с использованием среды Живая математика.

Цель исследования – разработать и экспериментально проверить методику компьютерного сопровождения решения геометрических задач на построение методом ГМТ на базе системы динамической геометрии Живая математика.

Задачи исследования:

а) проанализировать темы школьного учебного материала, связанные с решением конструктивных задач, с точки зрения использования при обучении этим темам системы динамической геометрии Живая математика;

б) изучить динамические, конструктивные и вычислительные возможности среды Живая математика как средство обучения решению конструктивных задач методом ГМТ;

в) подготовить компьютерное сопровождение обучения решению конструктивных задач методом ГМТ с использованием среды Живая математика в виде GSP-файлов;

г) разработать элективный курс «Конструктивная геометрия с Живой математикой» для 7-9 классов, осуществить его апробацию.

Глава 1. Основы теории геометрических построений циркулем и линейкой, обоснование целесообразности применения систем динамической геометрии при обучении учащихся основной школы решению конструктивных задач

§1.2. Исторический обзор возникновения и развития конструктивной геометрии

Геометрические построения привлекли внимание древнегреческих математиков ещё в шестом – пятом веках до нашей эры. Ими занимались почти все крупные греческие геометры: Пифагор (шестой век до нашей эры) и его ученики, Гиппократ (пятый век до нашей эры), Евклид, Архимед, Аполлоний (третий век до нашей эры), Папп (третий век нашей эры) и многие, многие другие.

Математики этого периода знакомы были с решением многих нетривиальных задач. Так, например, ученики школы Пифагора уже умели решать такую сравнительно сложную задачу, как построение правильного пятиугольника, знали решения многих других конструктивных задач.

Пятый век до нашей эры замечателен тем, что именно в это время возникли знаменитые классические задачи о квадратуре круга, об удвоения куба, о трисекции угла. Эти задачи, которые, как оказалось впоследствии, не разрешимы с помощью циркуля и линейки, в течении многих веков вызывали живейший интерес различных исследователей. В течение почти двух тысяч лет с тех пор как были сформулированы эти задачи, большинство известных математиков предпринимали попытки найти их решение. Следует отметить, что и в настоящее время отдельные любители математики продолжают искать их решение.

Шестой век до нашей эры знаменателен тем, что греческие мыслители разработали ту общую схему решения геометрической задачи на построение (анализ – построение – доказательство – исследование), которой мы пользуемся и поныне.

Вся история геометрии и некоторых других разделов математики тесно связана с развитием теории геометрических построений. Важнейшие аксиомы геометрии, сформулированные основоположником научной геометрической системы Евклидом примерно в 300 году до рождества Христова, ясно показывают, какую роль сыграли геометрические построение в формировании геометрии.

Древнегреческие геометры успешно справлялись с труднейшими задачами на построение с помощью циркуля и линейки. Так, например, Аполлоний Пергский решил известную задачу, носящую его имя: «Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей». Некоторые вопросы алгебры связывались в то время учёными с решение конструктивных задач, например решение уравнений первой и второй степени греки давали в геометрической форме. При этом корни уравнения находились с помощью определенных геометрических построений. Одним из важнейших методов решения конструктивных задач в то время был метод геометрических мест точек, или как его сейчас иногда называют – метод пересечения множеств.

Средневековье мало дало в области развития конструктивной геометрии, хотя её занимались многие математики этого времени. Достаточно сказать, что некоторые задачи, решенные древнегреческим математиком, оказались не под силу математикам первых полутора тысячелетий нашей эры. Так, например, задача Аполлония, решение которой было утрачено, была снова решена в XVI в.

Только в новое время (XVII – XX века) теория геометрических построений стало развиваться дальше главным образом в связи с созданием новых разделов математики. С другой стороны, и вопросы конструктивной геометрии наряду с другими стимулами способствовали созданию новых математических теорий и методов. В тесной связи с геометрическими построениями оказались аналитическая геометрия, методы изображений, начертательная геометрия, теория алгебраических уравнений (в частности, вопросы проводимости), теория алгебраических и трансцендентных чисел, теория аналитических функций.

Геометрические построения в евклидовой плоскости, которые изучались древними и преимущественно изучаются и поныне, существенно зависят от аксиом евклидовой геометрии. В геометрии, созданной гениальным русским учёным Н. И. Лобачевским, имеет место иная система аксиом, а поэтому и теория геометрических построений во многом иная. Решения ряда важнейших задач на построение в неевклидовой плоскости было дано ещё в 1832 году замечательным венгерским математиком Яношем Больаи (1802 – 1860). Фундаментальные исследования в этой области принадлежат российским учёным – Д. Д. Мордухай – Болтовскому и его ученикам, а также А. С. Смогоржевскому.

Большой практический интерес представляют приближённые способы решения геометрических задач на построение. Часто оказывается, что приближённый способ решения с точки зрения чертёжной практики значительно выгоднее и проще теоретически точного способа построения. В течение многовековой истории конструктивной геометрии были даны многие интересные приближённые способы решения знаменитых классических задач, а также и многих других задач. Ещё Архимед дал приближённый способ построения правильного семиугольника; из его же исследований можно вывести приближённый способ решения задачи о квадратуре круга. Приближённые методы геометрических построений составляют в настоящее время важную часть теории геометрических построений.

В настоящее время теория геометрических построений представляет обширную и глубоко развитую область математики, связанную с решением разнообразных принципиальных вопросов, уходящих в другие ветви математики. Изложение многих геометрических вопросов опирается на геометрические построения. Это особенно характерно для «доказательств существования»: существование центра, окружности, вписанной в треугольник, существование подобных треугольников, существование параллельных прямых и др. і доказывается с помощью построений.

Теория геометрических построений составляет теоретическую основу практической графики: многие чертёжные приёмы опираются на решения геометрических задач на построение.

Отметим ещё одно обстоятельство, которое в начале второго тысячелетия повлияло на рост интереса к геометрическим построениям. Это мощное развитие информационных технологий, в первую очередь графических возможностей компьютера. Появление на рынке учебных программ большого количества систем динамической геометрии, позволяющих выполнять точные построения виртуальными циркулем и линейкой, самостоятельно создавать любые другие виртуальные инструменты, позволили привлечь к конструктивной геометрии немало молодых любителей математики. Системы динамической геометрии подготовили все условия для того, чтобы повернуть «цифровое» поколение лицом к самой древней геометрической теории – геометрическим построениям на плоскости. И выполнить эту миссию должно новое поколение учителей математики.

Геометрические построения могут сыграть серьёзную роль в математической подготовке школьника. Ни один вид задач не даёт, пожалуй, столько материала для развития математической инициативы и логических навыков учащегося, как геометрические задачи на построение циркулем и линейкой. Эти задачи обычно не допускают стандартного подхода к ним и формального восприятия их учащимися. Задачи на построение удобны для закрепления теоретических знаний учащихся по любому разделу школьного курса геометрии. Решая геометрические задачи на построение, учащийся приобретает много полезных чертёжных навыков.

§1.2. Общие аксиомы конструктивной геометрии, основные построения циркулем и линейкой, классическая методика решения задач на построение

Фигурой в геометрии называют любую совокупность точек (содержащую по крайней мере одну точку).

Будем предполагать, что в пространстве дана некоторая плоскость, которую назовём основной плоскостью. Ограничимся рассмотрением только таких фигур, которые принадлежат этой плоскости.

Примерами фигур могут служить:

1) точка;

2) пара точек;

3) прямая (рассматриваемая как совокупность принадлежащих ей точек);

4) пара параллельных прямых;

5) отрезок (фигура, состоящая из двух точек и всех точек прямой, лежащих между этими точками); интервал, или открытый отрезок (совокупность всех точек, лежащих между двумя данными точками прямой);

6) луч (фигура, состоящая из некоторой точки прямой и всех точек этой прямой, расположенных по одну сторону от этой точки);

7) окружность (совокупность всех точек плоскости, отстоящих на данном расстоянии от некоторой данной точки этой плоскости);

8) круг (совокупность всех точек плоскости, расстояния которых от данной в этой плоскости точки не превышают длины данного отрезка) и др.

Одна фигура называется частью другой фигуры, если каждая точка первой фигуры принадлежит второй фигуре. Так, например, частями прямой будут: всякий лежащий на ней отрезок, лежащий на этой прямой луч, точка на этой прямой, сама прямая.

Объединение двух или нескольких фигур Ф1 и Ф2 обозначают так: $Ф_1 + Ф_2$ или $Ф_1 \cup Ф_2$.

Пересечение двух или нескольких фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ обозначают так: $Ф_1 \cdot Ф_2$ или $Ф_1 \cap Ф_2$.

Разность двух фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ обозначается так: $Ф_1 \backslash Ф_2$.

Может оказаться, что пересечение (или разность) двух фигур не содержит ни одной точки. В этом случае говорят, что пересечение (или соответственно разность) данных фигур есть пустое множество точек

Раздел геометрии, в котором изучаются геометрические построения, называют конструктивной геометрией. Основным понятием конструктивной геометрии является понятие построить геометрическую фигуру.

Это понятие принимается без определения. Конкретный его смысл известен из практики, где оно означает то же, что «начертить» (линию), «отметить» (точку) и тому подобное. Если о какой-либо фигуре сказано, что она дана, то при этом естественно подразумевается, что она уже изображена, то есть построена.

Перечислим теперь *основные требования к построению геометрической фигуры*, которые носят общий характер. Имеется ввиду, что эти требования должны выполняться не только при построении циркулем и линейкой, но и любыми другими инструментами (двусторонняя линейка, томагавк, линейка со вставкой и т.д.):

I. Любая данная (по условию задачи) фигура считается построенной.

II. Если построены две (или более) фигуры, то считается построенным и их объединение.

III. Если теоретико-множественная разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то считается, что эта разность построена.

IV. Если пересечение двух (или более) построенных фигур не пусто, то считается, что оно построено.

V. Всегда можно построить точку, принадлежащую пересечению двух (или более) построенных фигур, если оно не пусто.

VI. Всегда можно построить точку, принадлежащую построенной фигуре, а также точку, не принадлежащую построенной фигуре, при условии, что построенная фигура не совпадает со всей плоскостью.

Перечислим теперь *требования к построению геометрической фигуры*, которые возникают в связи с использованием конкретных инструментов, в частности *линейки и циркуля*.

Линейка позволяет выполнить следующие геометрические построения:
а) построить отрезок, соединяющий две построенные точки;
б) построить прямую, проходящую через две построенные точки;
в) построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

Циркуль позволяет выполнить следующие геометрические построения:
а) построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности (или его концы);
б) построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг.

Обобщая перечисленные выше требования, запишем теперь систему аксиом, которая будет использоваться нами при построении геометрических фигур на плоскости с использованием циркуля и линейки.

<u>Система аксиом для построений на плоскости линейкой и циркулем</u>.

1). Через две точки можно провести прямую.

2). Можно построить окружность, имеющую данный центр и данный радиус.

3). Можно найти точки пересечения двух уже построенных линий, если это пересечение не пусто.

4). Можно выбрать произвольную точку на уже построенной линии и точку, не принадлежащую этой линии.

Построения, которые можно выполнить с помощью перечисленных аксиом 1) - 4) иногда называют основными построениями. Найти решение задачи ни построение – это значит указать такую конечную последовательность основных (ОП) и элементарных построений (ЭП), после выполнения которых искомая фигура может считаться построенной в силу общих и специальных аксиом конструктивной геометрии. В качестве элементарных построений (ЭП) выберем следующие построения (задачи).

ЭП 1. Деление отрезка пополам.

ЭП 2. Деление угла пополам.

ЭП 3. Построение на данном луче отрезка, равного данному.

ЭР4. Построение угла, равного данному.

ЭП 5. Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

ЭП 6. Построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

ЭП 7. Деление отрезка в данном отношении (внутренним и внешним способом).

ЭП 8. Построение треугольника по трём данным сторонам

ЭП9. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам

ЭП 10. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Иногда условиям задачи на построение удовлетворяют несколько фигур. *Решить задачу на построение* - значит найти все ее решения.

Приведём классическую *методику решения задач на построение*, основы которой, как отмечалось в первом параграфе, были заложены ещё древнегреческими геометрами.

Анализ.

Анализ — это важный этап решения задачи, который мы понимаем как поиск способа решения задачи на построение. На этом этапе должны быть подмечены такие зависимости между данными фигурами и искомой фигурой, которые позволили бы в дальнейшем построить эту искомую фигуру.

Чтобы облегчить себе поиск связей между искомой фигурой и данными фигурами, обычно оказывается выгодным иметь перед глазами вспомогательный чертеж, изображающий данные и искомые фигуры примерно в том расположении, которое предусмотрено условием задачи. Вспомогательный чертёж традиционно принято строить от руки, но использование пакетов динамической геометрии значительно облегчает процесс и снизит время выполнение чертежа. Если чертеж получился не наглядным или не удачным исправление его не будет занимать много времени. А также на вспомогательном чертеже можно выделить данные элементы и важнейшие искомые элементы цветами, шириной лини и т.д. Для построения правдоподобных рисунков часто удобнее начинать построение вспомогательного чертежа не с данной фигуры, а с примерного изображения исходной фигуры, пристраивая к ней данные так, чтобы они находились в отношениях, указанных в условии задачи.

Также надо учитывать следующие моменты:

1) если на вспомогательном чертеже не удается непосредственно заметить необходимые для установления связи между данными и искомыми элементами, то целесообразно ввести в чертеж вспомогательные фигуры. Соединить уже имеющиеся точки прямыми, отметить точки пересечения имеющихся линий, продолжить некоторые отрезки и т. д. Иногда бывает полезно проводить параллели или перпендикуляры к уже имеющимся прямым;

2) если по условию задачи дана сумма или разность отрезков или углов, то эти величины следует ввести в чертеж;

3) в процессе проведения анализа бывает полезно вспомнить теоремы и ранее решенные задачи, в которых встречаются зависимости между элементами, о которых говорится в условии рассматриваемой задачи.

При разборе задачи, при отыскании путей ее решения анализ и синтез находятся в постоянном взаимодействии, дополняют и проверяют друг друга.

Построение.

Второй этап решения задач на построение состоит из двух частей:

1) перечисление в определенном порядке всех элементарных построений, которые нужно выполнить, согласно анализу, для решения задачи;

2) непосредственное выполнение этих построений на чертеже при помощи чертежных инструментов. Действительно, решить задачу с помощью тех или иных инструментов — значит указать конечную совокупность

элементарных, допустимых для данных инструментов, построений, выполнение которых в определенной последовательности позволяет дать ответ на вопрос задачи.

Преимуществом использования Живой математики является точность и простота процесса построения, нет необходимости выполнять построения с использованием реальных «циркуля» и «линейки», в пакете предусмотрено построение виртуальными циркулем и линейкой, если пользователем предварительно выделены необходимые объекты (точки или отрезок) и выбран необходимый инструмент.

Упрощается также выполнение элементарных построений. Например, для того, чтобы построить перпендикуляр к прямой, нам не придется постоянно выполнять, хоть и несложные, но достаточно однообразные построения. Достаточно подсветить мышкой прямую и точку, выбрать в меню *Построение* команду *Перпендикуляр,* после нажатия на которую перпендикуляр будет построен.

Еще одним несомненным плюсом использования Живой математики является простота и скорость корректирования изображения данных фигур и их размеров, если например построенный чертеж недостаточно нагляден.

Доказательство.

После того как фигура построена, необходимо установить, удовлетворяет ли она условиям задачи, то есть показать, что фигура, полученная из данных элементов определенным построением, удовлетворяет всем условиям задачи. Значит, доказательство существенно зависит от способа построения. Одну и ту же задачу можно решать различными способами, в зависимости от намеченного при анализе плана построения, а поэтому, и доказательство в каждом случае будет свое. Доказательство представляет собой часть решения задачи, по своему логическому содержанию обратную анализу. Если в анализе устанавливается, что всякая фигура, удовлетворяющая поставленным условиям, может быть найдена таким-то и таким-то путем, то в этой, третьей части решения доказывается обратное положение. Это обратное положение в общем виде может быть сформулировано так: если некоторая фигура получена из данных элементов таким-то построением, то она действительно удовлетворяет поставленным условиям.

Доказательство не просто зависит от анализа и построения, между ними существует взаимосвязь и взаимообусловленность. Построение проводится по плану, составленному при анализе. Таких планов можно указать несколько. Построение и доказательство являются своеобразным критерием правильности и рациональности составленного плана. Если план не осуществим имеющимися инструментами или же построение оказывается нерациональным, мы вынуждены искать новый план решения.

Хотя доказательство при решении задач на построение проводится аналогично доказательству теорем, с использованием аксиом, теорем и свойств геометрических фигур, между ними имеется и некоторое различие. При доказательстве теорем в большинстве случаев без труда выделяют условие и заключение. При решении задач на построение уже труднее найти данные, на основании которых можно доказать, что построенная фигура является искомой. Поэтому при решении конструктивных задач в классе целесообразно иногда специально выделять, что дано, и что требуется доказать.

Иногда при доказательстве необходимо выполнять дополнительные построения, что заметно легче при использовании пакетов динамической геометрии.

Исследование.

При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причем предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно еще выяснить следующие вопросы:

1) всегда ли (то есть при любом ли наборе данных фигур) можно выполнить построение избранным способом;

2) можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить;
3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных?

Рассмотрение всех этих вопросов и составляет содержание исследования.

Таким образом, исследование имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений. Нередко школьники и даже учителя проводят исследование, произвольно выбирая те или иные случаи, причем неясно, почему рассматриваются именно такие, а не какие-либо иные случаи, это связано с нехваткой времени и громоздкими чертежами. Работая в пакете динамической геометрии, исследование проводиться на полученном чертеже простым изменением положения, размера и т.д. Учащиеся могут исследовать и проверить все варианты, проанализировать все возможные решения задачи, а так же провести эксперименты. Проверить правильность выполнения чертежа метрически и т.д.

Сущность этого приема состоит в том, чтобы перебрать последовательно все шаги, из которых слагается построение (в первую очередь следует обращать внимание на пункты, содержащие пересечение множеств), и относительно каждого шага установить, всегда ли указанное на этом шаге построение выполнимо, а если выполнимо, то однозначно ли.

§1.3. Интерактивная геометрическая среда Живая математика, её динамические и конструктивные возможности, решение элементарных задач на построение

В настоящее время методика обучения школьному курсу претерпевает значительные изменения, что связано с распространением интерактивных геометрических сред (ИГС) или, как их ещё называют, систем динамической геометрии (СДГ). Мы будем чаще использовать первый термин. Основная идея (концепция) этого программного обеспечения заключается в том, чтобы предоставить обучающемуся возможность выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении положения одного из геометрических объектов чертежа положения остальных также изменяются, сохраняя заданные отношения неизменными. В настоящее время существует около трёх десятков ИГС. В данной работе будем использовать среду Живая математика, которая представляет собой русскоязычную версию старейшей ИГС The Geometer's Sketchpad (блокнот геометра), созданной в 1989 г. Nicholas Jackiw (США). Программа особенно эффективна при обучении геометрии, её наиболее сильные стороны, это возможность создавать сложные геометрические модели, управлять ими, осуществлять операции трансформации такие, например, как параллельный перенос, вращение, отражение, изменение пропорций.

Что представляет собой чертёж, выполненный с помощью ИГС? Выглядит он как традиционный, т.е. выполненный на листе бумаги классическими инструментами, по крайней мере, легко идентифицируется с ним, однако существенно более четкий и качественный. Его можно тиражировать, деформировать, видоизменять и перемещать. Элементы построения легко измерить компьютерными средствами, а результат измерений проходит дальнейшую компьютерную обработку. Так же возможно хранение и многократные обмены чертежами с учителем и сверстниками.

ИГС Живая математика исключительно простая в освоении программа, она позволяет создавать красочные, легко варьируемые и редактируемые чертежи, осуществлять операции над ними, а также производить все необходимые измерения, что, в свою очередь, обеспечивает развитие деятельности учащегося по таким направлениям, как анализ, исследование, построение, доказательство, решение задач, головоломок и даже рисование.

Приведём выборочно описание интерфейса и основных *конструктивных возможностей* программы "Живая Математика". Основными элементами окна программы "Живая геометрия" являются:

✓ рабочее поле или плоскость чертежа (имеет белый фон и занимает всю центральную часть экрана);

✓ панель инструментов (столбец кнопок в левой части экрана);

✓ меню команд (строка и заголовок меню расположена в верхней части экрана).

Для получения "живого" чертежа, рекомендуется изучить рабочее поле, меню команд и инструменты данной программы. На рисунке 3.1 предоставлено рабочее поле, на котором выполняются построение.

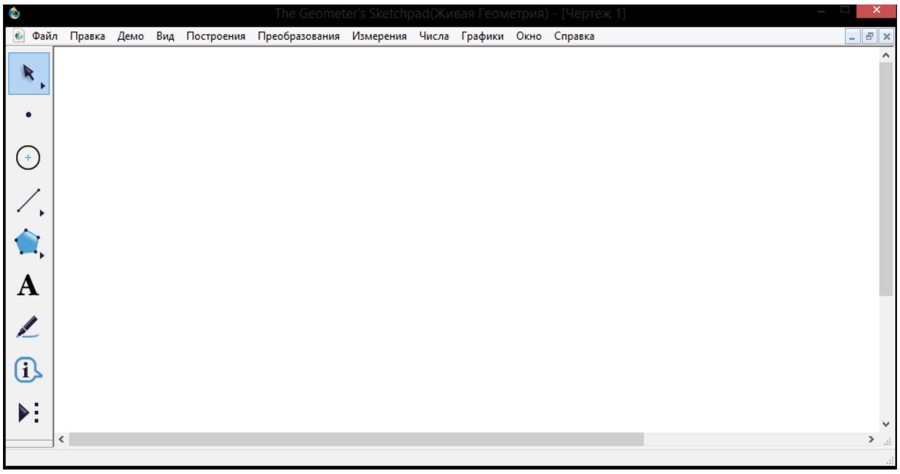


Рис.3.1.

В левой части рабочего поля расположена вертикальная панель инструментов, в верхней части, горизонтально, – панель меню со следующими именами: Файл, Правка, Демо, Вид, Построение, Преобразование, Измерения, Числа, Графики, Окно, Справка.

Набор инструментов (в начале работы расположен вертикально вдоль левой части окна чертежа) содержит инструменты, позволяющие выделять, перетаскивать, создавать объекты и давать им имена. Кроме того, имеется особый инструмент (нижняя кнопка), служащий для изготовления и хранения нестандартных инструментов, созданных самими пользователями.

Рис.3. 2.

Для того, что бы выбрать инструмент из набора, достаточно щелкнуть на значок нужного инструмента. Этот инструмент остается активным до тех пор, пока не выбран другой.

Инструмент *Стрелка* и *Линейка* имеют по три разновидности каждый.

Стрелка Линейка

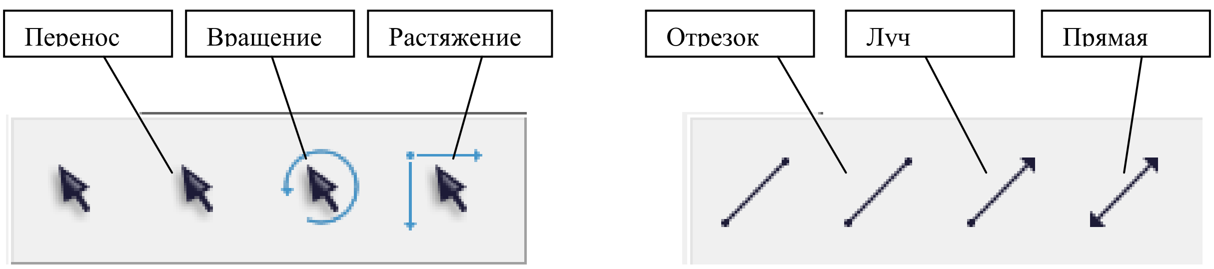


Рис.3. 3.

Чтобы выбрать одну из разновидностей инструмента:

1. Поставьте курсор на значок инструмента Стрелка или Линейка.

2. Нажмите и удерживайте клавишу мыши; при этом открываются значки разновидностей инструмента.

3. Удерживая клавишу мыши, переместите курсор на нужный значок и отпустите клавишу.

Отметим некоторые *динамические возможности* ИГС Живая математика.

- возможность ручного (с помощью мыши) управления перемещением любых геометрических объектов;

- возможность движущихся геометрических объектов оставлять след, что позволяет определять вид геометрического места точек;

- возможность анимации – или автоматического перемещения геометрических объектов, что позволяет с успехом использовать чертежи в качестве демонстрационного материала.

Продемонстрируем возможности ИГС Живая математика на примере выполнения некоторых элементарных построений (ЭП1-ЭП10) на построение циркулем и линейкой (см. §2), к которым относятся: 1) деление отрезка пополам; 2) деление угла пополам; 3) построение на данном луче отрезка, равного данному; 4) построение угла, равного данному; 5) построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой; 6) построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой; 7) деление отрезка в данном отношении (внутренним и внешним способом); 8) построение треугольника по трём данным сторонам; 9) построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам; 10) построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Несмотря на то, что часть элементарных задач обеспечена в среде Живая математика готовыми инструментами (задачи 1, 2, 5 и 6), необходимо с учениками выполнить соответствующие построения на компьютере, используя лишь виртуальные циркуль и линейку. Продемонстрируем это на примере решения первой элементарной задачи.

Элементарная задача 1. *Разделите данный отрезок пополам*.

Решение.

1. Используя виртуальную линейку (её частный случай «Отрезок», который расположен на вертикальной панели инструментов), построим данный отрезок AB (рис. 7).

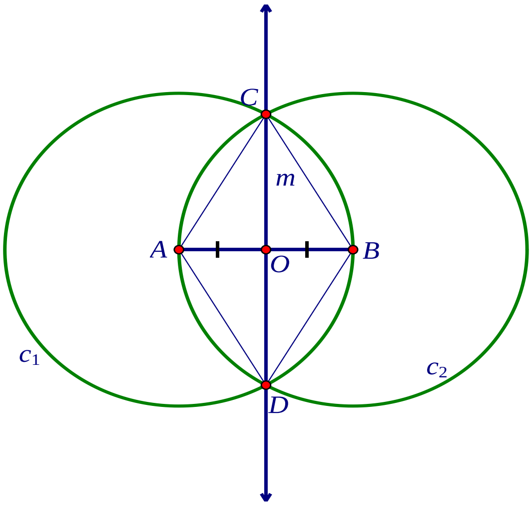


Рис. 3.4.

2. Используя виртуальную окружность (вертикальная панель инструментов), построим окружности c_1 и c_2 с центрами в точках A и B и радиуса AB.

3. Используя команду «Пересечение» (меню команд «Построение»), найдем общие точки C и D окружностей c_1 и c_2.

4. Используя виртуальную линейку (её частный случай «Прямая»), построим прямую m, проходящую через точки C и D.5. Используя команду «Пересечение»,

найдем общую точку O отрезка AB и прямой m. Точка O – искомая, т.к. согласно построению четырёхугольник ACBD – ромб, в котором O – точка пересечения диагоналей.

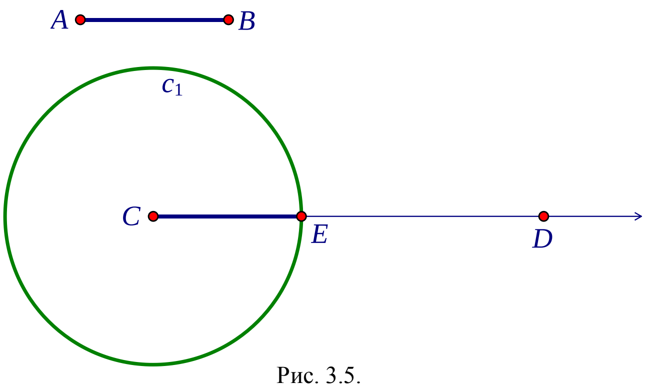


Рис. 3.5.

Из оставшихся шести элементарных задач (3, 4, 7, 8, 9, 10) рассмотрим третью.

Элементарная задача 3. *На данном луче от его начала отложите отрезок, равный данному. Создайте собственный инструмент, позволяющий откладывать на луче отрезок равный данному отрезку.*

Решение.

1. Построим отрезок AB и луч CD (рис. 8).

2. Построим окружность c_1 с центром в точке C и радиуса AB.

3. Найдём общую точку E окружности c_1 и луча CD.

4. Построим отрезок CE. Очевидно, что CE – искомый отрезок, т.к. точка C принадлежит лучу CD (построение 3) и CE = AB по определению окружности заданного радиуса (построение 2).

Для создания собственного инструмента спрячем сначала все имена и вспомогательные фигуры (в нашем случае окружность c_1), далее, подсветим отрезок AB (концы отрезка подсвечивать не надо), точки C, D и E, отрезок CE, зайдём в меню команд создания собственных инструментов (нижняя кнопка на вертикальной панели), выберем команду «Создать новый инструмент…», присвоим имя «Отложить отрезок на луче» инструменту.

Цель создания собственного инструмента очень проста. При решении задачи на построение циркулем и линейкой (да и не только этими инструментами) у большинства учеников нет особого желания тратить время на однообразные и по этой причине достаточно нудные построения, такие например, как приведённые выше построения 1, 2, 3 и 4. Тем более, если аналогичные построения уже неоднократно проводились. Может быть построения, реализующие найденное решение, вообще не проводить? Ведь именно так поступает большинство опытных специалистов, мысленно прокручивая в голове шаги построения. Но именно на этом этапе неискушённый ученик может допустить ошибку. Поэтому задача учителя математики подобрать такую методику обучения решению конструктивных задач, чтобы ученики без особого напряжения, комфортно могли не только найти ключ к задаче, т.е. выполнить самый интересный этап её решения, но и оперативно проверить найденное решение. Именно для этой цели создаются собственные инструменты, позволяющие двумя-тремя кликами мыши выполнить необходимые действия.

В Приложении к ВКР нами приведены GSP-файлы, в которых создана библиотека собственных инструментов, реализующих перечисленные выше 10 элементарных построений.

§1.4. О дидактических преимуществах использования среды Живая математика при обучении геометрическим построениям на плоскости

Традиционно изучение теоретических положений школьного курса геометрии и решение геометрических задач сопровождается большим числом чертежей и рисунков, в основе которых лежат построения циркулем и линейкой. И если в начальной школе и младших классах основной школы эти построения выполняются на интуитивной основе, то, начиная с 7 класса, учитель не ограничивается формированием у учеников умения создавать циркулем и линейкой копии чертежей из школьных учебников или выполненных учителем на доске. Центр тяжести постепенно переносится на осмысление процесса построения, на структурные особенности конструирования чертежа, на дедуктивный и аксиоматический аспекты геометрических построений с помощью циркуля и линейки. Учеников стараются обучить умению самостоятельно создавать этими инструментами тот чертёж, который удовлетворяет условиям конкретной задачи или формулировке доказываемой теоремы. Обучают правильно выполнять чертёж, имея ввиду не пресловутый тезис о том, что «Геометрия – это умение на плохом чертеже верно решить задачу», а более разумное утверждение: «Хороший чертёж – это наполовину решённая задача».

Неумение, а порой и нежелание учеников вникать в логические тонкости конструктивной геометрии создаёт, на наш взгляд, напряжение при обучении решению задач на построение циркулем и линейкой. В результате большая часть учеников не умеют решать не только конструктивные задачи среднего и повышенного уровней сложности, но и простейшие задачи. Но тогда может и не требовать от учеников этого, а ограничиться формированием у них лишь репродуктивных чертёжных умений? Нетрудно понять, что следствием такого решения станет значительное снижение уровня развитости пространственных представлений у учащихся. Многие учителя-новаторы предлагают в качестве выхода из данной ситуации широко использовать при обучении школьной математики системы динамической геометрии, в частности Живую математику. Любые построения в этой среде выполняются с помощью циркуля и линейки, процесс построения выглядит очень естественно и необременительно, особенно для «цифрового» поколения. Конструктивный виртуальный чертёж не требует утомительных проверок и анализа. Практически любые ошибки, как говорится, лежат на поверхности, т.к. они либо видны невооружённым глазом, либо их можно обнаружить с помощью перемещения отдельных фрагментов рисунка. Живая математика в данном случае выступает не только как средство построения идеальных и верных геометрических чертежей, но и как тренажёр самостоятельного овладения навыками геометрических построений циркулем и линейкой.

Чтобы полнее осознать положительный эффект от применения Живой математики, необходимо отметить те преимущества, которые дают динамические чертежи по сравнению со статическими рисунками на бумаге или на доске, даже на дисплее графического калькулятора. Некоторые свойства геометрической конфигурации кажущиеся верными, на самом деле могут быть истинными лишь в некоторых частных случаях, и требуется неоднократное построение конструкции, чтобы сформулировать утверждение, верное во всех случаях.

Живая Математика - это весьма гибкий инструмент, позволяющий с помощью циркуля и линейки реализовать многие геометрические фантазии, ограниченные только собственным воображением. Данная программа играет важную роль в изучении темы «Задачи на построение», так как основными инструментами, сопровождающими решение практически любой задачи по геометрии, являются циркуль и линейка.

Для усиления традиционных возможностей материальных циркуля и линейки разработчики их виртуальных аналогов в Живой математике заложили в эту среду возможность осуществлять практически с любой степенью точности вычисления числовых значений величин различных геометрических объектов, построенных с помощью циркуля и линейки; выполнять действия над этими величинами. Именно эти возможности, заложенные в среду Живая математика, позволяют строить на плоскости геометрические модели, проводить математические исследования и эксперименты, превращают компьютер в мини-лабораторию, которая так необходима учителям и учащимся.

Обучая в Живой математике решению задач на построение циркулем и линейкой, учитель может:

- ✓ проиллюстрировать объяснения эффектными и точными чертежами;
- ✓ организовать экспериментальную исследовательскую деятельность учащихся в соответствии с уровнем и потребностями учащихся;
- ✓ повысить разнообразие форм работы учащихся, значительно увеличить долю активной творческой работы в их учебной деятельности;
- ✓ высвободить время на выполнение учащимися конструктивных задач творческого характера;
- ✓ реализовать дифференциацию по уровню знаний и возможностей учеников и индивидуализировать обучение (это относится как к уровню формирования предметных умений и знаний, так и интеллектуальных и общих умений).

Чертежи к задачам на построение, в которых построение не слишком громоздко и выполняется без каких-либо специально выдуманных приемов, содержат спрятанное построение (а иногда еще и пошаговое описание этого построения). Чертежи ко всем задачам на построение включают в себя данные, соответствующие условию конфигурации. Ученику предлагается самостоятельно выполнить построение с помощью компьютерных аналогов циркуля и линейки и проверить его правильность и выполнимость, варьируя величины или расположение данных геометрических объектов. Так же на этапе доказательства, требуется обосновать некоторое свойство геометрического объекта. Иллюстрации к ним подобны чертежам к теоретическому материалу. Двигая с помощью мышки элементы конфигурации, изображенной на чертеже, можно убедиться в истинности приведенного утверждения.

Как известно, при решении конструктивных задач в учебных целях рекомендуется использовать известную схему решения, состоящую из следующих четырех этапов: 1) анализ; 2) построение; 3) доказательство; 4) исследование. Этой схемы рекомендуется придерживаться и в случае использования Живой математики, которая на приведённых этапах дает определенные позитивные дидактические преимущества.

Отметим следующие дидактические преимущества (положения), которые появляются в результате использования Живой математики на всех четырех этапах решения задач на построение.

На этапе анализа:

A_1. *Живая математика позволяет оперативно построить качественный, точный и верный чертёж, изображающий данные и искомые фигуры, находящиеся в заданных отношениях*.

A_2. *Живая математика позволяет при необходимости достаточно быстро изменить положение изображаемых фигур и (или) их элементов, выбрать необходимый ракурс, который дает возможность увидеть в нужном месте нужные соотношения.*

A_3. *Живая математика предоставляет* возможность *учащемуся выполнять необходимые дополнительные построения, без всяких негативных чертёжных последствий отказываться от неудачных попыток, реализовывать новые дополнительные построения, выбирая линии такого типа и толщины, чтобы они не заслоняли собой данные и искомые фигуры*.

A_4. Живая математика дает возможность учащемуся при анализе не связывать свои рассуждения с выполненным чертежом–наброском, которые невольно возникают в связи со статическим характером традиционного рисунка (ошибочные рассуждения чаще встречаются при статических чертежах).

A_5. Живая математика дает возможность при анализе решения задачи методом ГМТ провести эксперимент, позволяющий визуализировать (меню «Построить», команда «Геометрическое место точек») то множество точек, с помощью которого может быть найдено одно из решений.

A_6. Живая математика дает возможность при анализе задачи, в условии которой фигурируют суммы (разности) отрезков или углов, оперативно строить такие суммы (или) разности.

A_7. Живая математика дает возможность учителю при необходимости подготовить систему визуальных подсказок, которая ненавязчиво позволит ученику при анализе увидеть нужное соотношение между искомой и данными фигурами.

На этапе построения:

$П_1$. Живая математика позволяет оформить все построение на одной странице рабочего поля, что дает возможность, сразу видеть все объекты и, не путаясь, выполнять построение.

$П_2$. Живая математика дает возможность при построении чертежа, выделять главные и второстепенные элементы построения, с помощью цвета и стиля линии, что позволяет учащимся не запутаться и правильно выполнить построение.

$П_3$. Живая математика предоставляет возможность при решении задач методом геометрических преобразований оперативно построить образ некоторой фигуры или ее части под действием того или иного геометрического преобразования.

На этапе доказательства:

$Д_1$. Живая математика позволяет без затруднений с помощью команды «Вычислить» производить математические выкладки, которые можно использовать при доказательстве того, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи. (данная команда выполняет специфическую функцию графического калькулятора).

$Д_2$. Живая математика дает возможность на этапе доказательства производить моментальные вычисления с помощью функций меню «Измерения», в частности находить длину отрезков, расстояние между точками, отношение длин отрезков, радиус, длину окружности и т. д., что способствует скорее не самому доказательству, а его опровержению.

На этапе исследования:

$И_1$. Живая математика дает возможность при исследовании изменить длины данных отрезков, координаты точек или величины углов, что позволяет увидеть имеет ли задача решение при соответствующем выборе данных фигур.

$И_2$. Живая математика дает возможность при исследовании изменить расположение данных фигур друг по отношению к другу, что позволяет оценить наличие искомых фигур в зависимости от различных случаев взаимного расположения.

$И_3$. Живая математика дает возможность при исследовании визуализировать количество решений задачи в зависимости от выбора величин данных фигур.

$И_4$. Живая математика дает возможность при исследовании визуализировать количество решений задачи в зависимости от выбора того или иного взаимного расположения данных фигур.

Программа «Живая математика» позволяет значительно экономить время, но самое главное: чертёж, построенный с помощью программы, можно тиражировать, деформировать, перемещать и видоизменять. Сама среда не является обучающей и «сама ничего не делает», — все чертежи в ней создаются пользователем, а программа лишь предоставляет для этого необходимые средства, так же как и возможности для усовершенствования чертежей и их исследования.

Таким образом, применение программы «Живая геометрия» в процессе обучения.

- развивает у учащегося навыки самостоятельного мышления;

- формирует положительное и ответственное отношение к учебе;

- повышается самооценка учащегося, самокритичность;

- появляется заинтересованность и потребность в получении дополнительных знаний;

- раскрывается интерес к научной деятельности, что является существенным достижением в период значительного спада интереса к математике;

- высокий эстетический уровень оформления работ, делает изучение геометрии привлекательным.

Глава 2. Методика применения среды Живая математика при обучении решению задач на построение методом пересечения фигур (методом геометрических мест точек (ГМТ))

§2.1. Множества точек плоскости, обладающих заданным свойством , сравнительный анализ введения этого понятия в школьных учебниках по геометрии в 7-9 классах

Основа метода пересечения множеств (или метода ГМТ) – понятие геометрического места точек. Геометрическим местом точек (ГМТ) называется множество всех точек плоскости, каждая из которых удовлетворяет вполне определённому конкретному свойству. Все остальные точки плоскости не должны обладать указанным свойством. Таким образом, важнейшая роль в определении ГМТ отводится понятию «Свойство», которое называется характеристическим свойством этого геометрического места точек. Приведём наиболее известные примеры таких свойств:

1) точка находится на данном расстоянии от данной точки;

2) точка находится на данном расстоянии от данной прямой;

3) точка равноудалена от двух данных точек;

4) точка равноудалена от двух данных параллельных прямых;

5) точка равноудалена от двух данных пересекающихся прямых;

6) из точки данный отрезок виден под прямым углом;

7) из точки данный отрезок виден под данным углом;

8) отношение расстояний от точки до двух данных точек равно отношению длин двух данных отрезков;

Первые шесть свойств используются при решении задач на построение циркулем и линейкой как в школьном курсе геометрии, так и в курсе геометрии педагогического вуза, последние два свойства менее известны в школе. Отметим, что в высших учебных заведениях изучаются линии второго порядка, которые иногда определяются с использованием таких характеристических свойств, как «сумма расстояний от точки до двух данных точек равно длине данного отрезка», «модуль разности расстояний от точки до двух данных точек равен длине данного отрезка» и «точка равноудалена от данной точки и данной прямой».

Каждая задача, в которой требуется найти то или иное геометрическое место точек по его характеристическому свойству, предполагает описание этого ГМТ через известные элементарные фигуры (прямая, окружность или их части). Решение задачи на отыскание ГМТ, по сути, сводится к доказательству двух утверждений – прямого и ему противоположного. Имеется ввиду доказательство следующих двух предложений: 1) каждая точка предполагаемого (искомого) ГМТ обладает заданным свойством; 2) любая точка, не принадлежащая этой фигуре, заданным свойством не обладает. Рассмотрим геометрические места точек, каждое из которых удовлетворяет одному из восьми перечисленным выше характеристических свойств, укажем известные геометрические фигуры, которые ими описываются, докажем справедливость некоторых описаний.

ГМТ 1. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка находится на данном расстоянии от данной точки», представляет собой окружность, центр которой совпадает с данной точкой, а радиус равен данному расстоянию.

ГМТ 2. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка находится на данном расстоянии от данной прямой», представляет собой две прямые, параллельные данной прямой и отстоящие от неё на данном расстоянии.

ГМТ 3. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных точек», представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку с концами в двух данных точках.

ГМТ 4. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных параллельных прямых», представляет собой ось симметрии данных параллельных прямых.

ГМТ 5. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных пересекающихся прямых», представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

ГМТ 6. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «из точки данный отрезок виден под прямым углом», представляет собой окружность, построенную на данном отрезке как на диаметре, из которой удалены концы данного отрезка.

ГМТ 7. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «из точки данный отрезок АВ виден под некоторым углом», представляет собой две дуги с общими концами А и В (без точек А и В), симметричные относительно прямой АВ.

ГМТ 8. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «отношение расстояний от точки до двух данных точек А и В равно отношению длин двух данных отрезков», представляет собой окружность с центром на прямой АВ.

Докажем, например, справедливость описания ГМТ 2.

Д а н о: отрезок h и прямая а.

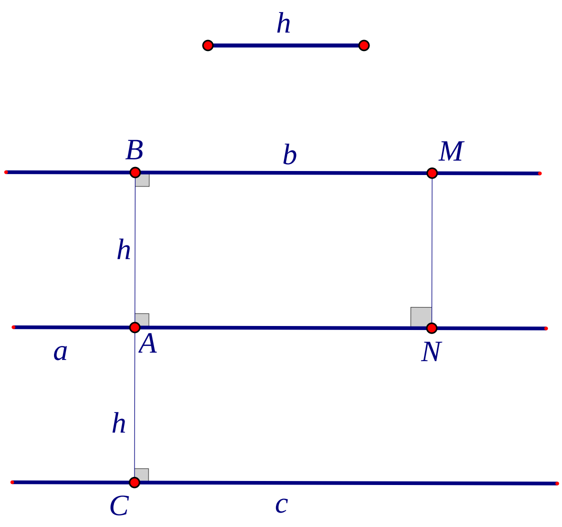


Рис.5.1.

Рассмотрим точку А на прямой а и точки В и С, находящиеся по разные стороны от а, на расстоянии h от а и $BC \perp a$. Проведём через В и С соответственно прямые b и c, параллельные а. Докажем, что прямые b и c - искомое ГМТ.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1). Проведём доказательство сначала в одну сторону. Пусть M принадлежит одной из прямых, допустим b. Построим перпендикуляр MN к прямой a. В четырёхугольнике ABMN все углы прямые, отсюда он прямоугольник, но тогда MN = AB = h.

2). Обратно. Пусть M некоторая точка, лежащая в той же полуплоскости относительно a, что и точка B, причём расстояние от точки M до прямой a равно h. опустим из из M перпендикуляр MN на прямую a. Четырёхугольник ABMN - прямоугольник, т.к. AB = MN = h, $AB \parallel MN$ и $\angle A = \angle N = 90°$. Отсюда $BM \parallel a$ и, следовательно, M принадлежит b.

Д о к а з а т е л ь с т в о завершено.

В чём суть метода геометрических мест точек (иногда используется термин «метод пересечения фигур») при решении задач на построение циркулем и линейкой. Сущность метода геометрических мест заключается в следующем:

1) задача сводится к построению некоторой точки;

2) находятся, по меньшей мере, два свойства, которыми обладает данная точка;

3) рассматривается одно из свойств, строится множество всех точек, обладающих этим свойством;

4) берется следующее свойство, строится множество всех точек, обладающих этим свойством;

5) поскольку искомая точка должна обладать всеми этими свойствами, то она должна принадлежать каждому из построенных множеств, то есть принадлежит пересечению этих множеств. Ниже приведены примеры задач на построение, решаемых с помощью данного метода.

В ходе написания данной работы был проанализирован ряд учебных пособий, по которым ведётся обучение по теме: "Задачи на построение циркулем и линейкой".

Рассматривая подробнее эти учебники можно отметить, что в них мало заданий на построение. Сделав сравнительный анализ учебников можно отметить следующее.

1) Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов [7]

а) 7 класс: содержит четыре главы. Тема “Задачи на построение” изучается в конце главы 2 “Треугольники”. В этом параграфе содержатся пункты “Окружность”, “Построения циркулем и линейкой” и “Примеры задач на построение”. Основываясь на том, что учащиеся умеют с 5 и 6 класса выполнять основные построения с помощью циркуля и линейки, в теме рассматриваются задачи на построение такие как: построение отрезка, равного данному; построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла, перпендикулярных прямых и середины отрезка. Схема, по которой решаются задачи на построение, не вводится. Основная цель главы 2 – отработать навыки решения простейших задач на построение с помощью циркуля и линейки.

В главе 3 “Параллельные прямые” рассматривается построение параллельных прямых с помощью чертежного треугольника и линейки, а также с помощью циркуля и линейки по заданной прямой и точке (в форме задачи).

В главе 4 “Соотношения между сторонами и углами треугольника” рассматривается задача о построении треугольника по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по трем сторонам. Данная глава содержит целый блок задач на построение для самостоятельного решения, который состоит в основном из задач на построение различных треугольников по различным элементам.

В конце 7 класса также имеется блок задач на построение, перед которым описывается схема, по которой решают задачи на построение: анализ, построение, доказательство, исследование. Приводится пример.

б) 8 класс: содержит пять глав. В главе 5 “Четырехугольники” после изучения многоугольника, параллелограмма и трапеции вводится блок задач на построение параллелограмма и трапеции по различным элементам. Перед этим еще раз идет повторение схемы решения задач на построение. В этой же главе после изучения прямоугольника, ромба и квадрата предлагается решить задачи на их построение.

В главе 7 “Подобные треугольники” рассматриваются задача на построение треугольника, при решении которой применяется метод подобия (в данном случае треугольников), в качестве практического приложения подобия треугольников. Также приводится ряд задач на построение треугольников по данным отношениям для самостоятельного решения. Основная цель главы 7 – сформировать понятие подобных треугольников, выработать умение применять признаки подобия треугольников, сформировать аппарат решения прямоугольных треугольников.

В начале главы 8 “Окружность” в пункте “Касательная к окружности” решается задача о проведении касательной к окружности через данную точку. Говорится о том, что решение подобных задач основано на теореме (признаке касательной). Также в главе изучаются четыре замечательные точки треугольника. Задачи на построение (касательной к окружности, серединного перпендикуляра к отрезку) содержит каждый пункт главы. Основная цель главы 8 – дать учащимся систематизированные сведения об окружности и ее свойствах, вписанной и описанной окружностях.

В конце 8 класса в разделе задач повышенной трудности встречается задача на построение равнобедренной трапеции по основаниям и диагоналям. А также построения встречаются в задачах на повторение.

в) 9 класс: содержит четыре главы. В главе 12 “Длина окружности и площадь круга” в §1 “Правильные многоугольники” рассматривается построение правильных многоугольников. Предлагается с помощью циркуля и линейки вписать в окружность различные правильные многоугольники. Также построения встречаются в задачах не повторение. Основная цель главы 12 – расширить и систематизировать знания учащихся об окружностях и многоугольниках.

В главе 13 “Движения” изучаются симметрии, поворот и параллельный перенос. В конце главы содержатся задачи на построение, решение которых основано на изученном материале. Основная цель главы 13 – познакомить с понятием движения на плоскости: симметриями, параллельным переносом, поворотом.

2) А.В. Погорелов [19]

а) 7 класс: содержит пять параграфов. В §1 “Основные свойства простейших геометрических фигур” рассматривается, как построить параллельные прямые с помощью угольника и линейки. В §2 “Смежные и вертикальные углы” рассматривается, как построить перпендикулярные прямые с помощью угольника и линейки. §5 “Геометрические построения” содержит пункт “Что такое задачи на построение”, где рассказывается о чертежных инструментах и о том, что значит решить задачу на построение. Схема решения не вводится. В следующих пунктах рассматриваются задачи на построение треугольника с данными сторонами; угла, равного данному; биссектрисы угла; деление отрезка пополам; построение перпендикуляра к прямой. Далее идут пункты “Геометрическое место точек”, в котором вводится определение ГМТ и Теорема о ГМТ, равноудаленных от двух данных точек; а также “Метод геометрических мест”, который раскрывает сущность данного метода. В конце параграфа приводится ряд задач на построение для самостоятельного решения. В основном это задачи на построение треугольника и окружности по данным элементам и задачи на ГМТ. Основная цель §5 – решать простейшие задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

б) 8 класс: содержит пять параграфов. В конце §6 “Четырехугольники” содержится задача на построении четвертого пропорционального отрезка. Также содержится ряд задач на построение параллелограмма, ромба и трапеции по данным элементам. Основная цель §6 – дать учащимся систематизированные сведения о четырехугольниках и их свойствах. В §9 “Движение” изучаются геометрические преобразования: центральная и осевая симметрии, поворот, параллельный перенос. В конце параграфа приведены задачи на построение, решение которых основано на методах данных преобразований. Основная цель §9 – познакомить учащихся с примерами геометрических преобразований.

в) 9 класс: в §11 “Подобие фигур” изучаются геометрические преобразования: подобие и гомотетия. В конце параграфа приведены задачи на построение, решение которых основано на методах данных преобразований. Основная цель §11 – усвоить признаки подобия треугольников и отработать навыки их применение. В §13 “Многоугольники” рассматриваются построения некоторых правильных многоугольников. В конце имеется пара задач: вписать в окружность n-угольник и описать около окружности правильный *n*-угольник. Основная цель §13 – расширить и систематизировать сведения о многоугольниках и окружностях.

3) А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик [1]

а) 7 класс: содержит три главы. В главе 1 “Начала геометрии” в §5 “Окружность и круг” содержится пункт “Построения циркулем и линейкой”, в котором рассказывается о чертежных инструментах, с помощью которых выполняются задачи на построение. Тут же приводится задача на построение треугольника, стороны которого равны сторонам данного треугольника. Приводится построение, доказательство и исследование, но на общей схеме внимание не заостряется. §6 “Углы” содержит пункт “Построение угла, равного данному, циркулем и линейкой”. Для самостоятельного решения задач нет. В §7 “Действия над углами” рассматривается задача на построение биссектрисы угла, которая решает еще две задачи: в данной точке прямой провести перпендикуляр к ней, построить прямой угол. Также параграф содержит пункт “Задача о делении угла на равные части циркулем и линейкой”, в котором рассказывается о неразрешимости задачи о трисекции угла. Основная цель главы 1 – рассказать о задачах систематического курса геометрии и заложить основу для его построения.

В главе 2 “Треугольники” в §10 “Признаки равенства треугольников” рассматривается задача о построении треугольника по двум сторонам и углу между ними. В §11 “Серединный перпендикуляр” первыми пунктами идут задачи о делении отрезка пополам и о построении перпендикуляра к данной прямой через данную точку, не лежащую на данной прямой. В конце параграфа содержится несколько задач на построение. Основная цель главы 2 – развить навыки решения задач на построение с помощью циркуля и линейки, начать знакомство с симметриями фигур (см. Приложение 1).

В главе 3 “Параллельность” в §13 “Параллельные прямые” изучается, как строить параллельные прямые с помощью угольника и линейки. В §14 “Аксиома параллельности” рассматривается задача о построении треугольника по стороне и двум прилежащем к ней углам.

б) 8 класс: содержит три главы. В главе 5 “Метрические соотношения в треугольнике” в § “Применение теоремы Пифагора” содержится пункт “Геометрическое место точек”, где объясняется, что значит, когда про фигуру говорят, что она является ГМТ, обладающих данным свойством. Также приводятся примеры, каким ГМТ являются биссектриса и серединный перпендикуляр. Параграф содержит такие задачи как, например, найти ГМТ, равноудаленных от прямой на данное расстояние; найти ГМТ, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

в) 9 класс: содержит две главы. В главе 7 “Многоугольники и окружности” в задачах для самостоятельного решения к §31 “Хорды и касательные” содержатся задача на нахождение ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом; задача на построение касательной к окружности из данной точки, общей касательной к двум окружностям. §33 “Правильные многоугольники” содержит пункт “Построение правильных многоугольников” с помощью циркуля и линейки. Также в нем рассказывается о том, что циркулем и линейкой могут быть построены не все правильные n-угольники, а только те, у которых n имеет определенное разложение. Предлагается решить задачи: вписать в окружность различные правильные n-угольники. В §35 “Площадь круга” рассказывается о неразрешимой задаче о квадратуре круга.

В главе 8 “Другие методы геометрии” в §36 “Метод координат” содержится пункт “Окружность Аполлония”, где решение задачи о ГМТ, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть постоянная величина. В §40 “Виды движений” рассматриваются “Метод параллельного переноса”, “Метод симметрии” и “Метод поворота”. Приводятся примеры задач на построение, решение которых основано на данных методах. В задачах для самостоятельного решения к §40 содержатся задачи на отработку изученных методов, в том числе задачи на построение трапеции и треугольника по данным элементам. В §42 “Подобие” рассматривается “Метод подобия”. В качестве примера приводится задача на построение четвертого пропорционального отрезка. В задачах для самостоятельного решения к §42 содержатся задачи на отработку изученного метода, в том числе задачи на построение прямоугольного треугольника по отношению катетов к гипотенузе и по отношению катетов к периметру. А также задачи: построить квадрат, вписанный в треугольник, ромб, сегмент; построить сегмент, вписанный в равносторонний треугольник, квадрат, окружность. Основная цель главы 8 – познакомить учащихся с методами, отсутствовавшими в классической элементарной геометрии, но играющими в современной геометрии ведущую роль: методом координат, векторным методом, методом преобразований.

Вывод:

Во всех учебниках по геометрии для 7-9 класса задачи на построение рассматриваются как самостоятельные в конце 7 класса. Осуществляются следующие элементарные построения: деление отрезка пополам; откладывание угла, равного данному; построение биссектрисы угла; построение перпендикуляра к прямой из данной точки, не лежащей на этой прямой. В качестве метода решения задач на построение в учебниках (кроме учебника [7]) рассматривается метод геометрического места точек. Схема решения приводится в учебниках [7]. В учебнике [19] схема приводится без анализа. В учебнике [1] ее нет.

В таблице приведен количественный анализ (процент заданий на построение) в учебниках:

Таблица 1

Учебники	Класс	Всего задач в учебнике	Из них на построение	Процент от общего числа задач
Александров А.Д. и др. “Геометрия 7-9”	7	33	8	24
	8	643	95	15
	9	556	89	16
Атанасян Л.С. и др. “Геометрия 7-9”	7	362	90	25
	8	448	64	14
	9	321	36	11
Погорелов А.В. “Геометрия 7-9”	7	218	42	20
	8	298	35	12
	9	206	10	5

Рассматривая учебники, можно отметить, что в них достаточно высок процент заданий на построение в 7 классе, причем рассматриваются стандартные и элементарные задачи на построение. Однако к 9 классу процент геометрических заданий на построение резко падает. Так как задания на построение составляют базу для работы, развивающей навыки построения фигур, способствующей формированию умения читать и понимать чертеж, устанавливать связи между его частями, то недостаточность этой системы обусловливает плохое развитие пространственного и логического мышления ученика, низкий уровень его графической культуры.

§2.2. Построение компьютерных моделей ГМТ в среде Живая математика, создание соответствующих собственных инструментов

При решении задач на построение методом геометрических преобразований нередко возникает проблема, связанная с построением вспомогательной фигуры. Данные построения, как правило, единообразны, отнимают много времени, и в дальнейшем загромождают чертёж. Живая математика даёт возможность избежать этого, позволяя с помощью собственных фигур оперативно строить эти фигуры. Созданные таким способом инструменты можно сохранять и переносить на USB носители.

Поэтому после отработанных навыков построения ГМТ, учащимся целесообразно предложить создавать собственные инструменты, и в дальнейшем применять их при решении задач.

ГМТ1. Рассмотрим создание собственного инструмента для построения геометрического места точек ГМТ1.

Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек находящихся на данном расстоянии от данной точки. В параграфе 5 приведено описание этого множества, сформулировано очевидное утверждение о том, что это ГМТ представляет собой окружность, центр которой совпадает с данной точкой, а радиус равен данному расстоянию. Несмотря на то, что среда Живая математика имеет на вертикальной панели (и в меню «Построения») инструменты «Окружность», мы из методических соображений продублируем это ГМТ среди своих собственных инструментов. Другими словами построим окружность по заданному центру и радиусу.

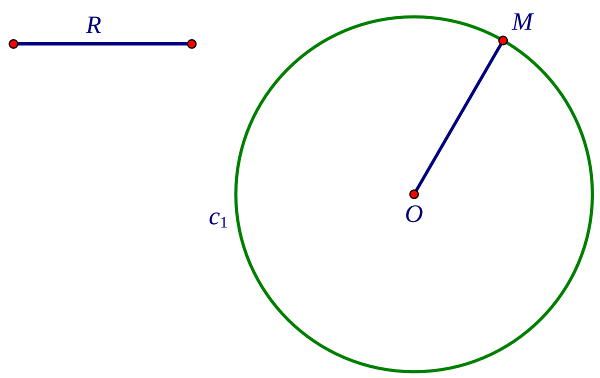


Рис. 6.1.

Для это строим произвольные отрезок и точку (рис. 6.1). Затем, используя инструмент «Окружность по центру и радиусу» меню «Построения», строим окружность c_1. Для создания собственного инструмента «ГМТ1» необходимо подсветить построенные отрезок, точку и окружность c_1. Выбираем на панели инструментов *Инструмент пользователя*, далее *создать новый инструмент*. Высветится окно (рис. 6.2), где нам необходимо назвать инструмент, в данном случае назовём его ГМТ 1.

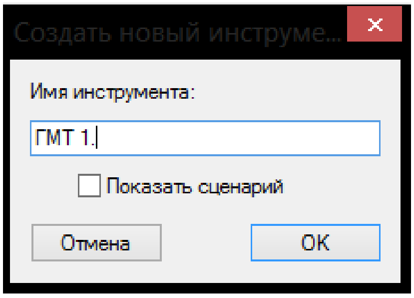


Рис. 6.2.

Что бы воспользоваться инструментом, нужно открыть *Инструмент пользователя*, выбрать инструмент ГМТ1. Так как данный инструмент строит окружность по центру и радиусу, нам необходимо выделить нажатием мыши, отрезок, который будет являться радиусом окружности. На курсоре мышки появиться точка, она будет центром новой окружности. После следующего нажатия, у нас мгновенно построится окружность, радиус которой будет равен данному отрезку.

Живая математика, так же позволяет просмотреть каждый шаг построения созданного инструмента. Что бы просмотреть как работает инструмент, нужно открыть *Инструмент пользователя*, далее выбрать *Показать сценарий*. Появиться окно (рис. 6.3), в котором будет прописан каждый шаг работы инструмента.

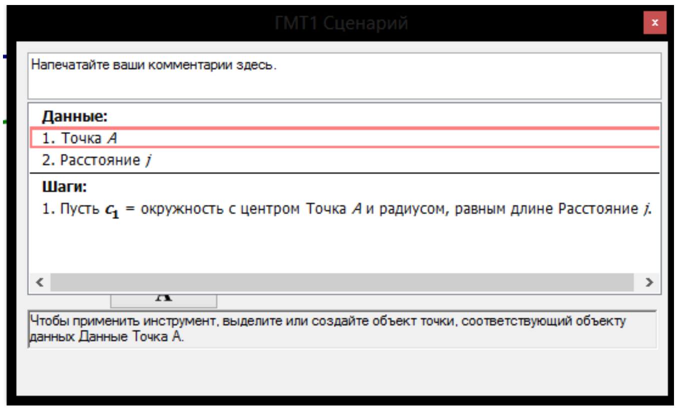


Рис. 6.3.

ГМТ2. Рассмотрим создание собственного инструмента для построения ГМТ 2.

Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой. В параграфе 5 приведено описание этого множество. Сформулировано очевидное утверждение о том, что это ГМТ представляет собой две прямые, которые

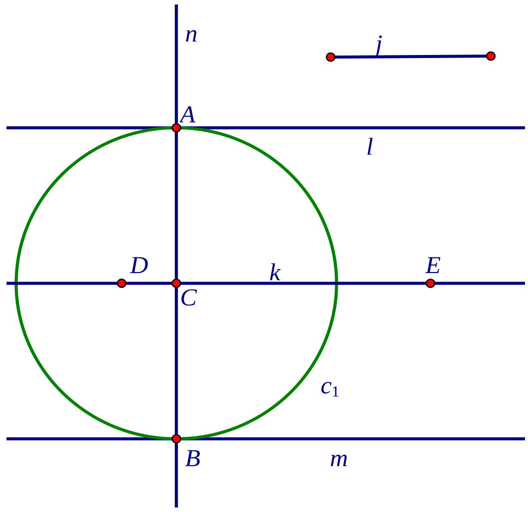


Рис. 6.4

параллельны данной прямой и отстоящие от неё на данном расстоянии.

В отличие от предыдущего ГМТ 1 Живая Математика не имеет встроенного в неё инструмента, позволяющего автоматически изображать ГМТ 2. Поэтому создадим собственный инструмент, дающий возможность после нажатия мышкой на данный отрезок и данную прямую, получить две прямые, параллельные данной и отстоящие от последней на расстоянии данного отрезка.

Итак, укажем алгоритм создания инструмента ГМТ 2. Необходимо выполнить следующие действия: 1) построить отрезок j (рис.4) и прямую k; 2) построить на k произвольную точку C; 3) построить прямую n, перпендикулярную k и содержащую C, 4) построить окружность c_2 с центром в точке C и радиуса j; 5) найти точки пересечения окружности c_2 и прямой n; построить прямые m и n, параллельные k, первая из которых проходит через B, вторая – через C; 6) спрятать все построения, кроме отрезка j и прямых k, m и n; 7) подсветить элементы построения в следующем порядке: отрезок j, прямые k, m и l. Отрыть «Инструмент пользователя» далее «Создать новый инструмент», называем его ГМТ 2. После создания нашего инструмента, можно проверить создание и работу нашего инструмента. Открытие сценария и использования инструмента, проходит аналогично ГМТ 1.

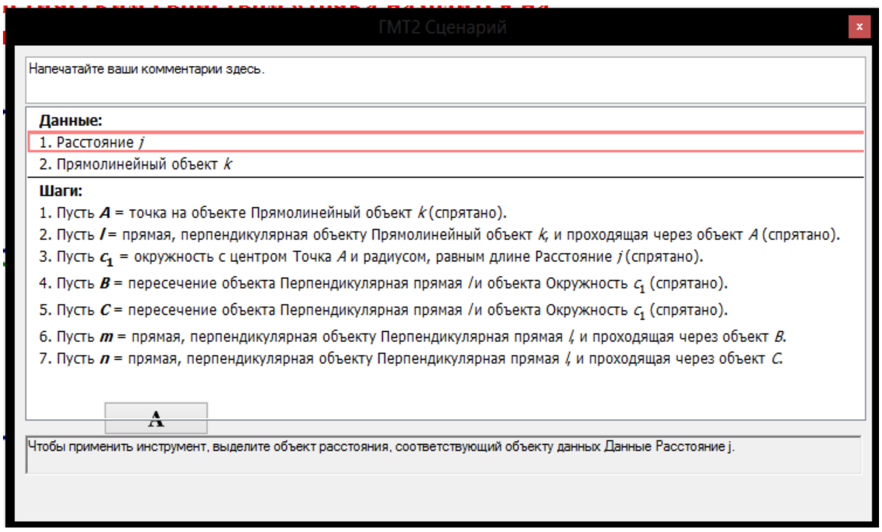


Рис. 6.5.

ГМТ3. Рассмотрим создание инструмента для построения ГМТ3. Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек равноудаленных от двух данных точек. Это ГМТ представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку с концами в двух данных точках.

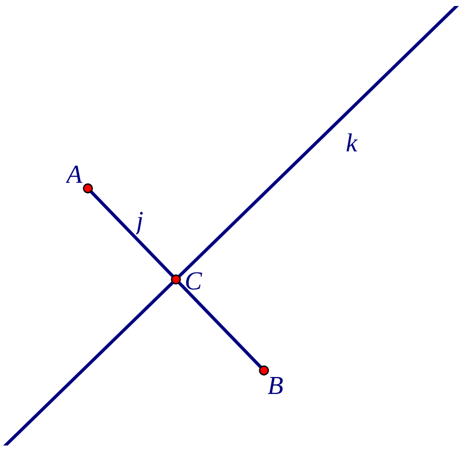


Рис.6.6.

Живая математика также не имеет аналогичного инструмента. Нет его и среди построенных нами ранее собственных инструментов. Приведём алгоритм его создания: 1) построим (рис. 6.6) точки A и B; 2) соединим A и B отрезком AB равным j; 3) построим середину C отрезка AB; 4) построим прямую k, содержащую C и перпендикулярную AB; 5) спрячем все построения, кроме точек A и B и прямой k; 6) перейдем к созданию собственного инструмента, подсветим точки A и B, затем прямую k. Далее выбираем «Инструмент пользователя», затем «Создать новый инструмент», называем его ГМТ3. Ниже (рис. 6.7) представлен сценарий работы инструмента ГМТ3.

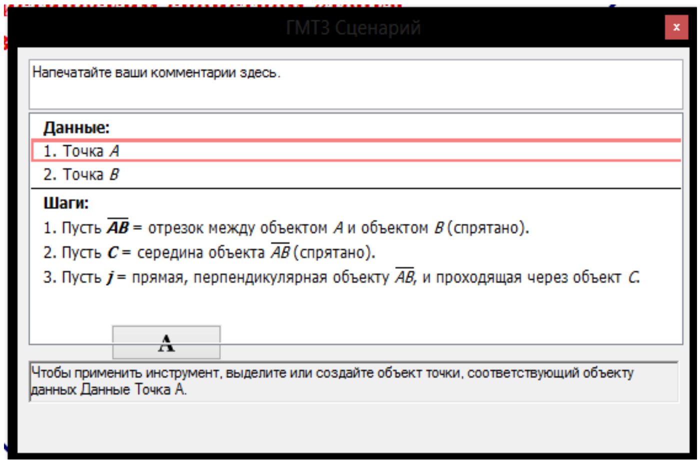


Рис.6.7.

ГМТ4. Рассмотрим создание собственного инструмента для построения ГМТ 4. Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек равноудаленных от двух данных параллельных прямых. Данное ГМТ представляет собой ось симметрии данных параллельных прямых.

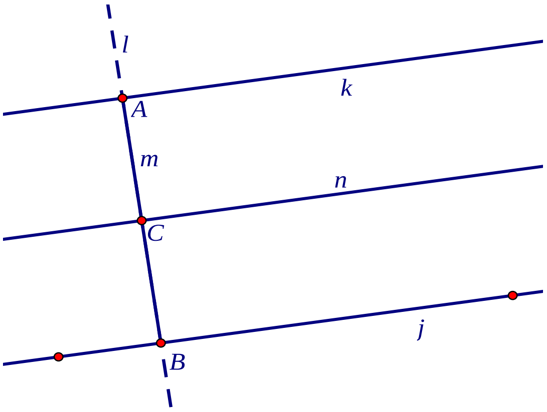


Рис.6.8.

Выполнить точное построение в Живой математики возможно, но готового инструмента, который сразу выполнит построение, нет. Поэтому создадим собственный инструмент. Так как данное множество представляет собой ось симметрии, то нам необходимо построить прямую n, параллельную данным параллельным прямым k и j, и содержащую середину C отрезка AB, где A принадлежит k, B принадлежит j и AB перпендикулярно k. Алгоритм построения можно легко усмотреть из рисунка 6.8, шаги сценария прописаны на слайде из рисунка 6.9.

После выполнения построения, переходим к созданию инструмента, для этого подсвечиваем точки на прямой j, прямую n и точку A. Далее выбрать «Инструмент пользователя» далее «Создать новый инструмент», называем его ГМТ4. Создание данного инструмента так же можно посмотреть в сценарии.

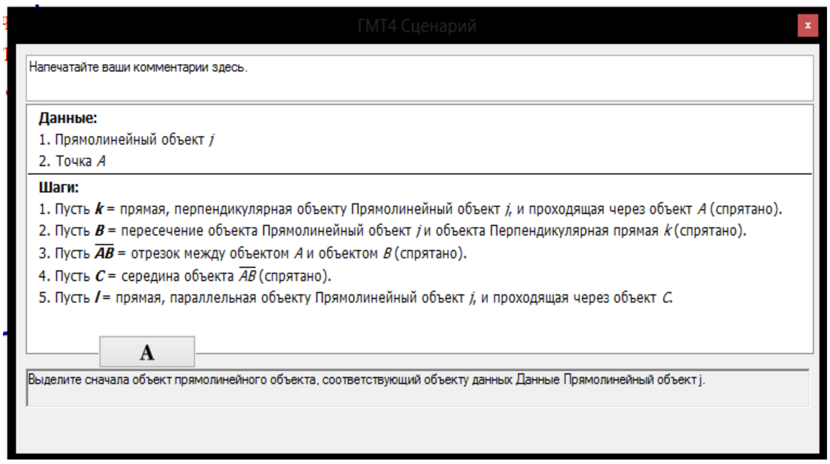


Рис.6.9.

Следующим рассмотрим создание собственного инструмента для построения ГМТ5. Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых. Это множество представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

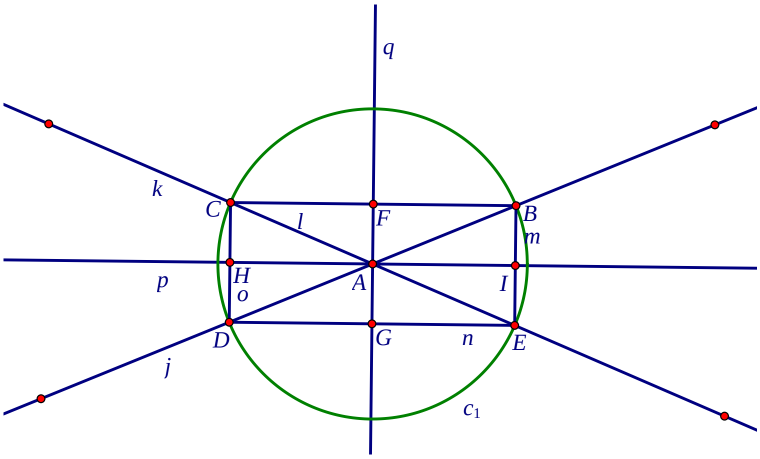


Рис.6.10.

Выполнение построение ГМТ, занимает немало времени. Поэтому для удобства использования данного множества при решении задачи, лучше использовать созданный собственный инструмент ГМТ5. После построения переходим к созданию инструмента, для этого необходимо подсветить объекты в следующем порядке: отмечаем прямую FG, HI, k и j. Далее выбрать «Инструмент пользователя» далее «Создать новый инструмент», называем его ГМТ5. Создание данного инструмента так же можно посмотреть в сценарии.

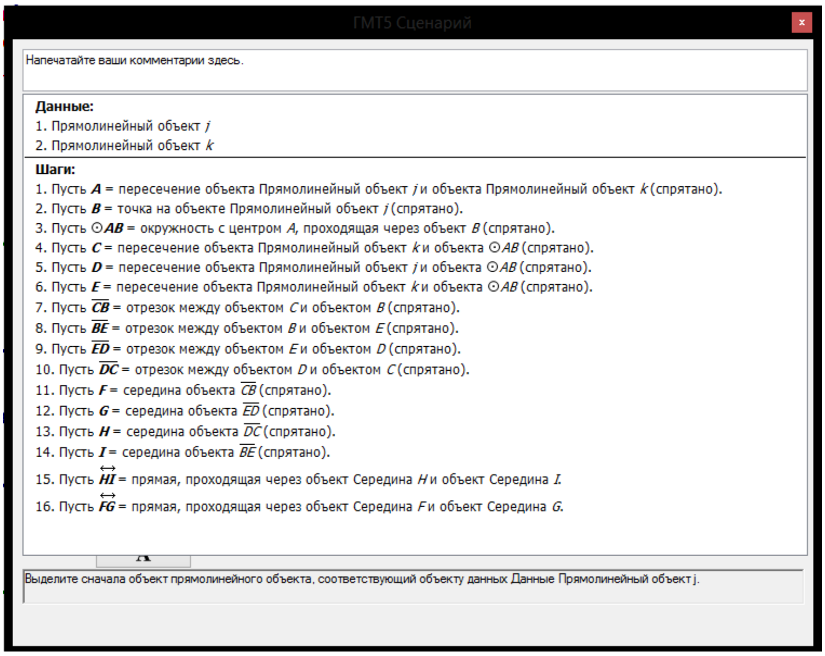


Рис.6.11.

Рассмотрим создание собственного инструмента для построения ГМТ 6. Данное геометрическое множество определяется как множество точек плоскости, каждое из которых обладает характеристическими свойством «из точки данный отрезок виден под прямым углом». ГМТ 6 представляет собой окружность, построенную на данном отрезке как на диаметре, из которой удалены концы данного отрезка.

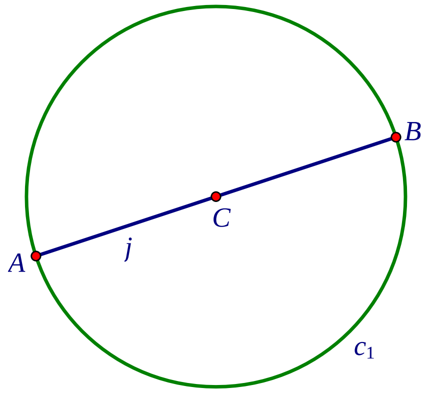


Рис.6.12.

Выполнив построение, переходим к созданию инструмента. Для этого необходимо подсветить точку А, диаметр окружности j, саму окружность c_1 и точку В. Далее выбрать «Инструмент пользователя», «Создать новый инструмент», называем его ГМТ6. Сценарий созданного инструмента представлен ниже.

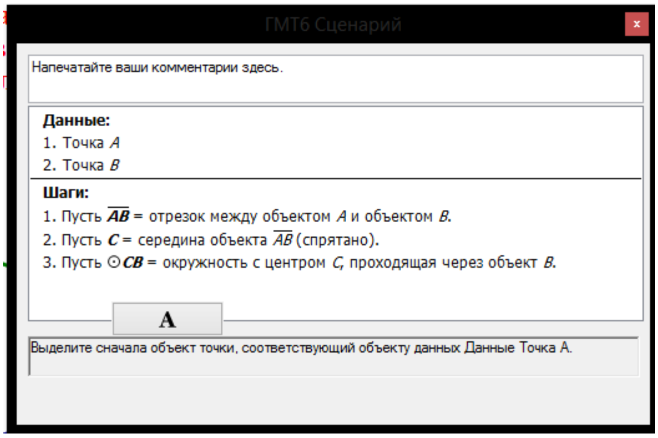


Рис.6.13.

Рассмотрим создание собственного инструмента для построения ГМТ 7. Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек равноудалённых от двух данных параллельных прямых. Данное ГМТ представляет собой ось симметрии данных параллельных прямых.

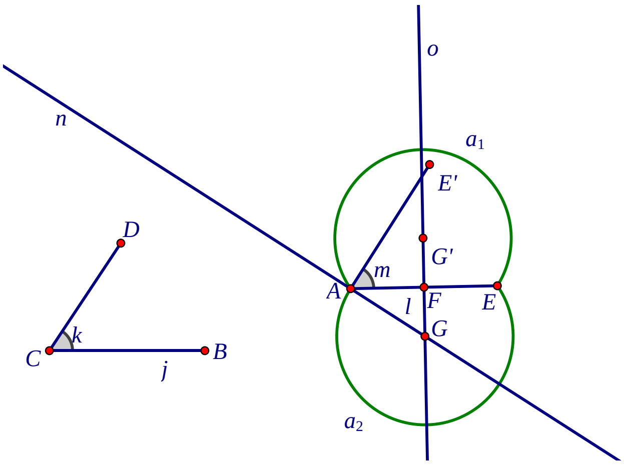
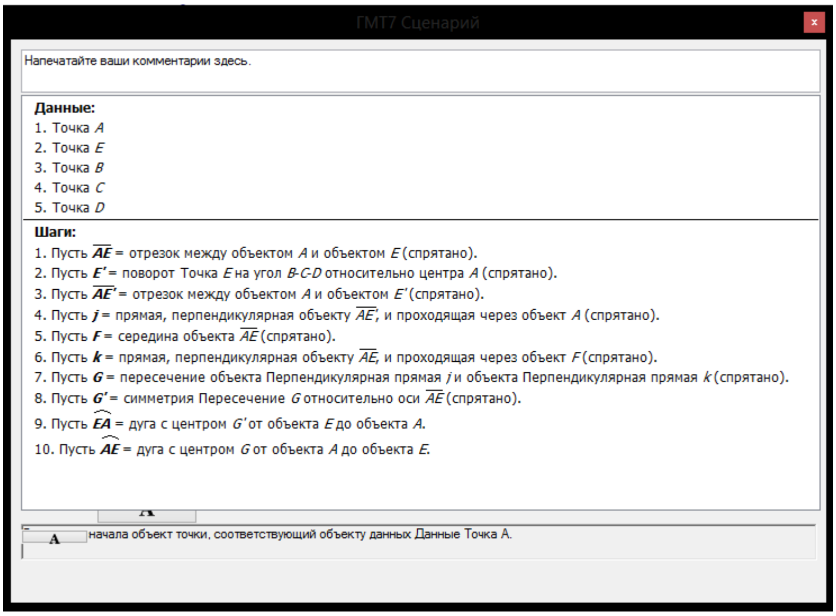


Рис.6.14.

Аналогично как в предыдущих случаях, создадим собственный инструмент.

Выполнив построение, переходим к созданию инструмента. Для этого необходимо подсветить точку А и Е, диаметр окружности l, окружность a_1 и a_2, отрезки АЕ' и АG. Далее выбрать «Инструмент пользователя», «Создать новый инструмент», называем его ГМТ 7. Сценарий созданного инструмента представлен ниже.



ГМТ7 Сценарий

Напечатайте ваши комментарии здесь.

Данные:
1. Точка A
2. Точка E
3. Точка B
4. Точка C
5. Точка D

Шаги:
1. Пусть $\overline{AE}$ = отрезок между объектом A и объектом E (спрятано).
2. Пусть E' = поворот Точка E на угол B-C-D относительно центра A (спрятано).
3. Пусть $\overline{AE'}$ = отрезок между объектом A и объектом E' (спрятано).
4. Пусть j = прямая, перпендикулярная объекту $\overline{AE'}$, и проходящая через объект A (спрятано).
5. Пусть F = середина объекта $\overline{AE}$ (спрятано).
6. Пусть k = прямая, перпендикулярная объекту $\overline{AE}$, и проходящая через объект F (спрятано).
7. Пусть G = пересечение объекта Перпендикулярная прямая j и объекта Перпендикулярная прямая k (спрятано).
8. Пусть G' = симметрия Пересечение G относительно оси $\overline{AE}$ (спрятано).
9. Пусть $\overset{\frown}{EA}$ = дуга с центром G' от объекта E до объекта A.
10. Пусть $\overset{\frown}{AE}$ = дуга с центром G от объекта A до объекта E.

A начала объект точки, соответствующий объекту данных Данные Точка A.

Рис.6.15.

Следующим рассмотрим создание собственного инструмента для построения ГМТ 8. Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «отношение расстояний от точки до двух данных точек A и B равно отношению длин двух данных отрезков».

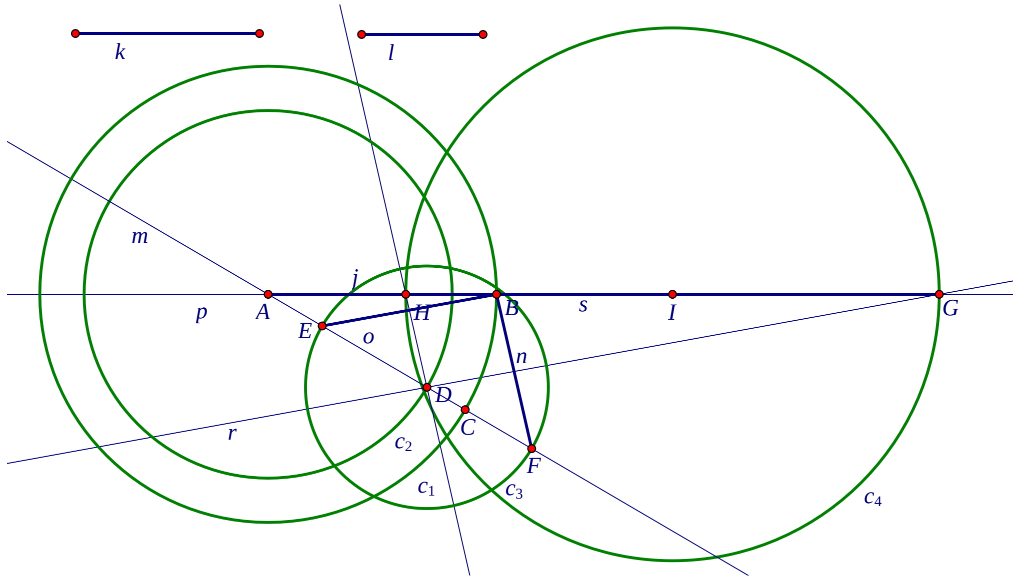


Рис.6.16.

Создание и построение можно так же посмотреть в сценарии инструмента.

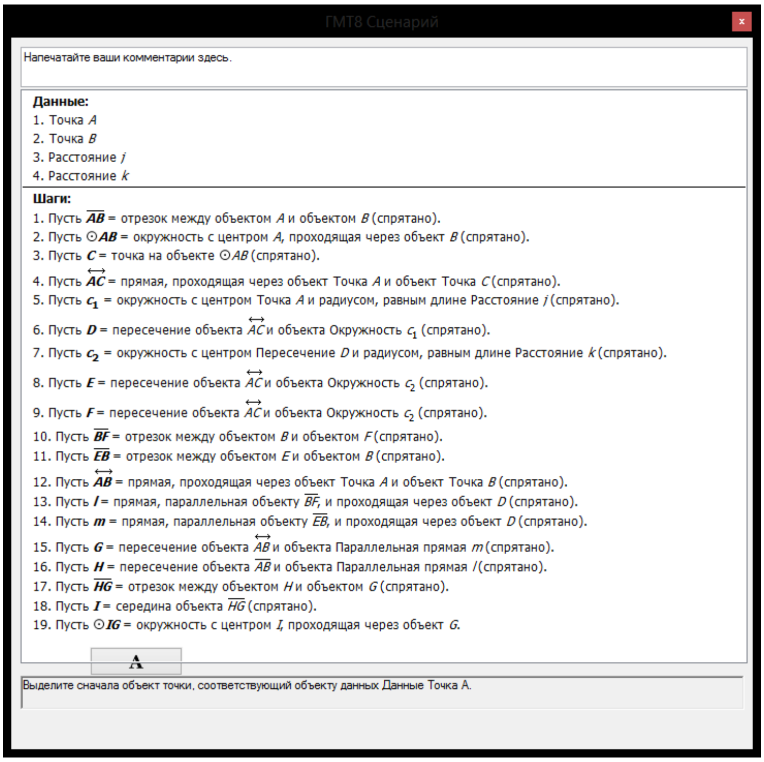


Рис.6.17.

§2.3. Методика решения задач на построение методом ГМТ с использованием среды Живая математика

Как уже отмечалось выше, сущность метода геометрических мест заключается в следующем:

1) задача сводится к построению некоторой точки;

2) находятся, по меньшей мере, два свойства, которыми обладает данная точка;

3) рассматривается одно из свойств, строится множество всех точек, обладающих этим свойством (первое геометрическое место точек);

4) рассматривается второе свойство, строится множество всех точек, обладающих этим свойством (второе геометрическое место точек);

5) поскольку искомая точка должна обладать обоими свойствами, то она должна принадлежать каждому из построенных множеств, то есть принадлежать пересечению этих множеств (пересечению первого и второго геометрических мест точек).

Итак, для успешного применения метода ГМТ необходимо при проведении анализа обучить школьников умению выбирать такую точку X, чтобы, во-первых, с её помощью можно было построить искомую фигуру и, во-вторых, найденная точка удовлетворяла двум условиям, позволяющим с помощью циркуля и линейки построить соответствующие ГМТ.

В связи с этим будем различать следующие три уровня сложности решения задачи на построение методом ГМТ.

Первый уровень сложности. Точка X присутствует на анализируемом чертеже и удовлетворяет двум свойствам, которые непосредственно следуют из условия задачи на построение.

Второй уровень сложности. Точка X присутствует на анализируемом чертеже, однако, хотя бы одно из двух свойств, которыми она обладает, следует из условия задачи с использованием соответствующих теорем элементарной геометрии.

Третий уровень сложности. Точка X не присутствует на анализируемом чертеже, её конструирование как геометрического объекта требует дополнительных построений, причём свойства, которыми обладает X, могут следовать не только из условий задачи, но и из вспомогательных утверждений геометрии.

Ниже приведены примеры задач на построение каждого из уровней сложности, продемонстрирована методика применения при их решении среды Живая математика.

Задача 1 (первый уровень сложности). *Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из сторон*.

В данной задаче требуется построить треугольник ABC, если дана сторона BC = a, сторона AC = b, и высота AH = h. При проведении **анализа** ученик изображает на рабочем поле Живой математики динамическую модель (рис. 5.1) произвольного треугольника ABC (трижды используется инструмент Отрезок), вводит необходимые обозначения. Его основная задача

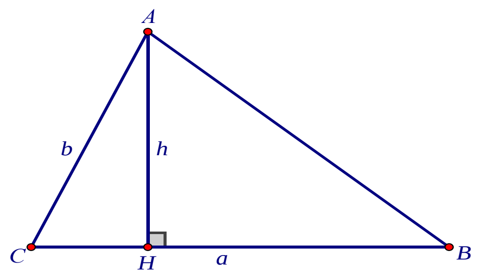


Рис. 7.1.

– найти точку, которая позволит, используя метод ГМТ, построить по заданным отрезкам искомый треугольник. Поскольку сторону BC по заданному отрезку *a* всегда можно построить (например, используя элементарное построение ЭП3 – построение на луче с началом в точке C отрезка CB, равного данному отрезку a), то задача будет решена, если удастся построить точку A. Эта точка удовлетворяет следующим двум свойствам, которые непосредственно вытекают из условия задачи.

Свойство №1: точка A находится на расстоянии b от точки C (AC = b). Множество всех точек, удовлетворяющих этому условию – окружность с центром C и радиуса b. Это множество можно построить как с помощью виртуального циркуля, так и с помощью собственного инструмента ГМТ1.

Свойство №2: точка A находится на расстоянии h от прямой BC (высота AH = h). Множество всех точек, удовлетворяющих этому условию – пара параллельных прямых, находящихся на расстоянии h от прямой BC. Это множество можно построить с помощью собственного инструмента ГМТ2.

В рассмотренной задаче точка A, к использованию которой сводится решение задачи методом ГМТ, непосредственно присутствует на анализируемом чертеже, а оба свойства, которыми обладает A по сути фигурируют в условии задачи.

Для реализации **построения** с использованием среды Живая математика, выполняется следующая цепочка действий:

1. На рабочем поле Живой математики изображаются данные отрезки a, b и h.

2. Строится произвольный луч с началом в точке C, на нём откладывается отрезок a (используется собственный инструмент ЭП3 – построение на данном луче отрезка, равного данному).

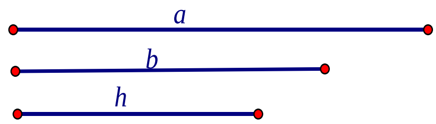


Рис.7.2.

Рис.7.3.

3. Строится ГМТ, удовлетворяющее первому свойству (свойство №1), т.е. окружность. Затем – ГМТ, удовлетворяющее второму свойству (свойство №2). В том случае, если ученики решают задачу традиционным способом на листе бумаги, они выполняют 5 построений: выбирают точку на BC, восстанавливают перпендикуляр к BC, строят окружность с центром в C и радиуса h, находят точки пересечения окружности с этим перпендикуляром, затем проводят через эти точки прямые, параллельные BC. При использовании Живой математики построение упрощается, т.к. достаточно

воспользоваться собственным инструментом ГМТ2 (§3), и на рабочем поле появятся требуемые фигуры.

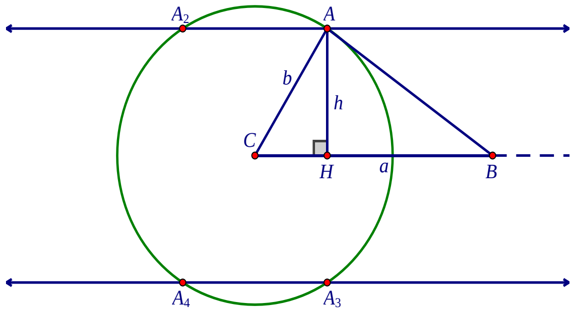


Рис. 7.4.

Далее находятся точки пересечения прямых и окружности, на рисунке 5.2 они обозначены А, А2, А3 и А4, одна из них (точка А) соединена с точками В и С. Получен искомый треугольник АВС. Вторым треугольником, не равным первому, будет треугольник A_2BC, а вот точки A_3 и A_4 новых (отличных от первых двух) треугольников не добавят.

Доказательство следует непосредственно из построения треугольника АВС: ВС = a, т.к. на луче с началом С откладывался отрезок, равный a; АС = b, т.к. А принадлежит окружности с центром С и радиуса b, высота АН равна h, т.к. точка А принадлежит прямой, находящейся на расстоянии h от прямой ВС.

Исследование, которое проводится с использованием среды Живая математика, позволяет, изменяя размеры данных по условию задачи отрезков, убедиться в том, что при $h < b$ будет два решения (к треугольнику АВС добавится неравный ему треугольник A_2BC), при $h = b$ – решение одно (прямые будут касаться окружности и искомым будет лишь один прямоугольный треугольник). При $h > b$ решений, очевидно, не будет.

Рассмотрим теперь несложную задачу, аналогичную предыдущей, которая будет относиться уже ко второму уровню сложности.

Задача 2 (второй уровень сложности). *Постройте треугольник по основанию, высоте и медиане, проведённой к боковой стороне.*

В данной задаче требуется построить треугольник АВС, если дана сторона ВС = a, медиана СМ = m, и высота АН = h. При проведении **анализа** на рабочем поле Живой математики изображается динамическая модель (рис. 5.3) произвольного треугольника ABC (трижды используется инструмент Отрезок). Выполняются необходимые обозначения.

Основная наша задача – найти точку, которая позволит, используя метод ГМТ, построить по заданным отрезкам искомый треугольник. Как и в задаче 1 строим сторону BC по заданному отрезку *a*. Для этого, например, используя элементарное построение ЭП3 – на луче с началом в точке C откладываем отрезок CB, равный данному отрезку а. Ясно, что задача будет решена, если удастся построить точку A. Однако, если одно из свойств, которым она обладает, является как и в предыдущей задаче свойство «точка A находится на расстоянии h от прямой BC», то второе свойство вряд ли удастся найти.

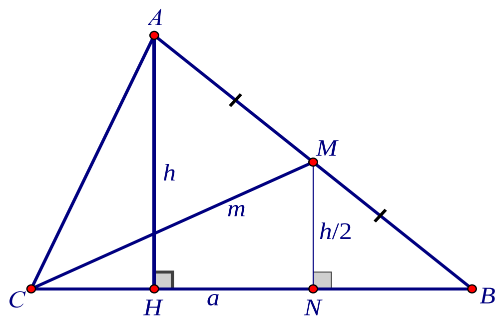


Рис. 7.5.

Из двух оставшихся точек M и H, изображённых на рис. 5.3 предметом обсуждения может быть лишь точка M (для точки H вряд ли можно найти два свойства). Первое свойство очевидное: точка M находится на расстоянии m от точки C, что позволяет построить для неё соответствующее геометрическое место точек, а именно окружность с центром в C и радиуса m.

Попытаемся для точки M найти второе свойство, которое можно будет описать одним из ГМТ. Для этого выполним дополнительное построение: проведем перпендикуляр MN к стороне BC (рис. 5.3). Так как M середина AB и MN параллельна AH, то MN – средняя линия прямоугольного треугольника

АВН. Отсюда длина отрезка MN равна половине основания AH, т.е. MN = h/2.

Но тогда решение нашей задача (построение, доказательство и

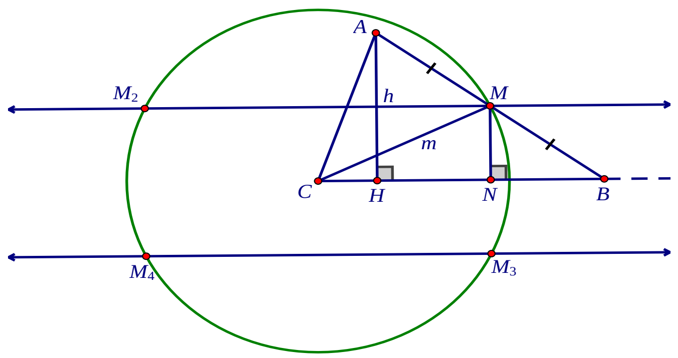


Рис. 7.6.

исследование), по сути, дублирует решение предыдущей задачи №1.

Построение. Методом ГМТ строится треугольник MBC по основанию BC = a, высоте h/2 и боковой стороне CM = m. Далее строится луч BM и на нём от точки M откладывается отрезок MA равный MB. Треугольник ABC – искомый.

Поскольку по построенным точкам M и B однозначно строится точка A, то при **исследовании** возможны три случая: при h/2 < m условию задачи удовлетворяют два треугольника, при h/2=m – один треугольник (кстати, он не будет прямоугольным) и при h/2 > m – решений не будет.

Рассмотрим задачу, которая будет относиться к третьему уровню сложности.

Задача 3 (третий уровень сложности). *Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.*

В данной задаче требуется построить треугольник ABC, если даны стороны BC = a, AC=b и медиана CM = m. При проведении **анализа** на рабочем поле Живой математики изображается динамическая модель (рис. 5.5) произвольного треугольника

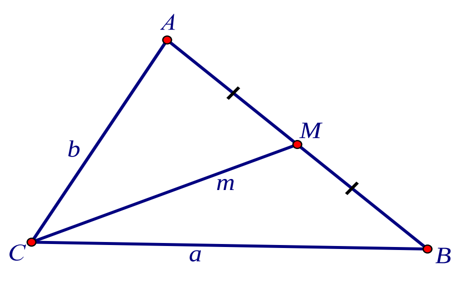


Рис. 7.7.

ABC и медианы CM. Предполагая, что одна из сторон, допустим, BC = a, треугольника ABC построена, попытаемся среди двух, фигурирующих на рисунке 5.5 точек A и M выбрать ту, что удовлетворяет двумя, устраивающими нас свойствами. Ни одна из них для роли ключевой точки ГМТ не подойдёт.

Выполним дополнительные построения, удвоим медиану CM и отложим этот отрезок на луче CM от точки M. Получим точку D (рис. 5.6). Рассмотрим четырёхугольник ADBC. В этом четырёхугольнике диагонали AB и CD пересекаются в точке M, которая каждую диагональ делит пополам. Согласно третьему признаку параллелограмма, ABCD – параллелограмм. По свойству параллелограмма, сторона BD = AC = b. Но тогда для точки D можно найти следующие два свойства, которым соответствуют известные ГМТ:

Свойство №1: точка D находится на расстоянии 2m от точки C; соответствующее ГМТ представляет собой окружность с центром в точке C и радиуса 2m.

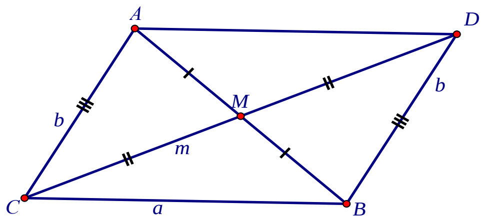


Рис. 7.8.

Свойство №2: точка D находится на расстоянии b от точки B; соответствующее ГМТ представляет собой окружность с центром в точке B и радиуса b.

Для реализации **построения** с использованием среды Живая математика, выполняется следующая цепочка действий:

1. На рабочем поле Живой математики изображаются отрезки a, b и m.

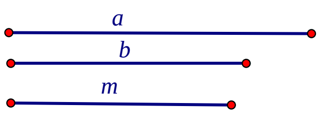


Рис.7.9.

2. Строится отрезок BC.

3. Строится отрезок, длина которого равна 2m (удваивается отрезок m).

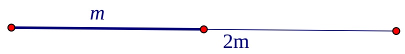


Рис.7.10.

4. Строится окружность c_1 с центром в точке C и радиуса 2m.

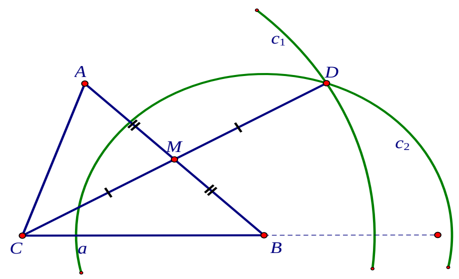


Рис. 7.10.

5. Строится окружность c_2 с центром в точке B и радиуса b.

6. Находится точка D пересечения окружностей c_1 и c_2, строится отрезок CD, находится его середина M, на луче BM от точки M откладывается отрезок MA, равный BM, точка A соединяется отрезками с точками B и C. Треугольник ABC – искомый.

При **доказательстве** того, что построенный треугольник ABC – искомый, последовательно устанавливаем, что BC = a (по построению), AC=BD = b (ADBC – параллелограмм, т.к. M – середина диагоналей) и CM=CD/2=2m/2=m.

При исследовании изменяем размеры данных отрезков и устанавливаем, что задача будет иметь единственное решение при

$$|a – b| < 2m < a + b$$

Как нам удалось установить в учебнике Л.С. Атанасяна и др. [?] есть задачи всех трёх уровней сложности, задачи первого и второго уровня могут решаться на уроках геометрии с использованием среды Живая математика по методике, проиллюстрированной в первых двух задачах. Задачи третьего уровня сложности, например, №359- на курсе по выбору.

Обсудим методику использования среды Живая математика при решении на элективном курсе задачу №359 из [7].

§2.4. Элективный курс «Конструктивная геометрия с Живой математикой» (7-9 классы), его апробация

Пояснительная записка

Элективный курс «Конструктивная геометрия с Живой математикой» предназначен для обучающихся 7-9 классов, направлен на расширение базового уровня знаний учащихся по решению задач методом ГМТ.

В ходе изучения данного курса обучающийся получит представление о ГМТ как об исторически развивающемся понятии; более подробно узнает о существовании всех ГМТ, которые не изучаются в школьном курсе геометрии; систематизирует основные способы применения ГМТ при решении задач; получит опыт решения разнообразных задач с использованием данного метода.

Вопросы, рассматриваемые в этом курсе, выходят за рамки обязательного содержания, поэтому данный элективный курс будет способствовать совершенствованию и развитию важнейших геометрических знаний и умений, предусмотренных образовательным стандартом, поможет оценить свои возможности по геометрии, развивать логическое мышление обучающихся.

Цель элективного курса: формирование у обучающихся предметных знаний в области геометрических мест точек.

Задачи элективного курса:

1) знакомство обучающихся с историей развития понятия ГМТ;
2) формирование системных знаний в области ГМТ;
3) развитие умений и навыков решения задач с применением данного метода;

4) развитие и активизация учебно-познавательной деятельности обучающихся;

5) формирование ценностного отношения к математическим знаниям.

Программа элективного курса имеет модульную структуру и включает четыре модуля:

- 7 класс: *Модуль 1.* «Задачи на построение».
- 8 класс: *Модуль 2.* «Геометрические построения на плоскости методом ГМТ».
- 9 класс*: Модуль 3.* «Решение задач методом ГМТ».

Общая трудоемкость – 14 часов (1 ч. в неделю). На изучение каждого модуля отводится 3 часа.

Форма занятий: комбинированные уроки, на которых предполагается изучение теоретического материала и практикум по решению задач с использованием конструктивной программой «Живая математика».

Ожидаемые результаты:

В результате изучения программы элективного курса «Конструктивная геометрия с Живой математикой» обучающиеся должны:

Знать:

- историю развития метода ГМТ;
- основные понятия и теоретические сведения из теории ГМТ;
- метод решения задач с применением ГМТ.

Уметь:

- правильно употреблять основную терминологию метода ГМТ;
- выполнять построения в программе «Живая математика»;
- применять теоретические сведения из теории ГМТ в ходе решения задач;
- уметь выполнять основные геометрические построения на плоскости с применением динамической программы «Живой математике»;

– уметь решать задачи методом ГМТ с применением динамической программы «Живая математика».

Владеть:

- основными понятиями в области теории ГМТ;
- умением работать в программе «Живая математика»;
- навыками решения задач на построение методом ГМТ.

Понимать:

- идею использования метода ГМТ;
- важность изучения метода ГМТ при решении задач на построение.

Учебно-тематическое планирование курса

Этапы изучения		Наименование темы	Кол-во часов
Модуль 1. «Задачи на построение»			
7 - класс		Знакомство с программой «Живая математика».	1
		Построения элементарных планиметрических фигур в «Живой математике».	2
		Понятие о геометрическом месте точек, основные ГМТ.	2
Модуль 2. «Геометрические построения на плоскости методом ГМТ»			
8 – класс		Обзор простейших геометрических мест. Решение задач на нахождение геометрических мест.	4
Модуль 3. «Решение задач методом ГМТ»			
9 - класс		Решение задач на построение, методом ГМТ.	4
		Итоговое занятие.	1
		Всего:	14

Содержание курса.

Модуль 1. «Задачи на построение» (7 класс)

Тема 1. «Знакомство с программой «Живая математика»»

В этой теме рассказывается о программе «Живая математика», о её возможностях. Решение задач с помощью данной программы.

Тема 2. «Построения элементарных планиметрических фигур в «Живой математике»»

На данном занятии изучается построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой; построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой; деление отрезка в данном отношении (внутренним и внешним способом); построение треугольника по трём данным сторонам; построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам; построение треугольника по двум сторонам и углу между ними. [см. Приложение1]

*Тема 3. «Понятие о геометрическом месте точек, основные Г*МТ*»*

Раскрывается понятие о геометрическом месте точек, решаются задачи с использованием данного метода в динамической программе «Живая математика».

Модуль 2. «Геометрические построения на плоскости методом ГМТ» (8 класс)

Тема 4. «Обзор простейших геометрических мест. Решение задач на нахождение геометрических мест»

Рассматриваются простейшие геометрические места точек. Решаются задачи с использованием различных ГМТ. Рассказывается точный смысл задачи о нахождение ГМТ, методике решения задач. Решение задач методом ГМТ.

Модуль 3. «Решение задач методом ГМТ»(9 класс)

Тема 5. «Решение задач на построение, методом ГМТ.»

Решение задач на построение с использованием метода геометрических мест точек.

Тема 6. «Итоговое занятие»

Проведение контрольной работы.

Список рекомендуемой литературы для учителя.

1. Александров, И.И. Сборник геометрических задач на построение с решениями. Пособие. Изд. 19-е, – М.: УЧПЕДГИЗ, 1954. – 176 с.
2. Аргунов, Б.И. Геометрические построения на плоскости. Пособие. / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. – М.: УЧПЕДГИЗ, 1955. – 268 с.
3. Александров, А.Д. Основание геометрии: Учеб. пособие для вузов по спец. «Математика». – М.: Наука, 1987. – 288 с.
4. Погорелов. А.В. Геометрия: учебник для 7-11 классов.- М.:Просвещение,1991 . – 383 с.
5. Элективные курсы в профильном обучении/ Министерство образования РФ – национальный фонд подготовки кадров. - М.: Вита-пресс, 2004. – 144 с.
6. Геометрические задачи на построение.-- 2-е изд., стереот. - М.: МЦНМО, 2012.- 152 с.: ил.

Список рекомендуемой литературы для учащихся.

1. Варданян, С.С. Задачи по планиметрии с практическим содержанием: Книга для учащихся 6-8 классов средней школы. / под ред. В.А. Гусева. – М.: Просвещение, 1989.
2. Погорелов А. В. Геометрия 7-11 / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2001.-453 с.
3. Геометрия: доп.главы к шк.учеб.8 кл.: учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Д. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1996.

Рассмотрим задачу 3 уровня сложности.

Задача 359. Дана окружность с центром O и точка A вне ее. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что AB = BC.

Эта задача может быть решена несколькими методами, например, методом подобия, алгебраическим методом и, конечно же, методом ГМТ. В школьном учебнике [7] она помещена среди задач повышенной трудности, находится в пункте «Задачи на построение» к главам III и IV. Судя по комментариям в ответе к этой задаче, приведённом в учебнике, её решение рекомендуется выполнить именно методом ГМТ, хотя сам термин «метод ГМТ» в учебнике практически не используется и, по нашему мнению, совершенно напрасно.

В данной задаче требуется построить прямую m, проходящую через данную точку А вне данной окружности c_1 с центром О и пересекающую c_1 в точках В и С таких, что АВ = ВС. При проведении **анализа** ученик изображает на рабочем поле Живой математики динамическую модель (рис. 8.1), на котором изображает данную окружность c_1. Поскольку при анализе предполагается, что задача решена, то удобнее сначала построить на окружности произвольные точки В и С, провести через них прямую m, затем построить точку А такую, что В – середина АС (это можно выполнить, построив, например, вторую окружность с центром В и радиуса ВС). На рисунке 8.1 представлена динамическая, которая будет использоваться для проведения анализа.

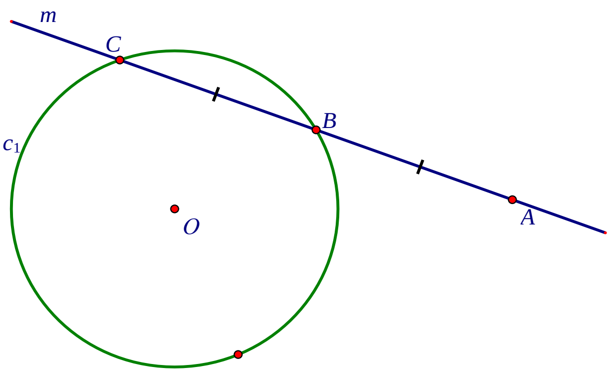


Рис. 8.1.

Ни одна из фигурирующих на рисунке точек (A, B, C и O) не может являться ключевой точкой для реализации метода ГМТ, т.к. ни одна из них не обладает двумя свойствами, допускающими их описание с помощью циркуля и линейки. Предпримем попытку построить вспомогательную точкуD, которая, во-первых, позволит построить искомую прямую m и, во-вторых, обладает двумя свойствами.

Построим вспомогательную точку D такую, что В – середина OD (рис. 8.2). Для этого на луче OB достаточно отложить от точки В отрезок равный радиусу r данной окружности c_1. Рассмотрим четырёхугольник AOCD, который является параллелограммом по третьему признаку параллелограмма диагонали точкой пересечения делятся пополам. Поэтому AD = OC = r. Но тогда для решения задачи достаточно построить точку D, с её помощью найти точку B (например, как пересечение окружности c_1 и отрезка OD), тогда прямая AB и будет искомой прямой m.

Найдём для точки D два свойства.

Первое свойство: точка D находится на расстоянии 2r от точки O, т.е. принадлежит окружности с центром O и радиуса 2r.

Второе свойство: точка D находится на расстоянии r от точки A, т.е. принадлежит окружности с центром A и радиуса r.

Для реализации **построения** с использованием среды Живая математика, выполняется следующая цепочка действий:

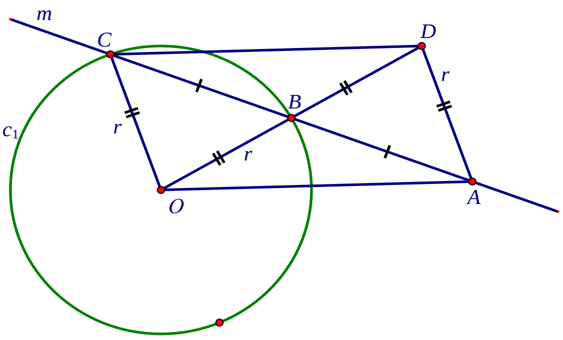


Рис. 8.2.

1. На рабочем поле Живой математики изображаются окружность c1 с центром O и радиуса r (диаметра 2r) и точка A вне ее (рис. 8.3).

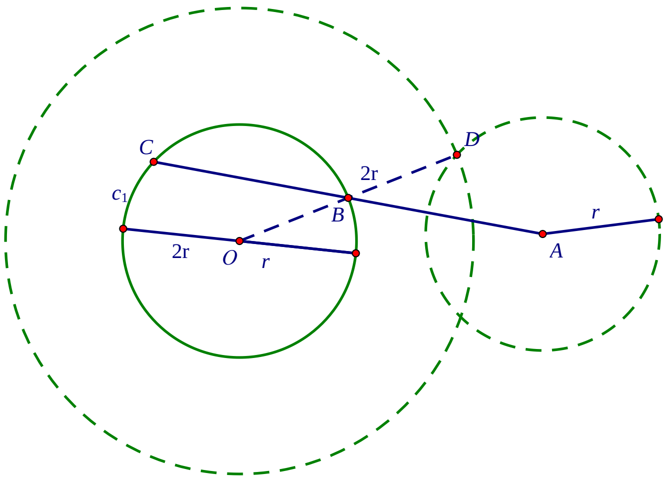


Рис.8.3.

2. Строятся две окружности: одна с центром O и радиуса 2r, вторая с центром в A и радиуса r, находится их общая точка D.

3. Строится отрезок OD, находится общая точка B данной окружности c_1 и отрезка OD.

4. Прямая AB – искомая.

Для проведения **доказательства** страница в Живой математике, содержащая динамический чертёж, представленный на рис. 8.3, копируется на следующую страницу, и делаются дополнительные построения: построим отрезки AD и OC (рис. 8.4). Треугольники ABD и CBO – равнобедренные, с равными боковыми сторонами AD = BD = OB = OC = r и равными углами при основании, т.к. $\angle ABD = \angle CBO$ как вертикальные углы. Таким образом, $\Delta ABD = \Delta CBO$ и AB = BC.

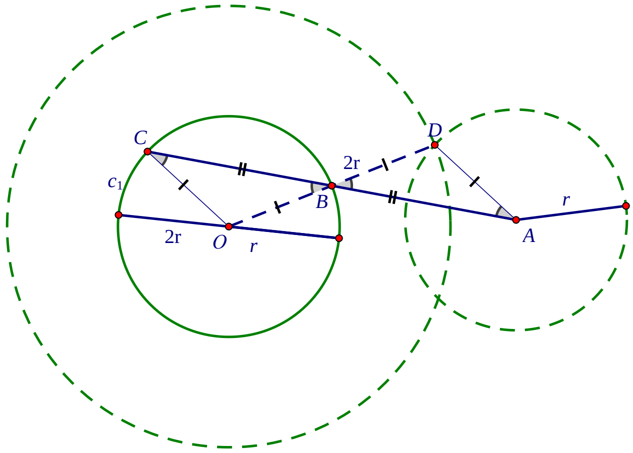


Рис.8.4.

Для проведения **исследования** страница в Живой математике, содержащая динамический чертёж, представленный на рис. 8.3, скопируем на следующую страницу, спрячем отрезки, изображающие радиусы и диаметры окружностей. Находим вторую точку D_2 пересечения вспомогательных пунктирных окружностей c_2 и c_3, строим точку B_2 пересечения отрезка OD_2 и окружности c_1, строим вторую прямую AD_2, которая очевидно будет удовлетворять условию задачи (рис. 8.5).

Перемещая точку A, убеждаемся, что задача имеет:

а) два решения, если расстояние OA удовлетворяет неравенству r < OA < 2r,

б) одно решение, если OA = 2r;

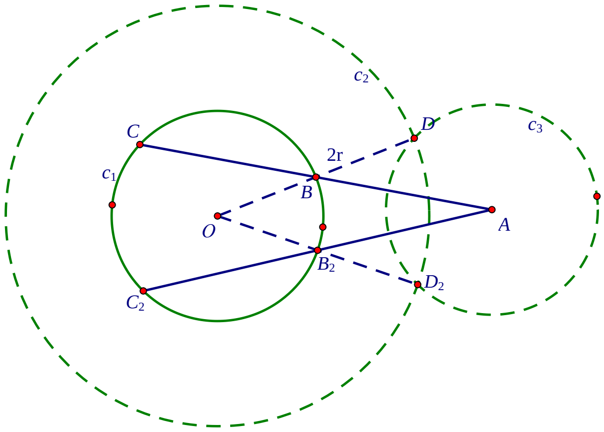


Рис.8.5.

в) не имеет решения, если OA > 2r.

Заключение

В соответствии с поставленными целями перед данной выпускной квалификационной работой и результатами, полученными в ходе исследования, были получены следующие результаты:

а) проанализированы темы школьного учебного материала, связанные с решением конструктивных задач, с точки зрения использования при обучении этим темам системы динамической геометрии Живая математика;

б) изучены динамические, конструктивные и вычислительные возможности среды Живая математика как средство обучения решению конструктивных задач методом ГМТ;

в) подготовлено компьютерное сопровождение обучения решению конструктивных задач методом ГМТ с использованием среды Живая математика в виде GSP-файлов;

г) разработан элективный курс «Конструктивная геометрия с Живой математикой» для 7-9 классов.

В данной работе разработана методика решения задач на построение методом ГМТ с использованием динамической программы «Живая математика», которая значительно упрощает процесс поиска решений, то есть анализ задачи, облегчает построение, доказательство, увеличивает глубину и точность исследования, дает возможность увидеть и проанализировать все существующие решения задачи и частные случаи решений.

Таким образом, можно сделать следующий вывод, что изучение темы решения задач на построение методом ГМТ с использованием системы динамической геометрии «Живая математика» повышает уровень знаний и умений учащихся. Сделанные выводы дают основание полагать, что справедливость гипотезы подтверждена, все поставленные задачи исследования решены и цель достигнута.

Библиографический список

1. Александров, И.И. Сборник геометрических задач на построение/ А.Д Александров;Под ред. Н.В.Наумович.– 19-е изд. – М.:Едиториал УРСС, 2008.- 25 с.

2. Аргунов Б.И., Балк М.Б. - Геометрические построения на плоскости (1957).

3. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования.- Москва 2010.

4. Аргунов, Б.И. Элементарная геометрия: учеб.пособие для пед. ин-тов / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. – М.: Просвещение, 1966. – 366 с.

5. Анищенко, С. А. Лекции по геометрии часть 1. Геометрия на плоскости: / С. А. Анищенко,– Издательство КГПУ 1998. – 144 с.

6. Блинков, А. Д. Геометрические задачи на построение / А.Д. Блинков. - М.: МЦНМО, 2016. - 925 с.

7. Геометрия. 7-9 классы. Учебник. Атанасян Л.С. и др. (2014, 384с.)

8. Ермаков Д.С., Петрова Г.Д. Создание элективных учебных курсов для профильного обучения // Школьные технологии. – 2006. – № 6 – С.

9. Жафяров, А. Ж. Конструктивная геометрия : учебно-дидактический комплекс по реализации элективного курса / А. Ж. Жафяров, Е. С. Никитина, З. Н. Родина ; Новосиб. гос. пед. ун-т. - Новосибирск : НГПУ, 2011. - 105 с.

10. Жафяров, А. Ж. Геометрические построения на плоскости : ЭВМ-учебник / А. Ж. Жафяров, А. А. Абрамов, А. И. Хасанов. – Новосибирск : НГПУ, 2009.

11. Живая Математика™: Справочное пособие. — М.:ИНТ. — 232с.

12. Живая математика: сборник методических материалов. Г. Б. Шабат и др.- М.: ИНТ - 176с.

13. Живая математика 5.0:Сборник методических материалов. М.:ИНТ,2013. 205 с.

14.Живая Математика 5.0.: Сборник методических материалов. Г.Б. Шабат, В.М. Чернявский, В.В. Кулагина, Л.М. Смолина, В.Н. Боровикова, В.Н. Дубровский, Г.А. Аджемян, А.В. Пантуев. — М.: ИНТ, 2013. — 205 с.

15. Коновалова, В.С. Решение задач на построение в курсе геометрии как средство развития логического мышления / В.С. Коновалова, З.В. Шилова // Познание процессов обучения физике: сборник статей. Вып.9. - Киров: Изд-во ВятГГУ, 2008. - С. 59-69.

16. Майер В. Р. Системы динамической геометрии как средство обучения будущих учителей математики геометрическим преобразованиям / Майер В. Р., Т. В. Апакина, А. А. Ворошилова // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева

17. Майер В.Р. Обучение геометрии будущих бакалавров - учителей математики с использованием систем динамической геометрии // Вестник Красноярского педагогического университета В.П. Астафьева. - 2015. - № 1 (31). -С. 60-64.

18. Майер В.Р. , Кузьмина О.А., Анкова В.В. Обучение геометрическим построениям на плоскости с использованием возможностей среды Живая математика // Информационные технологии в математике и математическом

образовании: материалы VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск.- 2017. – С. 82 -94.
19. Модернизация российского образования: документы и материалы./ Ред.-сост. Днепров Э.Д.- М.: ГУ ВШЭ, 2002, с.113.
20. Методика обучения геометрии: Учебн. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В.Орлов, В.А.Панчищина и др.;Под ред. В.А. Гусева. — М.: Издательский центр «Академия», 2014. — 368с.
21. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 7-9 классов. (2014, 240с.)
22. Понарин, Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т.2: Стереометрия, преобразования пространства / Я.П.Понарин – М.: МЦНМО, 2006.
23. Понарин, Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. - Т.2: Стереометрия, преобразования пространства / Я.П.Понарин - М.: МЦНМО, 2006.
24. Савин А.П. Метод геометрических мест /Факультативный курс по математике: Учебное пособие для 7-9 классов средней школы. Сост. И.Л. Никольская. – М.: Просвещение, с. 74.
25. Сенчилов В.В. Применение интерактивных технологий при изучении курса геометрии в школе // Народное образование. Педагогика. – 2013. – С. 1 – 6.
26. Сборник нормативных документов. Математика./ Сост. Днепров Э.Д., Аркадьев А.Т.- М.: Дрофа, 2004.
27. Тимофеева Н. М., Киселева О. М. Перспективы развития методов математического моделирования в обучении // Системы компьютерной математики и их приложения. Изд – во СГПУ, 2010. – С. 249 – 252.
28. Тимофеева Н. М., Киселева О. М. О применении программных средств в процессе обучения // Системы компьютерной математики и их приложения. Изд – во СГПУ, 2009. – С. 233 -235.
29. Шабат Г.Б. Живая математика и математический эксперимент // Народное образование. Педагогика. – 2012. – С. 156 – 165.
30. Шарыгин, И.Ф. Задачи по геометрии (Стереометрии) / И.Ф. Шарыгин. - М.: Наука, 2009.
31. А. М. Небесская, Подходы к разработке элективных курсов по математике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.открытыйурок.рф/статьи/410718/

Приложение 1

Модуль 1. «Задачи на построение»(7 класс)

Конспект занятия 1 по теме:

«Знакомство с программой «Живая математика»»

Основная цель: познакомить учащихся с программой «Живая математика», рассказать о её возможностях.

Планируемые результаты:

предметные: формирование представлений о программе «Живая математика», развитие умений использовать динамическую программу при решении задач на построение.

метапредметные: умение планировать и организовывать учебную деятельность; способность к анализу новой информации; проявление критичности мышления и навыков самоконтроля; умение аргументировать свои умозаключения.

личностные: умение проявлять учебно-познавательный интерес к новому материалу, стремление к личностному развитию и самообразованию.

Этапы занятия:

1. Организационный момент (1 мин)

2. Введение. (20 мин)

3. Практикум по решению задач на построение с использованием Программы «Живая математика» . (20мин)

4. Постановка домашнего задания. (2 мин)

5. Подведение итогов (2 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент.

Здравствуйте, ребята! Сегодня мы начинаем изучение курса «Конструктивная геометрия с Живой математикой». Сегодня мы познакомимся с динамической программой и её возможностями «Живая математика». И решим задачи с помощью данной программы.

2. Введение.

Рассмотрим и разберём интерфейс и основные *конструктивные возможности* программы "Живая Математика". Основными элементами окна программы "Живая геометрия" являются:

✓ рабочее поле или плоскость чертежа (имеет белый фон и занимает всю центральную часть экрана);

✓ панель инструментов (столбец кнопок в левой части экрана);

✓ меню команд (строка и заголовок меню расположена в верхней части экрана).

Для получения "живого" чертежа, изучим рабочее поле, меню команд и инструменты данной программы. На рисунке 1 предоставлено рабочее поле, на котором выполняются построение.

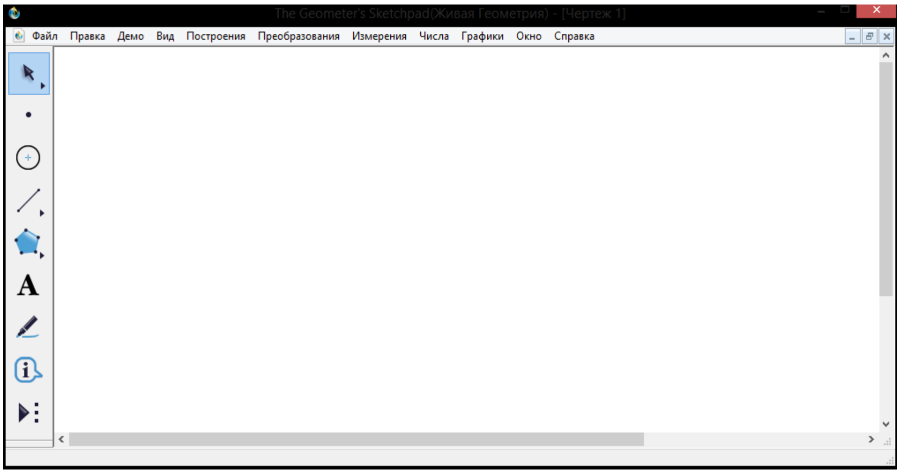


Рис. 1.

В левой части рабочего поля расположена вертикальная панель инструментов, в верхней части, горизонтально, – панель меню со следующими именами: Файл, Правка, Демо, Вид, Построение, Преобразование, Измерения, Числа, Графики, Окно, Справка.

Набор инструментов (в начале работы расположен вертикально вдоль левой части окна чертежа) содержит инструменты, позволяющие выделять, перетаскивать, создавать объекты и давать им имена. Кроме того, имеется особый инструмент (нижняя кнопка), служащий для изготовления и хранения нестандартных инструментов, созданных самими пользователями.

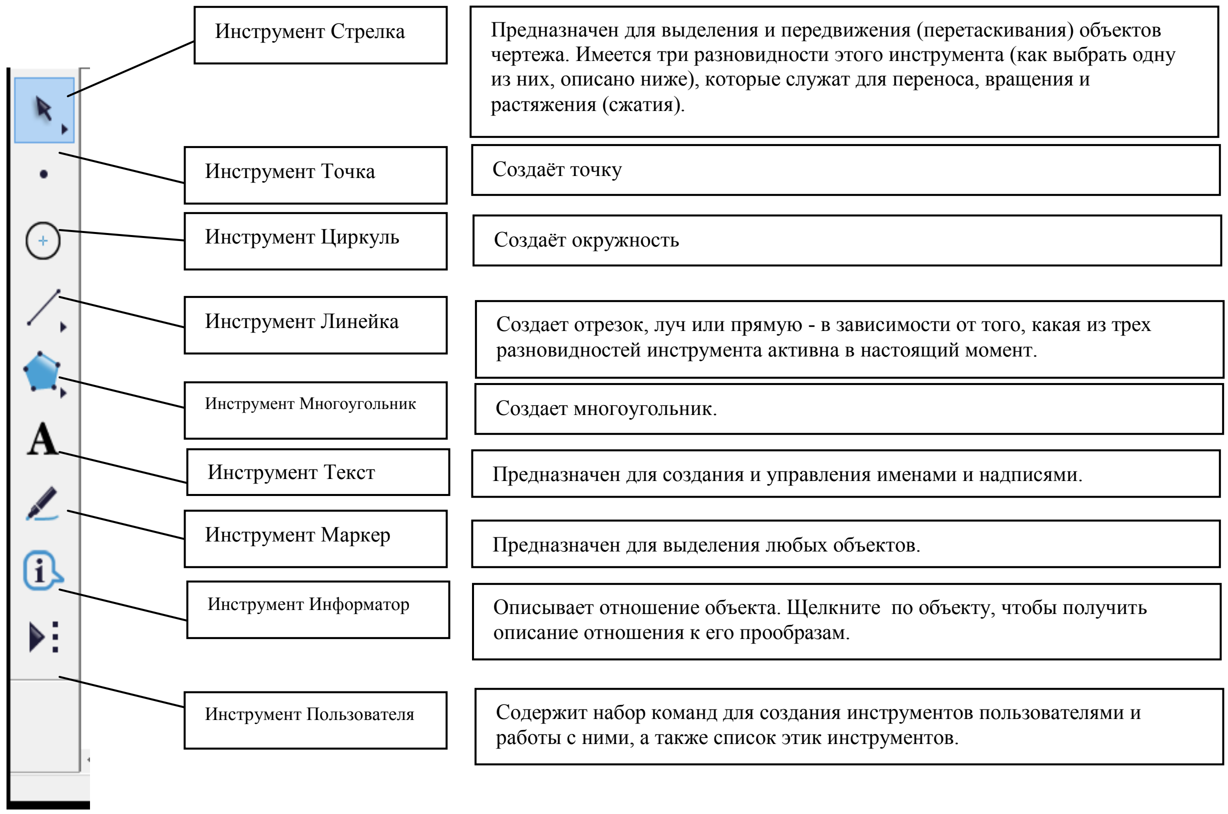


Рис.2.

Для того, что бы выбрать инструмент из набора, достаточно щелкнуть на значок нужного инструмента. Этот инструмент остается активным до тех пор, пока не выбран другой.

Инструмент *Стрелка* и *Линейка* имеют по три разновидности каждый.

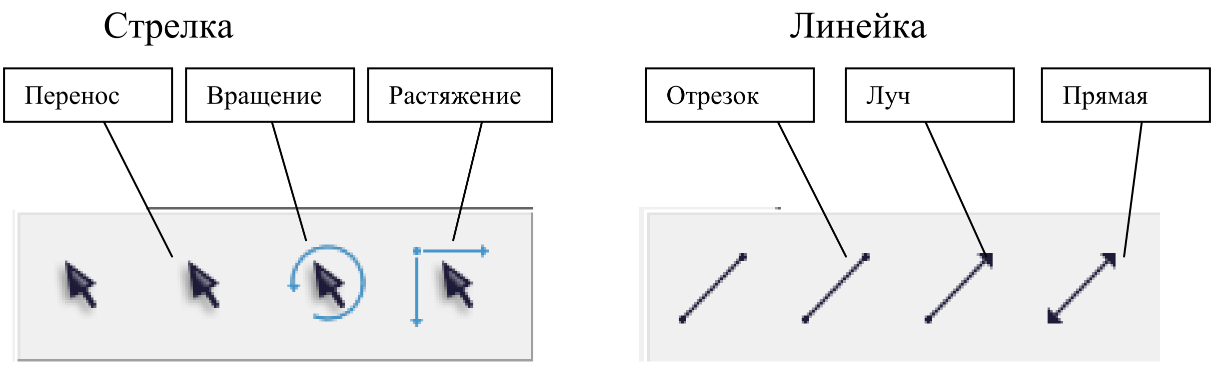


Рис.3.

Чтобы выбрать одну из разновидностей инструмента:

1. Поставьте курсор на значок инструмента Стрелка или Линейка.

2. Нажмите и удерживайте клавишу мыши; при этом открываются значки разновидностей инструмента.

3. Удерживая клавишу мыши, переместите курсор на нужный значок и отпустите клавишу.

Теперь используя данную программу выполним решение следующёй задачи.

Элементарная задача 1. *Разделите данный отрезок пополам*.

Решение.

1. Используя виртуальную линейку (её частный случай «Отрезок», который расположен на вертикальной панели инструментов), построим данный отрезок АВ (рис. 2).

2. Используя виртуальную окружность (вертикальная панель инструментов), построим окружности c_1 и c_2 с центрами в точках А и В и радиуса АВ.

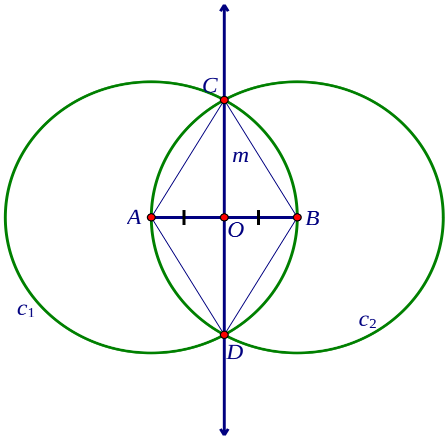


Рис. 2.

3. Используя команду «Пересечение» (меню команд «Построение»), найдем общие точки С и D окружностей c_1 и c_2.

4. Используя виртуальную линейку (её частный случай «Прямая»), построим прямую m, проходящую через точки С и D.

5. Используя команду «Пересечение», найдем общую точку О отрезка АВ и прямой m. Точка О – искомая, т.к. согласно построению четырёхугольник АСВD – ромб, в котором О – точка пересечения диагоналей.

3. Практикум по решению элементарных задач на построение.

Учащиеся самостоятельно выполняют решение следующёй задачи, учитель при возникновении трудностей помогает учащимся.

Элементарная задача 3. *На данном луче от его начала отложите отрезок, равный данному.*

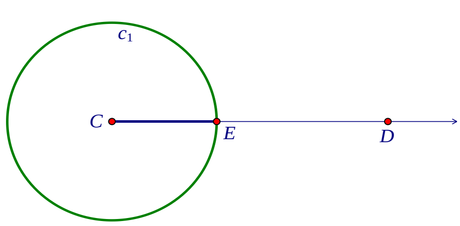


Рис. 3

Р е ш е н и е.

1. Построим отрезок AB и луч CD (рис. 8).

2. Построим окружность c_1 с центром в точке C и радиуса AB.

3. Найдём общую точку E окружности c_1 и луча CD.

4. Построим отрезок CE. Очевидно, что CE – искомый отрезок, т.к. точка C принадлежит лучу CD (построение 3) и CE = AB по определению окружности заданного радиуса (построение 2).

4. Постановка домашнего задания.

Учитель, дает учащимся файл с установочной программой.

Выполнить задание

а) установить программу на собственный компьютер.

б) выполнить построение элементарных задач

1. Разделить данный угол пополам.
2. Построить угол равный данному.

5. Подведение итогов.

Подумайте, и назовите положительные стороны использование программы «Живая математика» при решении геометрических задач на построение?

Конспект занятия 2 по теме: «Построения элементарных планиметрических фигур в «Живой математике»»

Основная цель: вспомнить решение и построение элементарных задач на построение, выполнить их решение в программе «Живая математика».

Планируемые результаты:

предметные: формирование умений выполнять решение простейших задач на построение с использованием программы «Живая математика».

метапредметные: умение планировать и организовывать учебную деятельность; способность к анализу новой информации; проявление критичности мышления и навыков самоконтроля; умение аргументировать свои умозаключения.

личностные: умение проявлять учебно-познавательный интерес к новому материалу, стремление к личностному развитию и самообразованию.

Этапы занятия:

1. Организационный момент (4 мин)

2. Введение. (40 мин)

3. Практикум по решению задач на построение с использованием Программы «Живая математика» . (40мин)

4. Постановка домашнего задания. (3 мин)

5. Подведение итогов (3 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент.

Здравствуйте, ребята! На прошлом уроке, мы с вами познакомились с динамической программой «Живая математика». Дома вам предстояло установить её на компьютеры и выполнить построение, открываем файлы с вашим решением (проверка Д/З). Сегодня мы продолжим выполнять решение задач на построение с помощью «Живой математикой».

2. Введение.

Вернемся к решению элементарной задачи 3, которую мы решили на прошлом уроке. И научимся создавать собственный инструмент, который нам позволит моментально и безошибочно откладывать на данном луче от его начала, отрезок равный данному.

Для создания собственного инструмента спрячем сначала все имена и вспомогательные фигуры (в нашем случае окружность c_1), далее, подсветим отрезок AB (концы отрезка подсвечивать не надо), точки C, D и E, отрезок CE, зайдём в меню команд создания собственных инструментов (нижняя кнопка на вертикальной панели), выберем команду «Создать новый инструмент…», присвоим имя «Отложить отрезок на луче» инструменту. Наш инструмент готов, проверим его, выполнив такое же построение но уже с помощью инструмента. Изменим величину данного отрезка AB, построим произвольный луч и отложим на нем данный отрезок AB. Выбираем инструмент, на указатели мыши появиться точка, далее необходимо выделить последовательно точками данный отрезок. Затем наводим курсор мыши на начало луча, ставим точку и у нас автоматически строиться искомый отрезок, равный данному отрезку AB.

Перейдем к решению элементарной задачи 5. Нам требуется построить прямую параллельную данной прямой, через точку не принадлежащую прямой. После выполнения построения создадим инструмент, который будет выполнять данное построение. Учащиеся выполняют данное задание самостоятельно. При возникновении затруднений учитель помогает учащимся.

3. Практикум по решению элементарных задач на построение.

Учащиеся выполняют решение следующих элементарных задач на построение(самостоятельно).

1). Элементарная задача 6. Построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

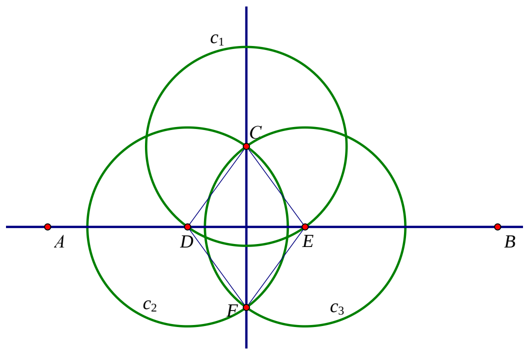


Рис.1.

Построение:

1. Построим данную прямую AB и точку C, не лежащую на прямой.

2. Построим окружность c_1 с центром в точке C и произвольным радиусом. Найдем точки пересечения окружности c_1 с прямой AB, это точки D и E.

3. Проведем окружность c_2 и c_3 с центрами в точках D и E, радиуса DC и EC. Найдем точку пересечения окружности c_2 и c_3, это точка F.

4. Проведем через точки C и F прямую.

Прямая CF - искомая прямая, т.к. DCEF ромб, по построению. DE и CF - диагонали, пересекающиеся под прямым углом. 2). Элементарная задача 7. Деление отрезка в данном отношении (внутренним и внешним способом).

Построение:

1. Построим данные отрезки m и n. Отрезок AB и луч AC.

2. Строим окружность c_2 с центром в точке A и r = m. Найдем точку пересечения окружности c_2 и луча AC, это точка D.

3. Строим окружность c_3 с центром в точке D и r = AB. Найдем точку пересечения окружности c_3 и луча AC, это точка H.

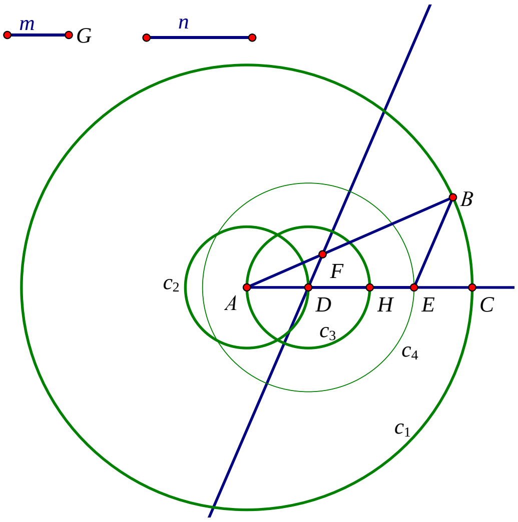


Рис.2.

4. Строим окружность c_4 с центром в точке D и r = n. Найдем точку пресечения окружности c_4 и луча AC, это точка E.

5. Строим отрезок EB.

6. Далее используя возможности "Живой математики" строим прямую параллельную прямой EB. Необходимо подсветить прямую EB, точку D далее "Построение" → "Параллельная прямая". Найдем пересечение отрезка AB и параллельной прямой, это точка F.

3). Элементарная задача 8. Построение треугольника по трём данным сторонам.

Построение:

1. Построим данный отрезки a, b и c.

2. Строим произвольный луч с началом в точке C.

3. Строим окружность с центром в точке C и r = a. Найдем точку пересечения окружности c_1 и луча, это точка B.

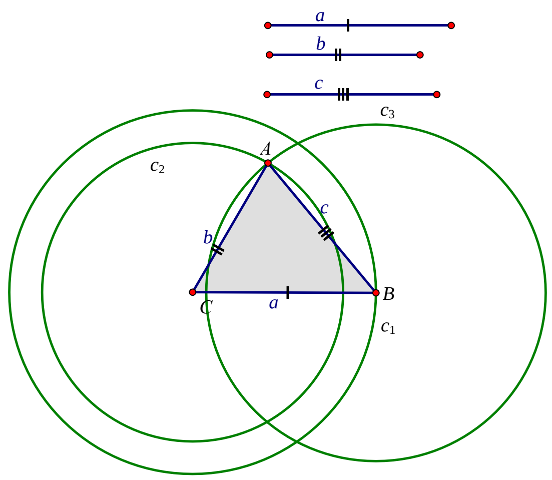


Рис.3.

Отрезок CB одна из сторон искомого треугольника которая равна отрезку a.

4. Строим окружность c_2 с центром в точке C и r = b.

5. Строим окружность c_3 с центром в точке B и r = c.

6. Найдем точку пересечения окружности c_2 и c_3, это точка A.

7. Строим отрезок AC, который равен отрезку b и AB, который равен отрезку c. $\triangle ABC$ - искомый треугольник, т.к. BC = a (по построению пункт 3), CA = b

(по построению пункт 4), BA = c (по построению пункт 5).

4). Элементарная задача 9. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.

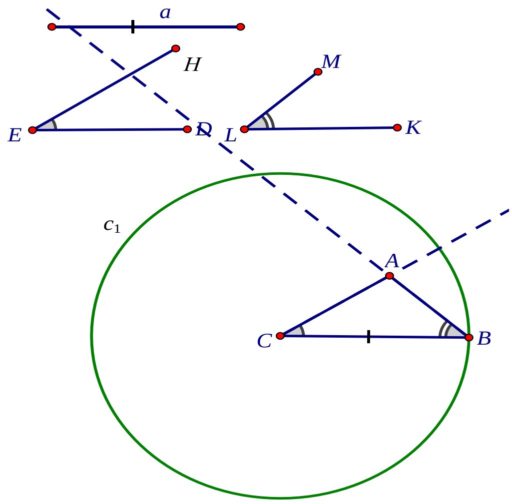


Рис.4.

Построение:

1. Построим данные углы ∠DEH, ∠KLM и отрезок a.

2. Строим произвольный луч с началом в точке C, строим на нём окружность c_1 с центром в точке C и r = a. Найдем точку пересечения окружности c_1 и луча, это точка B. Отрезок CB одна из сторон треугольника, которая равна данному отрезку a.

3. Строим угол ∠BCA = ∠DEH.

4. Строим угол ∠CBA = ∠KLM. Находим точку пересечения сторон BA и CA, это точка A.

△ACB - искомый, т.к. CB = a (по построению пункт 2), ∠ACB = ∠DEH (по построению пункт 3), ∠CBA = ∠KLM (по построению пункт 4).

После решения задач, учащиеся выполняют самостоятельную работу, рассчитанную на 10 – 15 минут.

Задание: построение треугольника по двум сторонам и углу между ними. Создать собственный инструмент позволяющий строить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

4. Постановка домашнего задания.

Выполнить: а) создать собственные инструменты для построение элементарных задач 6,7,8,9.

5. Подведение итогов.

Подумайте и объясните чем полезно создание собственных инструментов в «Живой математике»?

Конспект занятия 3 по теме:
«Понятие о геометрическом месте точек, основные ГМТ»

Основная цель: введение понятия геометрическое мест точек, знакомство с основными геометрическими местами точек. Использование ГМТ при решении задач на построение.

Планируемые результаты:

предметные: формирование представлений о методе геометрическом месте точек и умений выполнять решение задач данным методом ГМТ.

метапредметные: умение планировать и организовывать учебную деятельность; способность к анализу новой информации; проявление навыков самоконтроля; умение аргументировать свои умозаключения.

личностные: умение проявлять учебно-познавательный интерес к новому материалу, стремление к личностному развитию и самообразованию.

Этапы занятия:

1. Организационный момент (4 мин)
2. Введение. (40 мин)
3. Практикум по решению задач на построение с использованием Программы «Живая математика» . (40мин)
4. Постановка домашнего задания. (3 мин)
5. Подведение итогов (3 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент.

Здравствуйте, ребята! Сегодня мы начинаем изучения нового метода геометрического мест точек, с помощью которого можно решать задачи на построение. Познакомится с понятием геометрическое место точек (ГМТ). Изучим основные ГМТ, которые чаще всего встречаются при решении задач на построение.

2. Теоретический материал.

Одним из методов решения задач на построение является метод геометрических мест. Геометрическим местом точек – называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающая определенным свойством.

Геометрическим местом точек (ГМТ) пространства (или метод пересечения множеств), обладающих данным свойством, называется множество всех точек пространства, каждая из которых обладает этим свойством. Все остальные точки пространства указанным свойством не обладают. ГМТ задается свойством точек, которое называется характеристическим свойством этого ГМТ (фигуры).

Каждая задача, в которой требуется найти ГМТ по его характеристическому свойству, предполагает требование описать это ГМТ наглядно через известные элементарные фигуры. Решение задачи на отыскание ГМТ неизбежно приводит к доказательству двух утверждений – прямого и ему противоположного; необходимо доказать, что: 1) каждая точка предполагаемого (искомого) ГМТ обладает заданным свойством; 2) любая точка, не принадлежащая этой фигуре, заданным свойством не обладает.

Сущность метода геометрических мест заключается в следующем:

1) задача сводится к построению некоторой точки;

2) находятся, по меньшей мере, два свойства, которыми обладает данная точка;

3) рассматривается одно из свойств, строится множество всех точек, обладающих этим свойством;

4) берется следующее свойство, строится множество всех точек, обладающих этим свойством;

5) поскольку искомая точка должна обладать всеми этими свойствами, то она должна принадлежать каждому из построенных множеств, то есть принадлежит пересечению этих множеств. Ниже приведены примеры задач на построение, решаемых с помощью данного метода.

Геометрическое место точек может быть не только линией или совокупностью нескольких линий, но также конечной совокупностью точек, областью плоскости и др. Может оказаться также, чего геометрическое место точек, обладающих некоторым указанным свойством, вовсе не существует. Чтобы доказать, что фигура Ф есть геометрическое место точек, обладающих указанным свойством, надо доказать следующие два взаимнообратные предложения:

1) каждая точка фигуры Ф обладает этим свойством;

2) каждая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит фигуре Ф.

Примечание: Задачи, решаемые методом ГМТ, делятся на 3 уровня сложности.

1 уровень сложности: Данный уровень является наиболее легким, так как на этапе анализа уже видна и построена точка, которая обладает двумя свойствами.

2 уровень сложности. На этапе анализа точка, которая отвечает 2 свойствам, становиться более скрытой, возможно она будет принадлежать данным элементам фигуры и для её нахождения, возможно, потребуется выполнить дополнительное построение.

3 уровень сложности: Данный вид задач, является более трудным при решении методом ГМТ. Это такой вид задач, в которых чтобы найти нужную точку, удовлетворяющую двум свойствам, необходимо выполнить достаточно много дополнительных построений, так как эта точка не изображена на рисунке и её довольно трудно определить.

Таким образом, важнейшая роль в определении ГМТ отводится понятию «Свойство», которое называется характеристическим свойством этого геометрического места точек. Приведём наиболее известные примеры таких свойств:

1) точка находится на данном расстоянии от данной точки;

2) точка находится на данном расстоянии от данной прямой;

3) точка равноудалена от двух данных точек;

4) точка равноудалена от двух данных параллельных прямых;

5) точка равноудалена от двух данных пересекающихся прямых;

6) из точки данный отрезок виден под прямым углом;

7) из точки данный отрезок виден под данным углом;

8) отношение расстояний от точки до двух данных точек равно отношению длин двух данных отрезков;

Первые шесть свойств используются при решении задач на построение циркулем и линейкой как в школьном курсе геометрии, так и в курсе геометрии педагогического вуза, последние два свойства менее известны в школе. Отметим, что в высших учебных заведениях изучаются линии второго порядка, которые иногда определяются с использованием таких характеристических свойств, как «сумма расстояний от точки до двух данных точек равно длине данного отрезка», «модуль разности расстояний от точки до двух данных точек равен длине данного отрезка» и «точка равноудалена от данной точки и данной прямой».

Каждая задача, в которой требуется найти то или иное геометрическое место точек по его характеристическому свойству, предполагает описание этого ГМТ через известные элементарные фигуры (прямая, окружность или их части). Решение задачи на отыскание ГМТ, по сути, сводится к доказательству двух утверждений – прямого и ему противоположного. Имеется ввиду доказательство следующих двух предложений: 1) каждая точка предполагаемого (искомого) ГМТ обладает заданным свойством; 2) любая точка, не принадлежащая этой фигуре, заданным свойством не обладает. Рассмотрим геометрические места точек, каждое из которых удовлетворяет одному из восьми перечисленным выше характеристических свойств, укажем известные геометрические фигуры, которые ими описываются, докажем справедливость некоторых описаний.

ГМТ 1. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка находится на данном расстоянии от данной точки», представляет собой окружность, центр которой совпадает с данной точкой, а радиус равен данному расстоянию.

ГМТ 2. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка находится на данном расстоянии от данной прямой», представляет собой две прямые, параллельные данной прямой и отстоящие от неё на данном расстоянии.

ГМТ 3. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных точек», представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку с концами в двух данных точках.

ГМТ 4. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных параллельных прямых», представляет собой ось симметрии данных параллельных прямых.

ГМТ 5. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных пересекающихся прямых», представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

ГМТ 6. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «из точки данный отрезок виден под прямым углом», представляет собой окружность, построенную на данном отрезке как на диаметре, из которой удалены концы данного отрезка.

ГМТ 7. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «из точки данный отрезок AB виден под некоторым углом», представляет собой две дуги с общими концами A и B (без точек A и B), симметричные относительно прямой AB.

ГМТ 8. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «отношение расстояний от точки до двух данных точек A и B равно отношению длин двух данных отрезков», представляет собой окружность с центром на прямой AB.

3. Практикум по решению элементарных задач на построение.

Решим следующую задачу, используя метод ГМТ. Данная задача относиться к первому уровню сложности.

№ 1. Построить треугольник по основанию, высоте и боковой стороне.

В данной задаче требуется построить треугольник ABC, если дана сторона BC = a, сторона AC = b, и высота AH = h. При проведении **анализа** ученик изображает на рабочем поле Живой математики динамическую модель (рис.1) произвольного треугольника ABC (трижды используется инструмент Отрезок), вводит необходимые обозначения. Его основная задача – найти точку, которая позволит, используя метод ГМТ, построить по заданным отрезкам искомый треугольник. Поскольку сторону BC по заданному отрезку *a* всегда можно построить (например, используя элементарное построение ЭП3 – построение на луче с началом в точке C отрезка CB, равного данному отрезку a), то задача будет решена, если удастся построить точку A. Эта точка удовлетворяет следующим двум свойствам, которые непосредственно вытекают из условия задачи.

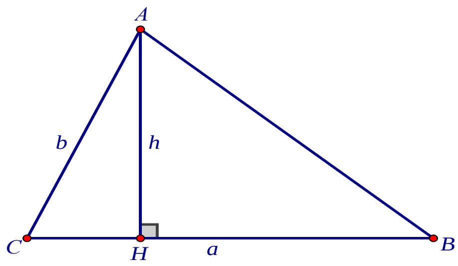


Рис. 1.

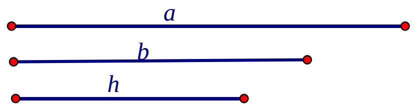
Свойство №1: точка A находится на расстоянии b от точки C (AC = b). Множество всех точек, удовлетворяющих этому условию – окружность с центром C и радиуса b. Это множество можно построить как с помощью виртуального циркуля, так и с помощью собственного инструмента ГМТ1.

Свойство №2: точка A находится на расстоянии h от прямой BC (высота AH = h). Множество всех точек, удовлетворяющих этому условию – пара параллельных прямых, находящихся на расстоянии h от прямой BC. Это множество можно построить с помощью собственного инструмента ГМТ2.

В рассмотренной задаче точка A, к использованию которой сводится решение задачи методом ГМТ, непосредственно присутствует на анализируемом чертеже, а оба его свойства по сути фигурируют в условии задачи.

Для реализации **построения** с использованием среды Живая математика, выполняется следующая цепочка действий:

1. На рабочем поле Живой математики изображаются отрезки a, b и h.



2. Строится произвольный луч с началом в точке C, на нём откладывается отрезок a (используется собственный инструмент ЭП3 – построение на данном луче отрезка, равного данному).

3. Строится ГМТ, удовлетворяющее первому свойству (свойство №1), т.е. окружность. Затем – ГМТ, удовлетворяющее второму свойству (свойство №2). В том случае, если ученики решают задачу традиционным способом на листе бумаги, они выполняют 5 построений: выбирают точку на BC, восстанавливают перпендикуляр к BC, строят окружность с центром в C и радиуса h, находят точки пересечения окружности с этим перпендикуляром, затем проводят через эти точки прямые, параллельные BC. При

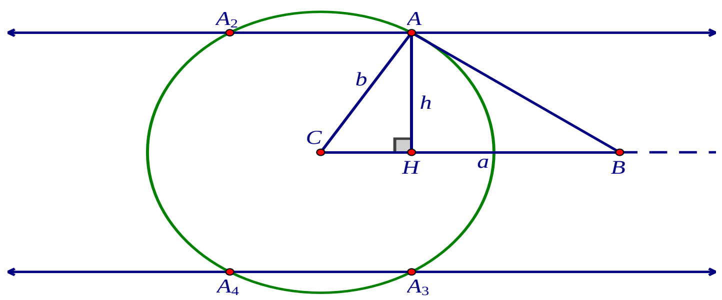


Рис. 3.

использовании Живой математики построение упрощается, т.к. можно воспользоваться собственным инструментом ГМТ2 (§3), и на рабочем поле появятся требуемые фигуры. Далее находятся точки пересечения прямых и окружности, на рисунке 3 они обозначены A, A2, A3 и A4, одна из них (точка A) соединена с точками B и C. Получен искомый треугольник ABC. Вторым треугольником, не равным первому, будет треугольник A_2BC, а вот точки A_3 и A_4 новых (отличных от первых двух) треугольников не добавят.

Доказательство следует непосредственно из построения треугольника ABC: BC = a, т.к. на луче с началом C откладывался отрезок, равный a; AC = b, т.к. A принадлежит окружности с центром C и радиуса b, высота AH равна h, т.к. точка A принадлежит прямой, находящейся на расстоянии h от прямой BC.

Исследование, которое проводится с использованием среды Живая математика, позволяет, изменяя размеры данных по условию задачи отрезков, убедиться в том, что при h < b будет два решения (к треугольнику ABC добавится неравный ему треугольник A_2BC), при h = b – решение одно (прямые будут касаться окружности и искомым будет лишь один прямоугольный треугольник). При h > b решений, очевидно, не будет.

№ 2. Найти ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Анализ.

Пусть AB – данный отрезок, α – данный угол.

Если M – точка искомого ГМТ, то ∠ БMB = α по условию. В связи с этим условием естественно вспомнить теорему о равенстве вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Проведём окружность через три точки A, M и B. Которые не лежат на одной прямой, если 0° < б < 180°. Тогда для всякой точки M' дуги AMB этой окружности (кроме точек A и B) ∠ AM'B также равен α, т. е. каждая точка этой дуги также принадлежит искомому ГМТ.

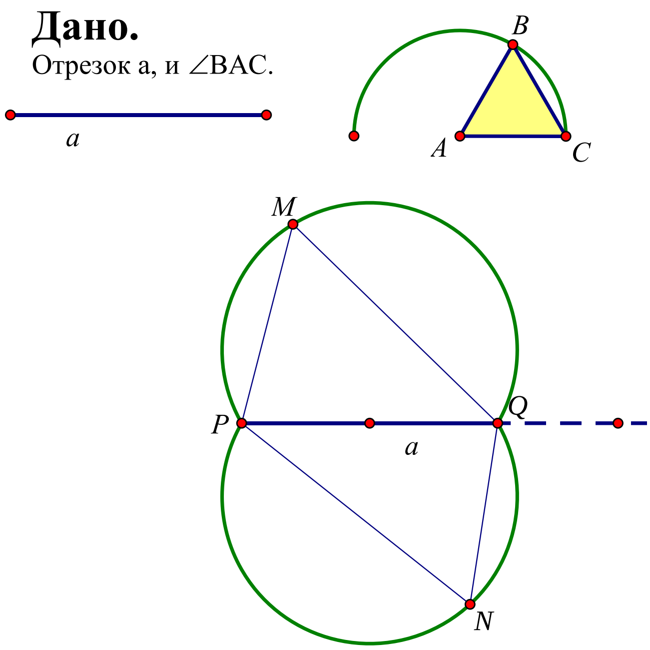


Рис.4.

Кроме того, очевидно, все точки (кроме A и B) дуги ANB, симметричной с дугой AMB относительно прямой AB, обладают тем же свойством и поэтому принадлежат тому же ГМТ.

Построение.

1. Построим отрезок PQ = a.
2. Построим серединный перпендикуляр к PQ.
3. Построим ∠HPQ = ∠BAC.
4. Построим n ⊥ HP и n содержит P.
5. Построим точку O пересечения m и n.
6. Построим окружность с центром в точке O и радиуса OP, рассмотрим дугу этой окружности с концами в точках P и Q, лежащую в полуплоскости, не содержащей H.
7. Отразим эту дугу относительно прямой PQ.
8. Объединение полученных дуг без точек P и Q и есть искомое множество.

Доказательство.

Чтобы доказать, что фигура Ф, составленная из двух симметричных дуг окружностей, проходящих через точки A и B, действительно представляет искомое ГМТ, осталось рассмотреть точки, не принадлежащие этой фигуре. Если точка P лежит в области, ограниченной фигурой Ф, то, проведя луч AP (или BP) до встречи с фигурой Ф в точке Q, заметим, что ∠БPB > ∠БQB = α. Если же избрать точку P вне указанной области, то получим противоположный результат: ∠APB < α.

Итак, ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом, представляет собой соединение двух дуг окружностей, проходящих через концы данного отрезка и расположенных симметрично по отношению к этому отрезку. Точки A и B не следует причислять к этому геометрическому месту, так как при совпадении точки M с каким – либо концом отрезка AB угол AMB становится неопределенным.

Исследование.

Если угол α прямой, то фигура Ф обращается в окружность с диаметром AB (без концов этого диаметра). Если угол α = 0, то искомый ГМТ является разность между прямой БВ и отрезком БВ. Если угол α = 180°, то искомое ГМТ – интервал AB.

№ 3. Пусть даны две параллельные прямые a и b и перпендикулярная к ним прямая c. Найдите ГМТ плоскости, равноудалённых от этих трёх прямых.

4. Постановка домашнего задания.

Выполнить: построение в «Живой математике» для ГМТ 1,2,3,4.

5. Подведение итогов.

Что нового вы узнали на уроке?

Что называется геометрически множество точек пространства?

Назовите, какое условие и свойство должно выполнять при решении задач на ГМТ?

Конспект занятия 4 по теме: «Обзор простейших геометрических мест. Решение задач на нахождение геометрических мест»

Основная цель: введение основных простейших геометрических мест точек. Использование ГМТ при решении задач на нахождение геометрических мест.

Планируемые результаты:

предметные: формирование представлений о методе геометрическом месте точек и умений выполнять решение задач данным методом ГМТ.

метапредметные: умение планировать и организовывать учебную деятельность; способность к анализу новой информации; проявление навыков самоконтроля; умение аргументировать свои умозаключения.

личностные: умение проявлять учебно-познавательный интерес к новому материалу, стремление к личностному развитию и самообразованию.

Этапы занятия:

1. Организационный момент (4 мин)
2. Введение. (40 мин)
3. Практикум по решению задач на построение с использованием Программы «Живая математика» . (40мин)
4. Постановка домашнего задания. (3 мин)
5. Подведение итогов (3 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент.

Здравствуйте, ребята! Сегодня мы продолжаем изучение метода ГМТ, с помощью которого можно решать задачи на построение. Будем использование ГМТ при решении задач на нахождение геометрических мест.

2. Введение.

Простейшие ГМТ на плоскости рассматриваются в школьном курсе геометрии. Перечислим важнейшие из них.

При решении задач на построение методом геометрических преобразований нередко возникает проблема, связанная с построением вспомогательной фигуры. Данные построения, как правило, единообразны, отнимают много времени, и в дальнейшем загромождают чертёж. Живая математика даёт возможность избежать этого, позволяя с помощью собственных фигур оперативно строить эти фигуры. Созданные таким способом инструменты можно сохранять и переносить на USB носители.

Поэтому после отработанных навыков построения ГМТ, учащимся целесообразно предложить создавать собственные инструменты, и в дальнейшем применять их при решении задач.

ГМТ1. Рассмотрим создание собственного инструмента для построения геометрического места точек ГМТ1.

Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек находящихся на данном расстоянии от данной точки. В параграфе 5 приведено описание этого множества, сформулировано очевидное утверждение о том, что это ГМТ представляет собой окружность, центр которой совпадает с данной точкой, а радиус равен данному расстоянию. Несмотря на то, что среда Живая математика имеет на вертикальной панели (и в меню «Построения») инструменты «Окружность», мы из методических соображений продублируем это ГМТ среди

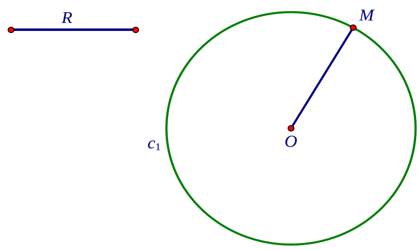


Рис. 1.

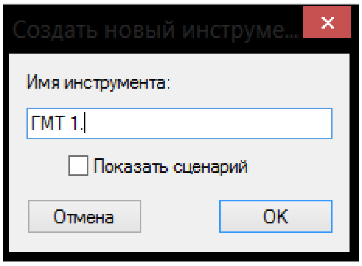


Рис. 2.

своих собственных инструментов. Другими словами построим окружность по заданному центру и радиусу.

Для это строим произвольные отрезок и точку (рис. 2). Затем, используя инструмент «Окружность по центру и радиусу» меню «Построения», строим окружность c_1. Для создания собственного инструмента «ГМТ1» необходимо подсветить построенные отрезок, точку и окружность c_1. Выбираем на панели инструментов *Инструмент пользователя*, далее *создать новый инструмент*. Высветится окно (рис. 2), где нам необходимо назвать инструмент, в данном случае назовём его ГМТ 1.

Что бы воспользоваться инструментом, нужно открыть *Инструмент пользователя*, выбрать инструмент ГМТ1. Так как данный инструмент строит окружность по центру и радиусу, нам необходимо выделить нажатием мыши, отрезок, который будет являться радиусом окружности. На курсоре мышки появиться точка, она будет центром новой окружности. После следующего нажатия, у нас мгновенно построится окружность, радиус которой будет равен данному отрезку.

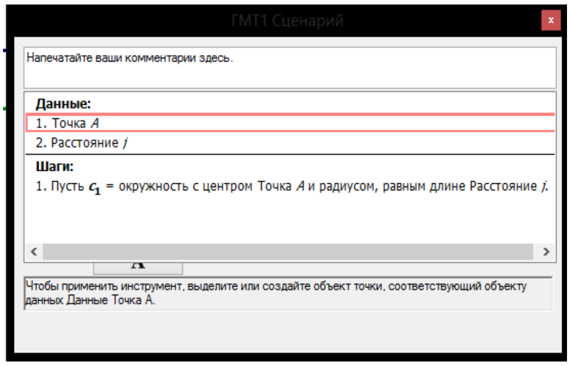


Рис. 3.

Живая математика, так же позволяет просмотреть каждый шаг построения созданного инструмента. Что бы просмотреть как работает инструмент, нужно открыть *Инструмент пользователя*, далее выбрать *Показать сценарий*. Появиться окно (рис. 3), в котором будет прописан каждый шаг работы инструмента.

ГМТ2. Рассмотрим создание собственного инструмента для построения ГМТ 2.

Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой. В параграфе 5 приведено описание этого множество.

Сформулировано очевидное утверждение о том, что это ГМТ представляет собой две прямые, которые параллельны данной прямой и отстоящие от неё на данном расстоянии. Создание остальных инструментов для ГМТ 2,3,4,5 ученики выполняют самостоятельно.

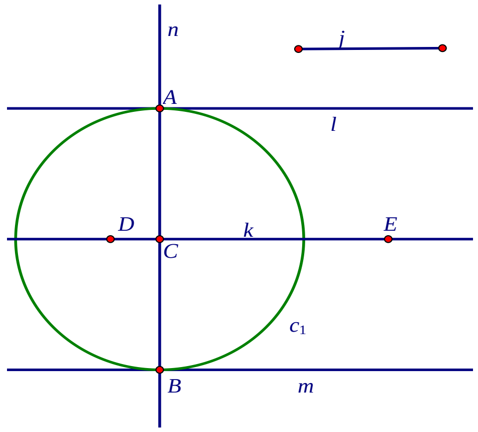


Рис. 4.

ГМТ3. Рассмотрим создание инструмента для построения ГМТ3. Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек равноудаленных от двух данных точек. Это ГМТ представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку с концами в двух данных точках.

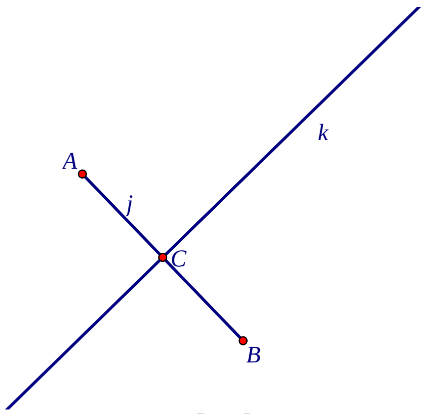


Рис.5.

ГМТ4. Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек равноудаленных от двух данных параллельных прямых. Данное ГМТ представляет собой ось симметрии данных параллельных прямых.

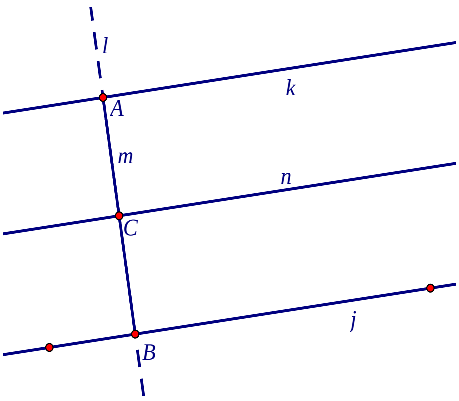


Рис.6.

Выполнить точное построение в Живой математики возможно, но готового инструмента, который сразу выполнит построение, нет. Поэтому создадим собственный инструмент. Так как данное множество представляет собой ось симметрии, то нам необходимо построить прямую n, параллельную данным параллельным прямым k и j, и содержащую середину C отрезка AB, где A принадлежит k, B принадлежит j и AB перпендикулярно k.

ГМТ5. Данное геометрическое множество точек определяется как множество точек равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых. Это множество представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

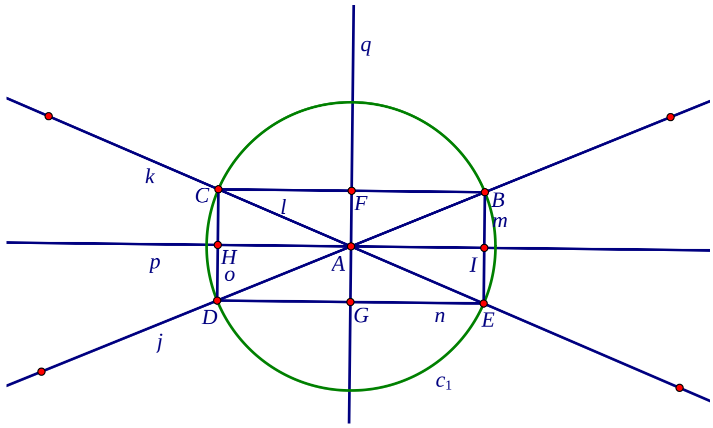


Рис.7.

3. Практикум по решению элементарных задач на построение.

Задача 2 (второй уровень сложности). *Постройте треугольник по основанию, высоте и медиане, проведённой к боковой стороне.*

В данной задаче требуется построить треугольник ABC, если дана сторона BC = a, медиана CM = m, и высота AH = h. При проведении **анализа** на рабочем поле Живой математики изображается динамическая модель (рис. 5.3) произвольного треугольника ABC (трижды используется инструмент Отрезок). Выполняются необходимые обозначения. Основная наша задача –

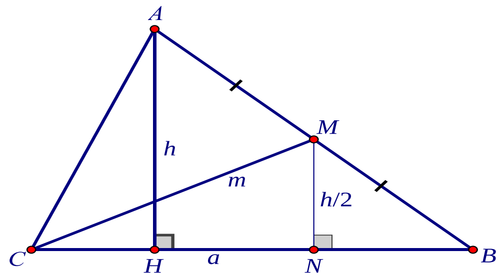


Рис. 8.

найти точку, которая позволит, используя метод ГМТ, построить по заданным отрезкам искомый треугольник. Как и в задаче 1 строим сторону BC по заданному отрезку *a*. Для этого, например, используя элементарное построение ЭП3 – на луче с началом в точке C откладываем отрезок CB, равный данному отрезку a. Ясно, что задача будет решена, если удастся построить точку A. Однако, если одно из свойств, которым она обладает, является как и в предыдущей задаче свойство «точка A находится на расстоянии h от прямой BC», то второе свойство вряд ли удастся найти.

Из двух оставшихся точек M, изображённых на рис. 5.3 предметом обсуждения может быть лишь точка M (для точки H вряд ли можно найти два свойства). Первое свойство очевидное: точка M находится на расстоянии m от точки C, что позволяет построить для неё соответствующее геометрическое место точек, а именно окружность с центром в C и радиуса m.

Попытаемся для точки M найти второе свойство, которое можно будет описать одним из ГМТ. Для этого выполним дополнительное построение: проведем перпендикуляр MN к стороне BC (рис. 5.3). Так как M середина AB и MN параллельна AH, то MN – средняя линия прямоугольного треугольника ABH. Отсюда длина отрезка MN равна половине основания AH, т.е. MN = h/2.

Но тогда решение нашей задача (построение, доказательство и исследование), по сути, дублирует решение предыдущей задачи №1.

Построение. Методом ГМТ строится треугольник MBC по основанию BC=a, высоте h/2 и боковой стороне CM = m. Далее строится луч BM и на нём от точки M откладывается отрезок MA равный MB. Треугольник ABC – искомый.

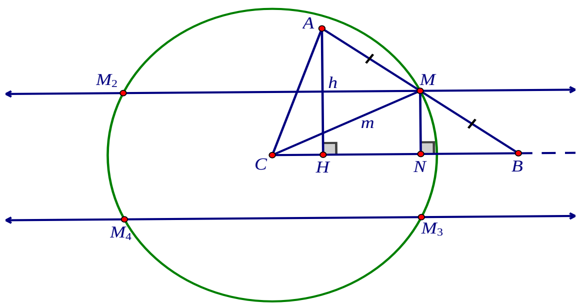


Рис. 9.

Поскольку по построенным точкам M и B однозначно строится точка A, то при **исследовании** возможны три случая: при h/2 < m условию задачи удовлетворяют два треугольника, при h/2=m – один треугольник (кстати, он не будет прямоугольным) и при h/2 > m – решений не будет.

Задача 2(357). *На данной окружности постройте точку, равноудаленную от двух данных пересекающихся прямых.*

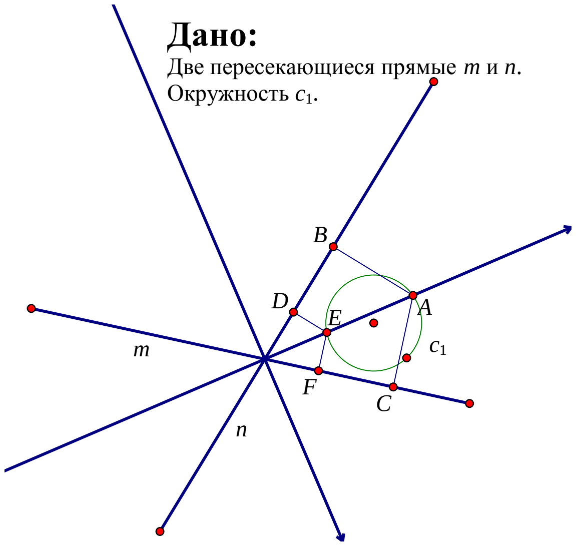


Рис.10.

Анализ:

В данной задачи требуется построить точки E и A на окружности c_1, которые будут равноудалена от двух пересекающихся прямых m и n.

Предположим, что задача решена, и мы построили такие точки. Основная наша задача - найти точку, которая позволит, используя метод ГМТ и данные задачи построить искомую точку. Выполнив построение, и посмотрев на рисунок, не нужно догадаться что точка которая будет удовлетворять данным условием находиться на биссектрисе угла образованного данными пересекающимися прямыми. Таким образом, точка должна удовлетворять 2 свойствам. 1 свойство: она должна принадлежать окружности c_1. 2 свойство: точка должна находиться на биссектрисе угла, двух данных пересекающихся прямых.

Построение:

Для того что бы найти искомые точки, нам необходимо построить биссектрису угла GOH. Выполнять данное построение будем с помощью созданного нами инструмента ГМТ5. Так как данное геометрическое множество точек определяется как множество точек равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых. Это множество представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

Выбираем в "Инструментах пользователя" ГМТ5, отмечаем точками данные пересекающиеся прямые и у нас автоматически строиться биссектриса ∠GOH. Точки пересечения биссектрисы с окружностью - искомые.

Доказательство:

Например ΔGDE = ΔGEF (прямоугольные треугольники с равным острым углом и общей гипотенузой), значит DE = EF. Задача может иметь 1, 2, 3 решения или не иметь решения вообще, в зависимости от расположения окружности по отношению к биссектрисе углов.

Исследование:

1. Возможен случай, когда биссектриса не пересекает данную окружность, тогда равноудалённых от прямых точек ,лежащих на окружности, нет.

2. Возможен случай, когда биссектриса касается окружности; в данном случае окружность имеет одну равноудалённую от прямых точку, поскольку она лежит на биссектрисе угла образованного прямыми.

3. Возможен случай, когда биссектриса пересекает окружность; в данном случае окружность будет иметь две равноудалённые от прямых точки, поскольку они лежат на биссектрисе угла, образованного прямыми.

Задача 3. Докажите, что геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на расстояние h , состоит из двух прямых, параллельных данной прямой и отстоящих от неё на расстояние h. Решают самостоятельно (20 мин).

4. Постановка домашнего задания.

Выполнить: построение в «Живой математике» для ГМТ 5,6,7,8 и создать собственные инструменты.

5. Подведение итогов.

Что нового вы узнали на уроке?

Конспект занятия 5 по теме:
«Решение задач методом ГМТ»

Основная цель: использование ГМТ при решении задач на нахождение геометрических мест.

Планируемые результаты:

предметные: формирование представлений о методе геометрическом месте точек и умений выполнять решение задач данным методом ГМТ.

метапредметные: умение планировать и организовывать учебную деятельность; способность к анализу новой информации; проявление навыков самоконтроля; умение аргументировать свои умозаключения.

личностные: умение проявлять учебно-познавательный интерес к новому материалу, стремление к личностному развитию и самообразованию.

Этапы занятия:

1. Организационный момент (4 мин)

2. Введение. (40 мин)

3. Практикум по решению задач на построение с использованием Программы «Живая математика» . (40мин)

4. Постановка домашнего задания. (3 мин)

5. Подведение итогов (3 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент.

Здравствуйте, ребята! Сегодня мы продолжаем изучение метода ГМТ, с помощью которого можно решать задачи на построение. Будем использование ГМТ при решении задач на нахождение геометрических мест.

2. Введение.

Вспомним основные геометрические места точек.

ГМТ 1. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка находится на данном расстоянии от данной точки», представляет собой окружность, центр которой совпадает с данной точкой, а радиус равен данному расстоянию.

ГМТ 2. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка находится на данном расстоянии от данной прямой», представляет собой две прямые, параллельные данной прямой и отстоящие от неё на данном расстоянии.

ГМТ 3. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных точек», представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку с концами в двух данных точках.

ГМТ 4. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных параллельных прямых», представляет собой ось симметрии данных параллельных прямых.

ГМТ 5. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «точка равноудалена от двух данных пересекающихся прямых», представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

ГМТ 6. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «из точки данный отрезок виден под прямым углом», представляет собой окружность, построенную на данном отрезке как на диаметре, из которой удалены концы данного отрезка.

ГМТ 7. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «из точки данный отрезок AB виден под некоторым углом», представляет собой две дуги с общими концами A и B (без точек A и B), симметричные относительно прямой AB.

ГМТ 8. Множество точек плоскости, каждая из которых обладает характеристическим свойством «отношение расстояний от точки до двух данных точек A и B равно отношению длин двух данных отрезков», представляет собой окружность с центром на прямой AB.

3. Практикум по решению элементарных задач на построение.

Задача 1(687). *Даны прямая а и две точки А и В лежащие по одну сторону от этой прямой На прямой а постройте точку М равноудаленную от точек А и В.*

Дано: Прямая а. Точки А и В лежащие по одну сторону от прямой а

Анализ:

В данной задаче требуется построить точку М, которая равноудалена от двух данных точек А и В и принадлежит прямой а. Предположим, что задача решена и точка М построена. Основная наша задача - найти точку, которая позволит, используя метод ГМТ и данные условия задачи построить искомую точку. Точка должна удовлетворять двум условиям. 1 Искомая точка принадлежит прямой а. 2 данная точка будет равноудалена от точек А и В, т.е. МА = МВ. Посмотрев на рисунок не трудно догадаться, что данным условиям будет удовлетворять точка М. ГМТ которое, позволяет выполнить нужное построение, является серединный перпендикуляр к отрезку с концами в двух данных точках.

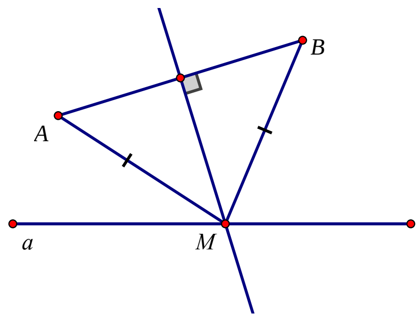


Рис.1.

Построение:

Строим прямую а. Точки А и В лежащие по одну сторону от прямой а. Выбираем созданный нами собственный инструмент ГМТ3. Выделяем точку А и В, автоматически строиться серединный перпендикуляр к отрезку АВ. Найдем точку пересечения серединного перпендикуляра h и прямой а, это точка М. М - искомая точка.

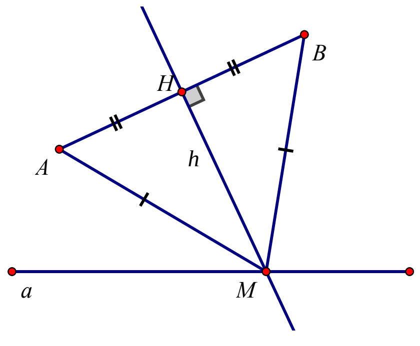


Рис.2.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle$AHM и $\triangle$MHB они равны по третьему признаку равенства треугольников (по трём сторонам).

Задача 359. *Дана окружность с центром O и точка A вне ее. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что AB = BC.*

Эта задача может быть решена несколькими методами, например, методом подобия, алгебраическим методом и, конечно же, методом ГМТ. В школьном учебнике [7] она помещена среди задач повышенной трудности, находится в пункте «Задачи на построение» к главам III и IV. Судя по комментариям в ответе к этой задаче, приведённом в учебнике, её решение рекомендуется выполнить именно методом ГМТ, хотя сам термин «метод ГМТ» в учебнике практически не используется и, по нашему мнению, совершенно напрасно.

В данной задаче требуется построить прямую m, проходящую через данную точку A вне данной окружности c_1 с центром O и пересекающую c_1 в точках B и C таких, что AB = BC. При проведении **анализа** ученик изображает на рабочем поле Живой математики динамическую модель (рис. 3), на котором изображает данную окружность c_1. Поскольку при анализе предполагается, что задача решена, то удобнее сначала построить на окружности произвольные точки B и C, провести через них прямую m, затем построить точку A такую, что B – середина AC (это можно выполнить, построив, например, вторую окружность с центром B и радиуса BC). На рисунке 3 представлена динамическая, которая будет использоваться для проведения анализа.

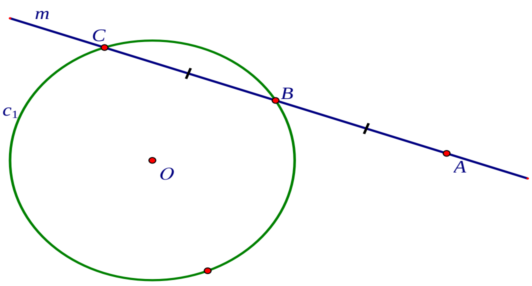


Рис. 3.

Ни одна из фигурирующих на рисунке точек (A, B, C и O) не может являться ключевой точкой для реализации метода ГМТ, т.к. ни одна из них не обладает двумя свойствами, допускающими их описание с помощью циркуля и линейки. Предпримем попытку построить вспомогательную точкуD, которая, во-первых, позволит построить искомую прямую m и, во-вторых, обладает двумя свойствами.

Построим вспомогательную точку D такую, что B – середина OD (рис. 4). Для этого на луче OB достаточно отложить от точки B отрезок равный радиусу r данной окружности c_1. Рассмотрим четырёхугольник AOCD, который является параллелограммом по третьему признаку параллелограмма диагонали точкой пересечения делятся пополам. Поэтому AD = OC = r. Но тогда для решения задачи достаточно построить точку D, с её помощью найти точку B (например, как пересечение окружности c_1 и отрезка OD), тогда прямая AB и будет искомой прямой m.

Найдём для точки D два свойства.

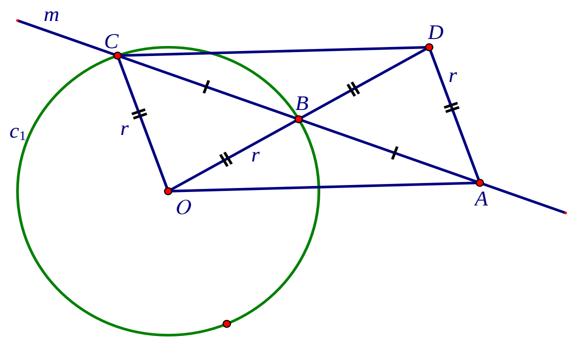


Рис. 4.

Первое свойство: точка D находится на расстоянии 2r от точки O, т.е. принадлежит окружности с центром O и радиуса 2r.

Второе свойство: точка D находится на расстоянии r от точки A, т.е. принадлежит окружности с центром A и радиуса r.

Для реализации **построения** с использованием среды Живая математика, выполняется следующая цепочка действий:

1. На рабочем поле Живой математики изображаются окружность c1 с центром O и радиуса r (диаметра 2r) и точка A вне ее (рис. 8.3).

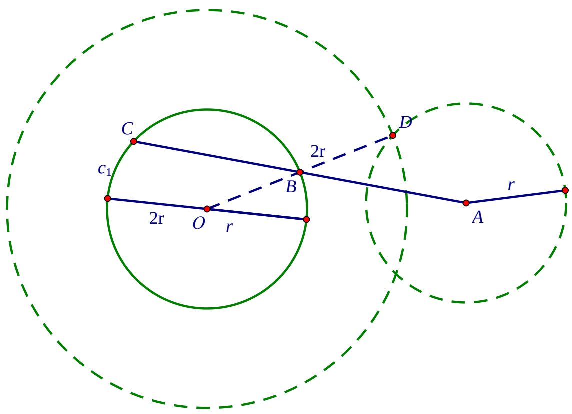


Рис.8.3.

2. Строятся две окружности: одна с центром O и радиуса 2r, вторая с центром в A и радиуса r, находится их общая точка D.

3. Строится отрезок OD, находится общая точка B данной окружности c_1 и отрезка OD.

4. Прямая AB – искомая.

Для проведения **доказательства** страница в Живой математике, содержащая динамический чертёж, представленный на рис. 3, копируется на следующую страницу, и делаются дополнительные построения: построим отрезки AD и OC (рис. 4). Треугольники ABD и CBO – равнобедренные, с равными боковыми сторонами AD = BD = OB = OC = r и равными углами при основании, т.к. ∠ABD = ∠CBO как вертикальные углы. Таким образом, ΔABD = ΔCBO и AB = BC.

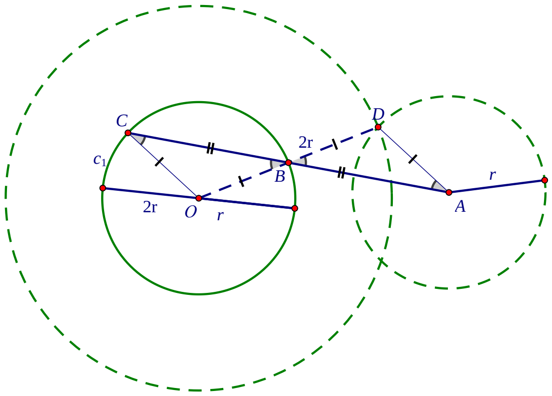


Рис.4.

Для проведения **исследования** страница в Живой математике, содержащая динамический чертёж, представленный на рис. 3, скопируем на следующую страницу, спрячем отрезки, изображающие радиусы и диаметры окружностей. Находим вторую точку D_2 пересечения вспомогательных пунктирных окружностей c_2 и c_3, строим точку B_2 пересечения отрезка OD_2 и окружности c_1, строим вторую прямую AD_2, которая очевидно будет удовлетворять условию задачи (рис. 5).

Перемещая точку A, убеждаемся, что задача имеет:

а) два решения, если расстояние OA удовлетворяет неравенству r < OA < 2r,

б) одно решение, если OA = 2r;

в) не имеет решения, если OA > 2r.

4. Постановка домашнего задания.

Подготовиться к контрольной работе.

5. Подведение итогов.

Что нового вы узнали на уроке?

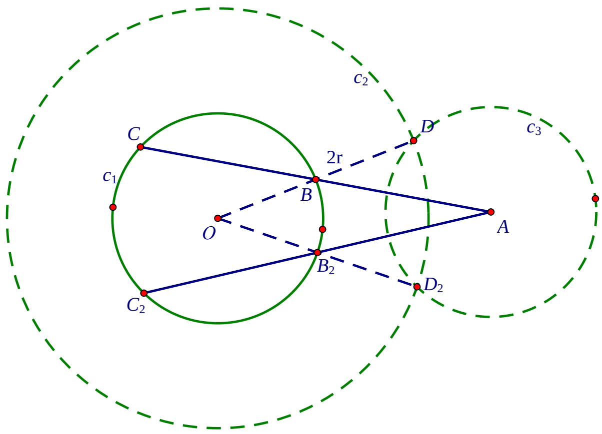


Рис.5.

Конспект занятия 6 по теме:

«Итоговое занятие»

Контрольная работа (2 часа). Контрольная работа выполняется в программе «Живая математика».

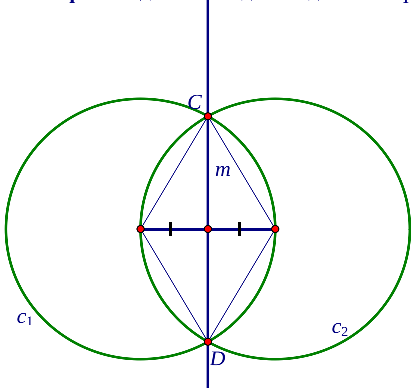
№1. Докажите, что геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на расстояние h, состоит из двух прямых, параллельных данной и отстоящих от неё на расстояние h.

№2. Дана прямая а и точка Ане принадлежащая а. Построить геометрическое место точек (ГМТ) С, если известно, что А – середина отрезка ВС, ВС принадлежит а.

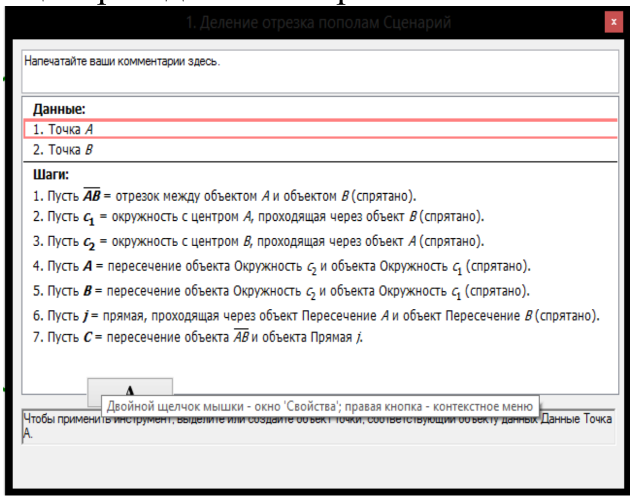
№3. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

Приложение 2.

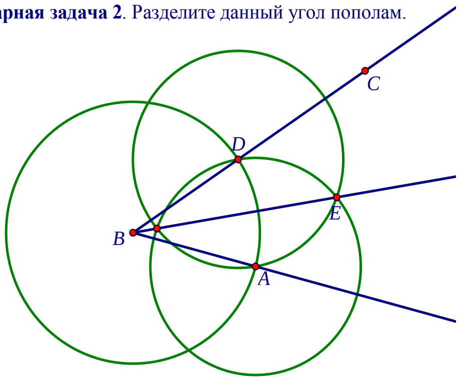
Элементарная задача 1. Разделите данный отрезок пополам.



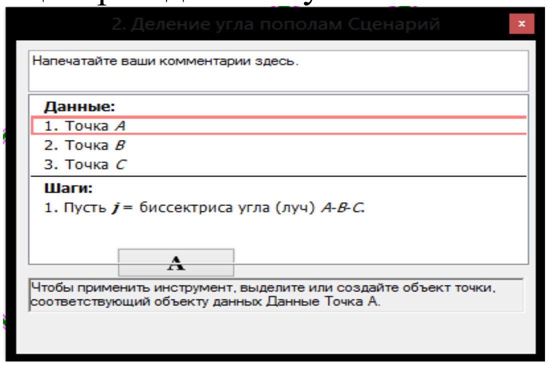
Сценарий деление отрезка пополам.



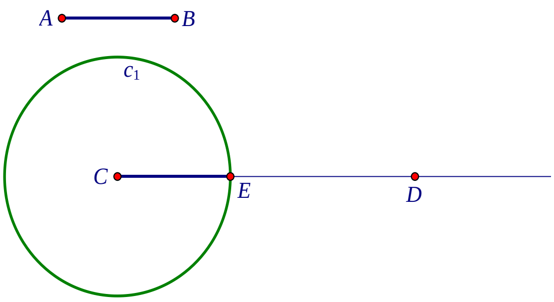
Элементарная задача 2. Разделите данный угол пополам.



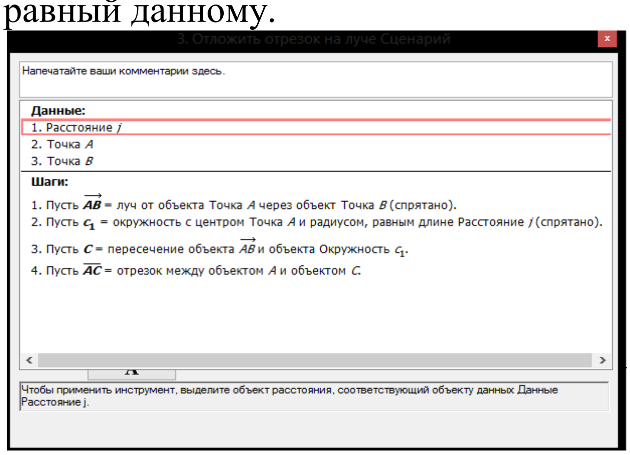
Сценарий деления угла пополам.



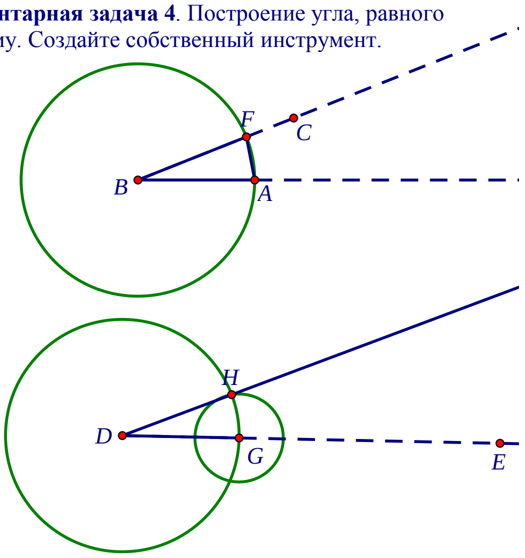
Элементарная задача 3. На данном луче от его начала отложите отрезок равный данному. Создайте собственный инструмент, позволяющий отложить на луче отрезок равный данному отрезку.



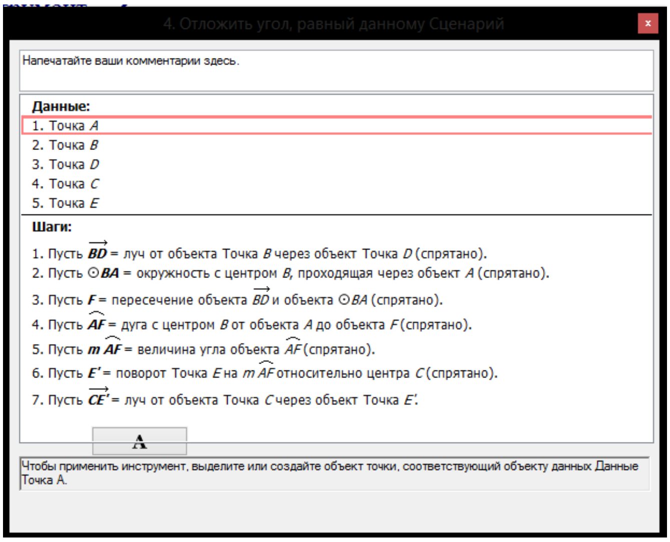
Сценарий отложить отрезок на луче равный данному.



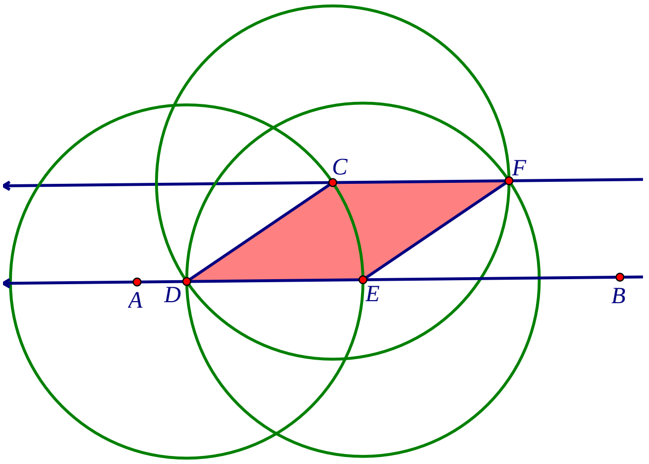
Элементарная задача 4. Построение угла, равного данному. Создайте собственный инструмент.



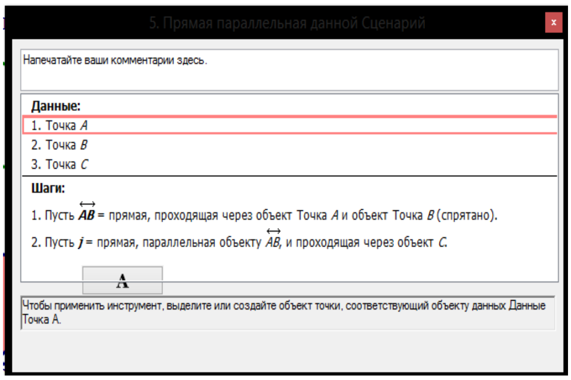
Сценарий отложить угол равный данному.



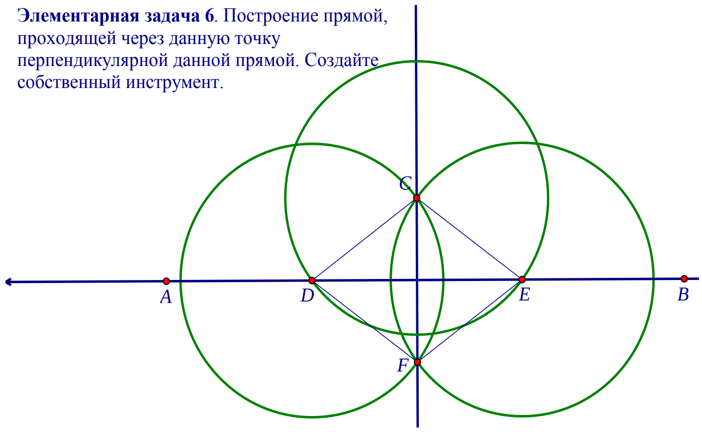
Элементарная задача 5. Построение прямой, проходящей через данную точку параллельной данной прямой. Создайте собственный инструмент.



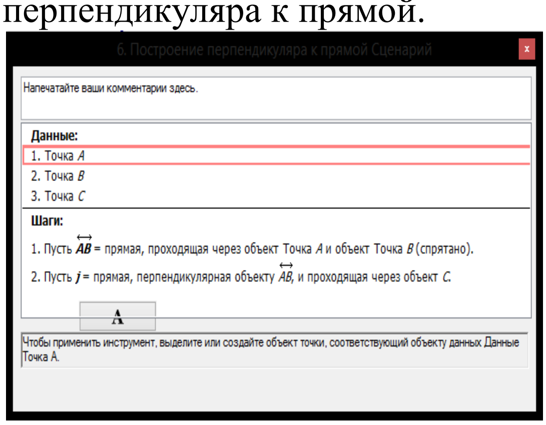
Сценарий прямая параллельная данной.



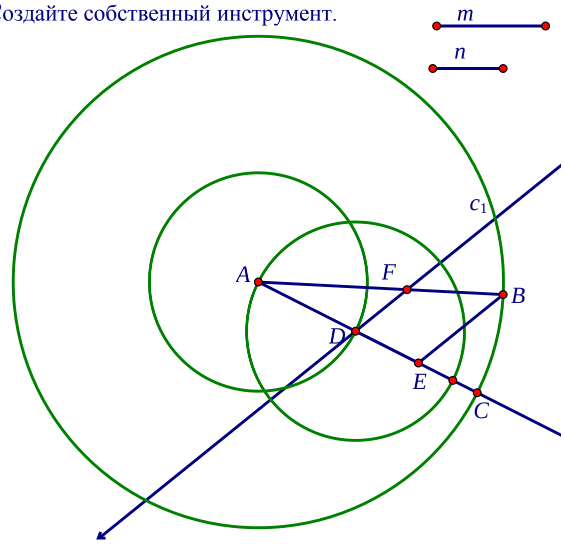
Элементарная задача 6. Построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярной данной прямой. Создайте собственный инструмент.



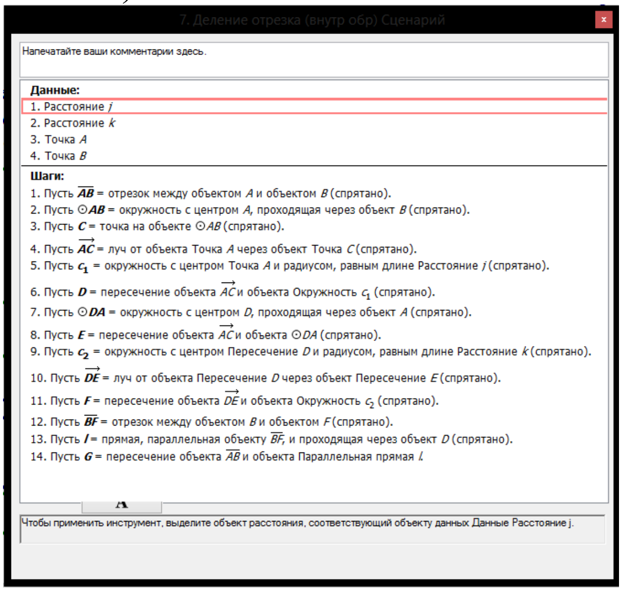
Сценарий построение перпендикуляра к прямой.



Элементарная задача 7а). Деление отрезка в данном отношении (внутренним образом). Создайте собственный инструмент.

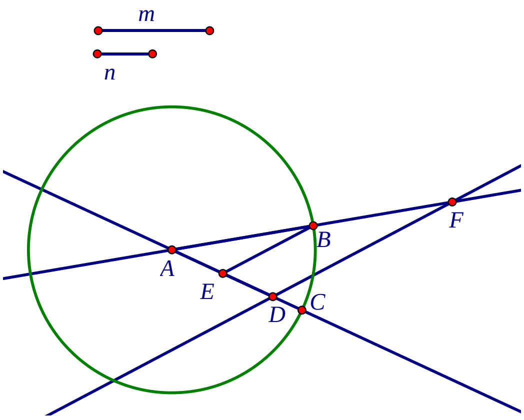


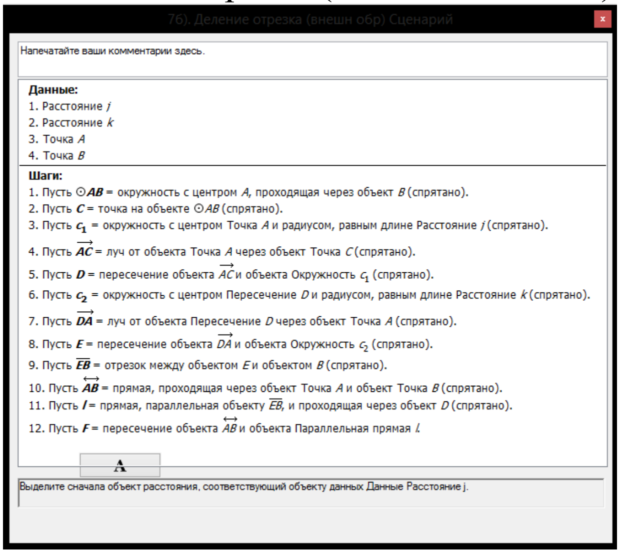
Сценарий деление отрезка(внутренняя область).



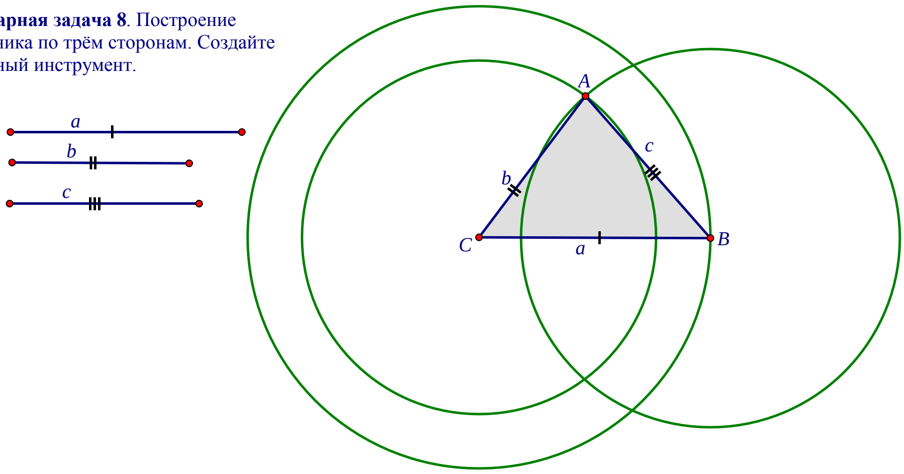
Сценарий деление отрезка (внешняя область).

Элементарная задача 7б). Деление отрезка в данном отношении (внешним образом). Создайте собственный инструмент.

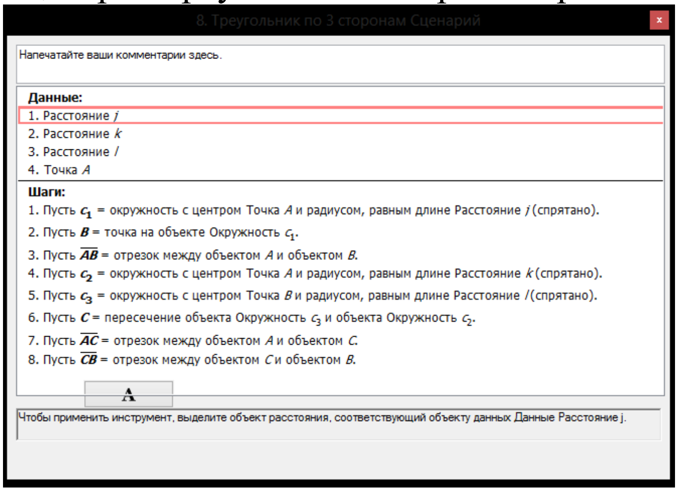




Элементарная задача 8. Построение треугольника по трём сторонам. Создайте собственный инструмент.



Сценарий треугольник по трем сторонам.


8. Треугольник по 3 сторонам Сценарий

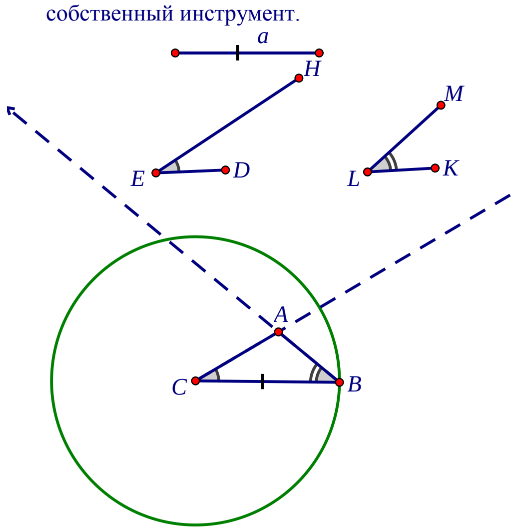
Напечатайте ваши комментарии здесь.

Данные:
1. Расстояние *j*
2. Расстояние *k*
3. Расстояние *l*
4. Точка *A*

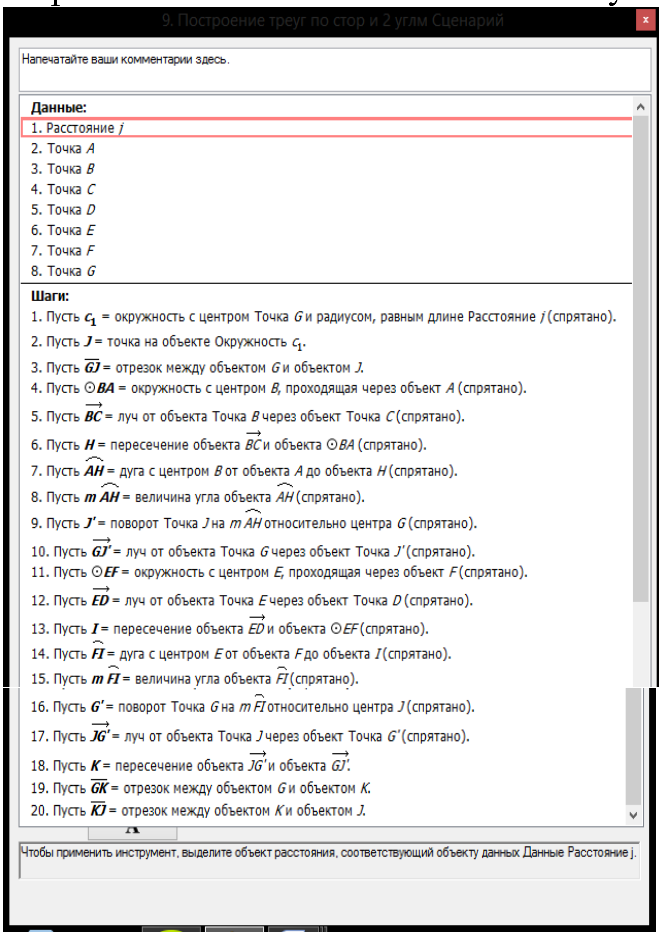
Шаги:
1. Пусть c_1 = окружность с центром Точка *A* и радиусом, равным длине Расстояние *j* (спрятано).
2. Пусть ***B*** = точка на объекте Окружность c_1.
3. Пусть $\overline{AB}$ = отрезок между объектом *A* и объектом *B*.
4. Пусть c_2 = окружность с центром Точка *A* и радиусом, равным длине Расстояние *k* (спрятано).
5. Пусть c_3 = окружность с центром Точка *B* и радиусом, равным длине Расстояние *l* (спрятано).
6. Пусть ***C*** = пересечение объекта Окружность c_3 и объекта Окружность c_2.
7. Пусть $\overline{AC}$ = отрезок между объектом *A* и объектом *C*.
8. Пусть $\overline{CB}$ = отрезок между объектом *C* и объектом *B*.

Чтобы применить инструмент, выделите объект расстояния, соответствующий объекту данных Данные Расстояние j.

Элементарная задача 9. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам. Создайте собственный инструмент.



Сценарий построения треугольника по стороне и 2 углам.


9. Построение треуг по стор и 2 углм Сценарий

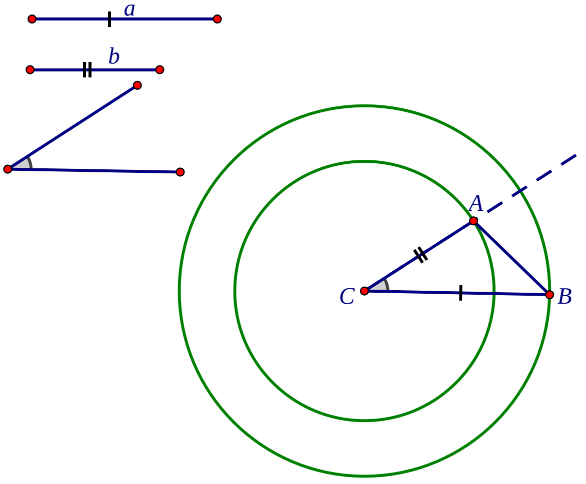
Напечатайте ваши комментарии здесь.

Данные:
1. Расстояние *j*
2. Точка *A*
3. Точка *B*
4. Точка *C*
5. Точка *D*
6. Точка *E*
7. Точка *F*
8. Точка *G*

Шаги:
1. Пусть c_1 = окружность с центром Точка *G* и радиусом, равным длине Расстояние *j* (спрятано).
2. Пусть ***J*** = точка на объекте Окружность c_1.
3. Пусть $\overline{GJ}$ = отрезок между объектом *G* и объектом *J*.
4. Пусть $\odot BA$ = окружность с центром *B*, проходящая через объект *A* (спрятано).
5. Пусть $\overrightarrow{BC}$ = луч от объекта Точка *B* через объект Точка *C* (спрятано).
6. Пусть ***H*** = пересечение объекта $\overrightarrow{BC}$ и объекта $\odot BA$ (спрятано).
7. Пусть $\overset{\frown}{AH}$ = дуга с центром *B* от объекта *A* до объекта *H* (спрятано).
8. Пусть $m\overset{\frown}{AH}$ = величина угла объекта $\overset{\frown}{AH}$ (спрятано).
9. Пусть ***J'*** = поворот Точка *J* на $m\overset{\frown}{AH}$ относительно центра *G* (спрятано).
10. Пусть $\overrightarrow{GJ'}$ = луч от объекта Точка *G* через объект Точка *J'* (спрятано).
11. Пусть $\odot EF$ = окружность с центром *E*, проходящая через объект *F* (спрятано).
12. Пусть $\overrightarrow{ED}$ = луч от объекта Точка *E* через объект Точка *D* (спрятано).
13. Пусть ***I*** = пересечение объекта $\overrightarrow{ED}$ и объекта $\odot EF$ (спрятано).
14. Пусть $\overset{\frown}{FI}$ = дуга с центром *E* от объекта *F* до объекта *I* (спрятано).
15. Пусть $m\overset{\frown}{FI}$ = величина угла объекта $\overset{\frown}{FI}$ (спрятано).
16. Пусть ***G'*** = поворот Точка *G* на $m\overset{\frown}{FI}$ относительно центра *J* (спрятано).
17. Пусть $\overrightarrow{JG'}$ = луч от объекта Точка *J* через объект Точка *G'* (спрятано).
18. Пусть ***K*** = пересечение объекта $\overrightarrow{JG'}$ и объекта $\overrightarrow{GJ'}$.
19. Пусть $\overline{GK}$ = отрезок между объектом *G* и объектом *K*.
20. Пусть $\overline{KJ}$ = отрезок между объектом *K* и объектом *J*.

Чтобы применить инструмент, выделите объект расстояния, соответствующий объекту данных Данные Расстояние j.

Элементарная задача 10.
Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.
Создайте собственный инструмент.



Сценарий треугольник по 2 сторонам и углу между ними.