МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет — Институт математики, физики и информатики

(полное наименование института/факультета)

Кафедра — Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

(полное наименование кафедры)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой — Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

(полное наименование кафедры)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ КГПУ им. В.П. Астафьева ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ

________ — В. Р. Майер

(подпись) — (И. О. Фамилия)

« 06 » 06 2018 г.

Направление подготовки — 44.03.01 Педагогическое образование

(код направления подготовки)

Профиль — Математика

(наименование профиля для бакалавриата)

Выпускная квалификационная работа

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ В 10 КЛАССЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

Выполнили студенты группы — 41

Н. А. Прядкова — 5.06.18

(подпись, дата)

А. Д. Черкасова — 6.06.18

(подпись, дата)

Форма обучения — Очная

Научный руководитель:
д.п.н., к.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой В.Р. Майер — 06.06.18

(подпись, дата)

Дата защиты ____________

Оценка ____________

Красноярск 2018

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Анализируя различные подходы к исследованию проблем и перспектив развития школьного математического образования, легко усмотреть характерный 21 веку системный подход. Рассматривая общеобразовательную школу как один из важнейших социальных институтов общества, строящего цифровую экономику, можно однозначно отметить системную тенденцию последних лет, связанную с использованием информационных технологий при обучении целому ряду дисциплин, среди которых, безусловно, лидирует математика. Следствием этой тенденции, а в отдельных случаях – её результатом, является большое число разработок специалистов в области программного обеспечения для школьного образования вообще и математического образования в частности. Для нужд школьного образования и решения всевозможных дидактических задач в настоящее время существует большое количество специальных компьютерных систем и программ. Лидером по применению в обучении школьной геометрии компьютерных программ является система динамической геометрии (СДГ) The Geometer's Sketchpad, которая с успехом используется во многих странах мира, в том числе и при обучении решению задач на вычисление расстояний и углов.

Школьное математическое образование, в частности обучение такому её важнейшему разделу как стереометрия, прошло достаточно долгий и сложный путь становления и развития. Нас, в первую очередь, будет интересовать современный его этап – этап, в котором государство впервые стало выполнять большую организационную, регламентирующую и контролирующую функцию в виде государственных образовательных стандартов.

Как известно, в настоящее время школьное образование в России переходит на Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) второго поколения. Обращаясь к основным положениям стандарта, отметим, что одним из основных его требований является умение использовать средства информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) в решении различных задач, в том числе математических.

Актуальность исследования. Приоритетным направлением модернизации отечественного математического образования является его информатизация. Среди различных программных сред, которые используются в математической подготовке школьников, наиболее востребованы так называемые системы динамической геометрии, которые используется образовательными учреждениями преимущественно для поддержки курса планиметрии. Последние русскоязычные версии (например, 5.03 «Живая математика») популярной американской обучающей программы The Geometer's Sketchpad могут поддерживать разделы школьной стереометрии. В связи с этим появилась потребность разработки соответствующих методик и методических материалов использования Живой математики на уроках математики в 10 классе при обучении решению стереометрических задач на построение сечений, вычисление расстояний и углов, при подготовке школьников к ЕГЭ по математике.

В связи с отмеченным выше констатируем следующее ***противоречие***: между объективной потребностью обучения старшеклассников стереометрии с использованием систем динамической геометрии и отсутствием разработанных методик и методических материалов использования Живой математики на уроках геометрии в 10 классе.

Потребность в разрешении вышеназванного противоречия обусловливает актуальность нашего исследования и определяет ***проблему***, которая заключается в поиске ответа на вопрос: как осуществлять методику использования среды Живая математика при обучении стереометрии в 10 классе, которая обеспечит повышение качества геометрической подготовки обучающихся?

***Объект исследования*:** учебно-воспитательный процесс в старшей школе, ориентированный на использование в курсе геометрии систем динамической геометрии.

***Предмет исследования*:** компьютерное сопровождение решения стереометрических задач на вычисление расстояний и углов в курсе геометрии 10 класса с использованием системы динамической геометрии Живая математика.

Цель исследования: разработать методику применения системы динамической геометрии Живая математика при обучении решению вычислительных задач стереометрии в 10 классе.

В основу нашего исследования положена следующая ***гипотеза***: геометрическая подготовка школьников и их интерес к геометрии возрастут, если при обучении решению вычислительных задач стереометрии в 10 классе учителю удастся:

- теоретический материал каждой темы сопроводить примерами и заданиями на эффективные (а не воображаемые) построения в пространстве;
- рассмотреть обстоятельные решения типовых задач на вычисление расстояний (между двумя точками, точкой и прямой, точкой и плоскостью, двумя прямыми) и углов (между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями, двугранного угла);
- использовать методику применения системы динамической геометрии Живая математика, базирующуюся на её дидактических возможностях.

Для реализации поставленной цели и проверки гипотезы исследования нами решались следующие ***задачи*:**

- описать используемые в школьном курсе стереометрии учебники и учебные пособия с точки зрения возможности применения при обучении решению вычислительных задач системы динамической геометрии Живая математика;
- выявить и описать дидактические возможности динамической среды Живая математика при обучении решению стереометрических задач;
- ознакомиться с опытом учителей математики по использованию систем динамической геометрии в геометрической подготовке школьников, в первую очередь при изучении фигур в пространстве, решении метрических задач;
- разработать сопровождение тем курса стереометрии в 10 классе, связанное с обучением решению задач на вычисление расстояний и углов, с использованием среды Живая математика;

- разработать элективный курс, осуществить экспериментальную проверку эффективности использования среды Живая математика в процессе обучения основному курсу геометрии и элективному курсу в 10 классе.

Для решения поставленных задач применялись следующие методы исследования: теоретический анализ психолого-педагогической и методической литературы; сравнение и выбор; прогнозирование; наблюдение; эксперимент.

Выпускная квалификационная работа состоит из Введения, двух глав, Заключения и библиографического списка.

Во Введении обоснована актуальность данного исследования, сформулирована его цель, объект, предмет, гипотеза и задачи исследования.

В первой главе представлено описание математического образования на современном этапе, его сущность и проблемы, а также, на основе проведенного анализа психолого- педагогической и методической литературы рассмотрены дидактические возможности системы динамической геометрии Живая математика в обучении геометрии, а так же технологические возможности использования этой системы при обучения решению стереометрических задач.

Во второй главе представлены методические разработки уроков по геометрии, в частности, стереометрии, с использованием среды Живая математика и элективный курс по данной теме для обучающихся 10 классов, а также экспериментальная проверка эффективности использования среды Живая математика; проведен анализ полученных результатов.

Заключение содержит выводы по результатам выполненной работы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДЫ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ В 10 КЛАССЕ

1.1. Современное российское школьное математическое образование, тенденции его развития и проблемы

Обучение математике занимает особое место во всей системе образования. На данный момент, каждая сфера человеческой деятельности нуждается в знаниях математики. Это могут быть, как конкретные факты в области математического знания, так и личностные качества, развивающиеся именно в процессе овладения этим знанием. К ним можно отнести: развитие логического мышления, воображения, интуиции, формирование навыков анализа, систематизации, алгоритмизации и многое другое.

Значимость изучения математики, с точки зрения ее применения в практической деятельности, заключается в том, что ее предмет — это ключевые структуры реального мира. Без знания основных аспектов курса математики человеку трудно существовать в современном мире, будь то изучение или пользование повседневными атрибутами человеческой деятельности (например, техника) или даже сложности, вызванные с восприятием различного рода информации (экономическая, политическая, социальная и другие). Абсолютно каждый человек за свою жизнь сталкивается с большим количеством ситуаций, где требуются конкретные математические знания. К ним относятся: выполнение довольно сложных расчетов и применение формул, измерение величин (длина, ширина, объем, площадь и т. д.), алгоритмизация действий, работа с диаграммами, таблицами, схемами, а также их составление и многое другое.

В современном школьном образовании, математика — это основа для изучения смежных дисциплин. В настоящее время, большинство учебных предметов в школе опирается на конкретные математические знания и их изучение невозможно осуществить, не владея базовыми умениями и фактами из школьного курса математики. К таким предметам можно отнести: экономику, физику, химию, информатику, обществознание, социологию и т.д. Таким образом, можно быть твердо уверенным в том, что математика является фундаментом всего школьного образования [38].

К основным целям школьного курса математики относят:

- освоение учащимися системы математических знаний, необходимых для изучения смежных школьных дисциплин и практической деятельности;
- формирование представлений о математике как форме описания и методе познания действительности;
- формирование навыков логического и алгоритмического мышления.

В связи с внедрением в современное образование федерального государственного образовательного стандарта (далее — ФГОС), произошло кардинальное его изменение и усовершенствование [46]. Современное образование характеризуется высокой значимостью способностей обучающихся (именно тех, которые необходимы конкретно ему) и их развитием, т. е. должен осуществляется индивидуальный подход. Изменились цели и задачи, формы, методы и средства образования.

В основе современного образования лежит системно-деятельностный подход, который заключается в том, что обучающийся получает знания не в готовом виде, а приобретает их в процессе решения поставленной задачи [44].

В связи с внедрением ФГОС в современное образование меняется сам подход к организации учебной и внеурочной деятельности. Как мы уже отмечали, здесь центральное место занимает системно-деятельностный подход, а основная задача современного образования заключается в формировании универсальных учебных действий (далее — УУД), направленные на овладение навыками обучаться (т. е. уметь применять полученные знания на практике через усвоение нового опыта).

На данный момент, между обучающимся и учителем происходит не просто передача информации и ее применение в практической деятельности, а формирование у самого обучающегося умений самостоятельно формулировать учебные цели, выдвигать гипотезы выхода из ситуаций затруднения, выполнять последовательность действий по составленному алгоритму, а также контролировать и корректировать собственную деятельность в ходе учебного процесса [14]. Все вышеперечисленное осуществляется благодаря современным образовательным технологиям.

Итак, универсальные учебные действия – это совокупность действий учащегося, обеспечивающих его культурную идентичность, социальную компетентность, толерантность, способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса.

Выделяют четыре блока УУД: личностные, предметные, регулятивные, коммуникативные.

Важно отметить, что благодаря внедрению комплекса УУД в современное образование, развитие способностей и навыков у обучающихся происходит гораздо быстрее и эффективнее. Формирование универсальных учебных действий зависит не только от учебно-методических рекомендаций, но и от коммуникативной деятельности учителя и обучающихся.

В связи с тем, что ФГОС требует осуществления системно-деятельностного подхода, возникают новые задачи для учителей:

- развитие и воспитание личности в соответствии с требованиями современного информационного общества;
- развитие у обучающихся умений самостоятельного получения знаний;
- формирование у обучающихся умений обрабатывать информацию, систематизировать ее и выделять главное;
- осуществление индивидуального подхода к обучающимся;
- развитие коммуникативных навыков у обучающихся;
- осуществление творческого подхода в процессе всей педагогической деятельности.

Целью обучения, при реализации системно-деятельностного подхода, является формирование личностных качеств обучающегося, формирование его индивидуальности и осуществление содействия развитию; обязательный учет мнения обучающегося, неигнорирование его чувств и эмоций; тактика учителя выбирается исходя из интересов обучающегося и его способностей; осуществление ситуаций сотрудничества, как на уроке, так и за его рамками.

Целесообразно выделить основные принципы построения школьного курса математики в рамках реализации ФГОС. Одним из главных и ведущих принципов является принцип приоритета развивающей функции. Также, в рамках нашей ВКР важными являются: принцип системного построения курса математики; принцип описания курса математики в единстве общего, особенного и единичного; принцип оптимального сочетания фундаментальности и профессиональной направленности обучения курсу математики; принцип предметной деятельности при изучении курса математики; принцип развивающего обучения, принцип дифференциации и др.

Говоря о принципе дифференциации, следует отметить, что он является мощным рычагом развития всего математического образования. Дифференциация предполагает, что в современной школе, должно осуществляться разнообразие путей получения знаний, умений и навыков [13].

Остановимся на некоторых проблемах математического образования. Так например, проблема «открытости» встает очень остро перед обучающимися во время овладения школьным курсом математики. Сейчас, большая часть учебников не упомянет о существовании других разделов математики, выходящих за замки школьного курса. Это создает у школьников чувство законченности (завершенности) изучения математики и обеднении ее как науки. Разумеется, перед учителем встает задача освещение факта о том, что математика шире, чем школьный курс не только словесно, но и направление обучающегося на соответствующую литературу.

Немалая часть преподавателей обходит стороной в обучающем процессе формирование навыков составления задач или отводят на это совсем мало времени. А ведь именно процесс составления задачи способствует формированию таких видов познавательных УУД, как развитие навыков логического мышления, умение анализировать, сравнивать, делать выводы и составлять логические схемы и цепочки рассуждений.

Работа учителя должна быть направлена на активизацию познавательной деятельности обучающихся. Если в процессе обучения используются современные формы, методы и средства обучения, то сам процесс становится более эффективным, а значит, повышается качество усвоения знаний школьниками. В старших классах необходимо использовать такие современные технологии, как, например, проблемное обучение, разработка различного рода раздаточного материала и нетрадиционных средств обучения (электронные циркули, «живые» тригонометры и др.). Активизации познавательного интереса также способствуют современные информационные технологии [23].

Широкое проникновение компьютерных технологий в область математических знаний предполагает глубокую фундаментальную подготовку по математике у обучающихся. Информационно-коммуникационные технологии, несомненно, предоставляют большую помощь в изучении школьного курса математики, и не только, например, учителя информатики имеют возможность квалифицированно обучить школьников различным возможностям систем динамической геометрии.

Современное математическое образование, на наш взгляд, должно включать в себя обучение различным компьютерным технологиям, а также современным информационным возможностям. В связи с проблемой использования современными учителями математики информационных технологий создано большое количество специальных пакетов, с помощью которых значительно сокращается время решения многих сложных и трудоемких задач с точки зрения вычисления. Но обучение таким современным технологиям не предусмотрено учебной программой в большей части образовательных учреждений. Чтобы воспользоваться компьютерными пакетами, надо четко себе представлять их возможности, уметь правильно оценить те результаты, которые выдаст компьютер.

Что касается современного геометрического образования в школе, оно является многоуровневым и дифференцированным, но только в старших классах [12]. Школьный курс геометрии имеет два глобальных раздела — планиметрия и стереометрия.

В наше время изучение стереометрии вызывает трудности у большинства обучающихся. Для многих обучающихся тяжелой задачей является умение ориентироваться в геометрических понятиях, теоремах, признаках или делать нужные построения [11]. Наиболее очевидная причина этого заключается в том, что формулировки и доказательства не выводятся учениками в процессе работы, а заучиваются. Многие идеологи современного образования считают, что факты, открытые учащимися самостоятельно, усваиваются ими лучше, чем преподнесенные учителем в готовом виде.

Большую роль в изменении содержания и стиля преподавания играют компьютерные технологии. Современный компьютерный чертеж можно тиражировать, деформировать, перемещать и видоизменять. Элементы чертежа легко измерить компьютерными средствами, а результаты этих измерений допускают дальнейшую компьютерную обработку.

В настоящее время просто необходима продуманная система геометрического образования [45]. Здесь, очевидно, целесообразность и эффективность применения компьютерных технологий. Особенно они полезны на уроках, при изучении курса стереометрии, благодаря чему на экране компьютера можно увидеть трехмерное изображение фигуры, увеличить ее, переместить, выделить главное на чертеже цветом за считанные секунды и многое другое. На данный момент разработано большое количество компьютерных программ и пакетов для изображения объемных фигур, но возникает необходимость в их разделении и выборе наиболее оптимальных и эффективных для изучения курса стереометрии [47].

В основе нашей работы лежит использование динамической среды Живая математика. При помощи нее преподаватель может не только наглядно решать различные задачи и доказывать теоремы обучающимся, затрачивая при этом минимальное количество усилий и получая максимальный результат, но и способствовать самостоятельному обучению и решению задач школьниками [26].

1.2. Среда Живая математика, дидактические преимущества

использования этой среды при обучении стереометрии

В настоящее время широкое распространение получили интерактивные средства обучения на базе современных информационных и коммуникационных технологий, и, в частности, интерактивные среды. В преподавании математики все чаще используют интерактивные геометрические системы, т. е. программные среды, которые позволяют делать геометрические построения на компьютере таким образом, что при движении исходных объектов фигура сохраняет свою целостность. Такие среды множество, но учителю нужно подобрать самое «эффективное».

Одним из таких сред является Живая математика. Это программа имеет широкие возможности. В ней можно создавать динамические чертежи для использования на разных уровнях обучения геометрии, алгебры и других смежных дисциплин. «Живая математика» обеспечивает наглядность учебного материала.

Для начала следует разобраться, что же такое Живая математика? Живая математика — это русскоязычная версия популярной американской обучающей программы «The Geometer's Sketchpad», разработанной фирмой Key Curriculum Press Technologies. Программа «The Geometer's Sketchpad» была русифицирована Институтом Новых Технологий (Москва) и распространяется в России под названием «Живая математика».

Это динамическая среда компьютерного моделирования, исследования и анализа задач из разных областей математики: планиметрии, стереометрии, тригонометрии, алгебры и математического анализа. Например, для курса алгебры и начал анализа Живая математика позволяет построить графики функций и провести их исследования, а для геометрии — сопровождать решение задачи динамическим чертежом, позволяющим увидеть взаимосвязь данных объектов с теми, которые необходимо найти или построить, а также осуществить исследование данной задачи [48].

Живая математика обладает большим количеством возможностей по работе с разнообразными видами задач [49]. С одной стороны, следует отметить, что сама динамическая среда не является обучающей, т. е. все построения выполняются не программой, а самим пользователем. Другими словами ученик, используя эту среду, выполняет в ней те же самые действия, которые он выполняет в школьной тетрадке или на доске. Живая математика не может давать задачи, осуществлять их решения. С ее помощью можно выполнять только элементарные построения, вычислительные действия и преобразования, в результате которых мы приходим к решению основной или вспомогательной задачи. С другой стороны, можно утверждать, что при решении задач с использованием Живой математики происходит именно обучение. В каких-то ситуациях обучающийся, не найдя очевидного пути решения задачи, может построить динамический чертеж, где увидит закономерности, способствующие ее решению; при решении задач на построение, с помощью программы можно легко убедиться в правильности решения и провести его исследование.

У учителя, который обучает с помощью этой программы, открываются дополнительные возможности: сделать обучение дифференциальным и индивидуальным; проиллюстрировать задачу «живыми» чертежами; создать экспериментальную исследовательскую базу, которая в свою очередь повышает активность творческой работы, проектную деятельность [7].

Работать с программой можно: через интерактивную доску или в кабинете, где есть проектор; в компьютерном классе; домашних условиях [8].

Строить различные рисунки, графики, чертежи в среде Живая математика довольно просто и не отнимает большого количества времени. Электронные чертежи не будут слишком отличаться от изображений на листе бумаге, однако, здесь стоит отметить одно из главных преимуществ Живой математики — это сохранение зависимости объектов друг от друга. Что это значит? Среда Живая математика позволяет создавать изображения с сохранением иерархии, т. е. при изменении положения независимого объекта сохраняется установленная ранее иерархия зависимости между элементами конфигурации. Так например, если мы «потянем» мышкой за какой-либо объект динамического чертежа, то увидим, что под действием этого, все зависящие от него объекты также изменяют свое положение, но отношения в которых они находились сохранится. Мы можем быть твердо уверены, что если изменить размер элемента, его положение, совершить другое действие с ним, то сохранятся все отношения между этим элементом и другими зависящими от него объектами.

Также отметим немаловажный плюс среды Живая математика — функция «спрятать-показать». Благодаря этому чертеж не перегружается большим количеством вспомогательных построений.

Математика — точная наука, поэтому встает вопрос о проверке построенных чертежей, графиков и т. д. И тут Живая математика предоставляет ряд дополнительных возможностей. Во-первых, она позволяет измерять длины отрезков, величины углов, площади фигур, длину окружностей и многое другое. Во-вторых, она дает возможность производить математические действия над заданными величинами, т. е. при решении задач на вычисление можно выполнять проверку с помощью специального калькулятора, который находится в меню. Для этого не нужно вводить величины, а достаточно только «щелкнуть» по ним на чертеже, что позволяет на этапе проверки перейти от рутинной работы к быстрой и четкой последовательности действий, приводящих к желаемому результату.

Учитель может копировать созданные в классе чертежи для организации самостоятельной работы школьников с программой [39]. Открываются большие возможности: учитель может организовывать самостоятельные работы в программе, давать задания на дом, проводить внеурочные занятия, которые будут способствовать усвоению материала.

И наконец, конечно же стоит отметить и эстетическую составляющую среды Живая математика: возможно выделение цветом разных частей изображения (стороны, сечения и т. п.), все линии можно преобразовывать: менять их цвет, толщину, делать пунктирными в зависимости от того, для чего мы это делаем. Линии искомой фигуры можно сделать жирными, вспомогательные — тонкими, невидимые — пунктирными, за счет чего достигается эстетичность и достоверность чертежа.

Это далеко не все возможности динамической среды Живая математика. В её интерфейс входит большое количество команд. Например, можно задавать анимацию точки, прямой или даже целой геометрической фигуры; выполнять геометрические преобразования (симметрия, перенос, поворот и т. д.) и многое другое.

Итак, Живая математика позволяет: наглядно изучать и осваивать даже самые сложные разделы, их темы и теоремы; «оживлять» рисунки из учебника и задач; применять возможности среды в других разделах математики и смежных дисциплинах.

Таким образом, Живая математика — это не просто электронные циркуль и линейка, а целая математическая лаборатория.

Все вышеперечисленные преимущества динамической среды Живая математика, несомненно, способствуют формированию у обучающегося таких УУД, как: развитие пространственного воображения, логики, абстракции, умения сравнивать, анализировать и систематизировать. Рассмотрим подробно применимы ли эти преимущества среды при изучении стереометрии и решении позиционных и вычислительных задач этого раздела.

Стереометрия является одним из самых сложных разделов изучения школьного курса математики для обучающихся [38]. Затруднения заключаются в том, что зачастую сложно представить пространственные фигуры (например, прямой угол может выглядеть как острый, скрещивающиеся прямые могут выглядеть как пересекающиеся или как параллельные прямые), а тем более изобразить их на доске или в своей тетради. Вследствие чего теряется интерес к предмету, и большая часть учеников начинает считать геометрию одним из самых сложных предметов школьного курса.

Рассмотрим подробно наиболее частые затруднения и ошибки обучающихся при изучении курса стереометрии и возможно ли разрешение этих трудностей благодаря использованию среды Живая математика.

Первой и наиболее важной ошибкой обучающихся является то, что довольно часто, найдя решение задачи, они ограничиваются только им, в результате чего оно может быть неполным. Как избежать таких ситуаций? Необходимо выполнять несколько вариантов чертежей, выбирать наиболее удачный или рассматривать сразу два, а то и три чертежа одновременно. При решении стереометрических задач не редко возникает такая проблема, как выбор «удачного» ракурса чертежа. Условие задачи можно изобразить по-разному, но при одном варианте — задачу не решить, а при другом — решение или какие-то его элементы заметно сразу. Построения «удобного» чертежа не всегда получается с первого раза и зачастую на это уходит большое количество времени.

Например, в некоторых задачах можно мысленно «растянуть» или «сжать» данные объекты, изменить их расположение или размер. При этом вероятность обнаружения отдельных случаев явно повышается.

Также, трудности могут возникать из-за перегруженности чертежа. Это происходит при фиксировании всех условий задачи на чертеже, а также некоторых этапов ее решения. Вследствие чего не реализуется один из принципов дидактики — наглядность. В результате чего снова необходимо выполнять несколько вариантов чертежа, которые потребуют временных затрат. И снова происходит потеря времени на уроке, которую современный учитель не может допустить.

Возникает вопрос: «Как способствовать формированию у обучающихся умения находить все решения задачи, проводить полное исследование, изображать правильный и удобный чертеж задачи и не перегружать его?».

Здесь, на помощь придут возможности динамической среды Живая математика. При выполнении в ней чертежа задачи можно изменить его ракурс. Также, при необходимости изображения нескольких чертежей, Живая математика позволяет без лишних затрат времени создать еще один, два или сколько требуется идентичных динамических чертежей и выделить на каждом из них необходимые данные. Также, как отмечалось выше, у Живой математики есть такая команда, как «спрятать-показать», благодаря которой можно не изображать несколько чертежей или оставлять все на одном, а убрать на время вспомогательные элементы, которые в любой момент можно вернуть «одним щелчком». Следует отметить, что при изображении того же чертежа в тетради, это займет немало времени. И, наконец, Живая математика позволяет быстро и точно провести исследование, т. е. всегда ли она имеет решение и сколько таких решений она имеет и при каких условиях. Несомненно, нельзя исключать из образовательного процесса выполнение обучающимися чертежей на бумаге, но можно использовать ИКТ-технологии тогда, когда уже не требуется умения выполнять правильные чертежи или в ситуациях затруднения в задачах. Также, есть смысл при изучении курса стереометрии выполнять чертежи в среде Живая математика, а затем продублировать их в тетраде.

Еще одна трудность — это проверка правильности решения. При решении задач на построение, этап проверки носит проблемный характер. Как на бумаге убедиться, что построенный чертеж является решением задачи? Это не всегда возможно. В Живой математике это сделать достаточно легко с помощью измерения величин и встроенного электронного калькулятора, если это необходимо.

Приведенные примеры достаточно убедительно говорят о важности применения компьютерных технологий на уроках геометрии при изучении раздела стереометрии, в частности.

Говоря о возможности проверить найденное решение задачи, возникает вопрос: «А везде ли применима Живая математика? Какие типы задач решаются в курсе стереометрии и какие из них проще и быстрее выполнить на бумаге?».

Живая математика позволяет не только выполнить необходимую последовательность построений, но и проверить удовлетворяет ли данное построение условиям задачи [3]. Так, например, необходимо построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам. В среде Живая математика обучающийся выполнит все те же построения, что и выполнил бы в своей тетради, но намного быстрее и точнее. После всех построений он может оставить только построенный треугольник и первоначальные данные и проверить правильность своего решения, измеряя объекты, которые были даны в задаче и те, которые он построил. Также, изменяя первоначальные данные, обучающийся может увидеть всегда ли задача имеет решение и сколько таких решений может быть. Например, при решении задач на построение сечений, Живая математика добавит наглядность. Строить сечения в данной программе очень легко по сравнению с построением на доске, так как тут ничего не нужно «примерять», аккуратно чертить, компьютер все сделает сам. Так же можно выбрать наиболее подходящее расположение чертежа, удобный угол обзора.

Готовые чертежи экономят время, которого так не хватает на уроке. Но это не значит, что данная среда применима лишь при решении задач на построение. Задачи на нахождение углов и расстояний между объектами также решаемы в среде Живая математика. При выполнении чертежа уже могут появляться возможные пути решения за счет изменения положения объектов, легко видеть то, что нужно найти на самом деле, в отличие от статичного рисунка в тетради. И, конечно, возможность о которой мы не раз упоминали — проверка решения. В среде Живая математика легко выполнить проверку найденного решения с помощью вспомогательных чертежей. Также, следует отметить, что учебники геометрии содержат многочисленные определения, постулаты, теоремы, леммы, которые бывает нелегко понять или воспроизвести. При помощи Живой математики удобно создавать конструкции, моделирующие условия теорем, и экспериментировать с ними [37].

Таким образом, мы видим, что Живая математика применима при решении всех типов задач не только планиметрии, но и стереометрии, а также при изучении всех теоретических разделов за счет создания динамического сопровождения темы и даже на смежных дисциплинах.

1.3. Технологии создания 3D эффектов в среде Живая математика

Как уже отмечалось выше среда Живая математика, как и все системы динамической геометрии, не содержит готовых обучающих сценариев, учебных сюжетов, разработанных уроков. Этим она и замечательна. Всё, что необходимо для урока, учитель готовит самостоятельно или использует те наработки специалистов, преподавателей, разработчиков, коллег-учителей, студентов и аспирантов, которые его устраивают. Постепенно в арсенале любого учителя накапливается библиотека GSP-файлов, которые органично применяются им в процессе обучения математике, постоянно дорабатываются и совершенствуются.

Не является исключением и такой важный раздел школьного курса математики, как стереометрия. Именно стереометрия, особенно её первые уроки, трудно даются учащимся, т.к. у большинства ребят ещё не сформировано пространственное воображение, они не видят свойства геометрических пространственных фигур. По этой причине особенно полезно сопровождать решение стереометрических задач или доказательства теорем не привычными статическими чертежами, которые мы привыкли наблюдать в школьных учебниках, а их динамическими аналогами. Но как самостоятельно создать в Живой математике динамическую модель пространственной фигуры, если в распоряжении пользователя имеются лишь виртуальные циркуль и линейка? Оказывается, что эта задача вполне по силам тем ученикам, которые поставят перед собой цель решить её.

Рассмотрим конкретно технологию создания 3D графики в среде Живая математика, подробно опишем этот процесс. «Трёхмерность» модели попытаемся обеспечить следующими двумя средствами:

- возможностью динамичного изменения ракурса изображения фигуры (создание так называемого эффекта её вращения);

- «правильным» изображением видимых и невидимых рёбер многогранника (невидимые рёбра можно показывать пунктиром, тонкой линией или вообще не показывать).

Эффект вращения. Для получения эффекта вращения достаточно построить изображение вращающегося репера, т.е. начала координат и тройки ортогональных единичных векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ (рис. 1). В этом случае для построения изображения любой фигуры достаточно научиться «привязывать» её точки к базису – они будут повторять все его эволюции [16].

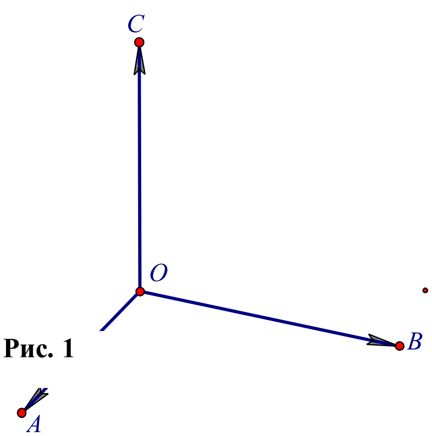


Рис. 1

Например, чтобы по началу координат O и точкам A, B и C (концам единичных векторов) построить треугольную призму с основанием OAB и одним из боковых ребер OC, достаточно достроить треугольники OAC и OBC до параллелограммов (рис. 2). Рекомендуется выполнять построения, которые сохраняются при всех положениях базиса.

Так например, если для построения двух вершин A′ и B′ верхнего основания искомой призмы использовать прямую, параллельную OC, то эти точки вместе со всеми их возможными «потомками» исчезнут в том положении, когда точки O и C совпадают (например, вид призмы сверху). Поэтому предпочтительнее аналитический подход: зная координаты изображаемой вершины призмы, например

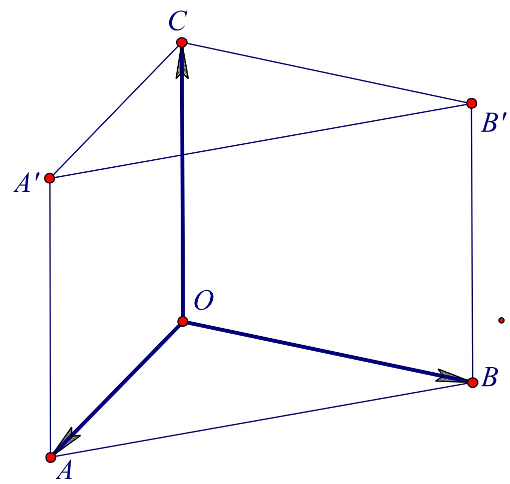


Рис. 2

A′(1; 0; 1) и координаты концов базисных векторов на плоскости проекции (то есть на экране), можно вычислить координаты изображения точки A′ на экране и построить его по координатам.

Как же заставить вращаться базис? Опишем простейший способ.

Допустим, что первоначально точка O лежит в плоскости проекции (экран компьютера), векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ так же лежат в этой плоскости и направлены, соответственно, вправо и вверх (можно считать, что базис из этих двух векторов совпадает с базисом стандартной системы координат среды Живая математика), а вектор $\overrightarrow{OA}$ перпендикулярен плоскости проекции, в связи с этим он спроектируется в точку O.

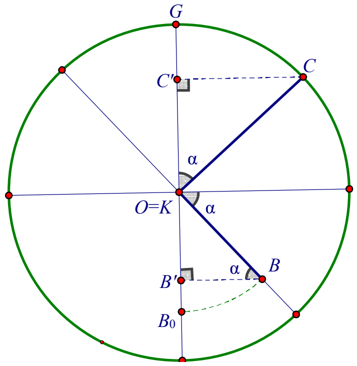


Рис. 4

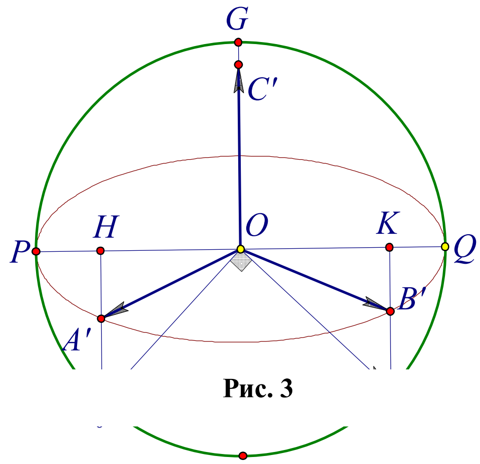


Рис. 3

Повернём базис вокруг вертикальной прямой OG на некоторый угол β, а затем вокруг горизонтальной прямой PQ на угол α. Проекции точек A, B и C на плоскости проекций (компьютера) обозначим A′, B′ и C′ (рис. 3). Построим на PQ как на диаметре окружность. Проведём через точки A′ и B′ прямые перпендикулярные PQ, построим пару точек H и K пересечения этих прямых с диаметром PQ и пару точек A_0 и B_0 пересечения этих же прямых с нижней частью окружности. Отметим, что B_0 – точка, в которую попадёт B, если повернуть плоскость OAB, равную PQB, до совмещения с плоскостью проекции POG.

Спроектируем полученную фигуру на вспомогательную плоскость, расположенную перпендикулярно прямой PQ и содержащую O (рис. 4). Из прямоугольного треугольника KBB′ находим $B'K = BK\cdot\sin\alpha = B_0K\cdot\sin\alpha$. Таким образом, точка B′ является образом точки B_0 при гомотетии с центром в точке K и коэффициентом sin α. По той же схеме строится изображение A′, а именно, A′ является образом точки A_0 при гомотетии с центром в H и коэффициентом sin α. Аналогично, из прямоугольного треугольника OCC′ имеем $OC' = OC\cdot\cos\alpha = OG\cdot\cos\alpha$ (рис. 4). Таким образом, точка C′ является образом точки G при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом cos α.

Перечислим теперь основные построения, которые надо выполнить, чтобы создать в среде Живая математика подвижный трёхмерный базис, которым можно управлять с помощью двух круговых бегунков: один из них будет регулировать величину угла α наклона вектора OC (оси аппликат), второй – величину угла β поворота вектора OB (оси ординат).

Построим сначала два круговых бегунка. Для этого последовательно построим:

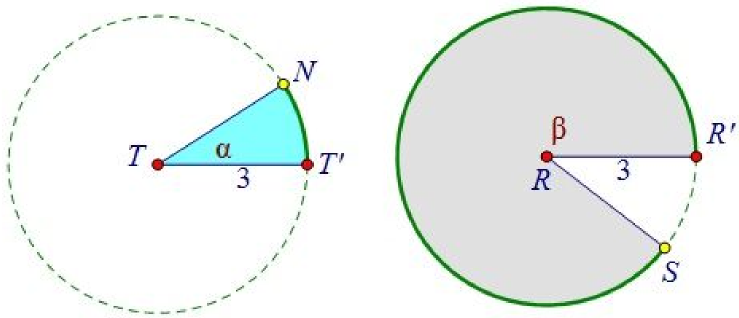


Рис. 5

1) произвольные точки T и R и перенесём их вправо (следует выбрать опцию 0°) на некоторое расстояние (выбираем, например, значение равное 3), получим точки T' и R' (рис. 5);

2) окружности с центрами в T и R радиуса TT'=RR'=3;

3) построим далее на окружностях произвольные точки N и S, затем дуги T'N и R'S, ориентированные против движения часовой стрелки, найдём их градусные меры, на рис. 5 в соответствии с результатами измерения угол $\alpha=\angle T'TN= 32{,}82°$ и угол $\beta=\angle R'RS= 322{,}17°$.

Построение круговых бегунков завершено. Приступим к построению подвижного 3D репера. Для этого:

1. Построим произвольные точки O и Q, затем окружность с центром в точке O и радиуса OQ (рис. 6).

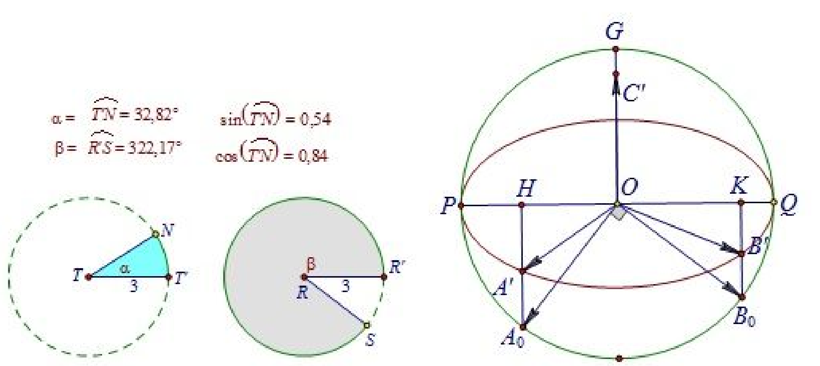


Рис. 6

2. Повернём точку Q вокруг O на угол β, величина которого равна градусной мере дуги R'S = 322,17°, получим точку B_0. Ортогонально спроектируем B_0 на диаметр PQ, обозначим проекцию через K.

3. Построим на окружности точку A_0 такую, что $\angle A_0OB_0 = 90°$. Ортогонально спроектируем A_0 на диаметр PQ, обозначим проекцию через H.

4. Точка A' строится как образ A_0 при гомотетии с центром в точке H и коэффициентом гомотетии sin α (зайти в меню «Преобразования», отметить H как центр гомотетии, синус угла альфа – как коэффициент гомотетии).

5. Точка B' строится как образ B_0 при гомотетии с центром в точке K и тем же коэффициентом гомотетии sin α.

6. Точка C' строится как образ G при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом гомотетии cos α.

7. Соединим точку O с точками A, B и C направленными отрезками с помощью инструмента «вектор». Подвижный репер готов.

Перемещая точку N на первом круговом бегунке, мы изменяем угол α наклона оси аппликат.

Перемещая точку S на втором круговом бегунке, мы изменяем величину угла β поворота оси ординат и, соответственно оси абсцисс.

Для создания собственного инструмента, назовём его «Подвижный 3D репер», необходимо:

а) спрятать все дополнительные построения, кроме: точек T, T', N, R, R', S, O, Q, A', B', C', отрезков TT', TN, RR', RS, дуг T'N и R'S, ориентированных против движения часовой стрелки, а также векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$;

б) спрятать имена всех объектов;

в) подсветить все объекты;

г) нажать на нижнюю кнопку вертикальной панели инструментов и выбрать опцию «создать новый инструмент…», в появившемся окне присвоить инструменту имя «Подвижный 3D репер».

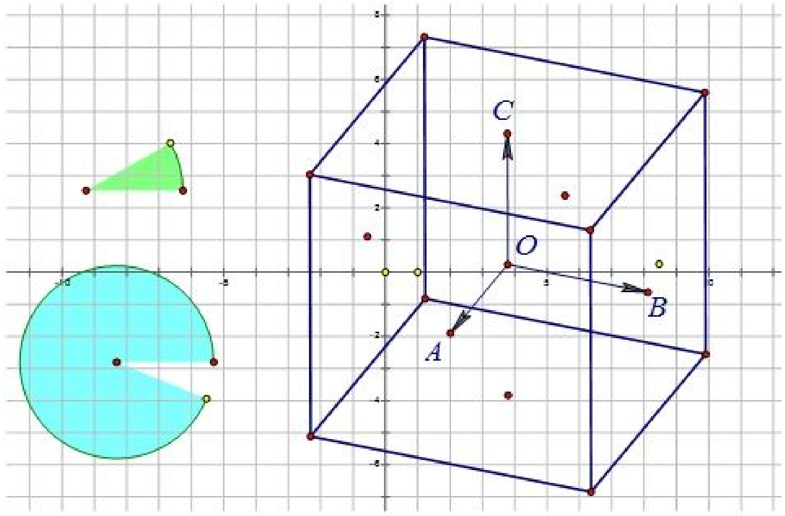


Рис. 7

Имея изображение подвижного 3D репера теперь несложно построить практически все многогранники, которые рассматриваются в курсе геометрии в

10 классе. Приведём, например, изображение куба, грани которого параллельны координатным плоскостям, а начало координат совпадает с центром куба (рис. 7). Для достижения большего эффекта наглядности целесообразно решить проблему с изображением невидимых рёбер пунктирными линиями.

Проблема видимости. Глядя на изображение куба (рис. 7), рёбра которого имеют одну толщину и единый стиль, невозможно определить, смотрим ли мы на куб сверху или снизу; а при вращении изображения вокруг вертикальной оси, нам будет казаться, что оно происходит, соответственно, то по, то против часовой стрелки. Причём «переключение» точки зрения контролировать очень сложно [15].

Поэтому правильному восприятию «стереочертежей» очень способствует изображение невидимых линий пунктиром (или их отсутствие). А поскольку наши модели вращающиеся, желательно обеспечить правильное чередование сплошного и пунктирного изображения каждой линии, «исчезновение» вершин и граней, попадающих на тыльную сторону фигуры. Поясним, как это делается для точек.

Пусть (a; b) – координаты мигающей точки P в экранной системе координат. Допустим, мы сумели создать параметр v, который равен 1 или -1 в зависимости от того, должна ли быть видна эта точка или нет. Тогда точка $P_в(a\sqrt{v}\,;\, b)$ будет появляться на месте точки P тогда и только тогда, когда точка P видима; саму точку P следует спрятать. Чтобы построить «мигающее ребро» PQ, параметр v определяют так, чтобы его знак зависел от видимости или невидимости ребра, строят точку $P_в$ как выше, и точку $P_н(a\sqrt{-v}\,; b)$. Затем строится сплошной отрезок $P_вQ$ и пунктирный $P_нQ$; они будут вести себя «правильно». Аналогично можно построить и «мигающую грань», взяв в качестве одной из её вершин точку, существование которой определяется «видимостью» грани.

Параметры видимости v лучше сначала вычислить для граней. Для этого воспользуемся возможностью измерения ориентированных углов. Угол ABC ориентирован положительно, если вращение от BA к BC производится против часовой стрелки. Ясно, что угол CBA ориентирован уже отрицательно. Таким образом, ориентация угла с заданным порядком вершин зависит от того, на какой стороне тела – видимой или тыльной – находится при данном положении теле этот угол. То есть в качестве параметра видимости грани можно взять знак величины выбранного в этой грани ориентированного угла. В «координатной» версии моделей ориентированный угол можно заменить определителем, составленным из координат векторов BA и BC [16].

Ребро или вершина многогранника видимы на изображении тогда и только тогда, когда видима хотя бы одна примыкающая к ним грань. Это замечание позволяет определить параметры видимости вершин и рёбер.

Отметим, что это описание рассчитано на случай, когда каждое ребро или грань видимы, или невидимы только целиком, как, например, в случае выпуклых многогранников. В случае невыпуклых тел приходится предусматривать возможные взаимоперекрытия частей непосредственно.

Реализация эффекта невидимости в Живой математике. Покажем, каким образом в среде Живая математика можно создать собственный инструмент так называемого «мигающего» n-угольника.

Нам понадобиться инструмент, назовём его «Знак угла», который для любых трёх точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, будет выводить на экран число 1, если наименьший угол поворота луча BA до совмещения с лучом

ВС будет выполняться против движения часовой стрелки, и -1, в противном случае.

1. Поместим на рабочее поле Живой математики три неколлинеарные точки: A, B и C (рис. 8).

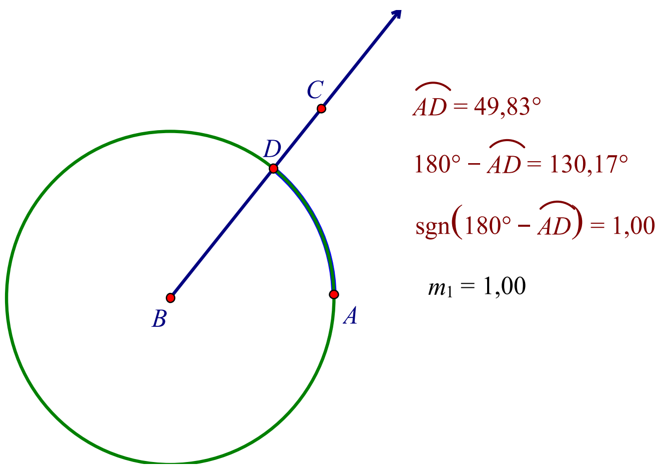


Рис. 8

2. Построим окружность c с центром в точке B и радиуса BA.

3. Построим луч ВС.

4. Построим точку D пересечения окружности c с лучом BC.

5. Построим на окружности c дугу AD, такую, что направление по дуге от точки A до точки D выполнялось против движения часовой стрелки (подсвечиваются последовательно точки B, A и D, затем в меню «Построения» выбирается команда «Дуга на окружности»).

6. Измеряется угловая мера дуги AD (подсвечивается дуга AD, в меню «Измерения» выбирается команда «Угловая мера дуги»).

7. Вычисляется разность между 180º и угловой меры дуги AD (в меню «Вычисления» необходимо выбрать графический калькулятор, который активизируется опцией «Вычислить»).

8. Находится знак (плюс или минус единица) разности между 180º и угловой меры дуги AD (повторно выводится на экран графический калькулятор, в котором выбирается функция sgn, в качестве аргумента используется вычисленная в пункте 7 разность). Переименовываем найденный знак буквой m.

9. Спрячем все построения, кроме точек A, B и C и вычисленного знака m, спрячем имена всех четырёх объектов, подсветим сами объекты и, нажав на

самую нижнюю кнопку вертикальной панели инструментов, создадим собственный инструмент «Знак угла».

Приступим к созданию инструмента «Мигающий треугольник».

1. Поместим на экране три неколлинеарные точки A, B и C. Создадим вспомогательную кнопку, позволяющую при необходимости прятать или показывать эти точки.

2. Найдём знак m угла ABC.

3. Выведем на рабочее поле абсциссы точек A, B и C (подсветить точки A. B и C, зайти в меню «Измерения», выбрать опцию «Абсцисса (x)»).

4. Выведем на рабочее поле (рис. 9) ординаты точек A, B и C (подсветить точки A, B и C, зайти в меню «Измерения», выбрать опцию «Ордината (y)»).

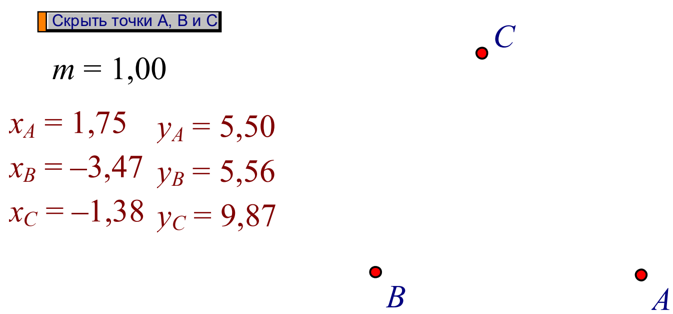


Рис. 9

5. Вычислим произведения абсциссы каждой точки на корень квадратный из знака m угла ABC:

$$x_A \cdot \sqrt{m} = 1{,}75 \qquad x_B \cdot \sqrt{m} = -3{,}47 \qquad x_C \cdot \sqrt{m} = -1{,}38$$

6. Спрячем точки A, B и C (нажать на кнопку «Скрыть точки A, B и C»).

7. Для каждой пары чисел, состоящих из «новой» абсциссы и «старой» ординаты, построим соответствующую точку (в меню «Графики» выбирается опция «Построить точку (x, y)»), обозначим соответствующие точки буквами A,

Рис. 10

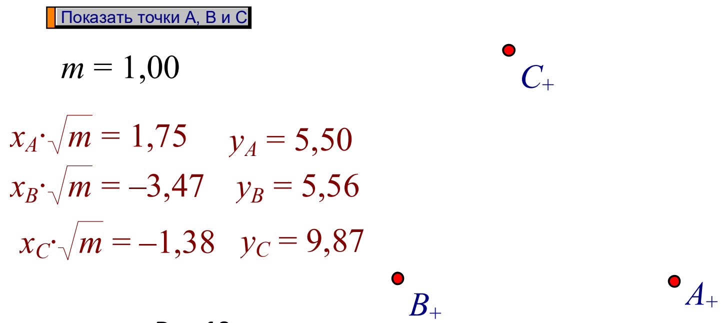


Рис.10

В и С с нижними индексами «+»: A_+, B_+ и C_+ (рис. 10).

На самом деле на рабочем поле появятся точки A_+, B_+ и C_+, которые будут расположены там же, где А, В и С соответственно, но отличаться от последних тем, что при m = -1, их изображение будет отсутствовать по причине неопределённости абсцисс.

8. Создадим вспомогательную кнопку, позволяющую при необходимости прятать или показывать точки A_+, B_+ и C_+.

9. Соединим точки A_+, B_+ и C_+ отрезками (при необходимости окрасим внутреннюю область треугольника подходящим цветом, рис. 11).

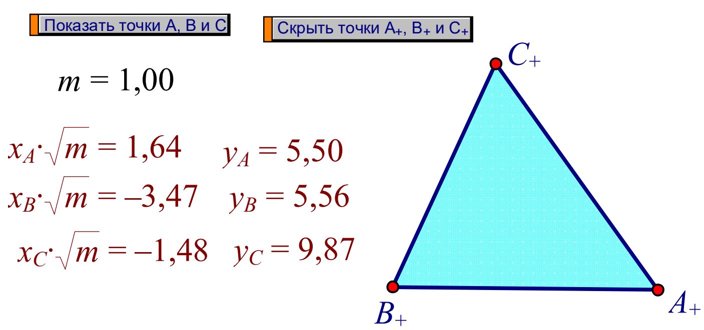


Рис. 11

10. Ухватимся мышкой за любую вершину треугольника, например, B_+, и поместим её так, чтобы знак m угла стал равным – 1. Если построения выполнены верно, то треугольник должен исчезнуть.

11. Вычислим произведения абсциссы каждой точки на корень квадратный из - m:

$$x_A \cdot \sqrt{-m} = -5{,}05 \qquad x_B \cdot \sqrt{-m} = -3{,}47 \qquad x_C \cdot \sqrt{-m} = -7{,}91$$

12. Для каждой пары чисел, состоящих из «новой» абсциссы и «старой» ординаты, построим соответствующую точку (в меню «Графики» выбирается

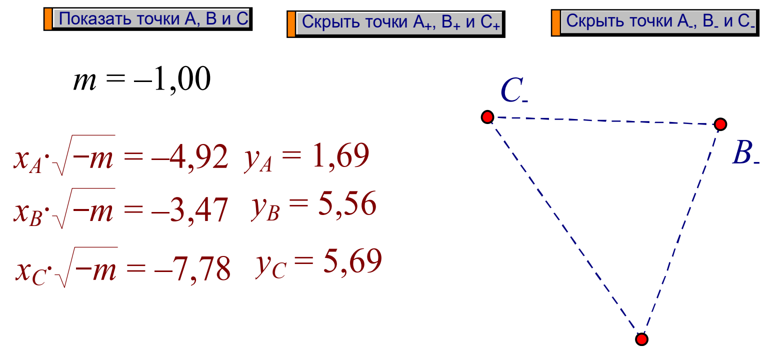


Рис. 12

опция «Построить точку (x, y)»), обозначим соответствующие точки буквами A, B и C с нижними индексами «-»: A_-, B_- и C_-. Создадим кнопку, которая прячет точки A_-, B_- и C_-, соединим вершины треугольника (рис. 12) отрезками (например, тонкими пунктирными линиями или можно вообще не соединять отрезками):

13. Нажмите на кнопки «Скрыть точки A_+, B_+ и C_+» и «Скрыть точки A_- B_- и C_-», затем на кнопку «Показать точки A, B и C». Спрячьте имена точек A, B и C. Спрячьте все объекты, кроме треугольника ABC.

14. Подсветите треугольник ABC, нажмите нижнюю кнопку на вертикальной панели инструментов, выберите опцию «Создать новый

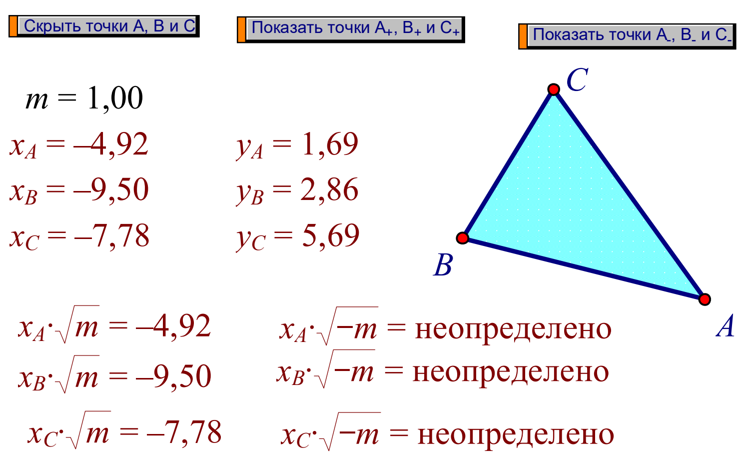


Рис. 13

инструмент». Появится окно с текстом «Ваш выбор определяет один или несколько объектов, которые в данное время не существуют. Вы хотите включить определение этих объектов в пользовательский инструмент?». Надо ответить

«Да». После этого в новом окне дать имя «Мигающий треугольник» новому инструменту (рис. 13).

При создании инструмента «Мигающий n-угольник» для n-угольника ABC…D (n>3) можно поступить следующим образом. Выбрать любые три последовательные вершины, обозначим их ABC. Определить для них значение m знака угла ABC. Найти координаты всех n вершин многоугольника. Как и в случае с треугольником выполнить все построения, аналогичные пунктам 1-14, т.е. построить многоугольники $A_+B_+C_+…D_+$ и $A_-B_-C_-…D_-$, с помощью которых создать соответствующий собственный инструмент «Мигающий n-угольник».

Имея набор таких инструментов, можно решить проблему видимости для любого выпуклого многоугольника. Для этого на динамической 3D модели такого многогранника необходимо спрятать все рёбра, оставив лишь вершины многогранника. Затем, используя собственные инструменты, построить мигающие грани, соблюдая правило обхода вершин грани против движения часовой стрелки, если грань видна с внешней стороны, и по часовой стрелке, **если грань видна изнутри.**

На рисунке 14 представлены изображения куба и икосаэдра (последний получен из куба с помощью проведения на параллельных гранях куба вспомогательных отрезков, длины которых выражаются через длину *a* ребра куба

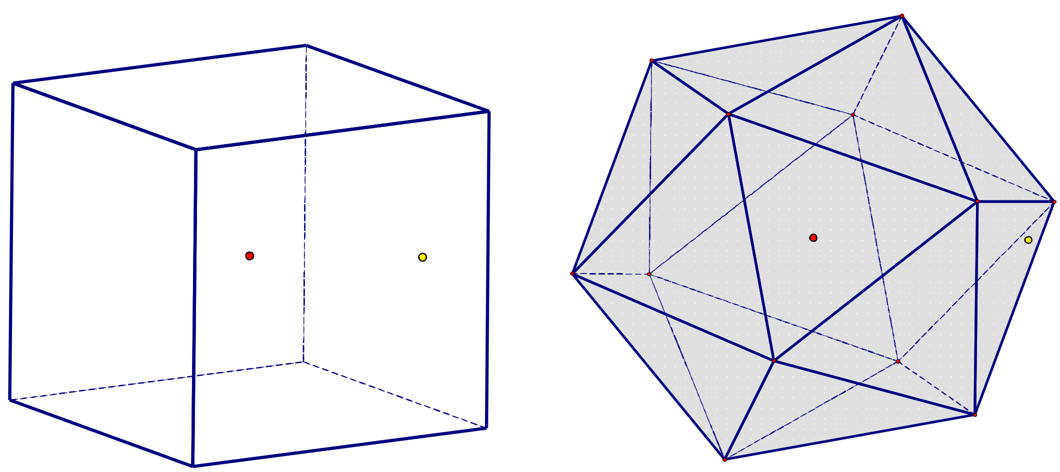


Рис. 14

по формуле $a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, на которых невидимые рёбра автоматически изображаются пунктирными линиями в зависимости от того, как расположен многогранник по отношению к пользователю. Рёбра грани изображаются пунктирными линиями в случае, если грань не лицевая (видна с внутренней стороны), и – сплошными линиями, если грань – лицевая (видна с внешней стороны). При изображении икосаэдра внутренняя область каждой лицевой грани дополнительно окрашена серым цветом.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ I

Рассматривая образовательное учреждение как одну из систем общества можно однозначно сказать, что в современных условиях без компьютерного моделирования не обойтись. Невозможно обучать детей 21 века только стандартным набором инструментов: мел, доску, учебник. Необходимо включать в стандартный набор инструментов и электронные ресурсы. Ведь образовательный процесс «подвижной» математики может стать гораздо интереснее и занимательнее, используя пригодные на то ресурсы. Целесообразное включение в образовательный процесс информационно-коммуникационных технологий и электронных образовательных ресурсов позволит сделать процесс обучения математики успешнее. Математика может стать «живой». Если говорить о процессе обучения математике и, в частности, геометрии, то цифровые образовательные ресурсы помогают визуализировать, моделировать математические объекты, исследовать их свойства и совершить проверку одним нажатием. Компьютер в данном случае может выступать также в качестве инструмента познания, средства обучения и контроля деятельности обучающихся.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ЖИВОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ПОЗИЦИОННЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ В 10 КЛАССЕ

2.1. Методика компьютерного сопровождения решения стереометрических задач на вычисление расстояний в среде Живая математика

Задание 14 Единого государственного экзамена по математике профильного уровня с 2016 года представляет собой стереометрическую задачу на определение расстояний или углов в пространстве между объектами, связанными с некоторым многогранником. Требуется, чтобы сделанные выкладки были последовательны и логичны, ключевые моменты решения обоснованы, а математические термины и символы использованы корректно. Данное задание относится к задачам повышенного уровня сложности с развернутым ответом. Для большинства выпускников задание 14 Единого государственного экзамена является достаточно сложным и затратным по времени, в результате чего многие из них даже не приступают к решению этой задачи, но при правильной подготовке оно становится посильным для большинства обучающихся.

При решении задачи 14 профильного уровня часто требуется найти расстояние и углы. В данном параграфе мы рассмотрим методику обучения задачам на нахождение расстояний между объектами в пространстве.

1. Типология стереометрических задач на вычисление расстояний между объектами в пространстве и алгоритмы их решения

Рассматриваемые задачи принято делить на 4 типа [2]:

1. Расстояние между двумя точками.
2. Расстояние от точки до прямой.
3. Расстояние от точки до плоскости.
4. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Рассмотрим каждый тип отдельно.

1.Расстояние между двумя точками.

Расстоянием между двумя заданными точками называется длина отрезка, соединяющего эти точки.

Чтобы найти расстояние между двумя заданными точками A и B, часто оказывается целесообразным:

1) построить на изображении заданной фигуры какой-нибудь прямоугольный треугольник ABC (рис. 15), одной из сторон AB которого является отрезок, равный искомому расстоянию. Если, например, AB - катет, AC = b и является гипотенузой, BC = a, тогда по теореме Пифагора $AB = \sqrt{b^2 - a^2}$;

2) искомое расстояние может оказаться длиной стороны треугольника ABC, в котором известны, допустим, две стороны a, b и угол ∠C между ними. Тогда по теореме косинусов $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$;

3) или известна сторона треугольника ABC, допустим a, и два угла, один из которых противолежит стороне a, например, ∠A и ∠C. Решение задачи сводится в этом случае к использованию теоремы синусов: $AB = \frac{a \cdot \sin C}{\sin C}$.

Возможны и другие способы решения.

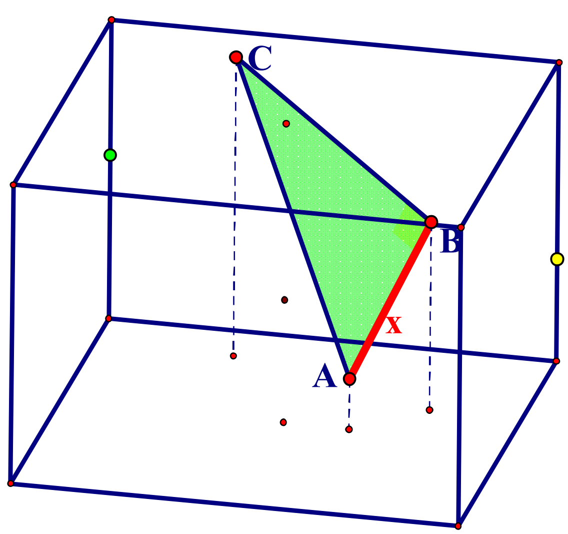


Рис. 15

2. *Расстояние от точки до прямой.*

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую [40].

Вычисление расстояния от точки A до прямой a можно вести по плану:

1) выберем на прямой a какие-нибудь две точки, например, точки B и C, и соединим их с точкой A;

2) найдем стороны треугольника ABC;

3) найдем высоту AD треугольника ABC.

Высота AD и является искомым расстоянием. Если в треугольнике ABC (рис. 16) AB=AC, то $\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BD}^2}$, где $\mathrm{BD} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$.

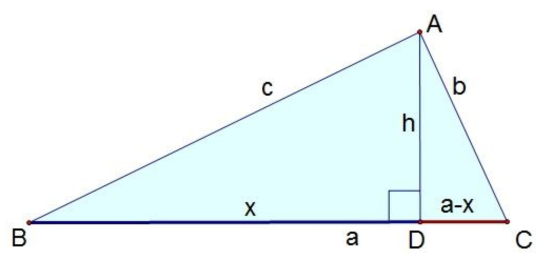


Рис. 16

3. *Расстояние от точки до плоскости.*

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость [17]. Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, необходимо воспользоваться следующим алгоритмом:

1) Выбрать в плоскости α некоторую прямую a;

2) Из точки T опустить перпендикуляр TR на прямую a;

3) В плоскости α через точку R провести прямую b, перпендикулярную a;

4) Расстояние от точки T до прямой b равно расстоянию от точки T до плоскости α (рис. 17) [1].

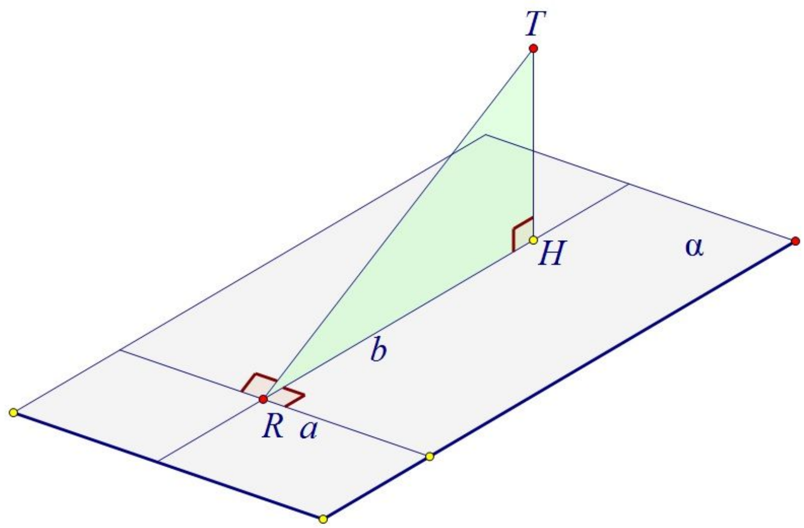


Рис. 17

4. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Чтобы найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми p и q необходимо:

1) На одной из прямых выбрать произвольную точку, например, на прямой q выбрать точку Q;

2) Через точку Q провести прямую p_1, параллельную p, и построить плоскость П, которая содержит пересекающиеся прямые p_1 и q;

3) На прямой p выбрать произвольную точку P, построить ее проекцию H на плоскость П;

4) Длина отрезка PH - искомое расстояние от точки P до плоскости П (рис. 18).

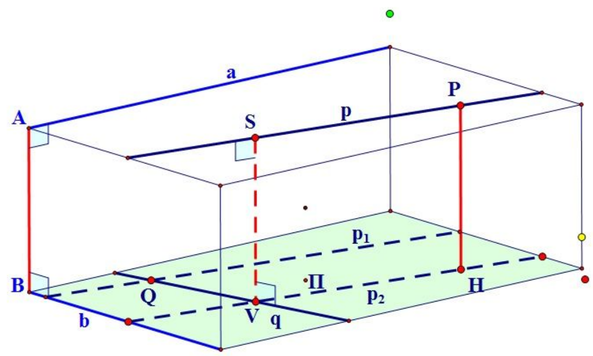


Рис. 18

В настоящее время большая часть современных школ в качестве содержательной основы школьного курса геометрии используют учебники Л. С. Атанасяна, меньшая же из них — учебники других авторов, например, И. М. Смирновой и В. А. Смирнова. Мы же в своей работе за содержательную основу возьмем учебное пособие «Геометрия. 10 класс. Готовимся к ЕГЭ» В. Н. Литвиненко и О. А. Батугина, отличительной особенностью которой является изучение не только практического материала через самостоятельные построения, но и теоретического. В качестве методической линии — рассмотрение теории сопровождается примерами и заданиями на эффективные (а не воображаемые, что чаще всего можно увидеть в школьных учебниках по геометрии 10-11 классов) построения в пространстве, а также рассматриваются обстоятельные решения типовых задач. В пособии в справочной форме приводятся и иллюстрируются на изображениях многогранников основные сведения из курса геометрии 10 класса. В книгу включены задачи, решение которых направлено на неформальное усвоение теоретического материала и способствует развитию пространственных представлений обучающихся [33].

2. Пример решения задачи на вычисление расстояний между точками с использованием динамической среды Живая математика

<u>Задача.</u> На ребре AE куба ABCDEFGH взята точка P - середина этого ребра. Считая ребро куба равным a, найдем расстояние от точки P до прямой FD [21].

<u>Решение.</u>

1. Опустим из точки P проекцию S на прямую DF. Так как треугольник PDF равнобедренный (PD = PF), то S - середина DF = $a\sqrt{3}$ (рис. 19).

2. Треугольник PSD - прямоугольный с катетом $SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и гипотенузой $PD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

3. По теореме Пифагора $PS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

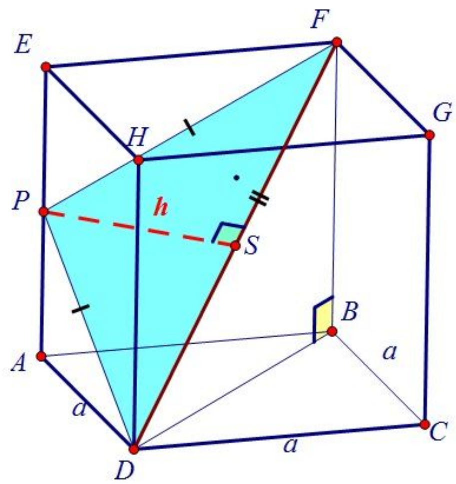


Рис. 19

Используя возможности Живой математики выполним проверку. Для этого воспользуемся следующими шагами:

1. Построим произвольный квадрат (рис. 20), который будет представлять собой некоторую грань куба в натуральную величину, например ABCD. Длину стороны квадрата будем считать равной a.

2. Построим изображение треугольника DFP в натуральную величину (рис. 21), для этого:

а) построим диагональ BD;

б) построим середину K стороны AB;

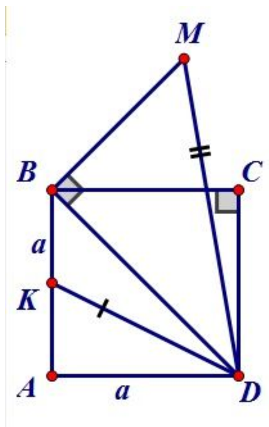
в) построим отрезок DK, очевидно, DK = DP = DF;

г) построим прямую m, проходящую через B и перпендикулярную BD;

д) отложим на m от точки B отрезок a, получим точку M, прямоугольные треугольники DBF и DBM равны по двум катетам, отсюда DM = DF;

е) построим треугольник DFP по 3 сторонам: DF = DM, DP = DK и FP = DK.

Очевидно, глядя на первую и последнюю колонки (рис. 22) таблицы можно сделать вывод, что задача решена верно.



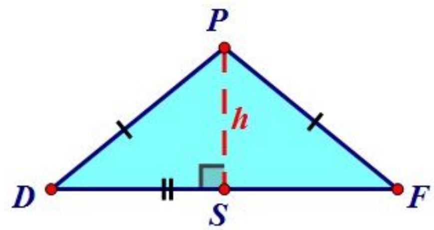


Рис. 20 **Рис. 21**

a = 3,84 см $\dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$ = 2,71 см

h = 2,71 см

a	h	$\dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$
3,39 см	2,39 см	2,39 см
4,74 см	3,35 см	3,35 см
3,84 см	2,71 см	2,71 см

Рис. 22

Таким образом, можно сказать, что Живая математика позволяет проверить выполнение подмеченных закономерностей и задач. С помощью программы можно также найти примеры, ручной поиск которых занял бы много времени или же просто невозможен. На экранах компьютеров можно увидеть точно вычерченные чертежи и графики, ручное построение которых могло быть немыслимо.

3. Комплекс стереометрических задач на вычисление расстояний между объектами в пространстве

1. Расстояние между двумя точками.

1. В основании прямой призмы ABCDEF лежит треугольник с прямым углом при вершине С. Отношение ребер призмы AC:BC:CF = 3:4:1. Считая CF = a, найти расстояние между точками P и Q - серединами ребер AB и EF.

2. В прямоугольном параллелепипеде ABCDEFGH отношение рёбер AB:AD:AE = 1:2:1. Считая AB = a, найдите расстояния от точки P - середины ребра AD - до точек K и L - центров граней ABFE и EFGH.

3. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды MABC равно стороне основания и равно a. На ребре AC взята точка R - середина этого ребра. Найдите стороны треугольника MBR [32].

4. На ребре CD правильной треугольной пирамиды DABC, все рёбра которой равны a, выбрана точка E, делящая это ребро в отношении 2 : 1, считая от вершины C. На отрезке AE выбрана точка F, делящая его в отношении 2: 1, считая от вершины A. Найти расстояние между точками B и F.

5. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания. На ребрах MA и MB пирамиды взяты соответственно точки Q и R - середины этих ребер. Считая AB = a, MB = 2a, найти расстояние от точки C до точки P, в которой прямая QC пересекает плоскость α, проходящую через точки R, A и D.

6. Высота MO правильной пирамиды MABC равна стороне её основания. Точка D- середина ребра AC. Считая AB=a, найдите расстояние от точки D до точки K- середины ребра MB.

7. В основании пирамиды MABC лежит равнобедренный треугольник, а её боковое ребро MC в два раза больше стороны основания и перпендикулярно к рёбрам AC и BC. Считая ребро AB=a, найти расстояние между точками Q и W- серединами рёбер AB и MC соответственно.

8. Точки C_2 и E- середины ребер CC_1 и CD соответственно куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а точки F и O- центры его граней CDD_1C_1 и ABCD соответственно. Считая ребро куба равным a, найти расстояния: а) A_1C_1и A_1C ; б) A_1O и A_1F.

9. В основании пирамиды MABC лежит прямоугольный треугольник. Боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания. На ребре AB взята

точка D- его середина, а на грани MBC взята точка P- центр этой грани. Постройте прямую, проходящую через точку P параллельно прямой MD, и, считая AC=BC=MB=a, найдите расстояния от точки пресечения этой прямой с плоскостью основания до точек: а) B и C; б) D и A.

10. На рёбрах BC и BB_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки D и B_2 соответственно- середины этих ребер. Считая AB=AA_1=a, найдите расстояния от точки пресечения прямой A_1D с плоскостью α, проходящей через точки B_2, A и C до точек B и C.

2. Расстояние от точки до прямой.

1. На ребре BF куба ABCDEFGH взята точка P - середина этого ребра. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от точки E до прямой PD.

2. Отношение бокового ребра правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, к стороне ее основания равно $\frac{3}{2}$. На прямой B_1D_1взята точка O - середина B_1D_1 и точка O', симметричная точке O относительно точки B_1. Считая AB = a, найдите расстояние от точки O' до прямой AD.

3. Найдите расстояние от вершины D основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до диагонали A_1C , если сторона основания равна 12, а боковое ребро призмы $4\sqrt{7}$.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T– середины ребер CD и A_1B_1 соответственно.

5. Дан куб, длина ребра которого равна 4. Точки MN соответственно середины ребер и найти: расстояние от точки M до прямой AN.

6. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб ABCD, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60 ° . Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

7. Стороны треугольника равны 17 см, 15 см и 8 см. Через вершину A меньшего угла треугольника проведена прямая AM, перпендикулярная к его

плоскости. Определите расстояние от точки M до прямой, содержащей меньшую сторону треугольника, если известно, что AM = 20 см.

8. Боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ - квадраты. Точка P- середина ребра B_1C_1, а точка C_2 - середина ребра CC_1. Считая ребро AB=a, найти расстояние от точки P до прямой C_1A.

9. Высота MO правильной пирамиды MABCD равна стороне основания. Считая AB=a, найти расстояние от точки D до прямой A_1C, точка A_1 которой является серединой ребра MA.

10. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат, а её боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания и равно AB. Считая AB=a, найти расстояние от точки C до прямой MA.

3. Расстояние от точки до плоскости.

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 4. N- середина отрезка AC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости NA_1D.

2. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит равнобедренная трапеция ABCD, причем AD=BC=6, CD>AB. Угол между прямыми AD и BC равен 60∘. Известно, что SD=12 – высота пирамиды. Найдите расстояние от точки C до грани SAB.

3. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S. Через точку пересечения диагоналей основания провели плоскость α перпендикулярно ребру SA. Найдите расстояние от точки N до плоскости α, если N – середина AD=22, а высота пирамиды равна 11.

4. ABCD – правильный тетраэдр с ребром 6. M,N,K – такие точки на ребрах AB,AD,CD соответственно, что AM=MB,DN=2NA=CK. Плоскость MNK пересекает ребро BC в точке P. Найдите расстояние от точки P до плоскости ACD.

5. Точка C_2- середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от точки D_2 до плоскости α, проходящей через точки B_1, C_2, и D.

6. Считая ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равным а, найдите расстояние от его вершины A_1. до плоскости $\alpha = AB_1D$.

7. Боковое ребро правильной пирамиды MABC равно стороне основания и равно а. На ее ребрах AB, AC, MA, MB и MC взяты точки D, E, A_1, B_1, C_1 соответственно - середины этих ребер. Найдите расстояние до плоскости α, проходящей через точки B_1, C и D, от точки A_1.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 6, боковые ребра равны 8, точка D – середина CC_1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости AB_1D.

9. В цилиндре параллельно диаметру AB=10 в нижнем основании проведена прямая, пересекающая окружность нижнего основания в точках M и N, причем MN=6. Через отрезок MN проведена плоскость α под углом 15° к плоскости осевого сечения ABCD. Найдите расстояние от центра нижнего основания до плоскости α.

10. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковым ребром AA_1 лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами AC=4, BC=16. Точка Q-середина ребра A_1B_1, а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении 1 : 2 , считая от вершины C_1. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M. Докажите, что точка M -середина ребра CC_1 и найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ.

4. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

1. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка C_2- середина этого ребра, а на его ребре AA_1 взята точка A_2 - середина этого ребра. Считая ребро куба равным а, найдите расстояние между прямой $p = B_1C_1$ и прямой $q = C_2A_2$.

2. В прямоугольном параллелепипеде ABCDEFGH ребра AB и AE равны а, ребро AD = 2·а. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми BH и DG.

3. Высота данной правильной пирамиды MABCD в два раза больше стороны ее основания. Точка C_1 - середина ребра MC. Считая AB = а, найдите расстояние между прямыми MA и D C_1 .

4. На ребрах AA_1, DD_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки A_2, D_2 и Q - середины этих ребер соответственно. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние между прямой $p = B_1A_2$ и прямой q, равной AC.

5. Боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ - квадраты. Считая AB = a, найдите расстояние между прямой $p = AB_1$ и прямой q, равной CC_1.

6. Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, длина ребра которого равна 1.

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1. Длина ребра куба равна 3.

8. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD (с вершиной S) длина каждого ребра равна 4. Точка K — середина ребра SA. Найдите расстояние между прямыми AD и BK.

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно $\sqrt{32}$, найдите расстояние между прямыми DB_1 и CC_1.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние между прямыми A_1B и A_1C, если ребро куба равно $\sqrt{6}$.

4. Методика работы с геометрической задачей с использованием среды Живая математика

Рассмотрим методику работы со стереометрической задачей на вычисление расстояния от точки до прямой (Приложение 1 Таблица 1).

На ребре BF куба ABCDEFGH взята точка P - середина этого ребра. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от точки E до прямой PD.

2.2. Методика компьютерного сопровождения решения стереометрических задач на вычисление углов в среде Живая математика

Проблеме обучения школьников стереометрии посвящены исследования многих специалистов в этой области (В.А. Смирнов, И.М. Смирнова, А.Н. Смоляков, И.Ф. Шарыгин и другие). Однако, несмотря на пристальное внимание к теории и практике преподавания геометрии в школе, стереометрические задачи, как показывают опросы обучающихся, учителей и результаты ЕГЭ, остаются для большинства старшеклассников наиболее сложными [18].

Как известно, в 10 классе начинается систематическое изучение стереометрии, которая отличается от планиметрии не только содержанием, но и восприятием геометрического материала [19]. Далеко не все школьники способны представить себе бесконечную протяжённость геометрических объектов, таких например, как прямая и плоскость. Слабое пространственное воображение не всегда позволяет учащимся увидеть на чертеже, даже если этот чертёж – полный, две скрещивающиеся прямые [35]. Всё это создаёт проблемы при решении стереометрических задач на вычисление углов, которые в большом количестве имеются в школьных учебниках, а также задания повышенной сложности единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Так, например, значительная доля заданий 14 ЕГЭ (в прошлом С2) приходится на стереометрические задачи, в которых необходимо найти, например, угол (или тригонометрическую функцию угла) между скрещивающимися прямыми. Прямые обычно задаются двумя точками, лежащими на ребрах того или иного многогранника.

При решении таких задач, во-первых, необходимо построить изображение этого угла и, во-вторых, найти его величину. Чтобы изобразить искомый угол, необходимо выполнить дополнительные построения, часто совсем не очевидные. Чтобы вычислить величину угла или его тригонометрическую функцию, требуется рассмотреть какой-нибудь треугольник, одним из углов которого является искомый угол, затем вычислить в этом треугольнике три элемента, задающие его. Следовательно, становится понятно, что решение задач на вычисление углов в пространстве может оказаться сложным и недоступным для большинства выпускников. Для каждого конкретного случая нужны свои построения и приёмы решения.

Таким образом, сложились определенные предпосылки для научно-методической разработки упрощённых приемов, формирующих в процессе самостоятельной познавательной деятельности готовность учащихся к усвоению более глубоких знаний и навыков, и они могли бы лечь в основу формирования простых алгоритмов решения стереометрических задач.

1. Типология стереометрических задач на вычисление углов между объектами в пространстве и алгоритмы их решения

В данном параграфе мы рассмотрим методику обучения задачам на нахождение углов между объектами в пространстве.

Такие задачи принято делить на 4 типа:

1. угол между скрещивающимися прямыми.
2. угол между прямой и плоскостью.
3. угол между двумя плоскостями.
4. двугранный угол.

Рассмотрим каждый тип отдельно.

1. Углом между двумя скрещивающимися прямыми (p и q) называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными этим скрещивающимся прямым.

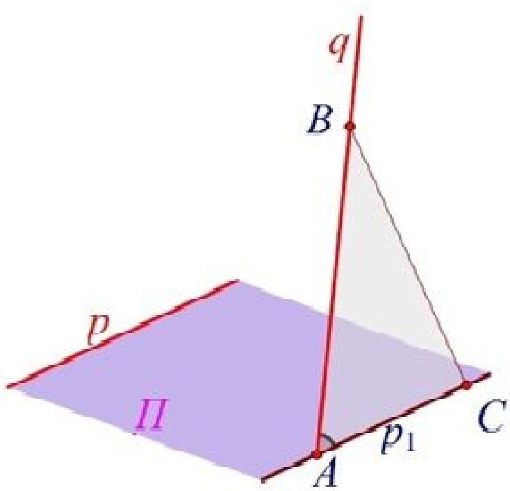


Рис. 23

Для нахождения угла между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве необходимо осуществить перенос одной из скрещивающихся прямых (или сразу двух) так, чтобы прямые, полученные в результате этого преобразования, пересекались. Тем самым исходная задача сводится к нахождению угла между двумя прямыми на плоскости (рис. 23).

2. Углом между прямой р и плоскостью П называется угол между прямой р и ее проекцией на плоскость П. Если прямая р перпендикулярна к плоскости П, то угол между прямой р и плоскостью П считается равным 90°. Если прямая р параллельна плоскости П, то угол между ними считается равным 0° (рис. 24).

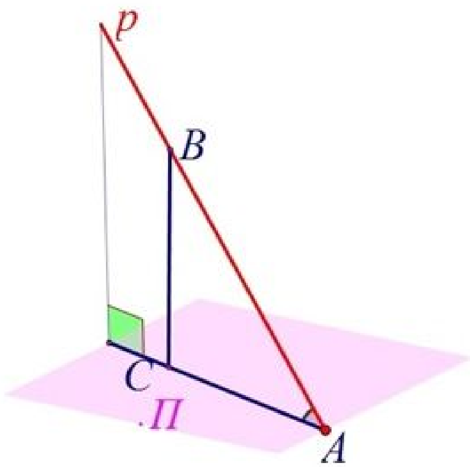


Рис. 24

При вычислении угла между прямой и плоскостью можно руководствоваться следующим планом:

1) построить искомый угол как угол прямоугольного треугольника (при необходимости данную прямую можно заменить на любую параллельную ей прямую);
2) найти две стороны полученного прямоугольного треугольника;
3) найти какую-нибудь из тригонометрических функций искомого угла и далее сам этот угол.

В случае, если вспомогательный треугольник АВС не является прямоугольным, то можно найти все его стороны и воспользоваться теоремой косинуса.

4. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, образующимися при пересечении этих плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной к линии пересечения первых двух плоскостей. Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным 0° (рис. 25).

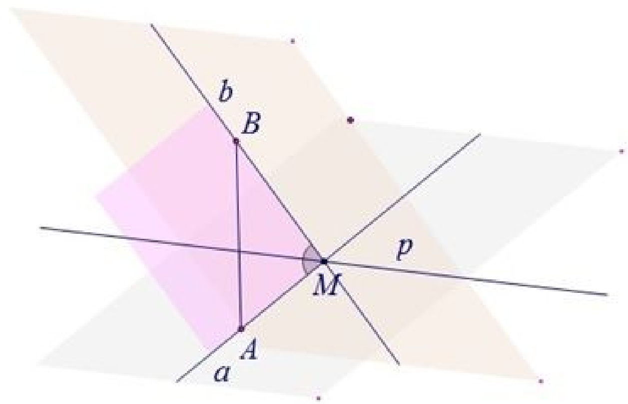


Рис. 25

При вычислении угла между плоскостями можно руководствоваться следующим планом:

1) построить прямую p – линию пересечения плоскостей.

2) выбрать на p точку M и провести в заданных плоскостях прямые a и b, перпендикулярные p и проходящие через M.

3) выбрать на прямых a и b соответственно точки A и B, получим треугольник ABM.

4) найти cos AMB и, воспользовавшись формулой для вычисления угла φ между прямыми, найти cos(φ) = |cosAMB|, затем угол φ между плоскостями.

5. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, не принадлежащими одной плоскости, с общей ограничивающей их прямой. Эта прямая называется ребром двугранного угла, а полуплоскости - его гранями.

Угол, который получается в сечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к его ребру, называется линейным углом этого двугранного угла (угол между лучами, а не прямыми). За меру двугранного угла принимают меру его линейного угла. Радианной (градусной) мерой двугранного угла называется радианная (градусная) мера его линейного угла (рис. 26).

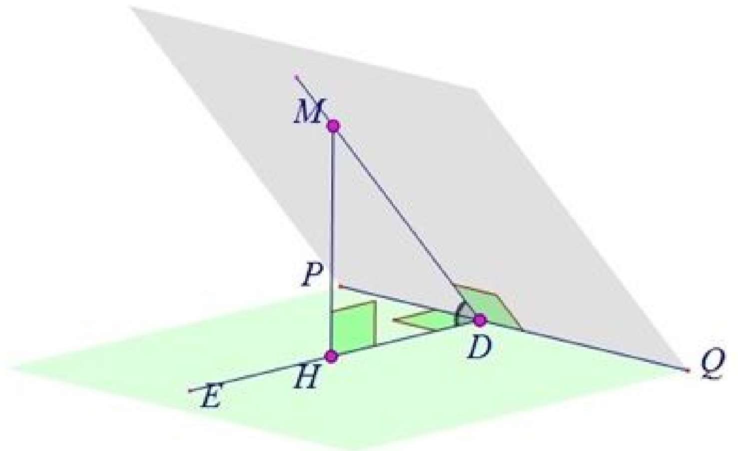


Рис. 26

2. Пример решения задачи на вычисление угла в пространстве с использованием динамической среды Живая математика

Задача. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат ABCD, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и в два раза больше стороны основания. Точка E - середина ребра MC. Найдите угол, который образует прямая AC с прямой DE [41].

Замечание. С помощью Живой математики построить такую пирамиду не сложно. Ее легко получить из куба, у которого необходимо увеличить одно вертикальное ребро в 2 раза, конец M этого ребра (рис. 27) соединить отрезками с вершинами основания ABCD, все остальные рёбра куба спрятать.

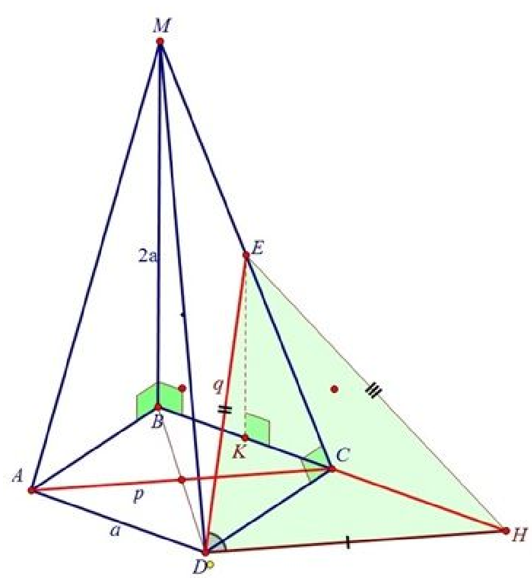


Рис. 27

Решение. Считая сторону основания равной а, получим боковое ребро, равное 2а. Как отмечалось выше для того, чтобы найти угол между скрещивающимися прямыми, необходимо осуществить перенос одной из скрещивающихся прямых (или сразу двух) так, чтобы прямые, полученные в результате этого преобразования, пересекались. Перенесем АС и получим DH. Живая Математика позволяет осуществить параллельный перенос достаточно быстро и просто, нужно только задать вектор, на который будет осуществляться перенос, точку и сам отрезок, который нужно перенести. Теперь нам уже нужно найти угол между двумя пересекающимися прямыми (∠EDH). Построим отрезок EH и получим треугольник, в котором необходимо найти искомый угол. Рассмотрим полученный треугольник DEH. Найдем сторону DH, для этого воспользуемся теоремой Пифагора. Т. к. DH = AC ($\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{a}^2} = \mathrm{a}\sqrt{2}$, то $\mathrm{DH} = \mathrm{a}\sqrt{2}$. Для того, чтобы найти сторону EK, из точки E опустим перпендикуляр к стороне BC и получим точку K. Рассмотрим треугольник EKH (∠K=90°) и также воспользуемся теоремой Пифагора:

$\mathrm{EH}^2 = \mathrm{EK}^2 + \mathrm{KH}^2 = \mathrm{a}^2 + (\frac{3\mathrm{a}}{2})^2 = \frac{\mathrm{a}\sqrt{13}}{2}$, $\mathrm{EH} = \frac{\mathrm{a}\sqrt{13}}{2}$. Для того, чтобы найти сторону DE, рассмотрим треугольник DEC (∠C=90°), необходимо найти сторону CE.

CE = MC:2 (т. к. E — середина MC). Отсюда $\mathrm{CE}^2 = (\frac{\mathrm{MC}}{2})^2 = \frac{4\mathrm{a}^2+\mathrm{a}^2}{4} = \frac{\mathrm{a}\sqrt{5}}{2}$,

$\mathrm{CE} = \frac{\mathrm{a}\sqrt{5}}{2}$. Воспользуемся теоремой косинусов:

$EH^2 = DH^2 + DE^2 - 2DH \cdot DE \cdot cosD$, отсюда, $\cos\mathrm{D} = \frac{\mathrm{DH}^2+\mathrm{DE}^2-\mathrm{HE}^2}{2\mathrm{DH}\cdot\mathrm{DE}} = \frac{2\mathrm{a}^2+\frac{9\mathrm{a}^2}{4}-\frac{13\mathrm{a}^2}{4}}{3\mathrm{a}^2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Тогда ∠HDE = $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{6})$. Воспользуемся вычислительными возможностями среды Живая математика и вычислим $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{6})$.

$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) \approx 76{,}37°$.

Ответ: ∠HDE = $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) \approx 76{,}37°$.

Обучающиеся могут самостоятельно выполнить проверку найденного решения. Для этого рекомендуется использовать возможности динамической среды Живая математика.

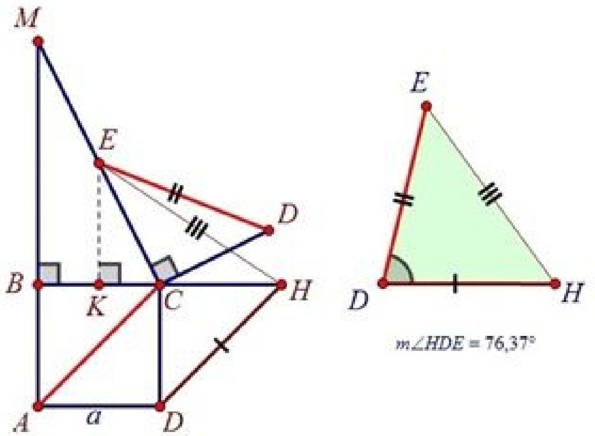


Рис. 28

1. изобразим произвольный отрезок a, который обозначим AD (рис. 28).

2. достроим отрезок AD до квадрата ABCD, на стороне BC как на катете построим прямоугольный треугольник BCM, BM=2a, найдём середину E гипотенузы CM.

3. построим прямоугольные равнобедренные треугольники DCH и ECD, построим отрезок EH.

4. построим треугольник HDE по его заданным сторонам DH, DE и EH.

5. используя меню «Измерения» вычислим угол B. Получим 76,37°.

Следовательно, задача решена верно.

Таким образом, мы видим, что Живая математика позволяет не просто выполнить красивый и грамотный чертеж, но и производить сложные вычислительные операции, а также выполнять проверку. Немаловажным преимуществом, при решении такого рода задач, является именно ее динамичность. Посмотрев на чертеж с разных сторон, можно гораздо быстрее осознать идею решения или найти наиболее «удобное» решение.

3. Комплекс стереометрических задач на вычисление углов между объектами в пространстве

1. Угол между скрещивающимися прямыми

1. Найдите угол между прямыми B'C и C'D, проведенными в кубе ABCDA'B'C'D'.

2. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат ABCD, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и в два раза больше стороны основания. Найдите угол, который образует прямая AC с прямой MD [36].

3. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка M - середина ребра SB. Найдите угол между прямыми CM и SO, где O - центр основания пирамиды [32].

4. В правильном тетраэдре ABCD точка K - середина BD, точка M - середина BC. Найдите угол между прямыми AK и DM.

5. Точки D, E и C' середины соответственно рёбер AB, AC и MC правильной пирамиды MABC, боковое ребро которой равно стороне основания. Найдите угол между прямыми C'D и ME [31].

6. В треугольной пирамиде ABCD все ребра имеют одинаковую длину. Точка M - середина ребра AD, точка O - центр треугольника ABC, точка N - середина ребра AB и точка K - середина ребра CD. Найдите угол между прямыми MO и KN [31].

7. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD.

8. На ребре $\mathrm{CC_1}$ куба $\mathrm{ABCDA_1B_1AC_1AD_1}$ отмечена точка E так, что $\mathrm{CE:EC_1} = 2:1$. Найдите угол между прямыми BE и $\mathrm{AC_1}$.

9. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды PABCD равны между собой. Найдите угол между прямыми PH и BM, если отрезок PH - высота данной пирамиды, точка M - середина ее бокового ребра AP.

10. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды SABC равно 10, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{17}{25}$. Точка M - середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

2. Угол между прямой и плоскостью

1. Найдите угол между прямой A'P и плоскостью CDD', заданными вершинами куба ABCDA'B'C'D', где P - середина ребра CD.

2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, AB = AC = 5, BC = 8. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

3. Боковое ребро правильной треугольной призмы ABCA'B'C' в два раза меньше стороны ее основания. Точка P - середина ребра AC. Найдите угол между плоскостью BC'P и прямой CC' [30].

4. В правильной шестиугольной призме ABCDEFA'B'C'D'E'F' все ребра равны 1. Найдите угол между прямой AC' и плоскостью ACD'.

5. Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды PABCD с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP, если точка M - середина бокового ребра пирамиды AP.

6. Отношение бокового ребра правильной пирамиды MABCD к стороне ее основания равно $\sqrt{5}: 2$. Найдите угол между плоскостью MBC и прямой CD.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны AB = 2, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

8. В правильном тетраэдре ABCD найдите угол между медианой BM грани ABD и плоскостью BCD.

9. В правильной треугольной пирамиде SABC с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}$, SC = 25. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

10. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF точка M - середина ребра. Найти угол между прямой FM и плоскостью основания, если SE = 3FE.

3. Угол между двумя плоскостями

1. Все ребра правильной треугольной призмы ABCDEF имеют длину 6. Точки M и N – середины ребер AB и DF соответственно. а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны. б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABE.

2. Боковое ребро правильной пирамиды MABCD равно стороне ее основания. Найдите угол между плоскостями MAB и MBC.

3. В кубе $ABCDA_1B_1AC_1AD_1$ найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1. Точка C_2 - середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями BDC_2 и B_1BD.

4. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что AM = 8. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 8$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

5. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. Точки P и C_2 - середины ребер AC и CC_1 соответственно. Найдите угол между плоскостями BPC_2 и A_1BP.

6. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник с прямым углом при вершине C и $AC = BC = CC_1$. Точки P и Q - середины ребер AB и AC соответственно. Найдите угол между плоскостями A_1PQ и B_2PQ, где B_2 - середина ребра BB_1.

7. На ребрах MB и MC правильной пирамиды MABC взяты точки B_1 и C_1 соответственно - середины этих ребер. Считая боковое ребро пирамиды равным стороне ее основания, найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и ABC.

8. Дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M и N - середины ребер AB и BC соответственно, точка K - середина MN. а) Докажите, что прямые KD_1 и MN перпендикулярны. б) Найдите угол между плоскостями MND_1 и ABC, если AB = 8, $AA_1 = 6\sqrt{2}$.

9. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 6. Через середины рёбер AC и BB_1 и вершину A_1 проведена секущая плоскость. а) Докажите, что ребро BC делится секущей плоскостью в отношении 2:1, считая от вершины C. б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

4. Двугранный угол

1. Докажите, что если все ребра тетраэдра равны, то все его двугранные углы также равны. Найдите эти углы [42].

2. Найдите двугранный угол ABCD тетраэдра ABCD, если углы DAB, DAC и ACB прямые, AC = CB = 5, $DB = 5\sqrt{5}$ [51] .

3. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат с центром в точке O_1. Основанием высоты этой пирамиды является точка O, симметричная точке O_1 относительно прямой AB. Считая высоту пирамиды равной стороне ее основания, найдите двугранный угол $MCDO_1$.

4. Отношение рёбер $AB : AD : AA_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1:2:1. Найдите двугранный угол $A_1AB_1D_1$.

5. В правильной треугольной пирамиде SABC с основанием ABC точки K и F - середины ребер SB и SC соответственно. Сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{3}$, боковое ребро равно $\sqrt{79}$. Найдите угол между плоскостью AKF и плоскостью основания пирамиды.

6. Грань ABCD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом со стороной 3, а пространственная диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{21}$. Найдите угол между плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ и плоскостью ADC_1.

7. В правильной треугольной пирамиде ABCD сторона основания равна боковому ребру. Точка M делит ребро DC пополам, K- середина BC. Найдите синус угла между плоскостью AKM и плоскостью ABC.

8. Ребро PC тетраэдра PABC перпендикулярно плоскости ABC; AB = BC = CA = 6 см, BP = 3 см. а) Найдите двугранный угол PABC. б) Постройте двугранный угол PACB.

9. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD высота SO равна 15, диагональ основания BD равна 10. Точки M и N - середины ребер BC и CD соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMN и плоскостью ABC.

10. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ - равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90°$). Двугранный угол $C_1ABC = 60°$. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью A_1BC, если $AC = 4\sqrt{2}$.

4. Методика работы с геометрической задачей с использованием среды Живая математика

Рассмотрим методику работы со стереометрической задачей на вычисление углов между объектами в пространстве на примере одной из задач из представленного выше комплекса (Приложение 1 Таблица 2).

Задача 1. Найдите угол между прямой A'P и плоскостью CDD', заданными вершинами куба ABCDA'B'C'D', где P - середина ребра CD.

2.3. Элективный курс для 10 класса «Готовимся к ЕГЭ с Живой математикой», его апробация

Программа элективного курса **«Готовимся к ЕГЭ с Живой математикой»** для обучающихся 10-11 классов математического профиля

студентов группы 41

Черкасовой А. Д., Прядковой Н. А.

Направление подготовки : *44.03.01. Педагогическое образование*

Профиль: *«Математика»*

Красноярск 2018

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа элективного курса «Готовимся к ЕГЭ с Живой математикой» предназначена для обучающихся 10-11 профильных классов. Она направлена на углубление и обобщение знаний и умений обучающихся по решению стереометрических задач. Для её реализации достаточно знаний и умений по геометрии, полученных в основной школе, а также базовые знания возможностей динамической среды Живая Математика.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями: математика является профилирующим предметом на вступительных экзаменах в вузы по широкому спектру специальностей. В старших классах углубление основного курса выполняет функции подготовки к продолжению образования и к сдаче экзамена по математике в форме ЕГЭ. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения стереометрических задач, развивающих научно – теоретическое и алгоритмическое мышление обучающихся.

Предметом данного элективного курса является достаточно сложный раздел школьного курса математики – стереометрия, в частности, решение задач на нахождение расстояний и углов между объектами в пространстве. Как показывает практика, задачи такого типа вызывают наибольшие затруднения у обучающихся при сдаче ЕГЭ по математике.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

итоги ежегодного ЕГЭ показывают, что обучающиеся плохо справляются с этими заданиями или вообще не приступают к ним. Можно выделить следующие недостатки в подготовке выпускников: формальное усвоение теоретического содержания курса геометрии, неумение использовать изученный материал в ситуации, которая отличается от стандартной. Для успешного выполнения этих заданий необходимы прочные знания основных геометрических фактов и опыт в решении геометрических задач. При изучении математики в старших классах на профильном уровне необходимы систематизация знаний, полученных учащимися в основной школе, выделение общих методов и приемов решения геометрических задач, демонстрация техники решения геометрических задач, закрепление навыков решения геометрических задач. В связи с этим необходимо делать акцент не только на овладение теоретическими фактами, но и на развитие умений решать геометрические задачи разного уровня сложности и математически грамотно их записывать, а также уметь выполнить проверку полученного решения. Проверку решения стереометрической задачи достаточно сложно выполнить на листе бумаги, чего нельзя сказать о Живой математике, которая позволяет проверить правильность найденного решения за считанные минуты.

Цель элективного курса состоит в формировании практических навыков решения стереометрических задач на вычисление расстояний и углов между объектами в пространстве; развития логического аппарата обучающихся для дальнейшего осознанного и обоснованного решения задач.

Задачи программы элективного курса:

- формирование у обучающихся верного и наглядного изображения пространственных фигур;

- развитие пространственного воображения, умения представлять геометрический объект;

- формирование умений корректно аргументировать утверждения, возникающие по ходу решения геометрической задачи;

- совершенствование навыков решения задач;

- развитие мыслительных, творческих способностей обучающихся;

- знакомство учащихся с элементами исследовательской деятельности.

Отличительные особенности данного элективного курса:

- компьютерное сопровождение решения всех задач и формирование навыков выполнения проверки правильности решения в среде Живая математика.

- тематика задач, предлагаемых при изучении данного элективного курса, выходит за рамки основного курса, и уровень сложности некоторых из них – повышенный.

Новизна программы состоит в том, что значительное место отведено решению задач, отвечающих требованиям ЕГЭ и повышенной сложности. Содержание данной программы представлено несколькими разделами. Особое внимание в программе уделяется умению «видеть» и находить расстояния и углы между объектами в различных геометрических комбинациях. Элективный курс «Готовимся к ЕГЭ с Живой математикой» позволяет самостоятельно ориентироваться не только в поиске решения проблемных ситуаций, но и переносить приобретенные знания, умения и навыки к поисково-исследовательской деятельности в работе над задачами.

Программа элективного курса рассчитана на 36 (2 ч. в неделю) часа.

Форма занятия: групповая и индивидуальная.

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности:

В результате изучения программы данного элективного курса обучающиеся должны:

- уметь правильно анализировать условия задач;

- уметь выполнять грамотный чертеж к задаче как на бумаге, так и в Живой Математике;

- уметь исследовать поставленную задачу;

- уметь логически правильно строить свои рассуждения;

- уметь решать геометрические задачи различными способами;

- уметь применять полученные знания при решении задач;

- уметь выполнить проверку полученного решения в среде Живая математика.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

- зачеты, самостоятельные и исследовательские работы.

Данная программа может быть использована в классах с углубленным или профильным изучением математики.

УЧЕБНО - ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№ раздела	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
Раздел 1. **Обобщение курса планиметрии**	1. Задачи, решаемые методом площадей. 2. Задачи на подобие треугольников и пропорциональные отрезки. 3. Задачи, требующие дополнительного построения. 4. Задачи с окружностями. 5. Задачи на применение теоремы Менелая, Чевы и Стюарта.	10 ч	Лекция Практикум Работа в группах
Раздел 2. **Расстояния между объектами в пространстве**	1. Аксиомы стереометрии и следствия из нее. 2. Параллельность в пространстве. 3. Задачи на нахождение расстояния между двумя точками. 4. Нахождение расстояние от точки до прямой. 5. Расстояние от точки до плоскости. 6. Расстояние между скрещивающимися прямыми.	14ч	Лекция Практикум Работа в парах Практическая работа на ПК Самостоятельное изучение

Раздел 3. **Углы между объектами в пространстве**	1. Угол между скрещивающимися прямыми. 2. Угол между прямой и плоскостью. 3. Угол между двумя плоскостями. 4. Двугранный угол. 5.	12 ч	Фронтальный опрос Самостоятельная работа Самоконтроль Тест Работа на ПК с ЦОР

СОДЕРЖАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

Раздел 1. **Обобщение курса планиметрии**

Решение опорных задач планиметрии.

Основная цель — повторение с обучающимися основных свойств многоугольников, теорем, помогающих решать необходимые задачи.

Многоугольники; основные свойства медиан, биссектрис, высот в равнобедренных, равносторонних, прямоугольных треугольниках; формулы площадей многоугольников; вписанные и описанные многоугольники и окружности; теоремы о касательной к окружности, о четырёхугольниках и окружностях; решение задач.

В результате изучения данного раздела обучающиеся должны аргументировать утверждения при решении задач, правильно пользоваться определениями и свойствами фигур. Обучающиеся должны знать и при необходимости использовать специальные свойства многоугольников.

Задания для самостоятельной работы:

1. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен трети одной из его высот. а) Докажите, что одна из сторон треугольника ABC равна среднему арифметическому двух других его сторон. б) Найдите наибольшее возможное значение периметра такого треугольника, если одна из его сторон равна 4, а две другие имеют целые длины.

2. Дана трапеция ABCD, ее основания BC и AD равны 2 и 6 соответственно. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O. Точка P – середина

OD. Площадь треугольника AOB=9. Найдите площадь четырехугольника ABCP [20].

3. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетами AC=6 и BC=8 вписана прямоугольная трапеция MNKB так, что MN=CK, точки N и K лежат на катетах AC и BC соответственно, а меньшее основание параллельно гипотенузе. Найдите площадь трапеции.

4. BB_1и CC_1– биссектрисы углов B и C соответственно треугольника ABC. На продолжениях сторон AB и AC взяты точки M и L так, что BM=BC=CL. Доказать, что ML‖B_1C_1

5. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EB. На продолжении AE за точку E взята точка D так что ED=CE. а) Докажите, что CD‖AB. б) Найдите ∠ABC, если AB=2·AC.

6. Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60∘, а точка пересечения высот делит одну из них в отношении 2:1, считая от вершины треугольника. а) Докажите, что этот треугольник равнобедренный. б) Пусть R – радиус описанной около ABC окружности, r – радиус вписанной в ABC окружности. Найдите R−r, если AB=9.

7. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину C прямого угла треугольника ABC, основание H высоты CH и точку K — середину катета BC, если гипотенуза треугольника равна c.

8. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Раздел 2. **Расстояния между объектами в пространстве**

Решение задач ЕГЭ на нахождение расстояний и объектов в пространстве.

Прямая; Плоскость; Теоремы; Перпендикуляр; Расстояние между двумя точками; расстояние от точки до прямой; Расстояние от точки до плоскости; Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Цель- углубление знаний раздела Стереометрия темы «Нахождение расстояний между объектами в среде Живая математика».

В данном информативном, практическом разделе обучающиеся должны уметь находить: расстояния между двумя точками, расстояние от точки до прямой, расстояние от точки до плоскости, расстояние между скрещивающимися прямыми и выполнять все построения в среде «Живая математика» с проверкой.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$равна 1. Найдите расстояние: а) от точки B до прямой A_1C_1; б) от точки A до прямой BD_1.

2. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит трапеция с основаниями AD = 3, BC = 1 и боковыми сторонами AB = CD = 2. Боковое ребро призмы равно 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD (с вершиной S) сторона основания равна 2 и высота равна 1. Найдите расстояние от точки D до плоскости BCS [28].

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: AB = 1, AD = √ 3, AA_1 = √ 6. Найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD (с вершиной S) сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2 √ 3. Найдите расстояние от точки C до плоскости ABM, где M — середина ребра SC.

6. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб ABCD с углом при вершине A, равным 30◦. Все рёбра призмы равны 2. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1

7. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S. Через точку пересечения диагоналей основания провели плоскость α перпендикулярно ребру SA. Найдите расстояние от точки N до плоскости α, если N – середина AD=2корнь из2, а высота пирамиды равна 11.

8. ABCD– правильный тетраэдр с ребром 6. M, N, K – такие точки на ребрах AB, AD, CD соответственно, что AM=MB, DN=2NA=CK. Плоскость MNK пересекает ребро BC в точке P. Найдите расстояние от точки P до плоскости ACD.

Раздел 3. **Углы между объектами в пространстве**

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя скрещивающимися прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Угол между двумя плоскостями. Двугранный угол.

Основная цель — углубить знания нахождения углов между двумя скрещивающимися прямыми; между прямой и плоскостью; между двумя плоскостями и двугранных углов. Формировать умения «видеть» и вычислять углы в пространстве, используя многогранники и многоугольники, расположенные в пространстве; решать задачи метрического характера на нахождение расстояний, углов, площадей, используя куб, правильную пирамиду, правильный тетраэдр, параллелепипед, корректно аргументируя каждый шаг построения изображения, доказательной и вычислительной частей решения задачи и сопровождать все решения задач динамическими чертежами в среде Живая математика.

В результате изучения данного раздела обучающиеся должны вычислять углы: между двумя скрещивающимися прямыми [5]; между прямой и плоскостью; между двумя плоскостями; двугранные углы, выполнять компьютерные динамические чертежи решаемых задач, а также осуществлять проверку решения.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Найдите угол между прямыми B'C и C'D, проведенными в кубе ABCDA'B'C'D'.

2. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD.

3. В правильной шестиугольной призме ABCDEFA'B'C'D'E'F' все ребра равны 1. Найдите угол между прямой AC' и плоскостью ACD' [6].

4. В правильном тетраэдре ABCD найдите угол между медианой BM грани ABD и плоскостью BCD.

5. В кубе ABCDA'B'C'D' найдите угол между плоскостями ADD' и CDD'.

6. Все ребра правильной треугольной призмы ABCDEF имеют длину 6. Точки M и N – середины ребер AB и DF соответственно. а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны. б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABE.

7. Докажите, что если все ребра тетраэдра равны, то все его двугранные углы также равны. Найдите эти углы.

8. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD высота SO равна 15, диагональ основания BD равна 10. Точки M и N — середины ребер BC и CD соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMN и плоскостью ABC.

Литература:

1. ЕГЭ 2013. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2013. – 55 с.
2. ЕГЭ – 2013: Математика: самое полное издание типовых вариантов /авт.-сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий; под ред. А.Л.
3. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2013. – 111 с. – (Федеральный институт педагогических измерений).
4. ЕГЭ-2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов/под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2012. – 192 с. – (ЕГЭ-2013. ФИПИ– школе).
5. Школково/ Подготовка к ЕГЭ по математике. [Электронный ресурс] // URL: https://shkolkovo.net
6. Яковлев И.В. Материалы по математике/ Стереометрия на ЕГЭ по математике. [Электронный ресурс] // URL: http://mathus.ru/math/sm.pdf

Экспериментальная проверка эффективности использования среды Живая математика в обучении решению стереометрических задач

Опытно-экспериментальная часть исследования проводилась на базе МБОУ Лицей № 12 города Красноярска в 10 «А» классе. Класс состоит из 26 человек (10 мальчиков и 16 девочек). Класс непрофильный, успеваемость на среднем уровне: 3 отличника, 20 хорошистов, 3-ое неуспевающих. Математикой интересуются в различной степени 9–10 обучающихся. В целом класс дружный, в основном ребята серьёзные, организованные. За основу испытуемых было взято 7 человек. Это желающие повысить свои знания по изучаемому курсу и для подготовки к ЕГЭ. Занятия проводились 2 раза в неделю по расписанию после всех уроков (понедельник и четверг). В школе имеется мобильный класс, в котором находится 8 ноутбуков. Поэтому занятия проводились именно там.

Занятия проводились во время педагогической практики в феврале. Используя собственный разработанный нами курс и средства «Живой математики» мы провели 6 комплексных уроков из курса.

У заинтересованных ребят, в составе и 7 человек, из выбранного класса, достаточно высокий уровень знаний и умений по стереометрии, но низкий уровень заинтересованности. Поэтому для достижения высоких результатов в этой области и для безупречных результатов на ЕГЭ мы попытались привлечь ребят решать задачи не только в традиционной форме, как это было с остальной частью класса из 19 обучающихся, а с помощью среды «Живая математика». Проведя первые 2 урока и продемонстрировав возможности данной среды на примере визуалиции и анимации, ребята с удовольствием захотели создать подобные чертежи. Проведя последующие 6 уроков по разработанной нами методике можно сказать однозначно, что результаты по решению задач достигнуты выше, нежели в остальной части класса.

Анализируя результаты усвоения темы «Нахождение расстояний между объектами в пространстве от точки до прямой» мы пришли к выводу, что большинство обучающихся усвоили пройденную тему.

В качестве контрольного средства выступил следующий тест [50].

1) Точка К делит хорду АР на отрезки 12 см и 14 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до точки К равно 11 см.

а) 23 см; в) 17 см; с) 11 см; д) 13 см; е) 19 см.

2) Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Каково взаимное расположение плоскостей α и β [28]?

а) определить нельзя; б) они совпадают; в) имеют только одну общую точку; г) не пересекаются; д) пересекаются по некоторой прямой.

3) Назовите общую прямую плоскостей AFD и DEF.

а) AD; б) DE; с) определить нельзя; д) DF; д) AF.

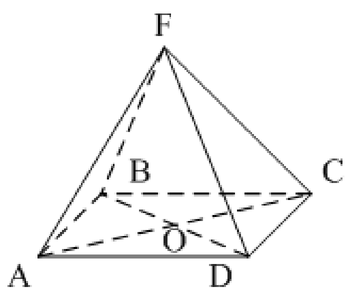
4) Через вершину *A* параллелограмма *ABCD* и точку *M,* не лежащую в плоскости параллелограмма, проведена прямая *AM*. Чему равен угол между прямыми *AM* и *BC*, если угол *MAD* равен 120˚ [29]?

а) Определить нельзя; б) 120˚; с) 30˚; д) 60˚; е) 150˚.

5) Найдите косинус угла между плоскостями квадрата ABCD и равностороннего треугольника ABM, если диагональ квадрата равна $4\sqrt{2}$ см и расстояние от точки M до стороны DC равно 5 см [43].

а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{16}$; с) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

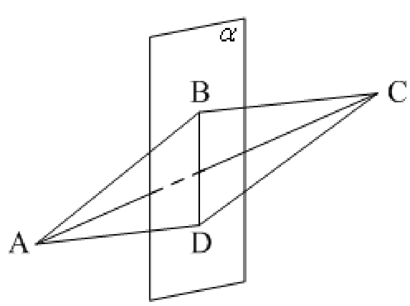
6) *ABCD* – параллелограмм. $F \notin (ABC)$. Плоскости (*AFC*) и (*BFD*) пересекаются по прямой…



7) Точка F не лежит в плоскости параллелограмма ABCD, M – середина DF, N – середина BF. Тогда прямые AM и CN…

а) скрещиваются; б) пересекаются; с) параллельны.

8) ABCD – параллелограмм, $BD \in \alpha$, AC перпендикулярна α. Тогда ABCD не может быть… [9]



а) прямоугольником; б) квадратом; с) ромбом.

9) Количество двугранных углов параллелепипеда <u>равно</u>…

а) 8; б) 12; с) 24.

10) . Какое утверждение верное?

а) Не может ребро двугранного угла быть не перпендикулярным любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла.

б) Не могут быть две плоскости, перпендикулярные третьей, непараллельными.

с) Не могут быть две плоскости, перпендикулярные одной плоскости, непараллельными.

Всего в тесте приведено 10 вопросов как теоретических, так и практических. Результаты тестирования представлены на диаграмме ниже (рис. 29) [27] .

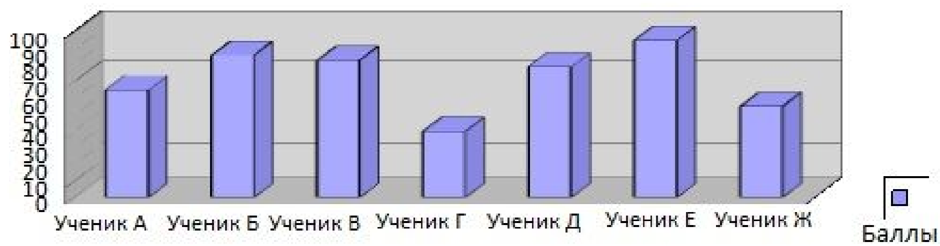


Рис. 29

Анализируя проведенные уроки в целом мы пришли к выводу, что использование современных технических средств положительно влияет на ребят. Им интересно узнавать что-то новое, самим создавать четкие чертежи, правильно решать и проверять задачи. Ведь ребята, в основном, всегда работали в традиционной форме и никогда не сталкивались с «Живой Математикой». Хочется отметить, что наблюдался прогресс в построении чертежей и в данной программе в целом. Исключительно все дети были заинтересованы работой на уроке. Конечно, немного шумная обстановка так же имела быть место, ведь данный вид работы предполагает это, как и проведение лабораторной работы традиционным способом.

Также мы провели контрольную работу в форме практических задач у ребят, которые посещали элективный курс (рис. 31) и которые не посещали его (рис. 30).

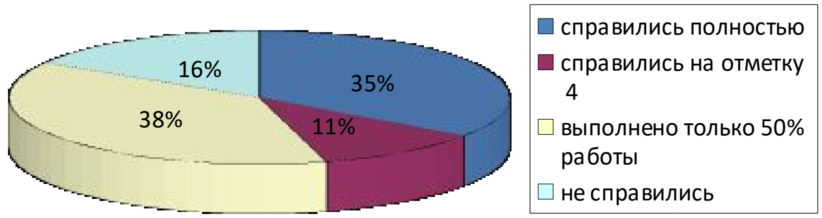


Рис. 30- результаты контрольной работы обучающихся, не посещавших элективный курс

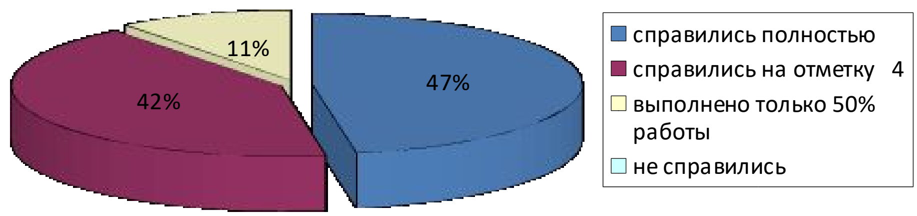


Рис. 31- результаты контрольной работы обучающихся, посещавших элективный курс

Стоит отметить, что для полного использования среды Живая математика необходимо, чтобы был укомплектован весь класс технического оборудования для работы из большего количества обучающихся [10]. Необходимо, чтобы класс был оснащен компьютерами или ноутбуками, с целью доступа к ресурсу в любое необходимое время.

Во время прохождения педагогической практики мы активно использовали интерактивную доску, демонстрируя обучающимся все возможности среды Живая математика и другие технические среды для интересной работы на уроках.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ II

Изучая школьный курс математики 10 класса, а именно, раздел «Стереометрия», с использованием среды Живая математика можно смело утверждать, что возможности данного ресурса способствуют повышению качества математической подготовки обучающихся за счет реализации многогранных возможностей данного ресурса. Вообще говоря, многие ресурсы, представленные в Единой коллекции достойны признания со стороны учителей и обучающихся. Использовать в работе такой продукт, как Живая математика необходимо, ведь изучение предмета дополняется такими средствами, как визуализация, инструменты работы с математическими объектами и т. п., а наглядность материала, особенно при изучении геометрии это крайне важный показатель эффективности образования. Экспериментальная проверка дала понять, что у обучающихся повысился уровень математической подготовки заданий из ЕГЭ по теме «Решение стереометрических задач». После пройденного курса для 10 класса «Готовимся к ЕГЭ с Живой математикой» большинство обучающихся стали включаться в проектную и исследовательскую деятельности. Это позволяет сделать вывод о том, что современные технологии обучения помогают повысить качество математической подготовки обучающихся по конкретным темам, а тем более для безупречных результатов на Едином Государственном Экзамене.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На основе изучения школьных учебников по стереометрии выявлены темы и разделы, при обучении которым можно эффективно использовать систему динамической геометрии Живая математика.

2. Выявлены и описаны дидактические возможности динамической среды Живая математика при обучении решению стереометрических задач.

3. Во время прохождения педагогической практики ознакомились с опытом учителей лицея №12 и гимназии №14 города Красноярска по использованию среды Живая математика в геометрической подготовке школьников.

4. Разработано сопровождение тем курса стереометрии в 10 классе (20 GSP-файлов), связанное с обучением решению задач на вычисление расстояний и углов, с использованием среды Живая математика.

5. Разработан элективный курс, осуществлена экспериментальная проверка эффективности использования среды Живая математика в процессе обучения основному курсу геометрии и элективному курсу в 10 классе.

Таким образом, в ходе исследования все поставленные задачи решены, гипотеза подтверждена, цель достигнута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразоват. учреждений: профильное и углубленное изучение / М.: Просвещение, 2014. 255 с.

2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни /. М.: Просвещение, 2013. 255 с.

3. Безгодова О.С. Формирование и развитие ИКТ-компетентности при использовании образовательной среды «Живая математика» // Теория и практика образования в современном мире: материалы VI Междунар. науч. конф. СПб.: Заневская площадь, 2014. С. 177-179.

4. Белошистая, А.В. Задачи на построение в школьном курсе геометрии.// А.В. Белошистая /Математика в школе».-2002.- №9.-С.-25-27.

5. Бескин, Л. Н. Стереометрия [Текст]: кн. для учителя / М.: Просвещение, 1960.

6. Варшавский И.К., Гаиашвили М.Я., Глазков Ю.А. Стереометрия на едином государственном экзамене. Математика в школе. 2006. №4. С. 2.

7. Гатауллин А.М. Объектная визуализация в программе «Живая математика» // материалы Международной научно-практической конференции «Информационные технологии в образовании и науке - ИТОН 2012», Казань, 2012. С-47.

8. Гатауллин А.М., Гатауллина С.Р. Решение стереометрических и параметрических задач с помощью программы «Живая математика» // Научно-методический электронный журнал «Концепт», 2013. Т.3. С. 2456–2460. [Электронный ресурс] // URL: http://e-koncept.ru/2013/53494.htm (дата обращения: 14.12.2017).

9. Глаголев, Н.А. Сборник геометрических задач на построение/ Н.А. Глаголев //М, 1930.-С.67-45

10. Гусев В.А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы. М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2017. 458 с.

11. Гусев В.А., Орлов В.В., Панчищина В.А. и др. Методика обучения геометрии: учебник пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / М.: Издательский центр «Академия», 2004. 368 с.

12. Гусева В.А. Методика обучения геометрии [Текст]: учебное пособие для ВУЗов / М.: Академия, 2004

13. Дадаян А.А. Основы черчения и инженерной графики. Геометрические построения на плоскости и в пространстве. М.: Изд-во Форум, 2007. – 464 с.: ил.

14. Далингер, В.А. Методика обучения стереометрии посредством решения задач: учеб. пособие. М.: Юрайт, 2017. 370 с.

15. Дубровский В. Н. Стереометрия с компьютером // Стандарты и концепции. 2003. С. 3-11. URL: https://cyberleninka.ru/article/v/stereometriya-s-kompyuterom (дата обращения: 20.02.2018).

16. Дубровский В. Н., Поздняков С. Н. Динамическая геометрия в школе // Компьютерные инструменты в школе. 2008. № 1. С. 21-31. URL: http://bookfi.net/book/802825 (дата обращения: 10.03.2018).

17. Елизарова Н.Г. О расстоянии от точки до плоскости. Математика в школе. 2009. № 4. С. 67–73.

18. Иванова Т.А., Серова Н.А. Выпускная квалификационная работа по теории и методике обучения математике: Учебно-методическое пособие. Н. Новгород: НГПУ, 2006.

19. Козлова, В.В., Кондакова А.М. Фундаментальное ядро содержания общего образования: проект / М.: Просвещение, 2009, 48 с.

20. Костовский, А.Н. Геометрические построения одним циркулем,/ А.Н. Костовский //М.:Наука,1989.-С.205-213

21. Литвиненко В.Н., Батугина О.А. Геометрия. 10 класс. Готовимся к ЕГЭ: учеб. пособие /. М.: Просвещение, 2011. 158 с.

22. Маитуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин О.И., Федин Н.Г. Толковый словарь математических терминов. М.: Просвещение, 1965. 509 с.

23. Майер В.Р. Компьютерная поддержка курса геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Ч.2: Геометрия в пространстве. Красноярск: КГПУ, 1996. 128 с.

24. Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л.И. Математика. Все для ЕГЭ. Книга 1. Ростов на Дону: НИИ школьных технологий, 2011. 272 с.

25. Орлова А.О., Валитова С.Л. Особенности обучения математике по ФГОС второго поколения [Электронный ресурс] // URL: http://www.scienceforum.ru/2014/545/1632 (дата обращения: 5.12.2017).

26. Пантуев А.В.. Виртуальные лаборатории и активизация работы школьников. Сб. Стимулирование познавательной деятельности студентов и школьников, М: МГПУ, 2002. С. 30-33.

27. Перевощикова Е.Н., Поршнев А.В., Юхова А.В., Клюева Е.Ю. Современные средства оценивания результатов обучения: учебное пособие /: под ред. проф. Перевощиковой Е.Н. Н. Новгород: НГПУ, 2007. 175 с.

28. Перепелкин, Д.И. Геометрические построения в средней школе / Д.И. Перепелкин. // М.: Издательство академии педагогических наук РСФСР,1947.-С.-61-78

29. Погорелов А.В. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. общеобразовательных учреждений /– М.: Просвещение, 2004

30. Потоскуев Е.В. Решение задач по стереометрии. Практикум. Подготовка к ЕГЭ. М.: Илекса, 2012. 108 с.

31. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 класс: учебник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильн. изучением математики / М.: Дрофа, 2008. 223 с.

32. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.

33. Прохоров Ю. В. Большой энциклопедический словарь по математике. – М.: Науч. издат., 1998.

34. Прядкова Н.А. Черкасова А.Д. Компьютерный самоконтроль при решении задач на вычисление объемов тел// Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IV Всероссийской

научно- методической конференции с международным участием, Красноярск, 18-19 ноября 2015г. /В.Р.Майер(отв.ред.); ред. Кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П.Астафьева. –Красноярск, 2015.- 134 с.

35. Саакян С.М., В.Ф.Бутузов В.Ф. Методические рекомендации по геометрии [Текст]: кн. для учителя / – М.: Просвещение, 2004

36. Саакян, С. М. Примерное планирование учебного материала по математике в X-XI классах // Математика в школе. – 2005. – №7. – С. 2.

37. Савельева И.В. Среда «Живая геометрия» // Математика, 2010. №15. [Электронный ресурс] // URL: http://elcat.pnpu.edu.ua/docs/Caveleva.pdf (дата обращения: 3.11.2017).

38. Самылкина Н.Н., Седова Е.А. и др. Проблемы школьного математического образования глазами учителей и преподавателей вузов: результаты опросов // Математика в школе. 2017. № 2. С. 36-44.

39. Седова Е.А., Пчелинцев С.В., Мищенко Т.М. и др. Примерные программы среднего (полного) общего образования: математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 10-11 классы /; под общ. ред. Рыжакова М.В. М.: Вентана-Граф, 2012. 136 с.

40. Смирнов В.А. ЕГЭ 2011. Математика: под ред. Семенова А.Л. и Ященко И.В. М.: МЦНМО, 2011. 64 с.

41. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 класс: учебник для общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) Мнемозина, 2008. 288 с.

42. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Расстояния и углы в пространстве [Текст] / М.: Экзамен, 2009. 160 с.

43. Сычева, Е. И. Тесты по стереометрии // Математика в школе. – 2006. – №4. – С. 24.

44. Тумашева О.В., Берсенева О.В. Обучение математике с позиции системно-деятельностного подхода: монография; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноясрк, 2016. 280 с.

45. Увалиева С.К., Смагулова М.Г. О некоторых проблемах, возникающих при изучении фигур стереометрии // Международный журнал

экспериментального образования, 2015. № 5-1. С. 95-96. [Электронный ресурс] // URL: http://expeducation.ru/ru/article/view?id=7499 (дата обращения: 19.02.2018).

46. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс] // Министерство образования и науки РФ [Офиц. сайт]. 2013. URL: http://минобрнауки.рф/документы/2794 (дата обращения 20.10.17).

47. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования [Электронный ресурс] // Специализированная интернет-система организационно-методического сопровождения федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации образовательных программ. URL: http://www.fpu.edu.ru/ (дата обращения 26.01.2018).

48. Черняк А.А., Черняк Ж.А. Геометрия. 7-11 классы (ЕГЭ: шаг за шагом) / М.: Дрофа, 2011. 247 с.

49. Шабат Г. Б. Живая математика: Сборник методических материалов. М.: ИНТ. 176 с.

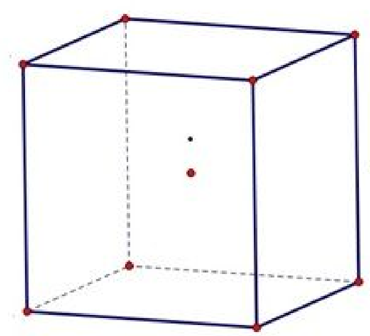
50. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие / М.: БИНОМ, 2012, 694 с.

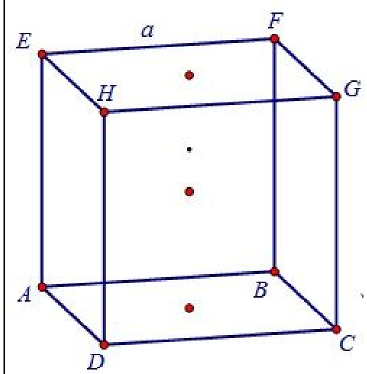
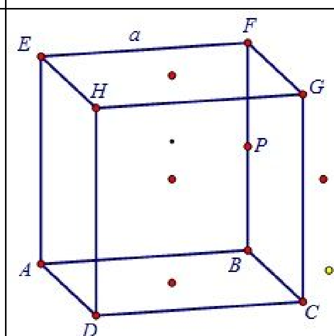
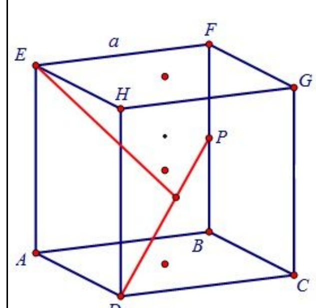
51. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (стереометрия). М.: Наука, 1984. — 160 с. (Библиотечка "Квант", Вып.31).

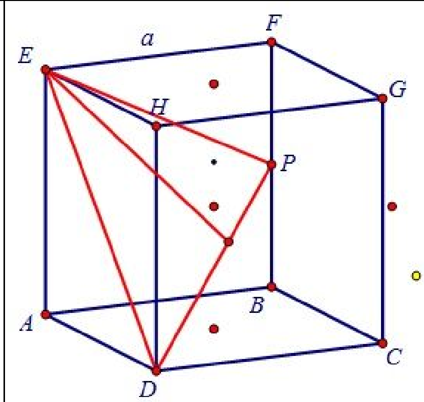
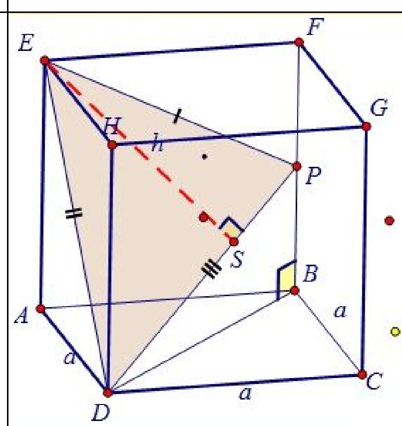
ПРИЛОЖЕНИЯ

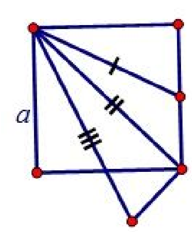
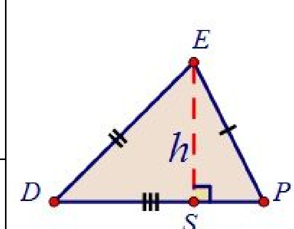
Приложение 1. Решение некоторых задач на вычисление расстояний между объектами в пространстве с использованием среды Живая математика.

Таблица 1.

Работа с условием задачи и анализ		
Учитель	Ученик	Доска
Какого типа задача?	На вычисление расстояния от точки до прямой	
О какой фигуре идет речь в задаче?	О кубе ABCDEFGH	
Что известно в задаче?	Ребро куба равно а	
Известны ли еще какие-то данные о кубе?	Да, что P – середина ребра BF	
Что требуется найти в задаче?	расстояние от точки E до прямой PD	
Что это за расстояние? Какого типа?	Нужно найти проекцию токи E и по теореме Пифагора посчитать все стороны треугольника и найти длину перпендикуляра ES	
А каким еще способом можно найти искомое расстояние?	Используя теорему косинусов.	
Верно. Данную задачу мы решим с использованием среды Живая Математика. Садимся за компьютеры, открывайте программу Живая Математика.	Садятся за компьютеры, открывают ЖМ	
Для того, чтобы провести анализ данной задачи изобразим куб. Сейчас мы не будем самостоятельно строить куб, а воспользуемся готовым инструментом. Для этого необходимо	Да	

удержать нижнюю кнопку в меню, которое находится слева и выбрать необходимый инструмент. Все построили?		
Обозначим его вершины, как указано в условии задачи ABCDEFGH, просто нажав на каждую из вершин соответственно. Известна ли нам длина ребра куба? Нажимаем слева на панели инструмент «Текст» и помечаем курсор мыши на ребро куба, изменяем имя на «а».	Ребро куба равно а	
Что еще нужно добавить в чертеж?	что Р – середина ребра BF	
Что нужно сделать, чтобы в Живой математике найти середину ребра? А как бы вы находили середину ребра в традиционном варианте- используя циркуль и линейку?	Необходимо подсветить ребро BF, зайти на панели задач сверху в построения и нажать середина. Ставили концы циркуля в вершины, радиусом ,равным ребру, провели две окружности и на пересечении была бы середина.	
Хорошо. Расстояние о какой вершины до какой прямой будем искать? Обозначим это на рисунке	от точки Е до прямой PD.	
Что называется расстояние между точкой и прямой? Что необходимо поместить на прямую?	Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра,	

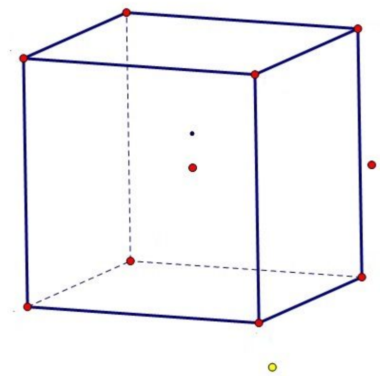
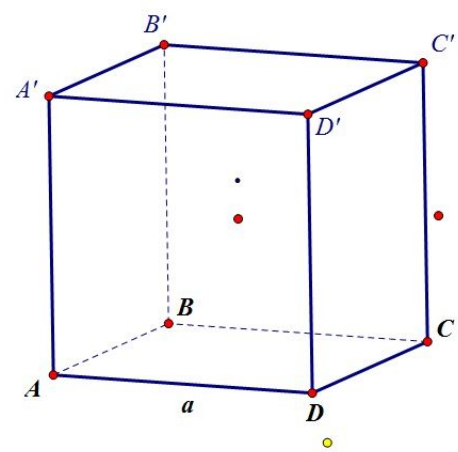
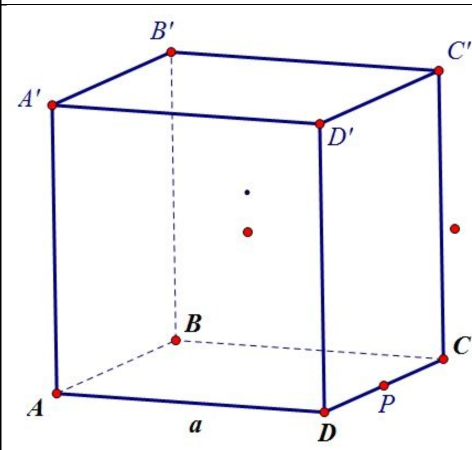
С помощью каких теорем можно найти искомой расстояние? Мы воспользуемся какой теоремой, если будет использовать проекцию?	опущенного из данной точки на данную прямую. Проекцию искомой точки. С помощью теорему Пифагора, теоремы косинусов Теоремой Пифагора.	
В среде Живая математика вы всегда можете чертеж «покрутить», чтобы увидеть решение. Посмотрите внимательно, что сразу можно сказать про сечение? Обозначим его на чертеже ,соединим отрезками. Что получилось?	Сечением куба является треугольник. Будем работать в нем. DEP	
Обозначим пересечение предполагаемого перпендикуляра и прямой DP точкой S-проекция E на прямую PD. Тогда как найти расстояние от точки до плоскости? Что необходимо провести?	Перпендикуляр	
Для того, чтобы провести перпендикуляр, что нужно сделать? И тогда используя теорему Пифагора мы сможем найти искомое расстояние?	Выбрать прямую , провести на нее перпендикуляр. Да	
Приступим к решению и его оформлению. Каждый в своем рабочем окне записывает решение		

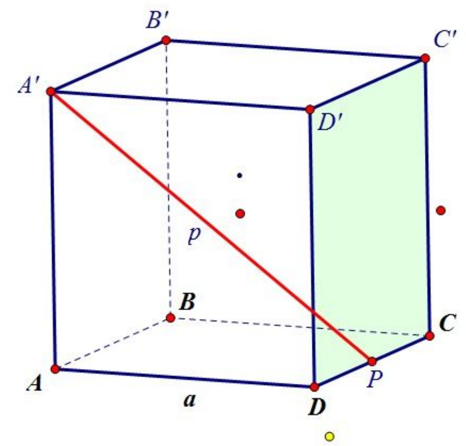
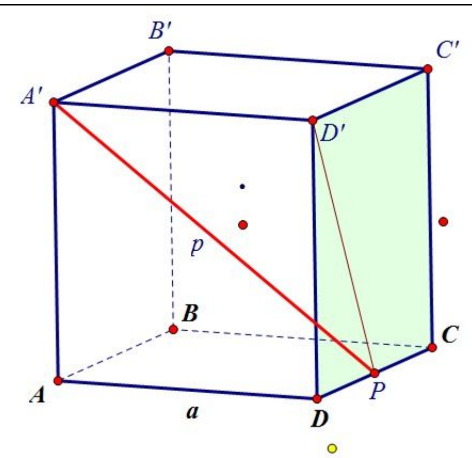
в Живой Математике.		
	Синтез и запись ответа	
Итак, что нужно сделать, чтобы найти искомое расстояние?	выбрать на прямой DP ту точку S, которая будет являться изображением проекции S точки E.	**Решение.** 1. Пусть S - проекция E на прямую PD (выберите на прямой DP ту точку S, которая, на ваш взгляд, является изображением проекции S точки E). 2. Найдем, используя т. Пифагора, все стороны треугольника PDE: DE = $a\sqrt{2}$, PE = $a\sqrt{5}/2$, DP = $3a/2$. 3. Обозначим DS = x. Из двух прямоугольных треугольников ESD и ESP найдем $ES^2 = 2a^2 - x^2 = 5a^2/4 - 9a^2/4 + 3ax - x^2$. x = a. По т. Пифагора ES = $\sqrt{2a^2 - a^2}$=a. 4. Найдем верное расположение S: DS : DP = a : 3a/2 = 2:3.
Что сделаем дальше?	Найдем, используя т. Пифагора, все стороны треугольника PDE: DE = $a\sqrt{2}$ PE=$a\frac{\sqrt{5}}{2}$ DP=$\frac{3a}{2}$	
Зная все стороны треугольника, найдем ES?	Да. Обозначим DS = x. Из двух прямоугольных треугольников ESD и ESP найдем ES^2=$2a^2$-x^2=5$\frac{a^2}{4}$-9$\frac{a^2}{4}$ + 3ax- x^2. x=a По т. Пифагора ES= $\sqrt{2}a^2 - a^2$=a. Найдем верное расположение S: DS : DP = a : 3a/2 = 2:3.	
Все оформили решение?	Да	
	Проверка решения	
Живая Математика позволяет проверить решение абсолютно любой задачи. Для того, чтобы проверить решение нашей задачи выберем произвольный отрезок a и построим квадрат со стороной a. Что мы построили?	Верхнюю грань куба	 
Верно, что необходимо сделать, чтобы построить треугольник EDP?	Отрезки EP, ED, DP	

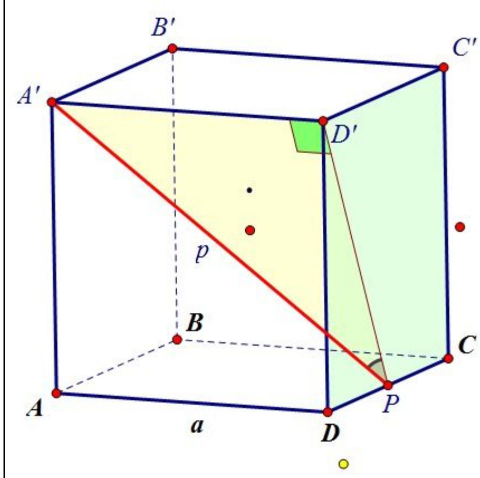
<table>
<tr><td>Что сделаем дальше?</td><td>Построим треугольник DEP в натуральную величину по его заданным сторонам. Проведем перпендикуляр ES и с помощью ЖМ измерим сторону a и найденный перпендикуляр h.</td><td rowspan="3"><table><tr><th>a</th><th>h</th></tr><tr><td>5,69 см</td><td>5,69 см</td></tr><tr><td>6,30 см</td><td>6,30 см</td></tr><tr><td>3,23 см</td><td>3,23 см</td></tr><tr><td>4,00 см</td><td>4,00 см</td></tr><tr><td>3,12 см</td><td>3,12 см</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Совпала ли длина ребра a с длиной h?</td><td>Да</td></tr>
<tr><td>Какой вывод можем сделать?
Записываем ответ.</td><td>Задача решена верно.</td></tr>
</table>

Таблица 2.

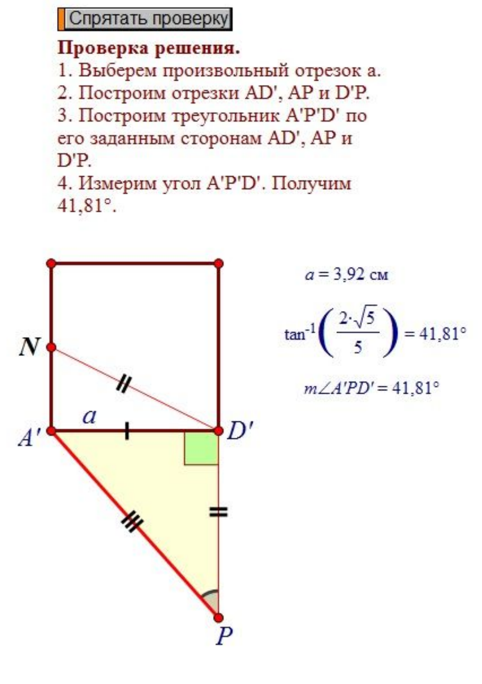
Работа с условием задачи и анализ		
Учитель	Ученик	Доска
Какого типа задача?	На вычисление угла между объектами в пространстве	
Угол между какими объектами требуется найти?	Угол между прямой и плоскостью	
О какой фигуре идет речь в задаче?	О кубе	
Что известно в задаче?	Р – середина ребра CD	
Известны ли еще какие-то данные о кубе?	Нет	
Что требуется найти в задаче?	Угол, который образует прямая АС с прямой BE	
Что это за угол? Какого типа?	Угол между прямой A'P и плоскостью CDD'	
Что необходимо сделать, чтобы найти такой угол?	1) построить искомый угол как угол прямоугольного треугольника; 2) найти две стороны полученного прямоугольного треугольника; 3) найти какую-нибудь из тригонометрических функций искомого угла	
Для чего нам это нужно?	Зная тригонометрическую функцию искомого угла, мы сможем найти сам искомый угол	
Данную задачу мы решим с использованием среды Живая Математика. Садимся за компьютеры, открывайте программу Живая Математика.	Садятся за компьютеры, открывают ЖМ	

Для того, чтобы провести анализ данной задачи изобразим куб. Сейчас мы не будем самостоятельно строить куб, а воспользуемся готовым инструментом. Для этого необходимо удержать нижнюю кнопку в меню, которое находится слева и выбрать необходимый инструмент. Все построили?	Да	
Обозначим его вершины, как указано в условии задачи (ABCDA'B'C'D'), просто нажав на каждую из вершин соответственно. Известна ли нам длина ребра куба? Обозначим ее за а.	Нет	
Что еще нужно добавить в чертеж?	P – середина ребра CD	
Что нужно сделать, чтобы в Живой математике найти середину отрезка?	Необходимо подсветить его и в верхнем меню, во вкладке «Построения» нажать «Середина»	
Угол между какой прямой и какой плоскостью необходимо найти?	Угол между прямой A'P и плоскостью CDD'	

Обозначим их на чертеже. Проговорим еще раз алгоритм нахождения угла между прямой и плоскостью	1) построить искомый угол как угол прямоугольного треугольника; 2) найти две стороны полученного прямоугольного треугольника; 3) найти какую-нибудь из тригонометрических функций искомого угла	
В среде Живая математика вы всегда можете чертеж «покрутить», чтобы увидеть решение. Посмотрите внимательно, чем является точка P?	Точка P представляет собой пересечение прямой p и плоскости CDD'	
Верно, тогда какая точка будет являться проекцией точки A на плоскость грани CDD'	D'	
Поэтому что будет являться проекцией A'P на эту плоскость?	PD'	
Верно, построим PD'		

Значит какой прямоугольный треугольник будем рассматривать? Какой угол прямой? Обозначим его. Для этого в Живой Математике необходимо подсветить все вершины данного треугольника, зайти в «Построения» и нажать «Многоугольники и внутренняя область» Какой угол будет искомым? Обозначим его, как это можно сделать?	A'D'P, угол A'D'P A'PD' Мы уже создавали инструмент угол, поэтому просто воспользуемся им, нажав на три точки, образующие этот угол поочередно.	
Хватает ли нам данных, чтобы решить данную задачу?	Да	
Приступим к решению и его оформлению. Каждый в своем рабочем окне записывает решение в Живой Математике.		
<u>Синтез и запись ответа</u>		
Итак, что нужно сделать, чтобы найти сторону искомый угол? Какие две стороны нам нужно знать? Как найти?	Найти две стороны треугольника и найти тангенс искомого угла Катеты A'D', D'P A'D' = a (как ребро куба), а для того, чтобы найти D'P, рассмотрим прямоугольный треугольник DD'P: DD'=a (как ребро куба), DP $= \frac{a}{2}$ (т. к. P – середина DC). Отсюда по теореме Пифагора найдем D'P:	**Решение.** Положим AB = a. 1. Точка P представляет собой пересечение прямой p и плоскости CDD'. 2. Очевидно, D' - проекция A на поскость грани CDD', поэтому PD' - проекция A'P на эту плоскость. 3. Найдем катеты прямоугольного треугольника A'D'P. A'D' = a, D'P $=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. 4. $\mathrm{tg}P = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **Ответ**: $\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

	$D'P = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} =$ $= \frac{a\sqrt{5}}{2}$	
Что сделаем дальше?	Найдем тангенс искомого угла: $tgP = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	
Зная тангенс искомого угла, чему будет равен искомый угол?	$\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{5}}{5}$	
Воспользуйтесь командой «вычисление» и выясните градусную меру искомого угла, чему она равна?	41,81° 1. Выберем произвольный отрезок а. 2. Построим отрезки AD', AP и D'P. 3. Построим треугольник A'P'D' по его заданным сторонам AD', AP и D'P. 4. Измерим угол A'P'D'. Получим 41,81°.	
Все оформили решение?	Да	
Проверка решения		
Живая Математика позволяет проверить решение абсолютно любой задачи. Для того. Чтобы проверить решение нашей задачи выберем произвольный отрезок а и построим квадрат со стороной а. Что мы построили?	Верхнюю грань куба	
Верно, что необходимо сделать, чтобы построить треугольник AD'P?	Отрезки AD', AP и D'P	
Что сделаем дальше?	Построим треугольник A'P'D' по его заданным сторонам AD', AP и D'P. и с помощью ЖМ измерим градусную меру искомого угла	

Совпала ли градусная мера искомого угла при проверке с полученным ответом?	Да	
Задача решена верно?	Да	

Приложение 2. Решение некоторых задач на вычисление расстояний между объектами в пространстве с использованием среды Живая математика

Расстояние между двумя точками

Рекомендации. *Чтобы найти расстояние между двумя заданными точками А и В, часто оказывается целесообразным:*

1) построить на изображении заданной фигуры какой-нибудь прямоугольный треугольник АВС, одной из сторон АВ которого является отрезок, равный искомому расстоянию. Если, например, АВ - катет, АС = b и является гипотенузой, ВС = a, тогда по теореме Пифагора

$AB = \sqrt{b^2 - a^2}$;

2) искомое расстояние может оказаться длиной стороны треугольника АВС, в котором известны, допустим, две стороны a, b и угол ∠C между ними. Тогда по теореме косинусов

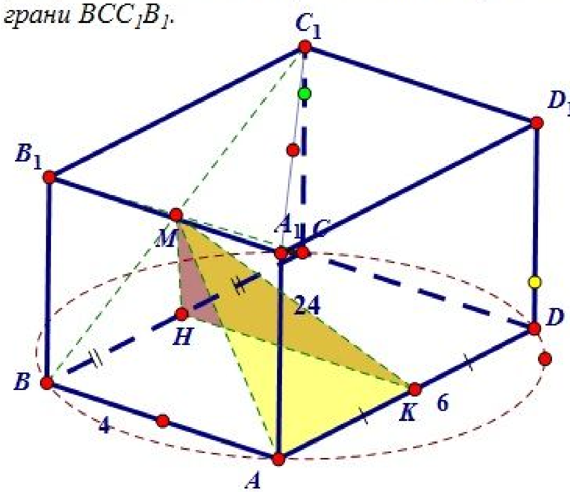
$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$;

3) или известна сторона треугольника АВС, допустим a, и два угла, один из которых противолежит стороне a, например, ∠A и ∠C. Решение задачи сводится в этом случае к использованию теоремы синусов:

$AB = a \cdot \sin C / \sin C$.

Возможны и другие способы решения задачи.

Задача 1. *В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB=4$, $AD=6$, $AA_1=24$. Найдите расстояние от вершины А до центра грани BCC_1B_1.*



Решение

1. Пусть центр грани BCC_1B_1- точки M;

2. Опустим перпендикуляр из точки M на AD в точке K. Тогда получим, что $AK=KD=\frac{AD}{2}=3$;

3. Опустим перпендикуляр из точки M на BC в точке H, тогда получим, что $MH=\frac{CC_1}{2}=\frac{24}{2}=12$;

4. Из треугольника MKH по теореме Пифагора:
$MK=\sqrt{144+16}=4\sqrt{10}$;

5. Из треугольника MAK по теореме Пифагора:
$AM=\sqrt{160+9}=\sqrt{169}=13$

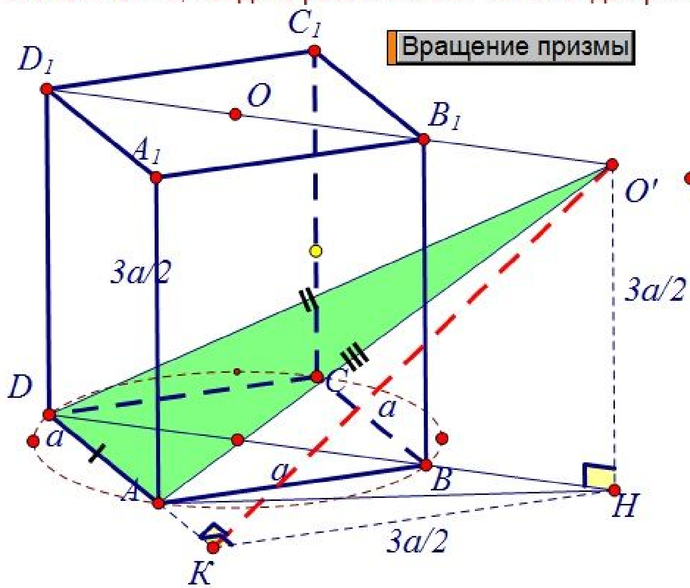
Ответ: расстояние от вершины A до M = 13.

Расстояние от точки до прямой

Задача 2. Отношение бокового ребра правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к стороне ее основания равно 3 : 2. На прямой B_1D_1 взята точка O - середина B_1D_1 и точка O', симметричная точке O относительно точки B_1. Считая AB = a, найдите расстояние от точки O' до прямой AD.

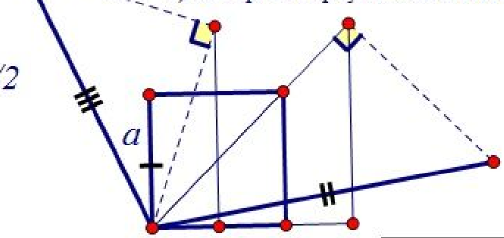
Решение.
1. Опустим из точки O' проекцию H на прямую BD и проекцию K на прямую AD. По теореме о 3 перпенд. HK перпендикулярна AD.
2. Из подобия прямоугольных треугольников DAB и DKH и из того, что DH/DB = 3/2 следует KH = 3a/2.
3. Т.к. высота призмы равна 3a/2, то из прямоугольного треугольника O'KH находим O'K = h = $3a\sqrt{2}/2$.

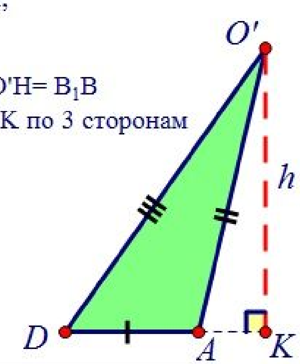
Ответ: $3a\sqrt{2}/2$.



Проверка ответа

1. Построим произвольный квадрат, котрый будет представлять собой некоторую грань куба в натуральную величину, например ABCD. Длину стороны квадрата будем считать равной a.
2. Построим изображение треугольника DO'K в натуральную величину, для этого:
 а) построим диагональ DB=H;
 б) построим AH;
 в) построим KO;
  очевидно, перпендикуляр O'H= B_1B
 г) построим треугольник DO'K по 3 сторонам





a = 2,41 см

h = 5,11 см

$\frac{3\cdot a\cdot\sqrt{2}}{2}$ **= 5,11 см**

a	h	$\frac{3\cdot a\cdot\sqrt{2}}{2}$
3,78 см	8,03 см	8,03 см
4,26 см	9,04 см	9,04 см
2,25 см	4,77 см	4,77 см
2,41 см	5,11 см	5,11 см

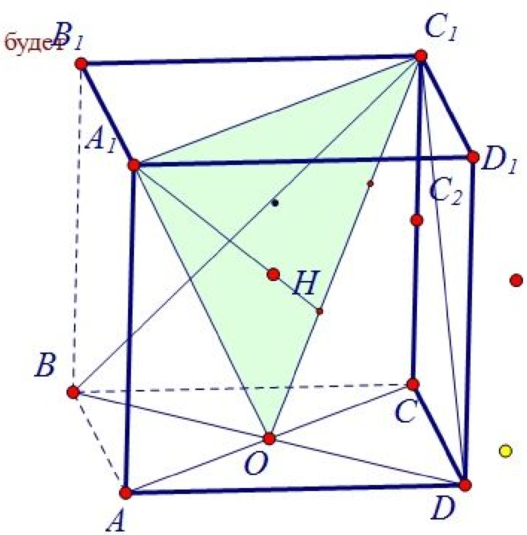
Расстояние от точки до плоскости

Опр. Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Задача 3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равным а, найдите расстояние от его вершины A_1 до плоскости $\alpha = BC_1D$.

Решение.

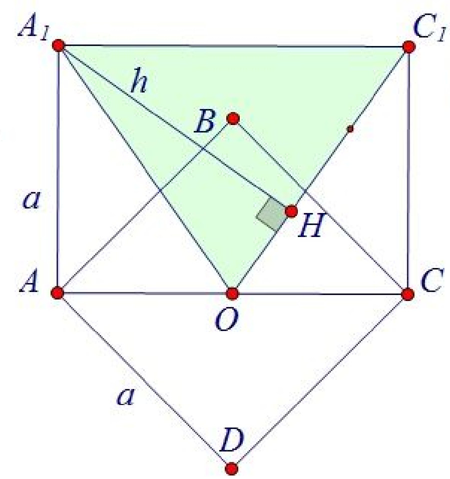
1. Очевидно, сечением куба плоскостью α будет равносторонний треугольник BC_1D.
2. Найдем искомое расстояние:
В качестве прямой, лежащей в секущей плоскости, выберем прямую BD.
3. Очевидно, $OA_1 \perp BD$ (O - середина отрезка BD).
4. Построим в плоскости сечения перпендикуляр C_1O к прямой BD.
5. Опустим из A_1 перпендикуляр A_1H на прямую OC_1.
6. $OA_1 = a\sqrt{6}/2$.
   $a\sqrt{2}\cdot a = a\sqrt{6}/2\cdot A_1H$.
7. Отсюда, $A_1H = 2a\sqrt{3}/3$.



$a = 4{,}40$ см

$h = 5{,}08$ см

$\frac{2\cdot a\cdot\sqrt{3}}{3} = 5{,}08$ см



Проверка:
1. Строим грань в натуральную величину AA_1C_1C;
2. На диагонале AC середину O соединим с вешинами A_1 и C_1;
3. На OC_1 с вершины A_1 проведем перпендикуляр H;
4. Отложим продолжение AD и CD =a;
5. Измерим полученное расстояние A_1H.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Рекомендации. *Чтобы найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми p и q, часто оказывается целесообразным:*

1) на одной из заданных прямых, например q, выбрать произвольную точку, например Q;

2) через точку Q провести прямую p_1 параллельную p, построить плоскость П, содержащую пересекающиеся прямые p_1 и q;

3) на прямой p выбрать произвольную точку, например P, построить проекцию H этой точки на плоскость П, длина отрезка PH и есть искомое расстояние от точки P до плоскости П ;

4) действительно, если через H провести прямую p_2 параллельную p, и найти точку V пересечения прямой p_2 с прямой q, то SV будет представлять собой общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых p и q (S - точка на p такая, что SV параллельна PH), причем SV = PH.

Задача 4. *В прямоугольном параллелепипеде ABCDEFGH ребра AB и AE равны a, ребро AD = 2a. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми BH и DG.*

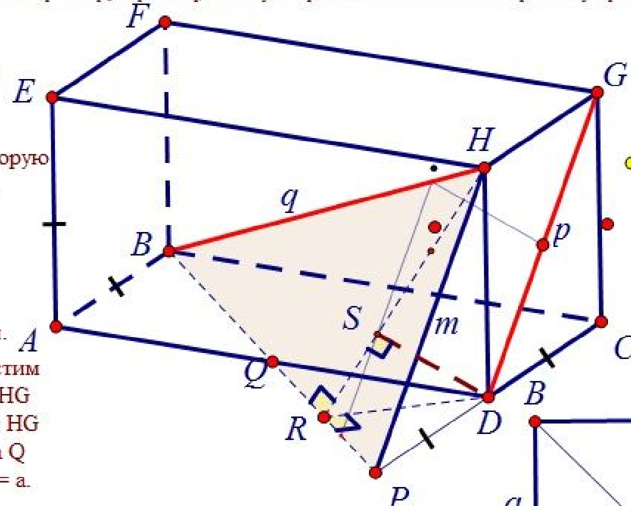
Решение.

1. На одной из скрещивающихся прямых, например BH, выберем некоторую точку, например H, и проведем через нее прямую m параллельную DG. Поскольку прямая m лежит в плоскости (DGH), то прямые m и CD пересекаются в некоторой точке, обозначим ее через P.

2. Через пересекающиеся прямые BH и HP проведем плоскость (BHP). Выберем на прямой DG некоторую точку, например, D и найдем расстояние от этой точки до плоскости (BHP), которое и будет искомым.

3. Выберем в плоскости (BHP) некоторую прямую, например BP, и опустим на нее перепндикуляр DR. Для нахождения точки R отметим, что PD = HG = a (PHGD - параллелограмм, т.к. PH параллельна DG по построению и HG параллельна PC по условию). Так как ABDP - параллелограмм, то точка Q пересечения диагоналей AD и BP является серединой AD. Отсюда DQ = a. Итак, Треугольник PDQ - равнобедренный, отсюда R - середина PQ.

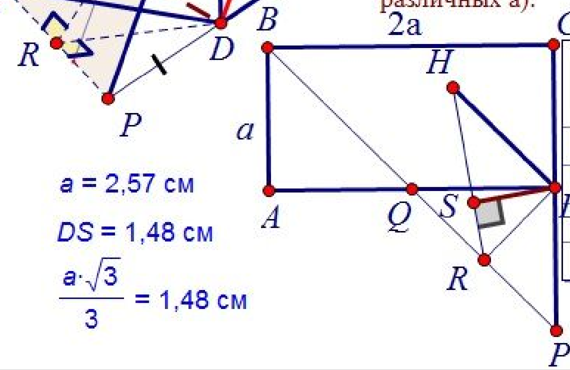
4. Рассмотрим прямоугольный треугольник HDR, HD = a, DR = $a\sqrt{2}/2$, HR = $a\sqrt{6}/2$. Отсюда, DS = HD·DR/HR = $\mathbf{a\sqrt{3}/3}$. Поскольку SR = $a\sqrt{6}/6$, то HR : SR = 3:1.



Проверка.

1. Построим прямоугольник ABCD со сторонами a и 2a, построим точки P, Q и R (см. решение). Построим HD перпендикулярную DR, HD = CD = a и в прямоугольном треугольнике HDR опустим из вершины D высоту DS.

2. Измерим длины отрезков AB = a и DS. Затем подсчитаем искомое расстояние по найденной в решении формуле, получим равные числа (при различных a).



a	$\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$	DS
2,54 см	1,47 см	1,47 см
3,02 см	1,74 см	1,74 см
3,62 см	2,09 см	2,09 см
2,57 см	1,48 см	1,48 см

Приложение 3. Решение некоторых задач на вычисление углов между объектами в пространстве с использованием среды Живая математика

Угол между двумя скрещивающимися прямыми

Рекомендации: для нахождения угла между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве необходимо осуществить перенос одной из скрещивающихся прямых (или сразу двух) так, чтобы прямые, полученные в результате этого преобразования, пересекались. Тем самым исходная задача сводится к нахождению угла между двумя прямыми на плоскости.

Спрятать задачу

Задача 1. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат ABCD, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и в два раза больше стороны основания. Точка E - середина ребра MC. Найдите угол, который образует прямая AC с прямой BE

Спрятать решение

Решение.

1. Положим AB = a. Построим G так, что CABG - параллелограмм.

Очевидно:

$BG = AC = a\sqrt{2}$.

2. $BE^2 = (MC/2)^2 = (4a^2 + a^2)/4$,

$BE = EC = a\sqrt{5}/2$.

3. $EG^2 = EC^2 + CG^2 = 5a^2/4 + a^2$,

$EG = 3a/2$.

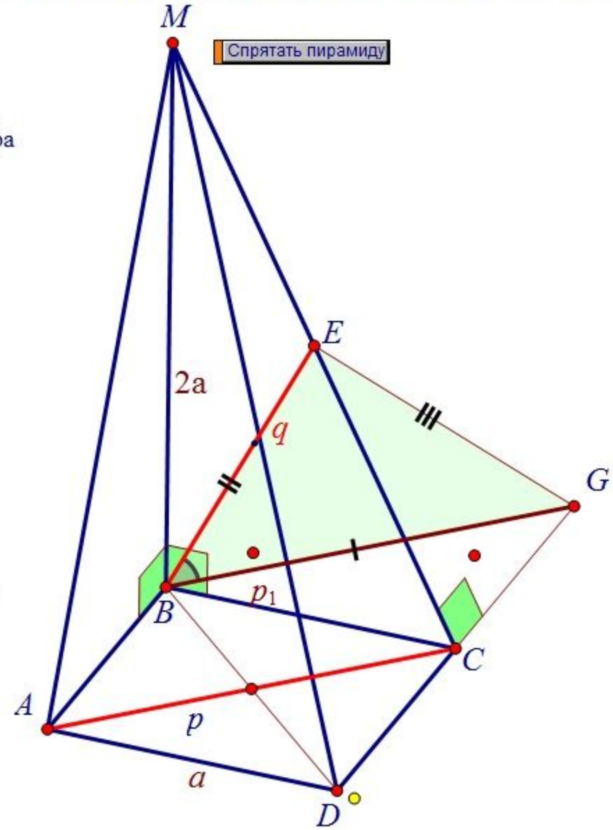
4. По теореме косинусов:

$EG^2 = BG^2 + BE^2 - 2BG \cdot BE \cdot \cos(\angle GBE)$, отсюда,

$\cos B = (BG^2 + BE^2 - GE^2)/(2BG \cdot BE) = = (2a^2 + 5a^2/4 - 9a^2/4)/(a^2\sqrt{10}) =$

$=1/\sqrt{10}$

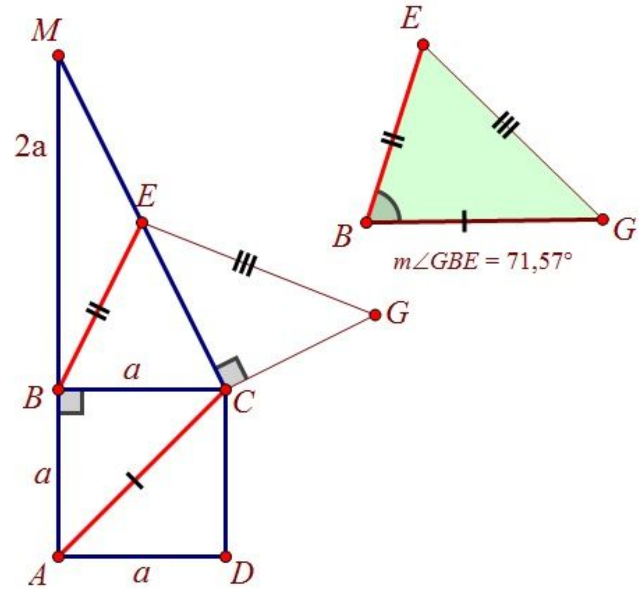
Ответ: $\angle GBE = \arccos(\sqrt{10}/10) \approx 71{,}57°$.



Спрятать проверку

Проверка решения.

1. Выберем произвольный отрезок a.
2. Построим отрезки BG, BE и EG.
3. Построим треугольник GBE по его заданным сторонам BG, BE и EG.
4. Измерим угол B. Получим 71,57°.



Угол между прямой и плоскостью

Рекомендации: для нахождения угла между прямой и плоскостью в пространстве необходимо: 1) построить искомый угол как угол прямоугольного треугольника (при необходимости данную прямую можно заменить на любую параллельную ей прямую); 2) найти две стороны полученного прямоугольного треугольника; 3) найти какую-нибудь из тригонометрических функций искомого угла и далее сам этот угол

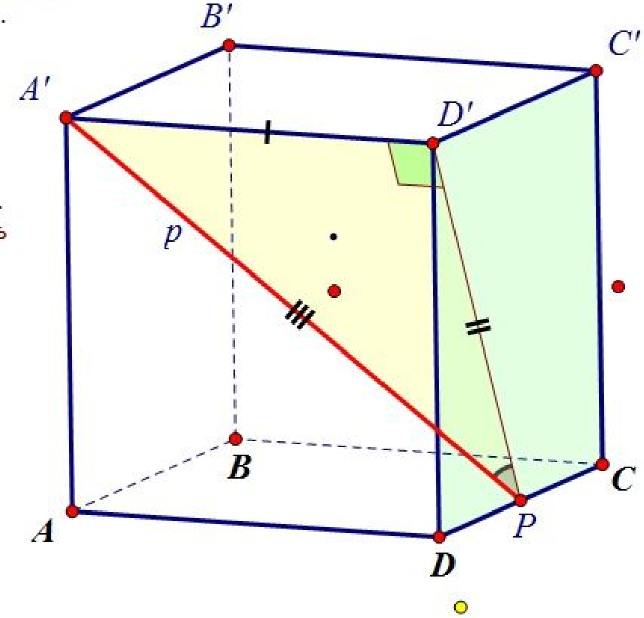
Спрятать задачу

Задача 2. Найдите угол между прямой A'P и плоскостью CDD', заданными вершинами куба ABCDA'B'C'D', где P - середина ребра CD.

Спрятать решение

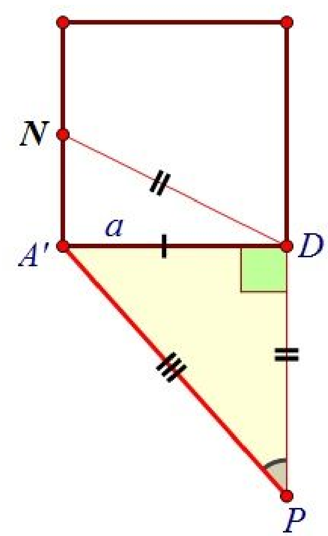
Решение.
Положим AB = a.
1. Точка P представляет собой пересечение прямой p и плоскости CDD'.
2. Очевидно, D' - проекция A на поскость грани CDD', поэтому PD' - проекция A'P на эту плоскость.
3. Найдем катеты прямоугольного треугольника A'D'P. A'D' = a, D'P = $a\sqrt{5}/2$.
4. $\mathrm{tg}P = a/(a\sqrt{5}/2) = 2\sqrt{5}/5$.
Ответ: $\mathrm{arctg}(2\sqrt{5}/5)$.

Спрятать куб



Спрятать проверку

Проверка решения.
1. Выберем произвольный отрезок a.
2. Построим отрезки AD', AP и D'P.
3. Построим треугольник A'P'D' по его заданным сторонам AD', AP и D'P.
4. Измерим угол A'P'D'. Получим 41,81°.



$a = 3{,}92$ см

$\tan^{-1}\left(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}\right) = 41{,}81°$

$m\angle A'PD' = 41{,}81°$

Угол между двумя плоскостями

Рекомендации: при вычислении угла между плоскостями можно руководствоваться следующим планом:
1) построить прямую p - линию пересечения плоскостей; 2) выбрать на p точку M и провести в заданных плоскостях прямые a и b перпендикулярные p и проходящие через M; 3) выбрать на прямых a и b соответственно точки A и B, получим треугольник ABM; 4) найти cos AMB и, воспользовавшись формулой для вычисления угла φ между прямыми, найти cos(φ) = |cos AMB|, затем угол φ между плоскостями.

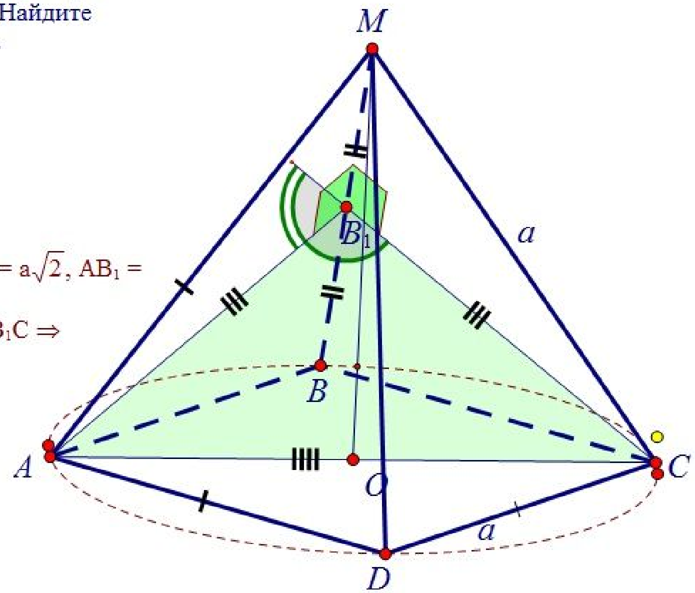
Спрятать задачу

Задача 3. Боковое ребро правильной пирамиды MABCD равно стороне ее основания. Найдите угол между плоскостями MAB и MBC.

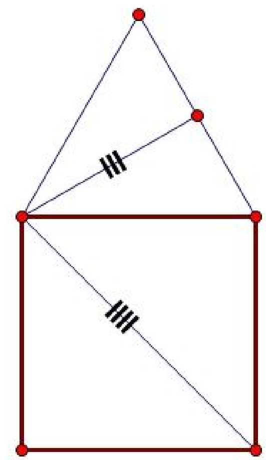
Спрятать решение

Решение.
Положим AB = a.
1. B_1 - середина BM.
2. AB_1 и CB_1 - перпендикуляры к BM.
3. Рассмотрим треугольник AB_1C: $AC = a\sqrt{2}$, $AB_1 = CB_1 = a\sqrt{3}/2$.
4. $AC^2 = AB_1^2 + CB_1^2 - 2AB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos AB_1C \Rightarrow$
$\cos AB_1C = -1/3$.
Ответ: arccos(1/3).

Спрятать пирамиду

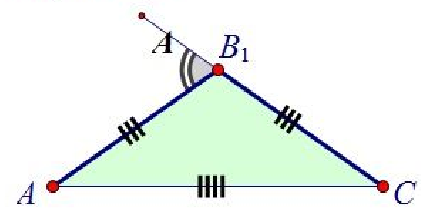


Спрятать проверку



$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70{,}53°$

Проверка решения.
1. Выберем произвольный отрезок a.
2. Построим диагональ основания пирамиды.
3. Построим отрезок, равный отрезку AB_1
4. Построим треугольник AB_1C по его заданным сторонам.
4. Измерим угол AB_1A. Получим 70,53°.



$m\angle AB_1A = 70{,}53°$

Двугранный угол

Рекомендации: за меру двугранного угла принимают меру его линейного угла. Радианной (градусной) мерой двугранного угла называется радианная (градусная) мера его линейного угла. Угол, который получается в сечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к его ребру, называется линейным углом этого двугранного угла (угол между лучами, а не прямыми).

Проверка

Спрятать проверку

$m\angle MEO = 33{,}95°$

$наклон = 1{,}10$ см

$поворот = 72{,}60°$

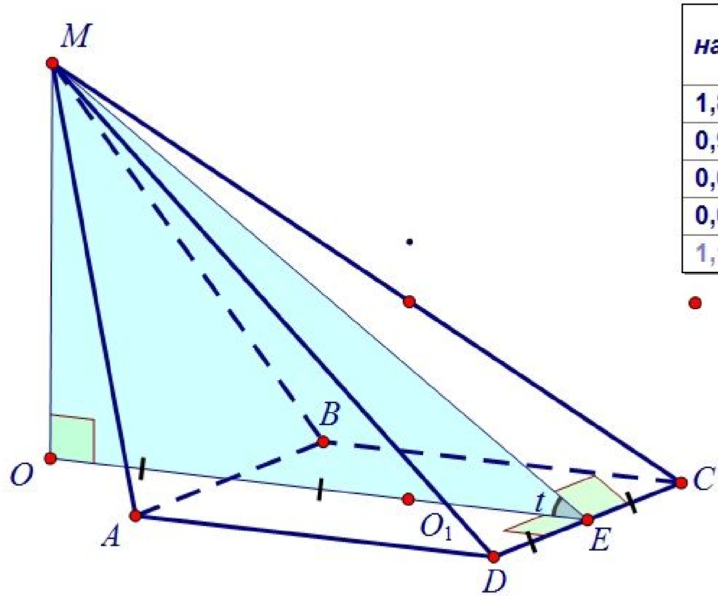
$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}69°$

наклон	поворот	$m\angle MEO$	$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$
1,89 см	70,60°	32,90°	33,69°
0,94 см	70,60°	34,95°	33,69°
0,00 см	70,60°	36,47°	33,69°
0,00 см	44,72°	33,69°	33,69°
1,10 см	72,60°	33,95°	33,69°

Спрятать задачу

Задача 3. В основании пирамиды MABCD лежит квадрат с центром в точке O_1. Основанием высоты этой пирамиды является точка O, симметричная точке O_1 относительно прямой AB. Считая высоту пирамиды равной стороне ее основания, найдите двугранный угол $MCDO_1$.

Спрятать пирамиду



Спрятать решение

Решение.

Положим AB = a. Построим линейный угол MEO двугранного угла $MCDO_1$. Положим $\angle MEO = t$.

1. Рассмотрим прямоугольный ΔMOE:
   MO = a, OE = 3a/2
2. tg t = 2/3.
3. Искомый двугранный угол равен arctg $\frac{2}{3}$.

Ответ: arctg $\frac{2}{3}$.