МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА

(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики________

(полное наименование института/факультета)

Кафедра Алгебры, геометрии и методики их преподавания______

(полное наименование кафедры)

Направление 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «математика»__

(код направления подготовки)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания

(полное наименование кафедры)

В.Р.Майер__

_______________ (подпись) (И.О.Фамилия)

« » 2018г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

КУРС ПО ВЫБОРУ «В СТРАНЕ ГРАФОВ» В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 7 КЛАССА

Выполнил студент

В.Е. Никанорова______________ ___________________

(И.О. Фамилия) (подпись, дата)

Форма обучения Заочная

Научный руководитель

к.п.н, доцент, М.А.Кейв________ ___________________

(ученая степень, должность, И.О. Фамилия) (подпись, дата)

Дата защиты ___________________

Оценка ___________________

Красноярск

2018

Оглавление

Введение

Федеральные государственные образовательные стандарты основного и среднего полного общего образования определили новые требования к результатам освоения основной образовательной программы, среди которых умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач [ФГОС ООО, 2010].

Спецификой теории графов, которая собственно и позволяет ставить вопрос о введении ее элементов в школьный курс математики, является возможность представить граф геометрически – в виде простого, удобного в обращении рисунка. При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием.

Поиск и разработка методик и технологий обучения школьников элементам теории графов на сегодня остается одной из актуальных проблем школьного математического образования.

Цель исследования: методическая разработка курса по выбору «В стране графов» для обучающихся 7 класса.

Объект исследования: математическая подготовка обучающихся 7 кл.

Предмет исследования: дидактические условия обучения курсу по выбору «В стране графов» обучающихся 7 класса.

Задачи исследования:

1) Проанализировать специальную литературу и имеющийся педагогический опыт по теме исследования.

2) Описать роль, место и значение элементов теории графов в математическом образовании школьников.

3) Охарактеризовать основные требования к проектированию и реализации программы курса по выбору в системе математической подготовки школьников.

4) Разработать методическое обеспечение для курса по выбору «В стране графов».

Настоящая квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка, приложения.

Глава 1. Теоретические основы для включения элементов теории графов в математическую подготовку школьников

1.1. Элементы теории графов в школьном курсе математики

Теория графов - это область дискретной математики, изучающая системы связей между различными объектами. Всякий раз, когда мы хотим представить наглядно взаимосвязь пар различных объектов, мы имеем дело с графами.

В школьном курсе математики теория графов не рассматривается как обязательная составляющая программы математической подготовки, но если проанализировать школьные учебники, не исключая начальных классов, то можно встретить задачи, которые намного проще и нагляднее решить с помощью теории графов.

По мнению практикующих учителей математики, такой раздел как теория графов, обладает большим потенциалом для интеллектуального развития обучающихся.

Существует три основных подхода к введению понятия граф. Граф состоит из конечного множества вершин и множества ребер, где каждое ребро есть подмножество множества вершин, содержащее два элемента. Несколько иное определение: граф состоит из конечного множества вершин и симметричного антирефлексивного бинарного отношения на этом множестве вершин. И, наконец, граф состоит из конечного множества вершин, конечного множества ребер и отношения инцидентности между вершинами и ребрами, такого, что всякое ребро инцидентно двум вершинам.

Теория графов предлагает модели для всякой системы с бинарными отношениями. Если в изучаемом явлении выделить непустое множество каких-то элементов и множество бинарных отношений, заданных на первом множестве, то, как только удастся разумно соотнести вершинам графа интересующие нас объекты, а ребрам – отношения между ними, полученный *граф становится математической моделью изучаемого явления, а свойства графа отражают структурные свойства этого явления* [Кейв, 2016].

Именно потому, что в каждом явлении (в каждой структуре) можно и, вообще говоря, не единственным способом выделить непустое множество элементов и множество бинарных отношений, связывающих элементы первого множества, графы применимы для изучения широкого круга явлений из самых разных областей знания.

С помощью графов можно описать строение конечных групп и компьютерных программ; рыночные и дружеские отношения; некоторые игры и головоломки; электрические цепи; карты дорог; химические соединения; изготовление печатных схем и многое другое.

Простой язык теории графов позволяет решать многочисленные, разнообразные и довольно нетривиальные задачи дискретной математики.

Одной из особенностей теории графов, которая, собственно, и позволяет ставить вопрос о введении элементов теории графов в школьный курс математики, является возможность представить граф (как математическую модель или как отвлеченный образ) геометрический – в виде простого, удобного (имеется в виду удобного для человека) в обращении рисунка: вершины отождествляются с точками на плоскости, а ребра – с линиями, соединяющими вершины. *Рисунок графа, являясь знаком, чувственно воспринимаемым материальным предметом, служит посредником между реальной действительностью и математической моделью.* При изображении графа определенные свойства изучаемого явления моделируются с помощью простых знаков – точек (одного цвета или нескольких цветов) и отрезков (одного цвета или нескольких цветов, направленных или ненаправленных). При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием. В процессе познания рисунки графов, как чувственные образы, становятся носителями богатого смыслового содержания.

Перспективным и естественным является использование изобразительного языка графов в качестве служебных средств при решении различных методических вопросов обучения математике:

- графы как средство наглядности при обучении математике;
- графы как средство углубления и обогащения содержания школьной математики;
- графы как средство усиления взаимосвязей учебных дисциплин, изучаемых в школе;
- графы как средство развития прикладного направления математики.

Знакомство с теорией графов и ее языком прокладывает пути для учащихся, интересующихся математикой, в топологию, комбинаторный анализ и другие области современной математики и ее приложений; облегчает чтение и понимание научно-популярной и научной литературы.

С помощью графов можно аккуратно перебирать варианты в достаточно сложных комбинаторных задачах. Такой перебор дисциплинирует мышление школьников, позволяет не пропустить ни одного варианта и не повторить никакой вариант дважды.

Использование графов помогает обнаружить, продемонстрировать изоморфизм различных структур (понятие «изоморфизм» очень важное понятие математики, неявно присутствующее в школьном курсе математики), связующим звеном между которыми является графы и, в частности, его рисунок. А, как известно, формирование понятия изоморфизма и его использование способствует развитию важного качества современного математического мышления – умения обнаружить глубокое структурное сходство внешне различных систем предметов и отношений.

Использование графов естественно влечет проникновение в школьную математику в различных проявлениях идей оптимальности, очень важных для науки и практики. Это происходит в силу того, что ряд даже основных понятий теории графов связаны с идеей оптимальности. Так, например, полным графом является граф с максимальным числом ребер при заданном числе вершин; простой цикл является минимальным связным графом с заданным числом вершин. Дерево, содержащее все вершины графа, с одной стороны, есть максимальный подграф связного графа с заданным числом вершин, который не содержит циклов, а, с другой стороны, минимальный связный подграф. Развитию и проникновению идеи оптимальности будут способствовать упражнения и задачи, использующие понятия пути, потока и разреза в сети и др.

Специфика теории графов позволяет вводить основные понятия, методологически связывая их с практикой, показывая пути возникновения этих понятий при помощи формализации и обобщения различных сторон действительности. При этом в силу широкой применимости теории графов, изучение ее основ и методов может и должно происходить в процессе изучения основного курса математики, в процессе использования языка теории графов при обучении математике. При постепенном его введении, по мере необходимости и целесообразности, он будет «работать» на протяжении всего обучения математике [Кейв, 2009].

Составление графов, в ходе решения многих задач, является увлекательным занятием, что может значительно повысить интерес школьников к изучаемому предмету [Глухова, 2016].

Рассмотрим некоторые задачи, наиболее часто встречающиеся в школьных учебниках по математике, при решении которых целесообразно использовать язык теории графов.

Задача 1. Аркадий, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями. Сколько всего рукопожатий было сделано?

Решение: Пусть каждому из пяти молодых людей соответствует определенная точка на плоскости, а производимому рукопожатию- отрезок, соединяющий конкретные точки. Если подсчитать количество совершенных рукопожатий, то их получится 10. Так же, что бы узнать количество ребер в графе надо сложить степени каждой вершины и разделить пополам. (5*4)/2=10. Ответ: 10 рукопожатий.

Задача 2. Три друга – Леша, Сергей и Денис – купили щенков разной породы: щенка такса, щенка колли и щенка овчарки. Известно, что: щенок Леши темнее по окрасу, чем такса, Леси и Гриф; щенок Сергея старше Грифа, овчарки и таксы; Джек и такса всегда гуляют вместе. У кого какой породы щенок? Назовите клички щенков.

Решение: В данной задаче граф будет состоять из 9 вершин и 6 ребер. Причем вершины надо разбить на три тройки: первая – имена, вторая – клички, третья – порода и разместить их для наглядности в разных плоскостях (Рис 1.1). Первая ключевая фраза, которая помогает решить задачу: «щенок Леши темнее по окрасу, чем такса, Леси и Гриф», значит у Леши не такса, не Леси, не Гриф. Вторая ключевая фраза: «щенок Сергея старше Грифа, овчарки и таксы», значит у Сергея не Гриф, не овчарка, не такса. Третья ключевая фраза: «Джек и такса всегда гуляют вместе», значит Джек это не такса. Так как больше с условием задачи работать нельзя, то будем работать по графу. По графу видно, что у Сережи не такса и не овчарка, а значит – колли, поэтому проводим первое ребро. Далее видно, что у Леши не такса и не колли, а значит - овчарка, проводим еще ребра. Денису осталась такса. У Леши не Леси и не Гриф, значит Джек. У Сережи не Гриф и не Джек, а Леси. Остается Денису Гриф, проводим последнее ребро.

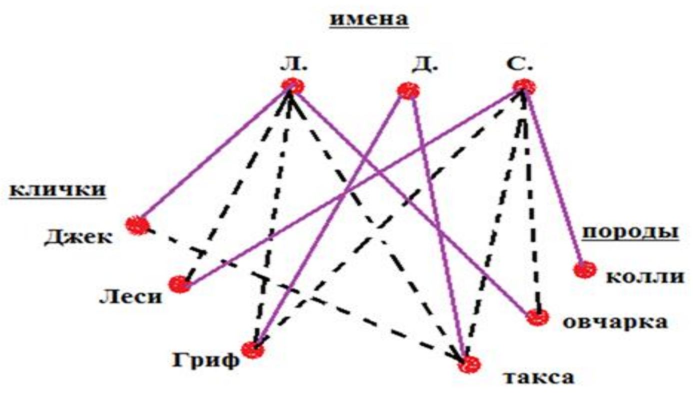


Рис. 1. 1

Ответ: у Лёши овчарка по кличке Джек, у Сережи – колли Леси, у Дениса – такса Гриф.

Задача 3. В государстве 100 городов, из каждого выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Решение: Одна дорога соединяет два города, т.е. две вершины соединены одним ребром, следовательно (100*4)\2=200. Ответ: 200 дорог.

Задача 4. Имеется шесть групп учащихся: 1) математики; 2) химики; 3) историки; 4) физики; 5) биологи; 6) литераторы. Учащиеся каждой группы должны посещать лекции по соответствующей дисциплине. Например, математики – по математике, физики – по физике и т.д. Математики также должны посещать лекции по физике, физики – по математике, химики – по физике, биологи – по физике и химии. Кроме того, учащиеся каждой группы хотели бы посещать лекции по истории, а математики и физики – ещѐ и лекции по литературе. Требуется составить оптимальное расписание, которое удовлетворило бы всех учащихся.

Задача 5. Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, что бы каждый из них был связан ровно с 11 другими?

Задача 6. Встретились три друга – Белов, Серов и Чернов. Чернов сказал другу одетому в серый костюм: «На одном из нас белый костюм, на другом – серый, на третьем – черный, но, на каждом костюм цвета, не соответствующего фамилии». Какой цвет костюма у каждого?

Таким образом, с одной стороны, изучение элементов теории графов способствует формированию математической культуры обучающихся и опыта знаково-символического моделирования при решении разнообразных задач. С другой стороны, для учителя, использование языка теории графов, на уроках математики, позволяет решать различные методические задачи, тем самым повышать качество обучения.

1.2. Дидактические условия для включения элементов теории графов в математическую подготовку школьников

Сегодня в педагогической науке можно встретить разные определения понятия «дидактические условия». Например, В.И. Андреев под этим термином подразумевает «обстоятельства обучения, которые являются результатом отбора, конструирования и применения элементов содержания, форм, методов и средств обучения, способствующих эффективному решению поставленных задач» [Андреев, 1996].

Волкова С.В. считает, что «дидактические условия, это специально смоделированные обучающие процедуры, реализация которых позволяет решать определенный ряд образовательных задач» [Волкова, 2001].

Содержание дидактических условий меняется в зависимости от поставленных задач учебного процесса.

Педагогический подход к введению элементов теории графов в систему математической подготовки школьников заключается в разработке специальной методической системы обучения математике, включающей особое содержание, специальные формы, методы и средства обучения.

Под содержанием обучения мы будем понимать не только некоторый объем теоретического учебного материала, но и комплекс задач, заданий и упражнений, а так же сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач.

Понятие метода обучения также отражает дидактические цели и задачи учебной деятельности, при решении которых в процессе обучения применяются соответствующие способы учебной работы преподавателя и познавательной деятельности обучающихся [Лернер, 1981]. О важности методов обучения писал А.В. Луначарский: «От метода преподавания зависит, будет ли оно возбуждать в ребенке скуку, будит ли преподавание скользить по поверхности детского мозга, не оставляя на нем никакого следа, или, наоборот, это преподавание будет восприниматься радостно, как часть детской игры, как часть детской жизни, сольется с психикой ребенка… Незаметно методы преподавания переходят в методы воспитания» [Луначарский, 1924].

Традиционными методами обучения принято считать: словестный метод (рассказы, беседы, школьные лекции), наглядный метод и практический метод (упражнения, лабораторные работы, практические работы).

В настоящее время, помимо традиционных методов обучения, следует использовать и активные методы обучения.

Активные методы обучения – это система методов, обеспечивающих активность и разнообразие мыслительной и практической деятельности, в процессе усвоения обучающимися учебного материала [Курьянов, 2011].

Среди методов и форм организации обучения, повышающих активность обучающихся, выделим следующие:

1. Нетрадиционные формы проведения урока (урок-экскурсия, интегрированный урок и др.);
2. Игровые технологии обучения (дидактические игры, деловые и ролевые игры и т.п.);
3. Проблемно-ориентированные технологии обучения (кейс-метод, метод «мозгового штурма» и др.);
4. Использование дидактических средств (тесты, кроссворды) и др.

На этапе предпрофильной подготовки школьников особое место занимают курсы по выбору (факультативы).

Курсы по выбору (факультативы) – это форма организации учебных занятий во внеурочное время, направленная на расширение, углубление и коррекцию знаний учащихся по учебным предметам в соответствии с их потребностями, запросами, способностями и склонностями, а также на активизацию познавательной деятельности [Жуковская Е.П.].

Согласно Федеральному государственному стандарту основного общего образования (ФГОС ООО), изучение курса по выбору дает возможность обучающимся:

- самостоятельно изучать основную и дополнительную учебную литературу, а так же и другие источники информации;
- развивать навыки самообразования и самопроектирования;
- углублять, расширять и систематизировать знания в выбранной предметной области.
- способствовать к профессиональному самоопределению учащихся;
- удовлетворять познавательные интересы.

Основное отличие курса по выбору от основного школьного предмета, это то, что он не должен дублировать содержания предмета, обязательного для изучения.

При всех возможных вариантах организации курсов по выбору в приоритете всегда остаются следующие условия:

- курсы должны помочь ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы и способствовать созданию положительной мотивации обучения;
- содержание курса должно быть дополняющим или углубляющим школьный курс математики;
- использование современных образовательных технологий и активных форм организации занятий, проектных форм работы обучающихся;
- программа курса должна состоять из законченных разделов-модулей.

Что касается структуры составления рабочей программы, то она представляет собой целостный документ, включающий несколько основных разделов:

- Титульный лист;
- Пояснительная записка;
- Учебно-тематический план;
- Календарно-тематическое планирование;
- Учебно-методический комплекс.

Назначение *пояснительной записки* в структуре рабочей программы состоит в том, что бы кратко и четко сформулировать цели, задачи и основную идею курса по выбору, общую характеристику предпрофильной подготовки, количество изучаемых часов отведенных на изучение курса, систему оценки достигнутых результатов. Пояснительная записка не должна быть очень объемной, она должна разъяснять «читателю» общую характеристику образовательной программы, кратко разъяснить специфику предполагаемой деятельности.

В *учебно-тематическом плане*, как правило, отражены темы курса по выбору, очередность их изучения, используемые организационные формы обучения и количество отведенных часов (таблица 1).

Таблица 1

п/п	*Наименование разделов и тем*	*Количество часов*	*Образовательные цели*	*Вид деятельности обучающихся*
1.				
	В нижней части таблицы часы суммируются			
	Итого			

Содержание тем учебного курса, это структурный элемент образовательной программы, включающий разъяснение и обоснование каждой предложенной темы. В основном, должны быть рассмотрены такие моменты, как: основные изучаемые вопросы, требования к знаниям и умениям обучающихся на данном курсе, формы контроля, возможные виды самостоятельной работы учащихся, а так же немало важным является модульное построение содержания, поскольку возможен переход обучающихся с курса на курс.

Что касается *учебно-методического обеспечения*, то этот раздел должен включать в себя перечни необходимых учебных и методических источников: фонд оценочных средств; дидактический материал; интернет-ресурсы; литература, рекомендованная для учащихся; литература, использованная при написании программы; и т.п.

Не менее важным является момент, связанный с формой контроля обучающихся, и системой оценки. Необходимо спроектировать и разработать как итоговую зачетную работу по курсу, так и продумать место и форму промежуточной аттестации. Оценку можно выставлять в форме «зачет/не зачет» или по классической бальной шкале. Важно использовать оценку промежуточного контроля, как своевременную коррекцию деятельности обучающегося, и прежде всего как инструмент положительной мотивации.

Таким образом, обучение школьников элементам теории графов возможно посредством включения курса по выбору «В стране графов» в систему их математической подготовки в школе.

Выводы по первой главе

Данная глава посвящена теоретическим основам для включения элементов теории графов в математическую подготовку школьников.

Рассмотрены специфика и перспективы использования изобразительного языка теории графов в школьном курсе математики.

Охарактеризованы дидактические условия для включения элементов теории графов в математическую подготовку школьников.

Глава 2. Методика обучения элементам теории графов обучающихся 7 класса в рамках курса по выбору «В стране графов»

2.1. Программа курса по выбору «В стране графов» для обучающихся 7 класса

Пояснительная записка

Программа курса по выбору «В стране графов» своим содержанием сможет привлечь внимание учащихся 7- ых классов, которым интересна математика. Курс освещает теорию графов, которая в настоящее время является интенсивно развивающимся разделом дискретной математики.

Программа курса направлена на расширение кругозора и знаний учащихся, повышение уровня их математической подготовки через специально подобранный спектр математических задач.

Наряду с основной задачей обучения математики – обеспечением прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений – программа курса направлена на: формирование устойчивого интереса к предмету; выявление и развитие математических способностей; выбор профиля дальнейшего обучения; развитие личностных и метапредметных результатов обучения.

Основные формы и методы обучения: компактное и чёткое изложение основ теории графов, решение задач, проектная работа обучающихся, игровые и групповые формы организации занятий.

Курс является открытым – в него можно добавлять новые фрагменты, развивать содержание.

Содержание курса адаптировано для обучающихся 7-9 классов с любой степенью их подготовленности.

Для обучающихся, которые пока не проявляют заметной склонности к математике, данный курс может стать толчком в развитии интереса к предмету и вызвать желание узнать больше.

Цель курса – ознакомление с основными понятиями, задачами и базовыми алгоритмами теории графов на доступном уровне.

Задачи курса:

- ознакомление учащихся с понятиями и методами теории графов;
- ознакомление учащихся с приемами и алгоритмами решения задач на языке теории графов;
- формирование умений распознавать задачи, решаемые с помощью графов и строить графовые модели;
- развитие логического и алгоритмического мышления школьников;
- развитие универсальных учебных действий обучающихся.

Данный курс рассчитан на 17 часов.

Учебно-тематическое планирование
курса по выбору «В стране графов» для обучающихся 7 класса

№	**Тема занятия**	**Кол-во часов**
1.	Из истории графов. Что такое граф?	2
2.	Виды графов	2
3.	Маршруты в графах	2
4.	Деревья	2
5.	Укладка графа	2
6.	Раскраска вершин графа	2
7.	Приложение теории графов	2
8.	Проектная работа	2
9.	Итоговое занятие	1
ИТОГО:		17 ч.

Содержание обучения

Тема 1.Из истории графов. Что такое граф?

В данной теме рассматривается история возникновения теории графов и ее основоположник. Вводятся основные понятия: граф, ребра, вершина, смежные ребра, степень вершин, висячая и изолированная вершина, четные и нечетные вершины, рассматривается лемма о рукопожатии.

В практической части предложены элементарные задачи на применение основных понятий из теории графов.

Тема 2. Виды графов.

Рассматриваются разновидности графа: Простой граф, мультиграф, псевдограф, пустой граф, полный граф, орграф. Для закрепления изученного материала, ученикам предлагается выполнить самостоятельную работу.

Тема 3. Маршруты в графах.

Эта тема включает в себя изучение таких понятий как: маршрут, цепь, цикл, простая цепь, простой цикл, связные и несвязные графы, эйлеров и гамильтонов циклы. Рассматриваются задачи о Кёнегсберских мостах и кругосветном путешествии. Форма контроля по теме: коллоквиум.

Тема 4. Деревья.

Знакомство учащихся с новым классом графов – деревья. Изучение основных понятий и свойств деревьев. Рассмотрение остовного и минимально остовного дерева в нагруженном графе. Алгоритм поиска минимального остовного дерева в нагруженном графе. В практической части предлагается отработка полученных знаний в ходе решения задач.

Тема 5. Укладка графа.

Знакомство с понятиями: грань графа, укладка графа, плоский граф. Обсуждение и решение одной из исторических задач теории графов — задачи о тех домах и трех колодцах. Рассмотрение эйлеровой характеристики для плоских графов.

Тема 6. Раскраска вершин графа.

Понятия: раскраска вершин графа, правильная раскраска вершин графа, хроматическое число. В этой теме рассматривается история происхождения гипотезы «о четырех красок» и предлагается изучение алгоритма правильной раскраски вершин графа. Решение задач на раскраску вершин в графе.

Тема 7. Приложение графов.

Знакомство обучающихся с приложениями теории графов в различных научных областях. Решение задач из блока «Занимательные графы».

Тема 8. Проектная работа.

Защита индивидуальной зачетной работы по выбранной теме.

Тема 9. Итоговое занятие.

Обобщающее занятие. Контрольный срез по решение задач из курса «В стране графов».

Планируемые результаты обучения

Предметные: знание основных понятий курса; владение навыками практического использования теоретических знаний на практике в ходе решения задач.

Метапредметные: умение планировать и осуществлять свою учебную деятельность, умение анализировать информацию, умение устанавливать причинно-следственные связи, умение осуществлять самоконтроль и самооценку, умение работать в коллективе, умение пользоваться информационными технологиями, владение устной и письменной речи, владение навыками проектной работы.

Личностные: проявление лидерских качеств для достижения положительных результатов.

Учебно-методические ресурсы

Примерные темы проектных работ

1. «Решение лабиринта при помощи графа».
2. «Графы и психология».
3. «Геометрические задачи с графами».
4. «Теорема о пяти красках».
5. «Связные графи и задачи на их применение».
6. «Генеалогическое дерево. Один из способов применения теории графов»
7. «Графы в головоломках».
8. «Алгоритм Краскала».
9. «Олимпиадные задачи и теория графов».
10. «Исторические задачи теории графов».

Литература для обучающихся:

1. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов, уч.- Метод. Пособие/ Изд-е 2-е, стереотип.- Минск: НТОО «ТетраСистемс», 2001.
2. Мельников, О.И. Незнайка в стране графов. – М.: КомКнига/URSS, 2006.

Литература для учителя:

1. Оре О. Графы и их применение: пер. с англ./ Под ред. И предисл. И.М. Яглома. Изд. 4-е.- М.: Издательство ЛКИ, 2008.

2. Берж К. «Теория графов и ее применение», М, «Мир», 1980;

Интернет-ресурсы и цифровые образовательные ресурсы

1. ЦОР по теме "Теория графов" [http://mir-information.blogspot.ru/2013/10/blog-post.html]

2.2. Конспекты занятий курса по выбору «В стране графов»

Конспект занятия №1

Тема*: *«Из истории графов. Что такое граф и его элементы» (2ч)

Основная дидактическая цель: знакомство с базовыми понятиями теории графов: граф, вершина, ребро, степень вершины, лемма о рукопожатиях и следствие из нее.

План

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Экскурс в историю возникновения теории графов; (15 мин)
3. Введение в теорию графов: основные понятия; (40 мин)
4. Практикум: решение задач; (20 мин)
5. Итог урока; (15 мин)
6. Рефлексия; (5 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент

В наше время теория графов один из наиболее востребованных разделов в изучении дискретной математики. С графами, сами того не замечая, мы сталкиваемся постоянно. Например, графом является схема линий метрополитена. Точками на ней представлены станции, а линиями — пути движения поездов (Рис 2.1). Исследуя свою родословную и возводя ее к далекому предку, мы строим так называемое генеалогическое древо. И это древо — граф (Рис 2.2).

Рис. 2.1

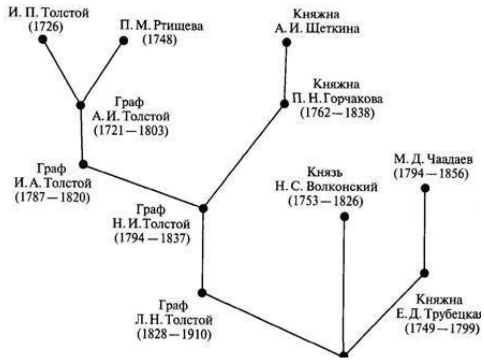


Рис. 2.2

2. Экскурс в историю возникновения теории графов

Основоположником теории графов принято считать Леонарда Эйлера, это швейцарский математик, который начал свою работу о графах с рассмотрения одной головоломки «Задача о кёнигсбергских мостах», с которой мы с вами сейчас и познакомимся. Эта старинная математическая задача, в которой спрашивалось, как можно пройти по всем семи мостам Кёнигсберга, не проходя по одному из них дважды и вернуться обратно (Рис. 2.3).

Задание: Подумайте над решением задачи и предложите свой вариант решения.

Для наглядности учитель раздает ученикам карточки с изображением города и мостов и с условием задачи «Можно ли, выйдя из дома, прогуляться по всем мостам по одному разу и вновь вернуться домой?».

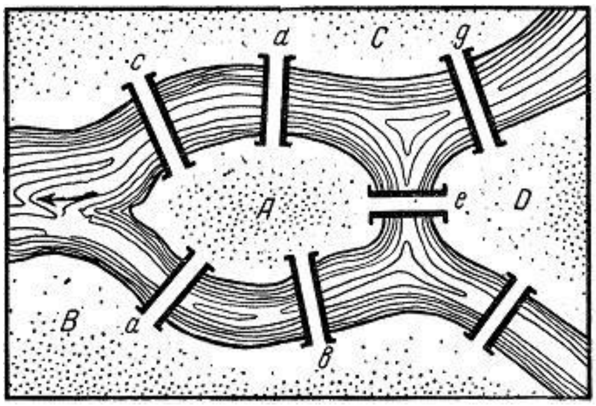


Рис. 2.3

Ученики приходят к выводу, что задача не решаема.

3. Введение в теорию графов (основные понятия)

Итак, давайте сформулируем определения и теоремы, на которых будем строить наши знания о графах.

Учитель проговаривает определение устно. Граф - это набор точек, некоторые из которых соединены линиями. Отметим, что не все точки могут быть соединены друг с другом.

(Основные определения конспектируются в тетрадь)

Пусть задано некоторое непустое множество V и множество E пар различных элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами графа*, элементы множетсва E называются *ребрами графа*, а пара (V, E) т.е. множество вершин и множество ребер, называются *графом*.

При этом вершины принято обозначать большими латинскими буквами, часто одинаковыми с индексами, соответствующими их порядку расположения на графе. Иногда также обозначают дуги графа маленькими латинскими буквами.

Рассмотрим рисунок 2.4, изображен граф G, заданный множеством вершин V={1,2,3,4,5} и множество ребер E={(1,2), (2,3), (4,2), (4,3)}.

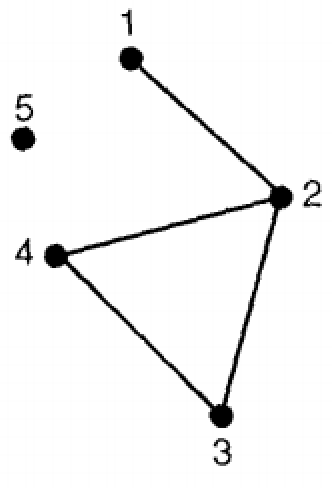


Рис. 2.4

Если две вершины графа соединены ребром, то они называются *смежными*.

Число ребер, выходящих из вершины V, называют *степенью вершины* V и обозначаются d(v).

Задание: Определите степени вершин: d(1), d(2), d(3), d(4), d(5).

Обратим внимание на вершину 5 (рис. 2.4), d(5)=0, такая вершина называется *изолированной*, а вершина степени 1- *висячей* (например, на рис. 2.4 висячей является вершина 1).

Петля, это ребро, которое может «выходить и заходить» в одну и ту же вершину.

Если ребро является петлей, то его степень считают дважды. Закрепим это определение на примерах (Рис. 2.5).

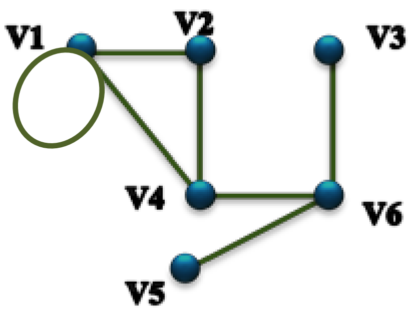


Рис. 2.5

Deg V_n-называют число ребер, соответсвующее этой вершине.

Deg V_1=4

Deg V_2=2

Deg V_3=1

Deg V_4=3

Deg V_5=1

Deg V_6=2

Количество ребер, исходящих из вершины, называются *степенью этой вершины.*

Рассмотрим задачу: «На соревнованиях по теннису участвовало 5 спортсменов. Во время церемонии открытия каждый пожал руку друг другу. Сколько рукопожатий было совершено?»

Решение: Для решения этой задачи изобразим ее условие графически, представив спортсменов - точками, а их рукопожатия- соединяющими точки линиями (Рис. 2.6).

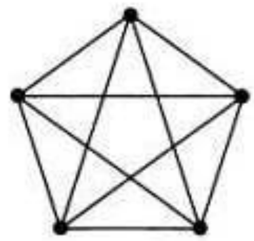


Рис. 2.6

Изобразив условие этой задачи с помощью рисунка, можно легко посчитать линии обозначающие рукопожатия и сказать ответ, но как вы поступите, если количество участников в условии задачи увеличится до 100?

Ученики предлагают свои варианты решения.

Учитель: поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки, то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук (при этом каждая рука учитывается столько раз, во скольких рукопожатиях она участвовала) равно удвоенному числу рукопожатий.

Лемма о рукопожатиях. Сумма степеней всех вершин графа - четное число, равное удвоенному числу ребер.

$$\sum degVi = 2g, \qquad g - \text{число ребер}$$

Следствие из леммы о рукопожатиях.

1. В графе число вершин нечетной степени – четное.
2. Число ребер в полном графе n(n-1)/2 (граф полный – если любые две его вершины смежные).

4. Практикум: решение задач

1. Можно ли 15 телефонов соединить проводами так, чтобы каждый был соединён ровно с 5 другими?

Ответ: Рассмотрим граф, в котором телефоны — это вершины. Вершины будем соединять ребром, если телефоны соединены проводом. В любом графе число нечетных вершин четно. Значит, так соединить телефоны не получится.

2. В компании каждый пожал руку каждому, всего сделано 15 рукопожатий, сколько человек в компании?

Ответ: q=15, n=?

$q=((n-1)*n)/2;$

$30=(n-1)*n;$

$n=6.$

5. Итог урока

Вопросы для подведения итогов занятия:

1. Что такое граф?
2. Что такое степень вершины?
3. Какая вершина называется висячей?
4. Какие вершины называются смежными?

Задания для самостоятельной работы:

1. а) Постройте граф с 5 вершинами и 10 ребрами;
   б) Постройте граф с 3 вершинами и 6 ребрами;
   в) Постройте граф с 4 вершинами и 3 ребрами.
2. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?
3. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
4. В деревне 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван, Антон, у Максима сосед Иван и Сергей, Виктор сосед Диме и Никите, Евгений сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет. Может ли Петр огородами пробраться к Никите за яблоками?

6.Рефлексия.

Учитель: Ребята, давайте подведем с Вами итоги, что больше всего понравилось и запомнилось из нового изученного материала? Какие трудности вызвала тема? Как бы вы оценили свои успехи по 10-бальной шкале?

Конспект занятий №2

Тема: « Виды графов» (2 ч.)

Основная дидактическая цель: познакомить обучающихся с разновидностями графов; отработать умения применять язык теории графов при решении задач.

План

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Виды графов; (40 мин)
3. Самостоятельная работа по теме «Виды графов»; (40 мин)
4. Подведение уроков; (5 мин)

Ход урока

1. Организационный момент

Учитель приветствует учащихся, отмечает отсутствующих, сообщает тему занятия.

2. Виды графов

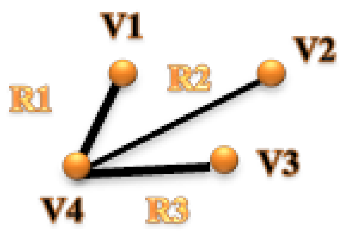
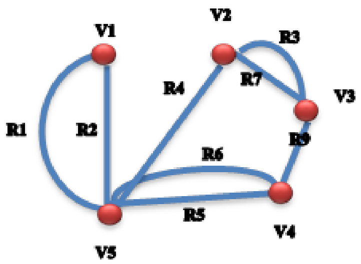
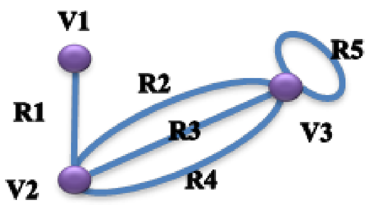
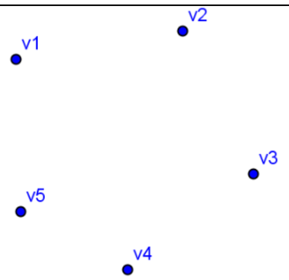
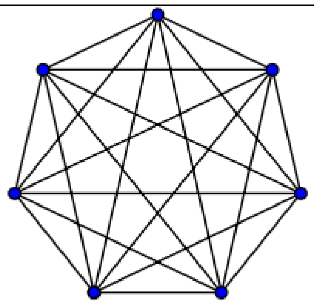
Учитель: На прошлой с Вами встречи мы разобрали такие понятия как: граф, ребра графа, вершины графа, находили степени вершин и др. Сегодня мы с вами познакомимся с видами графов, какие они бывают и как их различать.

Рассмотрим таблицу 2 и познакомимся с такими графами как: «Мультиграф», «Простой граф» и «Псевдограф», «Полный граф», «Пустой граф».

В форме дискуссии, ученики выдвигают свои предположения, как должен выглядеть граф, с таким интересным названием как: «мультиграф», «псевдограф», «полный граф» и т.д.

После чего, учитель дает верные определения и рисунки, ученики считают число ребер и вершин, конспектируют материал и выполняют задания.

Таблица 2.

	Название графа	*Рисунок*	*Число ребер и вершин*	*Задание*
1.	Простой граф (без кратных* ребер, без петель).		V= 4 R= 3	
2.	Мультиграф (есть кратные ребра, имеющие одинаковые начальные и конечные вершины)		V= 5 R=8	
3.	Псевдограф (кратные ребра и петли)		R=5 V=3	Изобразите свой псевдограф, что бы в нем было не менее чем 3 петли и 4 кратных ребра.
4.	Пустой граф (граф, не содержащий ребер)		V=5 R=0	
5.	Полный граф (граф, в котором каждая пара различных вершин, смежная)		V=7 $R = \frac{n*(n-1)}{2}$, где n-число вершин.	В соревнованиях по круговой системе с 12-ю участниками провели встречи. Сколько встреч было сыграно?

*кратные ребра- ребра инцидентные одним и тем же вершинам и их >1.

Рассмотрим схемы дорог, они изображаются с помощью графа, но если нужно этой схемой воспользоваться с целью проезда по городу на автомашине, а движение на отдельных (или на всех) улицах одностороннее?

Тогда могут помочь сориентироваться в этой ситуации стрелки, расположенные, например, прямо на ребрах - улицах рассматриваемой схемы (графа) города.

Граф, на рёбрах которого расставлены стрелки, называется *ориентированным графом или орграфом* (рис.2.7).

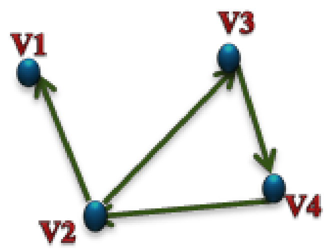


Рис. 2.7

R={ (V2;V1), (V2;V3), (V3;V4), V4;V2) }.

Ориентированные графы в экономике активно используются в сетевом планировании, в математике — в теории игр, теории множеств; при решении многих задач, в частности, комбинаторных.

3. Вопросы и задания для самостоятельной работы

1. Какие виды графов вы знаете?
2. Нарисуйте «мультиграф».
3. Нарисуйте Орграф, если заданы координаты ребер: R= { (V1;V2), (V2;V3), (V3;V4), (V3;V1), (V1;V4), (V1;V5), (V5;V6), (V6;V1), (V1;V7), (V6;V7) }. Сколько ребер получилось в графе?
4. Решите задачу: «Три подруги — Надя, Валя и Маша — вышли гулять, на них были белое, красное и синее платья. Туфли их были тех же трех цветов, но только у Нади цвета туфель и платья совпадали. При этом у Вали ни платье, ни туфли не были синими, а Маша была в красных туфлях. Определите цвет платьев и туфель каждой из подруг.

4. Подведение итогов

Учитель: Какой из рассмотренных графов вам запомнился больше всего? Что вызвало затруднение? Есть ли моменты, над которыми стоит еще поработать?

Конспект занятий №3

***Тема:* « Маршруты в графах»** (2 ч.)

Основная дидактическая цель: знакомство с понятиями: «маршрут», «цепь», «цикл», «гамильтоновы и эйлеровы циклы»; формирование умений применять знания при решении задач.

Пла

1. Актуализация знаний; (8 мин)
2. Связность в графах; (15 мин)
3. Эйлеровы циклы; (25 мин)
4. Гамильтоновы циклы; (25 мин)
5. Коллоквиум; (15 мин)
6. Домашнее задание; (2 мин)

Ход урока

1. Актуализация знаний

Учитель проводит дидактическую игру «Парные карточки». Игра проводится в парах.

Для игры заранее готовятся карточки квадратной формы из плотной бумаги, число которых определяется удвоенным количеством понятий, подлежащих закреплению. Карточки делят на пары. На одной карточке пишут название графа, на другой – его рисунок. Карточки перемешивают и раскладывают тыльной стороной вверх. Задача; отыскать карточки, образующие пары. Первый игрок «открывает» (переворачивает) две любые карточки. Если они парные, то берет их себе и имеет право следующего хода; если они непарные, то переворачивает в исходное положение, а ход передается другому игроку. Все стараются запомнить место карточек на столе и их содержание. Игра продолжается до тех пор, пока на столе не останется ни одной карточки. Выигрывает тот, у кого окажется больше пар. **(Приложение 1).**

2. Связность в графах

Маршрутом называется конечная последовательность вершин и инцидентных им ребер данного графа, в котором конец каждого ребра (кроме последнего), является началом следующего ребра (Рис. 2.8).

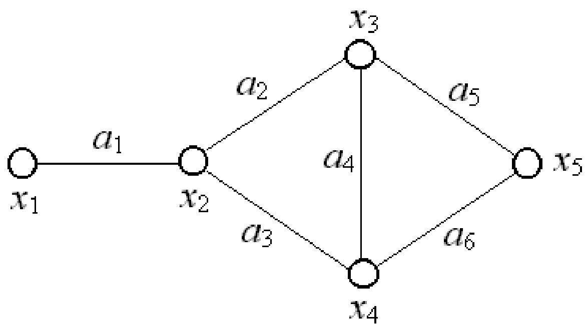


Рис. 2. 8

Маршрут 1: X_1-a_1-X_2-a_3-X_4-a_4-X_3

Задание: Составить свой маршрут.

Граф связный тогда и только тогда, когда любые его две вершины можно соединить маршрутом.

- Если концом последнего ребра является первая вершина, то маршрут называется ***замкнутым***.
- Число ребер входящих в маршрут, называется ***длинной***.
- ***Цепью*** называется такой незамкнутый маршрут, где все ребра различны.
- Если различны и вершины, то ***цепь*** называется ***простой***.
- Цепь называется ***циклом***, когда у нее совпадает первая и последняя вершина.
- Если цепь простая, то и цикл простой.

Задание: Из рисунка 2.8 выпишите: а) Цикл; б) Простой цикл; в) Простую цепь.

Решим задачу и определим связный это граф или нет.

Задача о планетах: «Между девятью планетами Солнечной системы введена космическая связь. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон-Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий, Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс, Марс-Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?» (Рис. 2.9).

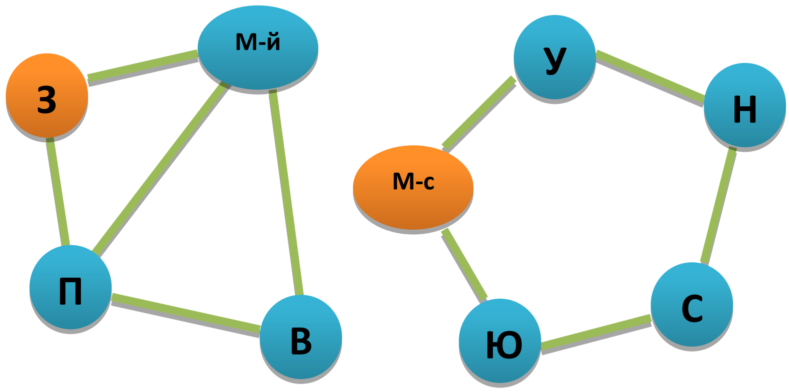


Рис. 2.9

Таким образом, решив задачу, мы сможем ввести определение несвязного графа.

Несвязный граф- граф, который состоит из нескольких частей, каждая из которых или связный граф или изолированная вершина (Рис. 2.10).

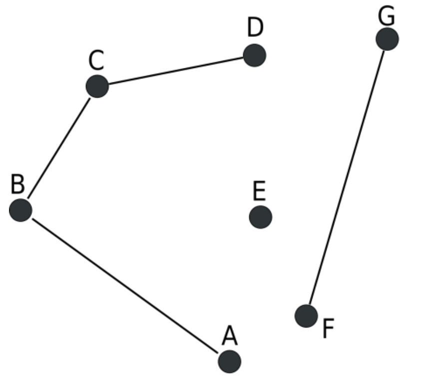


Рис. 2.10

Учитель: На рисунке 2.9 и 2.10 мы получили несвязный граф, ребята, подумайте, как можно из несвязного графа сделать связный и наоборот?

Ответ: Нужно удалить или добавить ребро. Такое ребро в теории графов (после удаления которого, граф из связного превращается в несвязный) называется *мостом*.

2. Эйлеров цикл

На первом уроке мы свами уже знакомились с Леонардом Эйлером и задачей «О кёнигсбергских мостах», сегодня мы узнаем, что такое эйлеровы циклы.

Ребята, кто из вас сможет вспомнить историю и формулировку задачи «О Кенигсбергских мостах»?

Ответ учеников: Бывший Кенигсберг (ныне Калининград) расположен на реке Прегель. С берегов на острова были перекинуты мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены. Кенигсбергцы предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем семи мостам и вернуться в начальный пункт, причём на каждом мосту следовало побывать только один раз (рис.2.3).

Изобразим чертеж к задаче, но уже с использованием терминов из теории графа. Мосты заменим на ребра, а части суши изобразим вершинами (Рис.2.11) . Данную работу выполняем в мини-группах по 4 человека.

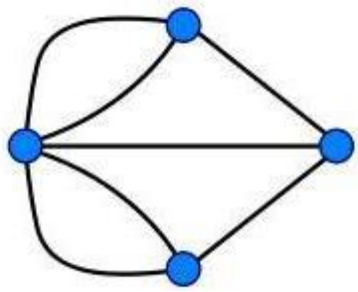


Рис. 2.11

Условия:

1. Граф должен быть связный.
2. Поиск цикла, содержащего все ребра графа.

Делая общие выводы, ученики выясняют, что при соблюдении всех перечисленных выше условий, задача остается не решаемой, так как одно ребро (мост) всегда будет не пройдённым!

Эйлеров цикл- цикл, содержащий все ребра графа.

Теорема. Связный граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четную степень.

Отметим, что если граф содержит эйлеров цикл, то каждое ребро при обходе графа имеет «пару». Поэтому логично, что из каждой вершины будет выходить четное число ребер, то есть все вершины будут иметь четную степень. Эта теорема помогает мгновенно определить, содержит ли граф эйлеров цикл, путем подсчета степеней вершин.

Задачи:

1. Классическая математическая игра с карандашом и бумагой заключается в том, что бы обойти все вершины графа и вернуться в исходную, пройдя по всем ребрам ровно 1 раз (Рис. 2.12).

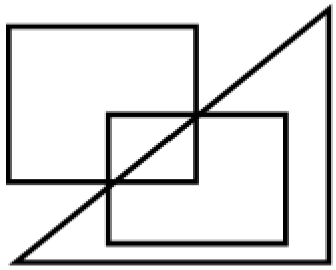


Рис. 2.12

2. Говорят, что вместо подписи Магомет описывал одним росчерком, состоящим из двух рогов Луны знак, по расчетам Эйлера такую фигуру одним росчерком пера всегда можно нарисовать, попробуйте (Рис. 2. 13) .

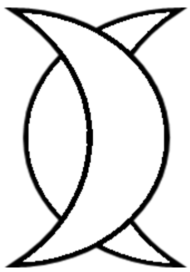


Рис. 2. 13

3. Гамильтонов цикл

Попробуем решить ту же самую задачу о «Кенигсбергских мостах», только немного изменив условие: «Можно ли обойти все части суши и вернуться обратно при этом в каждой части суши, побывав только один раз?»

(Ученики решают задачу, и показывают на доске все возможные способы решения.)

Таким образом, решив задачу о «Кенигсбергских мостах» с иным условием, мы можем ввести еще одно новое для нас определение.

Гамильтонов цикл - это простой цикл в графе, содержащий все вершины графа.

В 1859 г. У. Гамильтон придумал такую игру: 20 вершин правильного 12-гранника соответствуют 20 городам. Нужно обойти все города по одному разу и при этом вернуться в тот же город, из которого вышел (Рис 2.14).

Попробуйте решить эту задачу.

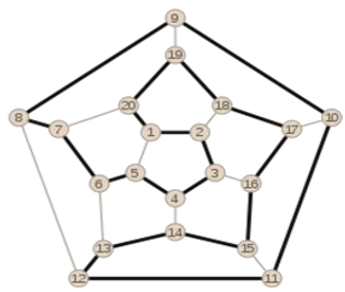


Рис. 2. 14

Итак, что бы научиться отличать Гамильтоновы циклы от Эйлеровых, нужно запомнить: «В эйлеровых циклах нужно пройти ровно один раз по всем ребрам графа, а в гамильтоновом нужно пройти один раз по всем вершинам».

Задачи на поиск гамильтоновых циклов представляют огромный интерес при организации путешествий, доставке грузов, походов в магазины и пр.

Задача: Торговец, живущий в городе А1 собирается посетить города А2, А3, А4. Расстояния между городами таковы:

A1A2=120, A1A3=140, A1A4=180,

A2A3=70, A2A4=100, A3A4=110.

Найти кротчайший путь из А1, проходящий через три другие города.

4.Коллоквиум по теме «Маршруты в графе»

1. Чем отличаются гамильтоновы графы от эйлеровых?

2. Составьте замкнутый маршрут.

3. Что такое цепь?

4. Шесть островов на реке в парке «Лотос» соединены мостами. Можно ли начать прогулку на одном из островов, пройти по каждому из мостиков ровно один раз и вернуться в тот же остров? В случае отрицательного ответа определите, сколько мостиков и между какими островами нужно построить, что бы прогулка состоялась (Рис 2.15).

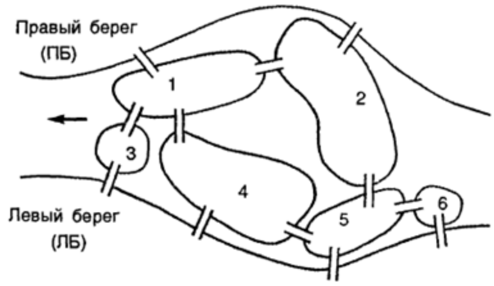


Рис. 2. 15

5. Экспозиция картинной галереи представляет собой систему коридоров, на обеих сторонах которых развешаны картины. Можно ли проложить такой маршрут осмотра экспозиций, при котором посетитель мимо каждой стены проходить ровно один раз (Рис. 2. 16).

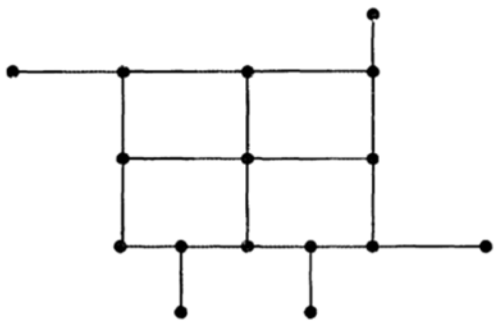
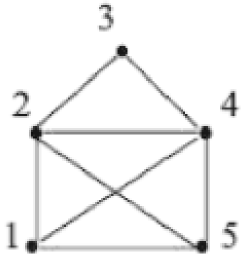


Рис. 2. 16

5. Домашнее задание.

В качестве домашнего задания, ученикам можно предложить известную головоломку с применением полуэйлеровой цепи, где нужно начертить фигуру одним росчерком и написать все возможные варианты (Рис. 2.17).



1 – 4 – 2 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1 – 5 ,
5 – 2 – 4 – 1 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1,
1 – 4 – 3 – 2 – 4 – 5 – 2 – 1 – 5

Рис. 2. 17

Конспект занятия № 4

Тема: **Деревья**. (2 часа)

Основная дидактическая цель: знакомство с понятием дерево и его свойствами; формирование опыта решения задач с использованием понятия дерево.

План

1. Организационный момент; (25 мин)
2. Оставное и минимально оставное дерево; (20 мин)
3. Деревья и вероятностью; (15 мин)
4. Задачи; (20 мин)
5. Подведение итогов; (10 мин)

Ход урока

1. Организационный момент

Ряд задач из различных областей науки приводят к рассмотрению особого вида графов, которые называются деревьями. Деревья открывались несколько раз независимо друг от друга. Г. Кирхгоф применил их к исследованию электрических цепей, А. Кэли с помощью деревьев перечислил изомеры насыщенных углеводородов. К. Жордан впервые рассмотрел их как чисто математический объект. Сейчас деревья интенсивно используются в информатике.

Учитель: Мы говорим с вами о деревьях, но из-за отсутствия четкого определения, картинка у нас не строится, так давайте, вместе с вами четко выведем понятие, что такое дерево в теории графов?

Для начала я предлагаю вам, объединившись в группы, попробовать решить одну старинную задачу. Кроме решения у вас должно быть обязательно графическое построение, а так же грамотное описание вашего построения с использованием терминов, которые мы с вами изучили на предыдущем уроке.

Задача: У Царя Гвидона было 3 сына. Известно, что ровно 100 его потомков имело по 2 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона? (Рис. 2.18)

Решение: Всякий потомок Царя Гвидона – это либо сын одного из его потомков, либо сын самого Гвидона. Из условия следует, что из 100 вершин, выходит по 2 ребра, следовательно 100*2=200 потомков. Так же не забываем и про трех сыновей Гвидона, получаем 200+3=203 потомка.

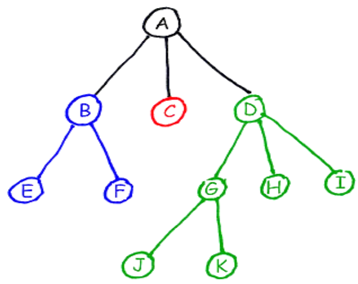


Рис. 2. 18

На рисунке 2.18 изображен связный граф, не имеющий циклов.

И так решив задачу и сделав описание полученного графа, мы с легкостью сможем вести определение «Дерева» и изобразить его (Рис. 2.19).

Дерево-это связный граф, не содержащий циклов.

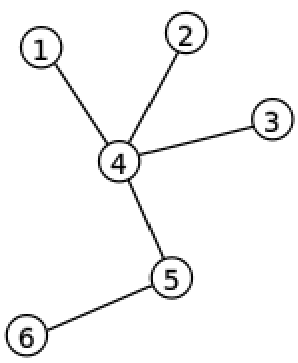


Рис. 2. 19

Свойство 1. Для каждой пары вершин дерева существует единственный путь, их соединяющий.

Свойство 2. Всякое ребро в дереве является мостом. После удаления любого ребра, дерево распадается на два несвязных графа.

Свойство 3. В дереве число вершин на одну больше числа ребер.

2. Остовное и минимальное остовное дерево

Приведите примеры, где можно встретить граф – дерево. (С помощью деревьев можно составить свое генеалогическое дерево, графы используются на телевидении для представления уровня безработицы, ветвей власти и др.). Графы помогают наглядно представить автомобильные маршруты, ребра у них являются улица и автодороги, а вершинами - населенные пункты и города. Вершины таких графов имеют наименования, ребрам соответствуют числа, обозначающие расстояние в километрах, в итоге полученный граф является нагруженным или взвешенным.

Нагруженный граф - граф, где каждое ребро имеет вес, некую числовую характеристику.

В любом связном графе существует ***остовное дерево*** - это подграф данного графа, с тем же числом вершин, который является деревом.

Остовное дерево, у которого сумма весов ребер минимальна, называют ***минимальным остовным деревом*** (МОД).

Задача: В стране некоторые пары городов соединены авиалиниями, проложи маршрут так, что бы турист смог побывать в каждом городе с наименьшими затратами на дорогу и вернуться домой (Рис. 2.20) .

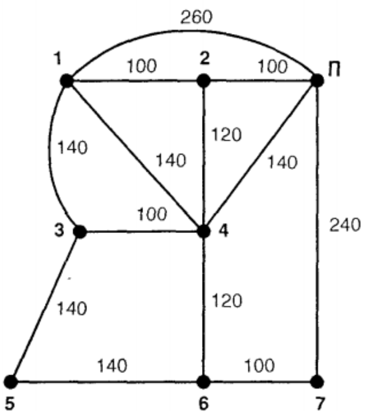


Рис. 2. 20

3. Деревья и вероятность

При анализе вероятностей различных событий возможные альтернативные исходы и соответствующие вероятности часто представляют в форме деревьев, где вершины - это возможные исходы, а ребра - значение вероятностей возможных исходов.

Пример: В каждой из трех групп по 25 студентов. Число студентов группы, сдавших экзамен по математике, равно 22, 20 и 18 соответственно. Случайно выбранный студент сдал экзамен по математике. Какова вероятность, что это студент первой группы? (Рис 2.21)

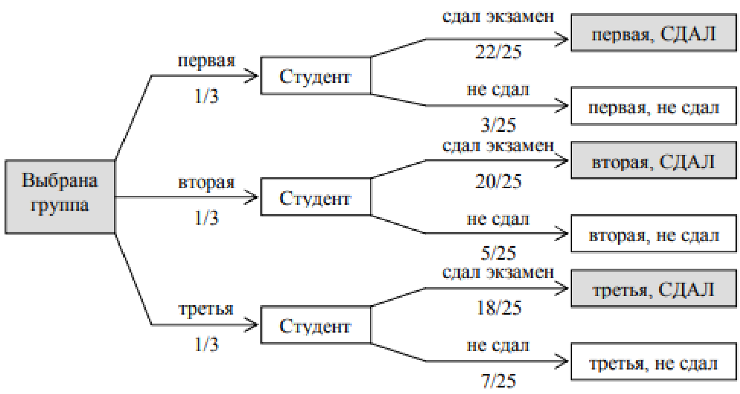


Рис. 2. 21

Обозначим через А событие, заключающееся в том, что случайно выбранный студент сдал экзамен. Этому событию на графе благоприятствуют три маршрута. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{22}{25} + \frac{1}{3} \times \frac{20}{25} + \frac{1}{3} \times \frac{18}{25} = \frac{1}{3*25}(22 + 20 + 18) = \frac{60}{3*25} = \frac{4}{5}$$

4. Задачи для самостоятельного решения

1. Студент пришел на экзамен, зная 25 из 30 билетов. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен, если после отказа отвечать на билет ему предоставляется возможность вытянуть еще один?

2. В некотором городе было решено провести газопровод между пятью районами A, B, C, D, E. Стоимость работы указана в таблице 3. Как провести газопровод, чтобы к газу были подключены все районы с минимальными затратами?

Таблица 3

	A	B	C	D	E
A		1000	700	1000	1100
B	1000		999	1010	899
C	700	999		1010	900
D	1000	1010	1010		1200
E	1100	899	900	1200	

5. **Подведение итогов**

Учитель в форме диалога узнает у учеников проблемы, с которыми они столкнулись, изучая новый материал, оценивает эмоциональное состояние класса.

Конспект занятий №5

***Тема:* «Укладка Графа»** (2ч)

Основная дидактическая цель: знакомство с понятиями: грань графа, укладка графа, плоский граф. Рассмотрение эйлеровой характеристики для плоского графа. Решение задач на укладку графов на плоскости.

План

1. Актуализация знаний;(5 минут)
2. Организационный момент; (5 мин)
3. Почему граф плоский? (30 мин)

4. Укладка графа; (20 мин)
5. Эйлерова характеристика для плоского графа; (25 мин)
6. Рефлексия; (5 мин)

Ход занятия

1. Актуализация знаний

Ученики проводят в парах взаимоконтроль, задают друг другу не мене трех вопросов по теме «Деревья», оценивают ответ по 5-бальной шкале.

2. Организационный момент

На сегодняшнем занятии мы будем говорить о некоторых геометрических особенностях изображений графа. Некоторые графы можно начертить на плоскости так, чтобы их ребра не имели общих точек, кроме вершин, принадлежащих им, но другие виды графов так уже нарисовать не получится. Для того что бы в этом вопросе хорошо разобраться, я вам предлагаю начать изучение новой темы «Укладка графа».

3. Почему граф плоский?

Обратимся с вами к одной из самых старых топологических задач, которая долго не поддавалась решению любителям головоломок. Попробуйте и вы решить эту задачу. Задача называется «О трех домах и тех колодцах» и звучит она так: «В некотором городе на одном участке земли были построены три дома и вырыты три колодца для их обитателей. Природа страны и ее климат таковы, что колодцы часто пересыхают, поэтому важно, что бы у каждого жителя доступ был к каждому колодцу. Через некоторое время жители домов серьезно поссорились и решили проложить пути к колодцам так, чтобы они не пересекались, и им не приходилось встречаться друг с другом» (Рис. 2.22)

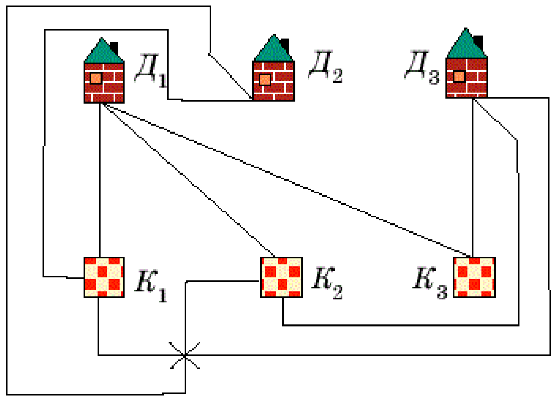


Рис. 2. 22

Ученики предлагают свои варианты решения данной задачи.

Задача будет иметь решение, если построить мост или прокапать подземный туннель, только тогда пути не будут иметь пересечения. На плоскости задача решения не имеет.

На рисунке 2. 23 (а) изображен граф G; некоторые ребра которого имеют точки пересечения. На рисунке 2.23 (б), изображен этот же граф G, так, что его ребра не пересекаются.

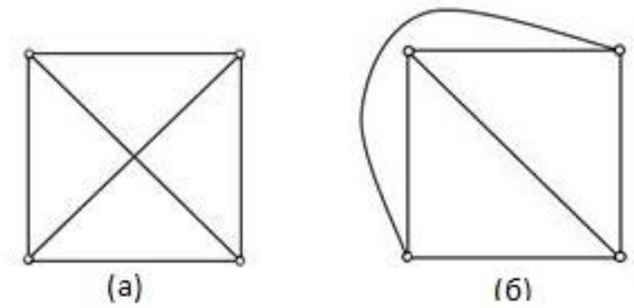


Рис. 2. 23

Граф называют *плоским*, если его можно представить на плоскости так, что бы никакие два его ребра не имели других точек пересечения, кроме их общей вершины.

Гранью графа называют множество точек плоскости, которые можно соединить кривой линией так, чтобы она не пересекала ни одного ребра графа.

Представим, что ребра нашего графа, это эластичные нити, с ними мы можем делать что угодно: укорачивать, удлинять, загибать и пр.

Потренируемся на представленных вам фигурах и попробуем «порастягивать» ребра графа так, чтобы изобразить плоский граф (Рис. 2.24).

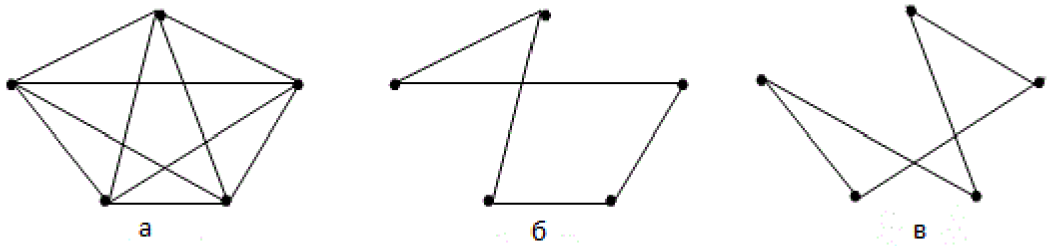


Рис. 2. 24

4. Укладка графа

Что бы убедиться в решаемости или не решаемости задачи «о трех домах и трех колодцах», рассмотрим такой термин, как укладка графа.

Прежде чем определить понятие укладки графа, введем некоторые необходимые нам понятия.

Жордановой кривой (или жордановой дугой) на плоскости называется непрерывная кривая, не имеющая самопересечений (рис 2.25 (а)); *замкнутой жордановой кривой* называется жорданова кривая, начало и конец которой совпадают (рис. 2.25(б)).

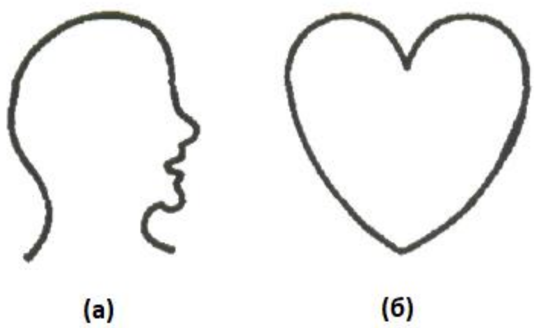


Рис. 2. 25

Теперь можно приступить к определению укладки графов в данном пространстве; имеются в виду те пространства, в которых можно определить жордановы кривые (это в первую очередь плоскость и трехмерное пространство).

Говорят, что граф G может быть уложен (или обладает укладкой) в данном пространстве, если его можно изобразить в этом пространстве при помощи точек, представляющих вершины G, и жордановых кривых, представляющих ребра, причем эти кривые не пересекаются друг с другом. Из этого утверждения следует теорема.

Теорема. *Каждый граф может быть уложен в трехмерном евклидовом пространстве.*

Укладкой графа называется такое его геометрическое изображение, при котором ребра пересекаются только в вершинах. Если существует укладка графа на плоскости, то граф называется *планарным.*

5. Эйлерова характеристика для плоских графов

Для любого плоского связного графа G с p-вершинами, q-ребрами и r-гранями, справедливо следующее равенство:

$$\boxed{p - q + r = 2}$$

Задача. Внутри квадрата задано 50 точек, которые соединены не пересекающимися отрезками между собой и с вершинами квадрата, так, что квадрат разделился на треугольники. Сколько треугольников получилось? (Рис 2.26)

Решение:

P=54, граф плоский, значит применяем т. Эйлера.

$p - q + r = 2$

$2q = 3(r-1) + 4; \ \rightarrow \quad q = \frac{3r+1}{2}.$

$54 - \dfrac{3r+1}{2} + r = 2; \rightarrow$

$54 - \dfrac{3r+1+2r}{2} = 2; \rightarrow$

$\dfrac{5r+1}{2} = -52; \rightarrow$

$5r + 1 = 104; \rightarrow$

$r = 103.$

Ответ: r=103 теугольника.

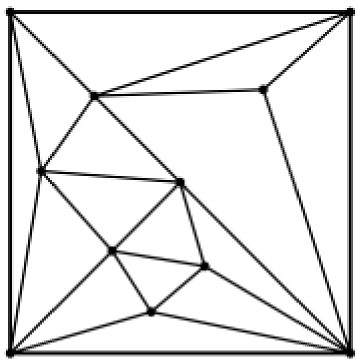


Рис. 2. 26

6. Рефлексия

В конце урока учитель предлагает каждому ученику выбрать только одного своего одноклассника, кому хочется сказать спасибо за сотрудничество и пояснить, в чем именно это сотрудничество проявилось. Учителя из числа выбираемых следует исключить. Благодарственное слово педагога является завершающим. Учитель отмечает оценкой, самых активных учеников.

Конспект занятий №6

***Тема:* «Раскраска вершин графа».** (2ч)

Основная дидактическая цель: знакомство с понятием вершинной раскраски графа и алгоритмом правильной раскраски вершин графа; применение полученных знаний при решении задач.

План

1. История гипотезы «четырех красок»; (10 мин)
2. Алгоритм раскраски; (25 мин)
3. Задачи; (45 мин)
4. Рефлексия.(10 мин)

Ход занятия

1. История «Четырех красок»

История знаменитой проблемы четырѐх красок, поставленной ещѐ в середине XIX века является уникальной и одновременно поучительной.

В 1852 году Ф. Гутри, изучая различные карты, предположил, что их можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы страны с общими границами имели разные цвета.

В 1879 году была опубликована статья, в которой лондонский адвокат А. Компе доказал, что четырех цветов достаточно для решения задачи, но в 1890 году П. Хивуд обнаружил неустранимую ошибку в работе Компе, и вновь потребовалось новое доказательство.

Многие математики потратили много времени и сил, и никому не удавалось найти такую карту, для раскраски которой потребовалось бы пять цветов. С 1970 по 1976 год математики К. Аппель и В. Хакен из Иллинойского университета с помощью компьютера путем перебора многих тысяч вариантов окончательно доказали: «Четырех красок достаточно».

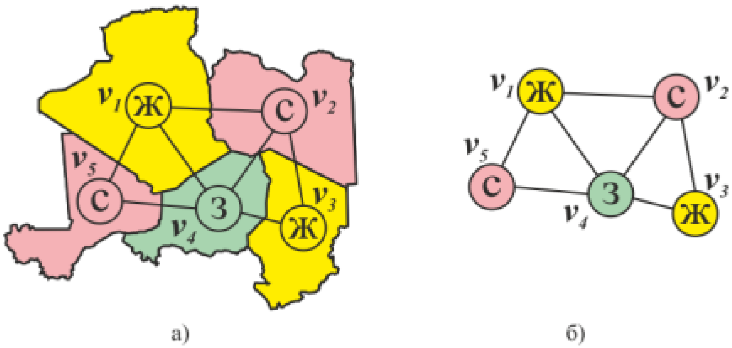


Рис. 2. 27

Алгоритм раскраски

Когда говорят о правильной раскраске вершин графов, подразумевают под этим присвоение цветовых меток (номеров) вершинам графа так, чтобы любые две смежные вершины, имели разные цвета (Рис 2.27).

Наименьшее число цветов, необходимое для правильной раскраски графа, называется его *хроматическим числом* и часто записывается как X(G).

Для правильной раскраски вершин графа может быть использован достаточно простой алгоритм:

1. Предположим, что множество вершин как-то упорядочено и V_i — i-я вершина этого множества. Тогда первоначальная допустимая раскраска может быть получена так: окрасить V_i в цвет 1.
2. Каждую из оставшихся вершин окрашивать последовательно: вершина V_i окрашивается в цвет с наименьшим возможным «номером» (т. е. выбираемый цвет должен быть первым в данном упорядочении цветом, не использованным при окраске какой-либо вершины, смежной Vi).

Индивидуальная работа. Для графа, изображенного на рисунке 2.28 применить алгоритм раскраски и окрасить правильно его вершины.

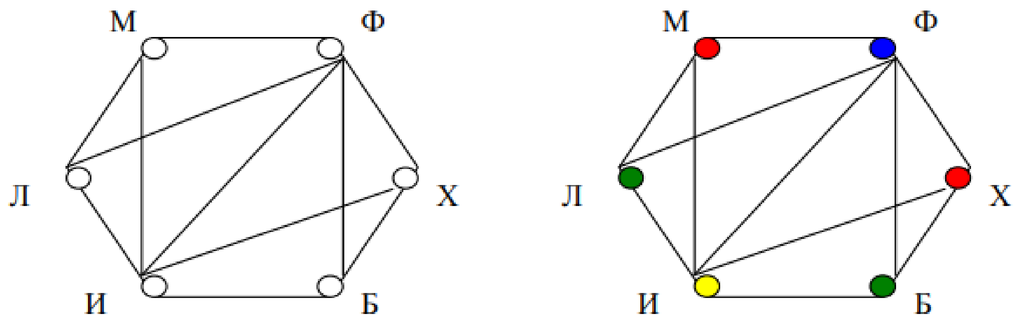


Рис. 2. 28

Вершины, окрашенные в один цвет, образуют одноцветный класс. Особенность одноцветных вершин состоит в том, что они несмежные. Эта особенность может быть использована при решении разнообразных практико-ориентированных задач, в которых некоторые объекты или процессы не могут рассматриваться или выполняться одновременно (например, задачи о составлении расписания, о планировании работ и т.п.).

3. Решение задач

Задача 1. На предприятии планируется выполнить 9 работ V1, V2…V9. Для выполнения этих работ нужны механизмы: A1, A2…A6. Использование механизмов для каждой работы определяется таблицей 4. Ни один механизм не может быть использован на двух и более работах. Выполнение каждой работы занимает 1 час. Как распределить механизмы, что бы суммарное время выполнения всех работ было минимальным, и каково это время?

Таблица 4.

Механизм	Работа								
	V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**	**V_5**	**V_6**	**V_7**	**V_8**	**V_9**
A_1	+		+				+	+	+
A_2		+		+					
A_3			+			+	+		+
A_4	+	+		+	+				

A_5			+		+			+	
A_6					+	+	+	+	+

Задача 2. Имеется шесть групп учащихся: 1) математики; 2) химики; 3) историки; 4) физики; 5) биологи; 6) литераторы. Учащиеся каждой группы должны посещать лекции по соответствующей дисциплине. Например, математики – по математике, физики – по физике и т.д. Математики также должны посещать лекции по физике, физики – по математике, химики – по физике, биологи – по физике и химии. Кроме того, учащиеся каждой группы хотели бы посещать лекции по истории, а математики и физики – ещѐ и лекции по литературе. Требуется составить оптимальное расписание, которое удовлетворило бы всех учащихся.

Задача 3. Образовавшийся коммерческий университет арендует здание для проведения занятий. В четверг проводится 7 лекций: право, английский, французский, экономика, менеджмент, этикет. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно, например, их читает один и тот же лектор, или есть студенты, которые должны посетить разные лекции, или для их проведения нужна одна и та же аудитория и т.д. (В таблице 5 отмечены лекции, которые не могут читаться одновременно). Определите минимальное время, за которое можно провести лекции в четверг.

Таблица 5.

	Право	Англ.	Франц	Эконом	Менедж	Маркет	Этикет
Право		+		+			+
Англ.	+		+		+	+	
Франц.		+			+	+	+
Эконом.	+				+	+	
Менедж.		+	+	+		+	
Маркет.		+	+	+	+		
Этикет	+		+				

Задача 4. Пять лекций, каждая из которых длится час можно прочитать или в первую смену за 3 часа с 9:00 до 12:00, или во вторую смену за 4 часа с 14:00 до 18:00. Невозможность одновременного чтения лекций задана таблицей 6. Найти число вариантов распределения лекций по промежуткам времени в первую и вторую смену.

Таблица 6.

	Математика	Программир	Физика	Биология	Химия
Математика		+	+	+	
Прогаммир.	+		+	+	+
Физика	+	+			+
Биология	+	+			+
Химия		+	+	+	

4. Рефлексия

Учитель подводит итоги проделанной работы и предлагает учащимся обратить внимание на карточки «облако тегов», которые необходимо дополнить.

1. сегодня я узнал...
2. было трудно…
3. я научился…
4. меня удивило…
5. мне захотелось…

Конспект занятий №7

***Тема:* «Приложение теории графов».** (2ч)

Основная дидактическая цель: формирование представлений у обучающихся о различных приложения теории графов; формирование ценностного отношения к математическим знаниям.

План

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Графы вокруг нас; (40 мин)
3. Занимательные графы; (40 мин)
4. Подведение итогов; (5 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент

За последнее время теория графов широко распространилась и проникла во все сферы жизнедеятельности человека. Каждый даже не замечая этого, выстраивает своеобразные связи, схемы, циклы и пр. и пользуется теорией графов. Сегодня мы с вами рассмотрим и познакомимся с самыми удивительными способами применения теории графов.

2. Графы вокруг нас

Графы в физике и химии. Сложную структуру молекулы, очень точно можно представить, обратившись к помощи простого графа, любой, кто изучал органическую химию, знает, что графы очень наглядно могут помочь показать различные химические соединения (Рис. 2. 29 (а)).

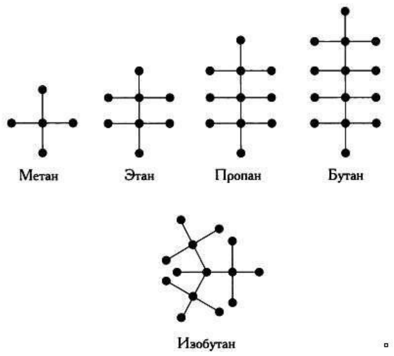


Рис 2.29 (а)

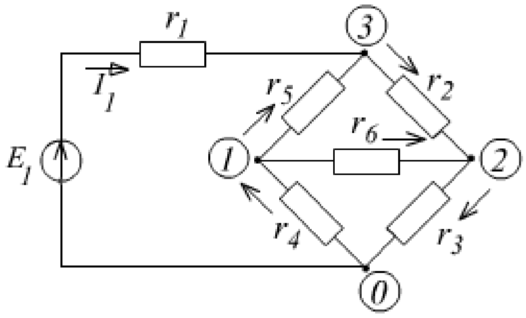


Рис 2.29 (б)

В физике наглядным примером применения графов, могут послужить электрические цепи и интегральные схемы (Рис 2.29 (б)).

Графы в архитектуре. В архитектуре теория графов занимает одно из важных мест. Например: На первом этаже дома на одну семью нужно расположить следующие комнаты: кухню (К), спальная комната (С), зал (З), коридор (Ко) и ванную (В). Между этими помещениями должны существовать проходы из ванной в кухню, их кухни в коридор, из коридора в зал, из зала в спальную комнату (Рис 2.30). Вопрос, возможно ли постройка такого дома с правильной прямоугольной формой?

Если обозначить точками элементы К, С, З, Ко, В и соединить нужные точки ребрами, мы получим цикл: при таком расположении мы получим путь из любой комнату в любую.

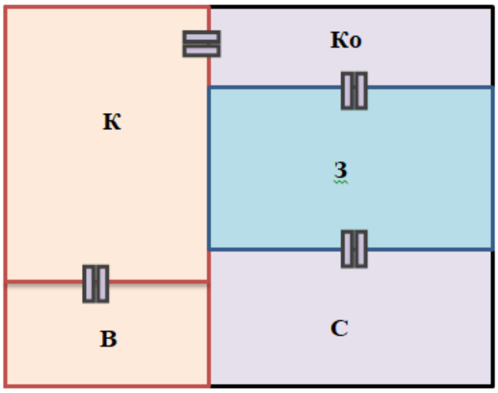


Рис. 2. 30

Анализ графов в общественных зданиях поможет определить степень доступности различных отделов, расположения помещений- буфета, лестницы, кинозала и пр.

Графы в социальных сетях. Часто социальные сети очень сложны, а соответствующий граф позволяет наглядно представить и понять проблемы взаимоотношений между группами компаний, районов городов и т.д. Анализ социальных сетей использовался при изучении распространении болезней (СПИД, туберкулез, малярия), иноваций, анализ воздействия политических решений и даже слухов. Рассмотрим задачу «Друзья политика»: Допустим, что в группе людей, состоящей как минимум из трех человек, у любых двух ее членов есть ровно один общий друг. Следовательно, есть такой человек, который будет другом для всех членов группы. Давайте попробуем изобразить этот граф (Рис. 2. 31).

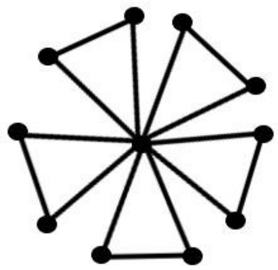


Рис. 2.31

3. Занимательные графы

Существует множество игр, в которых нужно свести задачу до построения графа. Ставится вопрос, существует ли выигрышная стратегия или нет? Сейчас мы с вами поиграем в самые распространённые игры.

- Кто назовет 20?

Игра проводится учителем по рядам, начиная с первого ученика, сидящего на первой парте.

Первый игрок называет одно из двух чисел 1 или 2. На каждом шаге следующие игроки прибавляют к результату по очереди 1 или 2. Выигрывает тот, кто первым назовет число 20. Существует ли выигрышная стратегия этой игры?

- Игра проводится по парам.

Эту игру придумал Дэвид Сильверман, два игрока по очереди проводят отрезки на сетке размером 5*5 или 6*6. Отрезки добавляются только в конце или начале змейки (чем-то игра напоминает домино). Проигрывает тот, кто первый построит цикл.

- Ханойские башни.

Эту игру придумал Эдуард Люка в 1883 году и формулируется она так: на три пики нанизаны n-колец разного размера, упорядоченные от меньшего к большему. Большее кольце не может быть расположено на меньшем. Нужно переместить кольца так, что бы восстановить исходную пирамиду на третьей пике (Рис 2.32). На каждом ходу перемещаем только одно кольцо (число решений для n-колец равно 2^n-1, с увеличением n, число решений возрастает).

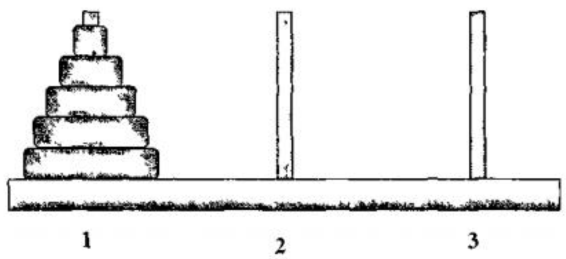


Рис. 2.32

4. **Подведение итогов**

В завершении нашего занятия приведу слова Джеральда Уитроу, в своей книге «Структура и эволюция Вселенной» он писал: «Мозг состоит из огромного числа нейронов (вершины графа!), связанных между собой нервами (ребрами графа!), которые не должны пересекаться. Подобные сложные связи были бы не возможны в двумерном пространстве, что ясно видно на примере плоского графа. Это интересно тем, что даже наш разум можно представить как огромный нейронный граф» [Альсина, 2014].

Конспект занятий №8

Тема: **Конкурс проектных работ** (2ч)

Основная дидактическая цель: формирование опыта проектной деятельности и представления ее результатов.

План

1. Организационный момент; (10 мин)
2. Представление проектных работ; (70 мин)
3. Подведение итогов; (10 мин)

Ход занятия

1. **Организационный момент**

Учитель приветствует учащихся. Отмечает присутствующих. С помощью стихотворения задает настрой и проводит актуализацию знаний.

Учитель: Какую тему из курса теории графов, автор затрагивает в своем стихотворении?

В четыре краски красят математики,

Стремясь найти решение задачи.

Они меняют области местами,

Но неизменно терпят неудачу.

(Дж. Линдоном «Задача о четырех красках)

2. **Проектные работы**

Темы проектных работ:

1. «Решение лабиринта при помощи графа».
2. «Графы и психология».
3. «Геометрические задачи с графами».
4. «Теорема о пяти красках».
5. «Связные графи и задачи на их применение».
6. «Генеалогическое дерево. Один из способов применения теории графов»
7. «Графы в головоломках».
8. «Алгоритм Краскала».
9. «Олимпиадные задачи и теория графов».
10. «Исторические задачи теории графов».

3. **Подведение итогов**

Учитель предлагает учащимся написать эссе на одну из предложенных тем: «Почему я выбрал этот курс», «Получил ли я пользу от изучения курса», «Общие впечатления от изучения курса».

Конспект занятий №9

Тема: **«Итоговое занятие»** (1ч)

Основная дидактическая цель: применение языка теории графов при решении задач.

План

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Контрольный срез; (40 мин)

Ход занятия

1. **Организационный момент**

На итоговом занятие мы уделим время контрольному срезу, который покажет чему вы научились в ходе изучения курса «В стране графов» и все ли темы успешно усвоили. Данная работа проводится по вариантам.

2. **Контрольный срез.**

Вариант 1.

1. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?
2. Шесть островов на реке в парке «Лотос» соединены мостами. Можно ли начать прогулку на одном из островов, пройти по каждому из мостиков ровно один раз и вернуться в тот же остров? В случае отрицательного ответа определите, сколько мостиков и между какими островами нужно построить, что бы прогулка состоялась (Рис 2.15).

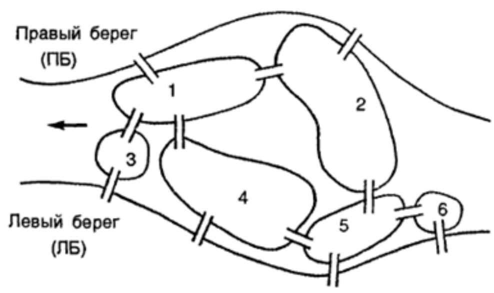


Рис. 2. 33

3. На предприятии планируется выполнить 9 работ V1, V2…V9. Для выполнения этих работ нужны механизмы: A1, A2…A6. Использование механизмов для каждой работы определяется таблицей 4. Ни один механизм не может быть использован на двух и более работах.

Выполнение каждой работы занимает 1 час. Как распределить механизмы, что бы суммарное время выполнения всех работ было минимальным, и каково это время?

Таблица 7.

Механизм	Работа								
	V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**	**V_5**	**V_6**	**V_7**	**V_8**	**V_9**
A_1	+		+				+	+	+
A_2		+		+					
A_3			+			+	+		+
A_4	+	+		+	+				
A_5			+		+			+	
A_6					+	+	+	+	+

Вариант 2.

1. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
2. Экспозиция картинной галереи представляет собой систему коридоров, на обеих сторонах которых развешаны картины. Можно ли проложить такой маршрут осмотра экспозиций, при котором посетитель мимо каждой стены проходить ровно один раз (Рис. 2. 16).

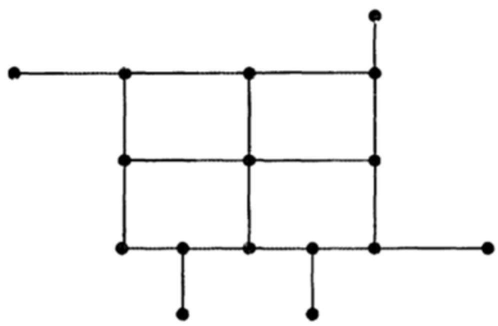


Рис. 2. 34

3. Имеется шесть групп учащихся: 1) математики; 2) химики; 3) историки; 4) физики; 5) биологи; 6) литераторы. Учащиеся каждой группы должны посещать лекции по соответствующей дисциплине. Например,

математики – по математике, физики – по физике и т.д. Математики также должны посещать лекции по физике, физики – по математике, химики – по физике, биологи – по физике и химии. Кроме того, учащиеся каждой группы хотели бы посещать лекции по истории, а математики и физики – ещѐ и лекции по литературе. Требуется составить оптимальное расписание, которое удовлетворило бы всех учащихся.

Выводы по второй главе

В данной главе представлена авторская методика обучения элементам теории графов обучающихся 7 класса в рамках курса по выбору «В стране графов».

Разработана программа курса по выбору «В стране графов», включающая следующие составляющие: пояснительная записка, цели и задачи курса, содержание обучения, учебно-тематическое планирование, требования к результатам обучения и комплекс учебно-методических ресурсов.

Разработано и представлено соответствующее методическое сопровождение занятий курса – 9 конспектов занятий (17 ч.) курса по выбору «В стране графов».

Заключение

В ходе проведенного исследования мы пришли к выводу, что существуют возможности для включения элементов теории графов в содержание математической подготовки школьников. Одной из таких возможностей является включение в программу дополнительной подготовки по математике специального курса по выбору «В стране графов» для обучающихся 7 кл.

Простой язык теории графов позволяет решать многочисленные, разнообразные и довольно нетривиальные задачи дискретной математики.

Одной из особенностей теории графов, которая, собственно, и позволяет ставить вопрос о введении элементов теории графов в школьный курс математики, является возможность представить граф (как математическую модель или как отвлеченный образ) геометрический – в виде простого, удобного (имеется в виду удобного для человека) в обращении рисунка: вершины отождествляются с точками на плоскости, а ребра – с линиями, соединяющими вершины. *Рисунок графа, являясь знаком, чувственно воспринимаемым материальным предметом, служит посредником между реальной действительностью и математической моделью.* При изображении графа определенные свойства изучаемого явления моделируются с помощью простых знаков – точек (одного цвета или нескольких цветов) и отрезков (одного цвета или нескольких цветов, направленных или ненаправленных). При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием. В процессе познания рисунки графов, как чувственные образы, становятся носителями богатого смыслового содержания.

Перспективным и естественным является использование изобразительного языка графов в качестве служебных средств, при решении различных методических вопросов обучения математике.

В рамках нашего исследования нами были охарактеризованы основные дидактические условия для включения элементов теории графов в математическую подготовку школьников.

Разработана примерная программа курса по выбору «В стране графов» рассчитанная на 17 часов и, соответствующее методическое сопровождение – 9 конспектов занятий.

Изучение элементов теории графов на дополнительных занятиях по математике способствует формированию предметных и метапредметных результатов обучения, повышению познавательного интереса и воспитанию ценностного отношения к математическим знаниям.

В ходе проведённого исследования все основные задачи выполнены и цель достигнута.

Библиографический список

3. Альсина К. Карты метро и нейронные связи. Теория графов. / Пер. с исп.- М.: Де Агостини, 2014 г.
4. Альпин Ю.А., Ильин С.Н. Задачи по дискретной математике: Учебно-
5. методическое пособие. — Казань: Казанский федеральный университет, 2013. — 26 с
6. Андреев В.И. Педагогика творческого саморазвития. Казань, 1996. С.568
7. Березина Л. Ю. Графы и их применение. Пособие для учителей. – М.: просвещение, 1979.
8. Берж К. «Теория графов и ее применение», М, «Мир», 1980;
9. Богомолова О.Б. Логические задачи. 4-е изд., испр. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 277с. :ил.
10. Большой энциклопедический словарь: в 2-х т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. – Сов. энциклопедия, 1991
11. Болховитинов В. Н., Колтовой В. И., Лаговский И. К. Твое свободное время. М.: Детская литература, 1975.
12. Виленкин Н.Я., Жохов В.И. и др. Математика.5 класс. 31-е изд.,стер. - М: 2013. - 280с.
13. Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. и др. Алгебра. 9 класс. С углубленным изучением математики. 7-е изд. - М.: 2006. - 368 с
14. Волкова С.В. Дидактические условия реализации учащимися личностных смыслов в процессе обучения. –Автореф. Дисс. К.п.н. – Брянск, 2001.
15. «В помощь учителю математики «, Йошкар-Ола, 1972 (ст. «Изучение элементов теории графов»)
16. Гарднер М. «Математические головоломки и развлечения», М. «Мир», 1972.

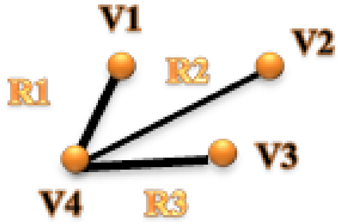
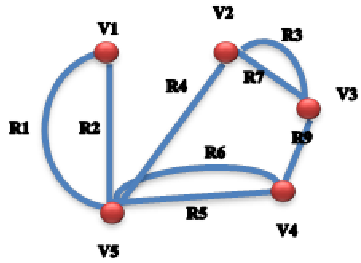
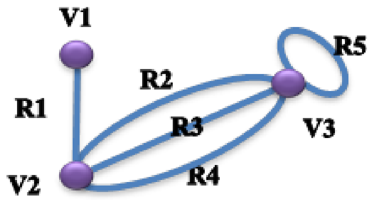
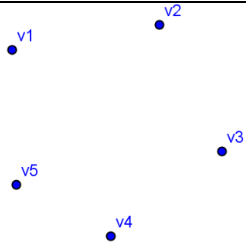
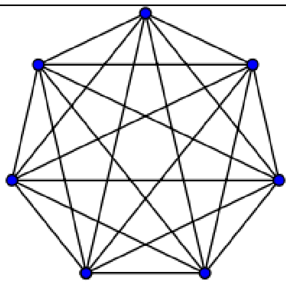
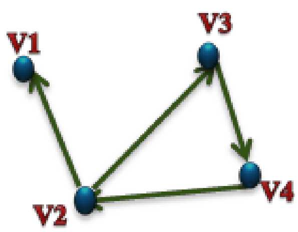
17. Глухова А.К, «Элементы теории графов в школьном курсе математики» , диссертация, Москва, 2016 г.
18. Жуковская Е.П. Дидактические аспекты организации факультативов [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://festival.1september.ru.
19. Игнатьев, Е.И. Хрестоматия по математике «В царстве смекалки, или арифметика для всех» – Ростов, 1995 г
20. Кейв М.А. Дискретная математика для будущего учителя: уч. пос.- Красноярск: КГПУ им В.П. Астафьева, 2009.
21. Кейв М.А. Дискретная математика: учебное пособие [электронное издание]. – Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016.
22. Кейв М.А., Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие. – Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2015.
23. Курьянов, М.А. Активные методы обучения : метод. пособие / М.А. Курьянов, В.С. Половцев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 80 с. – 50 экз.
24. Лернер И.Я., Дидактические основы методов обучения. М.: Педагогика, 1981. - 186 с
25. Луначарский А.В., статья из «Учительской газеты» №1, 1924 г.
26. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов, уч.- Метод. Пособие/ Изд-е 2-е, стереотип.- Минск: НТОО «ТетраСистемс», 2001.
27. Мельников, О.И. Незнайка в стране графов. – М.: КомКнига/URSS, 2006.
28. Оре О. Графы и их применение: пер. с англ./ Под ред. И предисл. И.М. Яглома. Изд. 4-е.- М.: Издательство ЛКИ, 2008.
29. Оре, О. Теория графов. – М.: Наука, 1980.
30. Предпрофильная подготовка учащихся: Разработка и экспертиза курсов по выбору. Структура и содержание портфолио (методические рекомендации). – Вологда: Издательский центр ВИРО, 2006. – 84 с

31. Сластенин В.А. и др. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр "Академия", 2002. - 576 с.
32. «Соросовский образовательный журнал» №11, 1996 (ст. «Плоские графы»)
33. Татт, У. Теория графов. – М.: Мир, 1988.
34. http://naukovedenie.ru/PDF/06PVN515.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/06PVN515
35. Фарков, А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 класс. – М., 2004
36. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 2010.
37. Шевченко, В.Е. Некоторые способы решения логических задач. – Киев, Вища школа, головное изд-во, 1979 – 80 с.
38. Энциклопедия: Дискретная математика /Гл. ред. В.Я. Козлов. – М.: БРЭ, 2004.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Вариант парных карточек по теме: *«Виды графов»*

Простой граф	
Мультиграф	
Псевдограф	
Пустой граф	
Полный граф	
Ориентированный граф	

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 3
Начало загрузки: 23.05.2018 19:00:08
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла: ДИПЛОМ_Проверить
Размер текста: 1719 кБ
Символов в тексте: 74466
Слов в тексте: 9663
Число предложений: 793

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 23.05.2018 19:00:09
Длительность проверки: 00:00:03
Комментарии: не указано
Модули поиска:

ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
29,57%	0%	70,43%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Доля в тексте	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска	Блоков в отчете	Блоков в тексте
[01]	0,16%	12,61%	Раздел 2Элементы теории конечных графов в школьно...	http://100-edu.ru	17 Ноя 2016	Модуль поиска Интернет	3	24
[02]	10,67%	10,67%	Дискретная математика для будущего учителя математ...	http://pandia.ru	03 Фев 2014	Модуль поиска Интернет	14	14
[03]	3,58%	3,62%	(скачать)	http://lib.rus.ec	20 Ноя 2017	Модуль поиска Интернет	41	42

Еще источников: 17
Еще заимствований: 15,16%