МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет/филиал Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)

Выпускающая(ие) кафедра(ы) Кафедра математического анализа и методики обучения математике в вузе
(полное наименование кафедры)

Кичеева Кристина Александровна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
(ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 9 КЛАССОВ)

Направление подготовки/специальность 44.03.01
(код направления подготовки/код специальности)

Профиль «Математика»
(наименование профиля для бакалавриата)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина
08.06.2018
(дата, подпись)

Руководитель канд.физ.-мат.наук, доцент А.В. Багачук
08.06.2018
(дата, подпись)

Дата защиты 21.06.2018

Обучающийся К.А. Кичеева
08.06.2018
(дата, подпись)

Оценка ____________________
(прописью)

Красноярск
2018

Оглавление

Введение

Математика занимает особое место в науке, культуре и общественной жизни, являясь одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая целый спектр способностей личности. Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе. Действительно, практически любая сфера жизни общества не обходится без использования математического аппарата. Одной из задач развития математического образования является модернизация содержания математического образования на всех уровнях (с обеспечением их преемственности), исходя из потребностей обучающихся и потребностей общества во всеобщей математической грамотности. Современные образовательные программы по математике, составленные на основе Федерального государственного образовательного стандарта, ориентированы на становление личностных характеристик обучающегося. Выпускник школы должен быть креативным и критически мыслящим, активно и целенаправленно познающим мир; владеть основами научного метода познания окружающего мира; готовым к сотрудничеству, способным осуществлять проектную и информационно-познавательную деятельность; мотивированным на образование и самообразование в течение всей своей жизни. Перечисленные характеристики сыграют большую роль в реализации каждого обучающегося не только в будущей профессиональной деятельности, но и в жизни.

Содержательно-методическая линия «Уравнения» является одной из ведущих в школьном курсе математики. На изучение данной линии выделяется достаточно времени, вопросы решения определенных видов уравнений в школьном курсе математики освещены достаточно полно. Однако практика показывает, что обучающиеся основной и старшей школы не в полной мере владеют знаниями, умениями и способами деятельности в рамках данного раздела.

В основной школе, начиная с пятого класса, учащиеся постепенно осваивают стандартные приемы решения заданий этого раздела, а также пополняют свой математический опыт способами решения новыми видами уравнений. У большинства школьников, в этой связи, складывается впечатление о немалом количестве методов решения алгебраических уравнений. Многие считают, что методы решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений слабо взаимосвязаны и изолированы друг от друга. Такое заблуждение приводит к возникновению системных ошибок при решении уравнений, что в дальнейшем оказывает негативное влияние на результаты ЕГЭ по математике как на базовом, так и на профильном уровне, а также на предметную составляющую готовности к продолжению математического образования на следующих ступенях образования. Из всего вышеизложенного, можно сделать вывод об **актуальности** настоящего исследования.

Цель работы состоит в разработке и апробации факультативного курса «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений» для обучающихся 9 классов.

Объект исследования: процесс математической подготовки обучающихся 9 классов.

Предмет исследования: факультативный курс «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений».

При решении поставленной проблемы мы исходили из гипотезы о том, что, если в процессе изучения факультатива «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений» в 9 классах использовать специальные задачи и методические средства организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, направленные на их включение в этот вид деятельности, это будет способствовать повышению мотивации в обучении и формированию метапредметных образовательных результатов.

В соответствии с целью исследования, определены следующие **задачи**:

1. Описать современные тенденции развития математического образования.

2. На основе анализа психолого-педагогической и методической литературы охарактеризовать основные способы организации внеурочной деятельности в рамках ФГОС с учетом возрастных особенностей обучающихся 9 классов.

3. Провести сравнительный анализ представления информации по содержательной линии «Уравнения» в учебниках по математике различных авторов для общеобразовательных школ (VIII – IX кл.) с целью отбора содержания факультативного курса.

4. Разработать методическое обеспечение факультативного курса «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений».

5. Осуществить апробацию разработанной программы.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и библиографического списка.

Введение содержит основные методологические характеристики данного научного исследования. Первая глава посвящена современным тенденциям развития отечественного математического образования. Рассмотрены требования к организации факультативных курсов, а также психологические возрастные особенности обучающихся 9 классов.

Вторая глава работы содержит анализ представления информации по содержательной линии «Уравнения» в учебниках по математике различных авторов для общеобразовательных школ с целью отбора содержания факультативного курса. В этой главе приведена авторская классификация нестандартных методов решения алгебраических уравнений на основе связи с функционально-графической содержательной линией школьного курса математики. Приведена программа и методическую разработку факультативный курс «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений», а также результаты экспериментальной проверки эффективности реализации методической идеи. Представлен анализ апробации рассматриваемого курса на базе МАОУ «Лицей №6. Перспектива» г. Красноярска.

Глава 1. Психолого-педагогические особенности обучения математике в старшей школе

1.1. Современные тенденции развития отечественного математического образования

Математика занимает особое место в науке, культуре и общественной жизни, так как она является важнейшим компонентом мирового научно-технического прогресса. Именно поэтому изучение математики играют такую важную роль в образовании, развивает познавательные способности человека, логическое мышление, и это непосредственно оказывает большое влияние на преподавание других школьных дисциплин. Для успешной жизни каждого человека в современном обществе необходимо качественное математическое образование. Успех нашей страны в XXI веке, эффективность использования природных ресурсов, развитие экономики, обороноспособность, создание современных технологий зависят от уровня математической науки, математического образования и математической грамотности всего населения, от эффективного использования современных математических методов. Без высокого уровня математического образования невозможны выполнение поставленной задачи по созданию инновационной экономики, реализация долгосрочных целей и задач социально-экономического развития Российской Федерации [16].

Общество с каждым днем развивается и меняется, что обостряет уже существующие или создает новые проблемы развития математического образования. Возникают проблемы в области мотивации обучения, которые вызваны общественной недооценкой значимости математического образования, перегруженность образовательных программ по математике, устаревшее содержание оценочных и методических материалов, несоответствие учебных программ действительному уровню подготовки и потребностям обучающихся. Все это приводит к несоответствию заданий промежуточной и государственной итоговой аттестации фактическому уровню подготовки значительной части обучающихся.

Проблема содержания математического образования, которое устарело и не имеет связи с жизнью, весьма актуальна в настоящее время и тесно связана с повышением мотивации к изучению предмета в школе. Недостаточно учитываются потребности обучающихся в математических знаниях или вовсе не учитываются. Отсутствуют различия в учебных программах, оценочных и методических материалах, требованиях промежуточной и государственной итоговой аттестации для разных групп обучающихся, что приводит к низкой эффективности процесса обучения, замена обучения «натаскиванием» для сдачи экзамена, игнорирование индивидуальных особенностей и способностей отдельных обучающихся [16].

Процесс обучения должен обеспечить возможность получения надежных, необходимых и прочных знаний, являющихся фундаментом компетентной личности. Развивающемуся обществу нужны современно образованные, нравственные, предприимчивые и компетентные личности, способные самостоятельно принимать ответственные решения в ситуации выбора, прогнозируя их возможные последствия, умеющие выбирать способы сотрудничества. Они отличаются мобильностью, динамизмом, конструктивностью, обладают развитым чувством ответственности за свою судьбу, судьбу страны.

В настоящее время существует множество подходов к обновлению математического образования. Можно выделить следующие основные тенденции развития образования в современном мире:

- Дифференциация;
- Информатизация;
- Профилизация;
- Интеграция.

Дифференциация образования – это ориентирование учебного процесса на учет, удовлетворение и развитие интересов, склонностей и способностей обучающихся. Дифференциация может воплощаться на практике разными способами, например, группированием обучающихся по признаку их успеваемости, разделением учебных дисциплин на обязательные и по выбору, разделением учебных заведений на элитные, массовые и предназначенные для обучающихся с задержками или отклонениями в развитии, составлением индивидуальных планов и образовательных маршрутов для отдельных обучающихся или студентов в соответствии с интересами и профессиональной ориентацией и т. д. [19]. Дифференциация процесса обучения дает большие возможности для развития творческой целенаправленной личности, повышает активность и мотивацию у обучающихся. Основой в дифференцированном обучении является учет психологических особенностей обучающегося. Целью является сохранение и развитие индивидуальности каждого обучающегося. Реализуя дифференцированный подход в обучении, учитель видит динамику роста каждого обучающегося, и исходя из этого подбирает более эффективные пути решения возникших проблем, формы и методы организации дальнейшего развития индивидуальных способностей каждого обучающегося [15].

Информатизация образования – это часть процесса информатизации общества, комплекс социально-педагогических преобразований, связанных с внедрением вычислительной техники и информационных технологий в учреждения образования, в образовательный процесс. Информатизация образования получила наибольшее распространение во всем мире именно в последнее десятилетие – в связи с доступностью для системы образования и относительной простотой использования разных видов современной видео-, аудио- техники и компьютеров [19]. Общество все еще находится в периоде информатизации, характерной чертой которого является доминирующая деятельность, которая подразумевает под собой сбор, обработку, хранение, передачу и использование информации посредством современных информационных технологий. Происходит процесс информатизации образования, что подразумевает под собой изменение содержания, методов и форм учебной деятельности. Новое содержание обучения должно основываться на новые технологии, то есть использование компьютера, проектора, разрабатывать и внедрять новые нетрадиционные формы уроков.

Переходя на новый вид обучения с применением современных информационно-коммуникативных технологий, происходит следующее:

1. Перенос центра тяжести с обучения на учение. Учитель становится посредником между информацией и обучающимся, помогает ему самостоятельно добывать информацию, а не предоставляет ее сам.
2. Создание более тесных связей между изучаемыми предметами и окружающей действительностью.

Предоставляется возможность моделировать жизненное пространство при помощи компьютера и ввести изучаемые предметы в контекст жизни обучающихся.

3. Смена модели «образование на всю жизнь» новым подходом – «образование в течении всей жизни».

Темп развития цивилизации ускорен, знания быстро устаревают и требуют постоянного обновления, что ведет к непрерывному обучению.

4. Формирование сетевых обществ в сфере образования.

Учителя, не зависимо от территориального расположения, могут обмениваться опытом с коллегами в режиме реального времени, вести поиск необходимой информации для подготовки к уроку и различным мероприятиям.

5. Получение образования независимо от мест проживания и мобильности человека.

Дистанционное обучение, которое делает образование доступным и открытым для всех.

6. Появление домашнего образования.

Использование для самообразования и качестве дополнительного образование сеть Интернет, не выходя из дома.

7. Экономия времени.

Сокращается время на подготовку к урокам, при сегодняшней сильной загруженности учителя.

8. Развитие интеллекта человека, его творческого потенциала и критического мышления.

Обучающиеся учатся самостоятельно добывать информацию, преобразовывать ее, развивая свое творчество, осмысливают при помощи дополнительных источников.

Из вышесказанного ясно, что информатизация общества, влекущая за собой и информатизацию образования, имеет большие плюсы в современном образовании [31].

Интеграция образования. В мире всё большее распространение получает интегрированное обучение. Основной задачей интегрированного обучения является ознакомление обучающихся с основными явлениями, фактами соответствующих наук, формированием навыков, классификации и измерения изучаемых явлений, развитие научной интуиции.

Кроме внутренней, осуществляется и внешняя интеграция, направленная на сближение систем образования различных стран и формирование единого мирового образовательного пространства. Интеграцию обучения сегодня внедряют прежде всего на его первой ступени – в начальной школе. И начинают этот процесс с содержания начального образования, сущность которого заключается в том, что интеграция даёт возможность ребёнку воспринимать предметы и явления разносторонне и системно в целостном виде.

По существу, интеграция обучения позволяет уже в начальной школе заложить основы целостного восприятия природы и общества и сформировать собственное отношение к законам их развития [23].

Интеграция предметов в современной школе – одно из направлений активных поисков новых педагогических решений, развития творческого потенциала педагогических коллективов с целью эффективного и разумного воздействия на обучающихся.

Интеграция способствует систематизировать и обобщить знания обучающихся, обеспечивает овладение ими целостным знанием, комплектом универсальных человеческих ценностей.

В отечественной и зарубежной педагогической науке имеется богатый опыт исследования проблем интеграции. Задачу использования межпредметных связей в учебном процессе в разные периоды выдвигали Я.А. Коменский, И.Г. Песталоцци, Ж.-Ж. Руссо, Л.Н. Толстой, К.Д. Ушинский и др.

В данный момент быстро увеличивается объем информации, что вызывает уменьшение скорости ее восприятия и осмысления. Для выхода из данной ситуации необходимо провести синтез разных учебных предметов, разработать интегрированные курсы, взаимосвязью всех школьных дисциплин.

Различают три уровня интеграции содержания учебного материала (рис. 1).

Рис. 1. Уровни интеграции в образовании

Главными идеями интегративного обучения являются:

- личностная направленность обучения (Человек- главная ценность образовательного процесса);
- формирование обобщённых предметных структур и способов деятельности (Усвоение знаний на основе осознания закономерностей);
- приоритет смыслообразующих мотивов в обучении (побуждающие, внутренние, внешние и организующие);
- системность в обучении (осознание связей внутри научной теории);

- проблемность обучения;
- рефлексия деятельности;
- диалогичность (истина рождается в процессе диалогического общения).

Цель интегративного образования: формирование целостного видения мира.

Процесс интеграции требует выполнения определённых условий: объекты исследования совпадают, либо достаточно близки; в интегрируемых предметах используются одинаковые или близкие методы исследования; они строятся на общих закономерностях и теоретических концепциях [10].

Профильное обучение – система организации среднего образования, при которой в старших классах обучение проходит по разным программам (профилям) с преобладанием тех или иных предметов. Эксперимент по введению профильного обучения проходил в нескольких субъектах РФ с 2003 года. В рамках Федеральной целевой программы развития образования до 2010 года, предполагается повсеместный переход на профильное образование в старшей школе по всей России. Профильное образование сегодня выступает как средство дифференциации и индивидуализации обучения, когда за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитываются интересы, склонности и способности обучающихся, создаются условия для образования старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами.

Профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного образования. При этом существенно расширяются возможности выстраивания учеником собственной, индивидуальной образовательной и профессиональной траектории. Переход к профильному обучению преследует следующие основные цели:

1. Обеспечить углубленное изучение отдельных предметов программы полного общего образования.

2. Создать условия для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения школьниками индивидуальных образовательных программ.
3. Способствовать установлению равного доступа к полноценному образованию разным категориям обучающихся в соответствии с их способностями, индивидуальными склонностями и потребностями.
4. Расширить возможности социализации обучающихся, обеспечить преемственность между общим и профессиональным образованием, более эффективно подготовить выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования [5].

Таким образом, нами были рассмотрены основные тенденции развития отечественного математического образования, призванные улучшить уровень образования всех обучающихся. Например, дифференциация обучения направлена на учет интересов и потребностей обучающегося. Информатизация же делает образование доступным, современным и более наглядным для всех желающих получить образование. Обучение более эффективно, когда полученные знания можно проверить на практике, в реальных жизненных ситуациях или же найти связь с другими изучаемыми предметами, все эти вопросы может решит интеграция образования. Так же остро стоит вопрос профессиональной ориентации, который можно разрешить при помощи введения профильного обучения в старших классах. Следуя тенденциям развития образования и правильно применяя их, уровень современного математического образования заметно улучшится.

1.2. Факультативные курсы и основные требования к их организации в старшей школе

Экономическое развитие страны, появление высокотехнологических производств, расширение масштабов межкультурного взаимодействия, рост конкуренции на рынке труда, а также мировые финансовые вызовы последнего времени предполагают постоянное обновление содержания образования.

Образование, получаемое в школе, определяет дальнейший путь молодого человека, дает возможность развития гуманистических идеалов, ценностных ориентаций, взглядов и убеждений, интеллектуального, культурного и духовно-нравственного потенциала.

Обучение в школе – это не только получение качественного образования, но и подготовка обучающихся к осознанному профессиональному выбору в современных социально-экономических условиях, свободное их ориентирование в многообразных информационных потоках, привитие гражданской позиции, а также развитие навыков непрерывного обновления знаний и умений в течение всей жизни.

Типовые учебные планы обеспечивают непрерывный режим изучения учебных предметов с периодической аттестацией. Порядок и режим согласованной деятельности учителя и обучающихся могут быть коллективными, групповыми, парными и индивидуальными. Причем равноправными видами организации обучения могут выступать урок, факультатив, консультация, экскурсия, семинар, лекция, практикум.

Факультативные занятия – это форма организации учебных занятий во внеурочное время, направленная на расширение, углубление и коррекцию знаний, обучающихся по учебным предметам в соответствии с их потребностями, запросами, способностями и склонностями, а также на активизацию познавательной деятельности [33]. Определено, что направленность факультативов может быть весьма различной: естественно-математической, гуманитарной, обществоведческой, экологической, военно-патриотической, музыкальной, хореографической, художественной, театральной, спортивной и др. В соответствии с этим, а также на основе учета опыта проведения факультативных занятий в нашей стране и за рубежом определили функции факультативных занятий:

- предметно-повышающую: обучающиеся на факультативных занятиях повышают уровень изучения отдельных предметов и могут успешно готовиться к предметным олимпиадам и конкурсам;

- мотивирующую: за счет удовлетворения на факультативных занятиях потребностей в поиске, познании, творчестве. У многих обучающихся формируется устойчивая познавательная мотивация к предмету изучения;
- общеобразовательную: на факультативных занятиях создаются условия для общего развития обучающихся, становления их познавательных и социальных компетенций;
- профориентационную: факультативные занятия могут предоставить обучающимся большие возможности для «профессиональных проб», что способствует их познавательному и профессиональному самоопределению [33].

Успешная реализация перечисленных функций возможна лишь, при условии соблюдения руководством школы и учителя определенных управленческих и дидактических принципов. В нашем случае принципы – это организующие требования, которые выступают в качестве правил, норм, регулирующих образовательный процесс на факультативных занятиях.

Управленческие и дидактические принципы, способствующие успешной реализации функций факультативных занятий: предметно-повышающей, мотивирующей, общеобразовательной, профориентационной.

1. Принцип самоопределения обучающихся предполагает осознанный выбор обучающимися общеразвивающих, предметных и профориентационных факультативных занятий, предложенных педагогическим коллективом школы.
2. Принцип учета возрастных особенностей, познавательных интересов обучающихся на выбор тематику факультативных занятий, которая соответствует возрасту детей и результатам предварительной диагностики их интересов и познавательных потребностей.
3. Принцип ресурсной обеспеченности. Факультативные занятия должны быть обеспечены необходимой учебно-материальной базой для организации обучения в соответствии с выборами

обучающихся; учителями, способными преподавать учебные предметы на повышенном уровне или владеющими тем или иным ремеслом.

4. Принцип вариативности форм факультативного обучения. Это предопределяет образовательную кооперацию с другими учреждениями социальной сферы или производства, организацию межшкольных факультативов.

5. Принцип доступности – предполагает реализацию требования удовлетворить образовательные запросы обучающихся на выбранном уровне.

6. Принцип индивидуализации обучения. Требует педагогического управления процессом ученического самоопределения, проектирования обучающимися собственного учебного плана, в котором наряду с инвариантной составляющей есть вариативный (факультативный) компонент.

7. Принцип двойственного характера образовательного процесса. Предполагает реализацию различных стратегий обучения на базовом уровне в рамках инвариантного компонента учебного плана школы и обучения на повышенном уровне на факультативных занятиях.

8. Принцип занимательности. В организации факультативных занятий требует от учителя применения широкого спектра средств возбуждения и поддержания учебно-познавательной активности обучающихся: парадоксов и противоречий, проблемных ситуаций, занимательных заданий, работы над проектами, связи с жизнью и т.п.

9. Принцип адаптивности педагогического процесса. Предполагает следование при определении номенклатуры факультативных занятий постулату о том, что не все дети одинаково способны к различным учебным предметам, что есть обучающиеся, более склонные, например, к физическому труду, художественной деятельности, ремеслу и пр.

10. Принцип преемственности обучения в диаде «уроки – факультативные занятия». Преемственность в целях, содержании и

технологиях обучения имеет важное педагогическое значение, поскольку она предопределяет высокий уровень учебных достижений и личностного развития обучающихся [33].

Обучающиеся различаются интересами и потребностями, склонностями, уровнями познавательного самоопределения, различны предпочтения школьников разных лет обучения. Сами учреждения образования различаются собственной миссией, кадровым составом, квалификацией учителей, учебно-материальной базой. В силу указанных факторов на различных ступенях обучения могут применяться факультативы, отличающиеся целевой направленностью, содержанием, формой проведения, продолжительностью, типом преемственности с основными курсами.

Целями факультативных занятий могут быть:

- подготовка старшеклассников к централизованному тестированию;
- подготовка одаренных школьников к олимпиадам;
- формирование профориентационнной компетентности обучающихся;
- общекультурное развитие обучающихся;
- приобщение обучающихся к исследовательской деятельности;
- коррекция пробелов в знаниях и умениях обучающихся и др.

Факультативные занятия можно дифференцировать по содержанию: предметной направленности, общеразвивающей и общекультурной направленности, профориентационные [28].

Виды факультативных занятий:

Факультативы профориентационной направленности. Их предназначение – помочь выпускникам в образовательном и профессиональном самоопределении. На факультативных занятиях предметной направленности приоритетом для учителя и обучающихся является успех на выпускных экзаменах и централизованном тестировании.

Общекультурные и развивающие факультативы направлены на становлении развитие у обучающихся социальных и учебных компетенций: межкультурной, языковой, правовой, гражданской, исследовательской, проектной, информационной, финансовой, экологической, рефлексивной, здоровье-сберегающей [27].

Цель методической работы состоит в информационном, научно-методическом и психологическом сопровождении педагогов. Предполагается, что результатом методической работы должны стать:

знание учителями:

- видов факультативных занятий, способ и средств обеспечения преемственности уроков и факультативов;
- особенностей факультативных занятий, оценочной деятельности учителя и обучающихся;

умение педагогов:

- разрабатывать вариативные авторские программы факультативных курсов в соответствии с запросами обучающихся и рынка труда;
- выбирать технологии обучения для факультативных занятий;
- проектировать, осуществлять и анализировать образовательный процесс на уроках и на факультативных занятиях.

Актуальными критериями оценки эффективности методической работы будут являться:

- осведомленность учителей в нормативно-методическом обеспечении, касающемся нововведений в школьную практику;
- направленность методической работы на удовлетворение запросов учителей и на преодоление их профессиональных затруднений в организации факультативного обучения;
- свидетельства овладения учителями актуальными технологиями, методами и средствами обучения;
- удовлетворенность педагогами ходом и результативностью методической работы;

- удовлетворенность педагогов результативностью своей педагогической деятельности.

Интегральным критерием эффективности методической работы является повышение качества образования обучающихся.

На факультативных занятиях должно быть очень много оценки, которая понимается как выражение отношения к явлениям, деятельности, поведению, к образовательным продуктам обучающихся. Субъектами оценки на факультативном занятии является каждый ученик в отдельности, обучающиеся всей группы, сам учитель [13].

Факультативные занятия по продолжительности разделяют на годовые, полугодовые и четвертные. Выбор длительности факультатива зависит от темы, содержания и интереса обучающихся. Например, факультативы профориентационной направленности рекомендуется делать непродолжительными.

При разработке программы факультатива необходимо учитывать теоретические и методические разработки, нормативно-правовые документы, а также специфику образовательного учреждения.

Программа организации такой внеурочной деятельности, как факультативы может быть разработана образовательным учреждением самостоятельно, так и на основе иных авторских программ.

При составлении программы факультатива целесообразно ориентироваться на запросы и потребности обучающихся, родителей и иных социальных групп: первоначально необходимо определить целевую аудиторию, что в свою очередь будет учитываться при выборе методов, форм и способов обучения, количества часов, продолжительности занятий и т.д. [6].

Программа факультативного курса имеет определенную структуру. Она включает следующие разделы:

- титульный лист;
- пояснительную записку: включает обоснование актуальности; описание целей и задач; логики структуры программы и

особенностей организации учебного процесса, методов и форм организации обучения; ожидаемых результатов;

- учебно-тематический план: отражает основное содержание всех разделов (тем) с указанием времени на их изучение;
- содержание программы: раскрывает краткое содержание теоретической и практической составляющих каждой темы;
- методическое обеспечение программ;
- список литературы.

Существуют дидактические средства, применение которых на факультативных занятиях позволяет обеспечить эффективную оценочную деятельность обучающихся и учителя.

«Презентация обучающимися образовательных продуктов»: проектов, исследований, идей, схем, таблиц, текстов, решенных задача и т.п. В процессе презентации обучающимся предлагаются критерии, с помощью которых сам презентующий и его одноклассники оценивают данный продукт.

«Эталонный продукт». Учитель предлагает обучающимся познакомиться с превосходной работой их сверстника: исследованием, проектом, эссе и т.п. Данный эталон помогает обучающемуся оценивать свои наработки, видеть, что требует усовершенствования.

«Демонстрация учителем больших ожиданий от обучающихся». Учитель выражает надежду, что обучающийся в следующий раз сможет подобную работу сделать значительно лучше. Учитель и ученик обсуждают, что для этого нужно изменить ученику в способах его деятельности.

«Похвала». Оцениваем мы не только баллами, но и словом, жестом, мимикой. Важно к месту похвалить и поддержать успех обучающегося. Такая оценка выступает сильным средством стимулирования познания.

«Выставки и конференции». Выступают ка значимый фактор внешней оценки образовательных продуктов обучающихся и их творческой деятельности и др.

Итак, основные условия эффективной организации в общеобразовательном учреждении факультативного обучения:

- психологическая, теоретическая и практическая готовность руководителей образовательного учреждения и педагогов к организации и осуществлению факультативного обучения;
- ресурсная обеспеченность обучения (кадровое, материальное, учебно-методическое, финансовое);
- кооперация (если это необходимо) с другими образовательными учреждениями;
- обязательность и индивидуализация подготовки обучающихся.

1.3. Психологические возрастные особенности обучающихся 9 классов

Любой школьный предмет имеет свои цели обучения, для определения которых следует исходить, прежде всего, из интересов личности обучающегося и его развития.

Обучающиеся 9-х классов относятся к старшему подростковому возрасту (13 – 15 лет). Этот этап психического развития интересен тем, что в этот период происходит не только физическое созревание человека, но и интенсивное формирование личности, рост интеллектуальных и моральных сил и возможностей, становление характера.

Главным видом деятельности для подростка является учение. В учебной деятельности подростка имеются свои трудности и противоречия, но есть и свои преимущества, на которые может и должен опереться педагог. Последние, как отмечает А. К. Маркова, заключаются в избирательной готовности, в повышенной восприимчивости к тем или иным сторонам обучения [20]. Существенным психологическим фактом является готовность подростка ко всем видам учебной деятельности, которые делают его взрослым в собственных глазах.

Подростка привлекают самостоятельные формы организации занятий на уроке, сложный учебный материал, возможность самому строить свою познавательную деятельность за пределами школы. Необходимо использовать эти особенности при отборе содержания образования. В этой связи представляется полезным обогащение средств подачи учебного материала за счет применения новых форм и методов, активное включение обучающихся в учебный процесс. Особенность же подростка состоит в том, что эту готовность он еще не умеет реализовать, ибо он не владеет способами использования новых форм учебной деятельности. Обучить этим способам, не дать угаснуть интересу к ним – важная задача педагога. В самом деле, кто не наблюдал, как эмоционально подросток реагирует на новый учебный предмет и как у некоторых эта реакция исчезает довольно быстро. Нередко у подростков снижается и общий интерес к учению, к школе, происходит «внутренний отход от школы». Этот отход выражается в том, что школа перестает быть для школьника центром его духовной жизни [20].

Как показывают психологические исследования, основная причина такого «отхода от школы» заключается в несформированности у обучающихся навыков учебной деятельности, что не дает возможности удовлетворить актуальную потребность возраста – потребность в самоутверждении. Сформированной учебной деятельностью считается такая деятельность обучающихся, когда они, побуждаясь прямыми мотивами самого учения, могут самостоятельно определять учебные задачи, выбирать рациональные приемы и способы их решения, контролировать и оценивать свою работу, что ведет к активизации мышления по особой форме, о которой С.Л. Рубинштейн писал, что «это основная форма анализа, основной нерв процесса мышления – заключается в следующем: объект в процессе мышления включается во все новые связи и в силу этого выступает во все новых качествах, которые фиксируются в новых понятиях; из объекта, таким образом, как бы вычерпывается все новое содержание; он как бы поворачивается каждый раз другой стороной, в нем выявляются все новые свойства» [29].

Роль мотивов обучения по-прежнему велика, поэтому одним из резервов повышения эффективности обучения подростков является целенаправленное формирование мотивов учения. Формирование мотивов учения непосредственно связано с удовлетворением доминирующих потребностей возраста. Одна из таких потребностей подростка – познавательная потребность. При ее удовлетворении у него формируются устойчивый познавательный интерес, который определяет его положительное отношение к учебным предметам. Подростков очень привлекает возможность расширить, обогатить свои знания, проникнуть в сущность изучаемых явлений, установить причинно-следственные связи.

Особенно характерно для старших подростков развитие познавательных потребностей и интересов. В соответствии с возрастными психологическими особенностями старших подростков познавательная потребность проявляется у них в форме любознательности, содержание которой – стремление к знаниям об окружающей действительности.

Подростки испытывают большое эмоциональное удовлетворение от исследовательской деятельности. Им нравится мыслить, делать самостоятельные открытия. Неудовлетворение познавательной потребности и познавательных интересов вызывает у подростков не только состояние скуки, апатии, безразличия, но порой и резко отрицательное отношение к «неинтересным» предметам. При этом для подростков в равной степени имеет значение, как содержание, так и процесс, способы, приемы овладения знаниями.

В исследованиях Г. И. Щукиной показано, что в познавательных интересах подростков одного и того же класса наблюдаются большие различия. У одной группы обучающихся интересы носят аморфный характер, характеризуются изменчивостью и ситуативностью, у другой – интересы захватывают широкий круг учебных предметов и учебную деятельность в целом. У третьей группы подростков ярко проявляются доминирующие интересы [34].

Интересы подростков различаются и по направленности их познавательной деятельности. Одни обучающиеся предпочитают описательный материал, их привлекают отдельные факты, другие стремятся разобраться в сущности изучаемых явлений, объяснить их точки зрения теории, третьи проявляют большую активность при использовании знаний в практической деятельности. Одни обучающиеся склонны к репродуктивной деятельности, другие – к творческой, исследовательской деятельности.

Наряду с познавательными интересами, существенное значение при положительном отношении подростков к учению имеет понимание значимости знаний. Для подростка очень важно осознать, осмыслить жизненное значение знаний и, прежде всего их значение для развития личности. Это связано с усиленным ростом самосознания современного подростка. Многие учебные предметы нравятся подростку потому, что они отвечают его потребностям не только много знать, но и уметь, быть культурным, всесторонне развитым человеком. Надо поддерживать убеждение подростков в том, что только образованный человек может быть по настоящему полезным членом общества. Убеждения и интересы, сливаясь воедино, создают у подростков повышенный эмоциональный тонус и определяют их активное отношение к учению. Если же подросток не видит жизненного значения знаний, то у него могут сформироваться негативные убеждения и отрицательное отношение к существующим учебным предметам. Существенное значение при отрицательном отношении подростков к учению имеет осознание и переживание ими неуспеха в овладении теми или иными учебными предметами. Неуспех, как правило, вызывает у подростков бурные, отрицательные эмоции и нежелание выполнять трудное учебное задание. И если неуспех повторяется, то у подростков закрепляется отрицательное отношение к предмету.

Наоборот, благоприятной ситуацией учения для подростков является ситуация успеха, которая обеспечивает им эмоциональное благополучие. Страх перед неуспехом, боязнь поражения порой приводит подростков к поиску благовидных причин, чтобы не пойти в школу или уйти с урока.

Эмоциональное благополучие подростка во многом зависит от оценки его учебной деятельности взрослыми. Оценки для подростка имеют различный смысл. В одних случаях оценка дает возможность подростку выполнить свой долг, занять достойное место среди товарищей, в других – заслужить уважение учителей и родителей. Нередко же смысл оценки для подростка выступает в стремлении добиться успеха в учебном процессе и тем самым получить уверенность в своих умственных способностях и возможностях.

Это связано с такой доминирующей потребностью возраста, как потребность осознать, оценить себя как личность, свои сильные и слабые стороны. И в этом плане существенное значение имеет не только оценка деятельности обучающегося и его умственных возможностей со стороны других, но и самооценка. Как показывают исследования, именно в подростковом возрасте доминирующую роль начинает играть самооценка. Для эмоционального благополучия подростка очень важно, чтобы оценка и самооценка совпадали. Только при этом условии они могут выступать как мотивы, действующие в одном направлении и усиливающие друг друга. В противном случае возникает внутренний, а иногда и внешний конфликт.

По наблюдениям психологов, старшие подростки уже способны к достаточно сложному аналитико-синтетическому восприятию предметов и явлений действительности, они научаются самостоятельно мыслить, рассуждать, сравнивать, делать относительно глубокие выводы и обобщения, у них формируется абстрактное мышление. В этом возрасте интенсивно развивается произвольная логическая память, возрастает умение логически обрабатывать материал для преднамеренного запоминания [24].

Кроме того, развиваются такие операции, как классификация, аналогия, обобщение и др. При одиннадцатилетнем обучении скачок в овладении этими умственными операциями наблюдается при переходе из 8-го в 9-й класс. Устойчиво проявляется рефлексивный характер мышления: дети анализируют операции, которые они производят, способы решения задач.

Особенности теоретического рефлексивного мышления позволяют подросткам анализировать абстрактные идеи, искать ошибки и логические противоречия в суждениях. Подростки рассуждают об идеалах, о будущем, иногда создают собственные теории, приобретают новый, более глубокий и обобщенный взгляд на мир. С интеллектуальным развитием тесно связано начинающееся в этот период становление основ мировоззрения.

Для развития памяти важно то, что усложнение и значительное увеличение объема изучаемого материала приводит к окончательному отказу от дословного заучивания с помощью повторений. В процессе понимания дети трансформируют текст и, запоминая его, воспроизводят основной смысл прочитанного.

С общим интеллектуальным развитием связано и развитие воображения. У обучающихся этого возраста лучше всего развиты обобщение и умение выполнять пространственные операции [17].

В исследованиях Д.Б. Эльконина, Т.В. Драгуновой в 60–70-е гг. прошлого столетия было установлено, что в подростковом возрасте возникает и развивается деятельность интимно-личного общения, содержанием которого является общение в группе сверстников на основе отношений «Я – Другой». В таком общении, построенном на полном доверии, оформляются взгляды на жизнь, на отношения между людьми, на свое будущее.

По мнению Д.И. Фельдштейна, подростковый возраст – это остропротекающий переход от детства к взрослости. Ученый отмечает противоречивые тенденции социального развития, свойственные этому периоду: дисгармоничность в строении личности, свертывание прежде установившейся системы интересов ребенка, протестующий характер его поведения по отношению к взрослым. Наряду с этим им отмечены положительные факторы подросткового возраста: самостоятельность ребенка, содержательность отношения с другими детьми и взрослыми, развитие ответственного отношения к себе, к другим людям [36].

Отечественные и зарубежные исследователи считают подростковый возраст периодом противоречий, претензий на взрослость и признание, развития самосознания, становления «Я-концепции», стремления к социальному и личностному самоопределению. Л.И. Божович подчеркивает, что стремление к взрослому положению обеспечивают подростку возможность дальнейшего развития. Подростковый негативизм, искаженные формы самоутверждения могут возникнуть в том случае, если взрослые продолжают относиться к подростку как к ребенку. Это возраст социализации и открытия и утверждения своего уникального «Я» [8].

По Д.Б. Эльконину, подростковый возраст, как новый период, связан с новообразованиями, которые возникают из ведущей деятельности предшествующего периода. Учебная деятельность совершает «поворот» от направленности на мир к направленности на самого себя. Как подчеркивает Д.Б. Эльконин, самоизменение возникает и начинает осознаваться сначала психологически в развитии учебной деятельности и лишь подкрепляется физическими изменениями [35].

В настоящее время, обсуждая особенности подросткового возраста, психологи указывают на необходимость учета конкретных условий его проживания. Как отмечает К.Н. Поливанова, начиная с отрочества и юности, содержание субъективной жизни менее всего зависит от хронологического возраста, в большей степени оно определяется социальным окружением, системой ценностей, жизненным опытом [25].

И.С. Кон подчеркивает: «Старший подростковый возраст – время реального перехода к настоящей взрослости, первые признаки которой появляются в младшем подростковом возрасте» [14].

Процесс развития личности подростка тесно связан с возрастными особенностями подросткового возраста, которые оказывают значительное влияние на формирование личности [14].

С.В. Березин и К.С. Лисецкий выделяют следующие особенности старших подростков: повышенная значимость тесных эмоциональных контактов; интенсивная социализация, которая может повлечь за собой обострение детско-родительских отношений, как и постоянный конфликт между потребностью в свободе и усиления контроля со стороны родителей вызывает целый комплекс личностных проблем; развитие личности подростка осуществляется через призму межличностных отношений [7].

Подросток верит, что он – лучше, он не совершит тех ошибок, которые сплошь и рядом совершают взрослые, он может сделать мир лучше, потому что он честнее, искреннее, а зачастую и мудрее окружающих его взрослых людей. Подросток всем своим поведением как бы заявляет, что все знает лучше взрослых, и отныне будет жить «своей головой», а значит, в воспитательных мероприятиях он не нуждается. Таково его мироощущение, и именно поэтому любое замечание, любой совет воспринимаются в штыки, не говоря уже о нотациях и нравоучениях. Такая позиция подростка, в свою очередь, приводит к попыткам усилить контроль со стороны его родителей, что вызывает новую бурю протеста и получается замкнутый круг. А ведь понимание проблем подростка и способность к диалогу особенно важны на этом этапе, потому что старший подростковый возраст является сензитивным (особо чувствительным) для формирования нравственных убеждений, ценностных категорий и отношения к миру в целом [4].

Л.С. Выготский считает, что центральным и специфическим новообразованием является возникновение у подростка представления о том, что он уже не ребенок (чувство взрослости). Внешняя сторона этого представления проявляется в стремлении быть и считаться взрослым. Подросток требует, чтобы к нему относились «как к равному» [9].

Конфликт несовпадения внешних условий и внутреннего самоощущения подростка приводит к непониманию и охлаждению отношений. Родителям не всегда понятно, что это вдруг случилось с их ребенком, таким покладистым и бесконфликтным. Ведь с внешней стороны ситуации ничего не изменилось: ребенок учится в той же школе, живет в той же семье, никто его не обижал, и не было никакой непереносимой психологической травмы. Однако он требует иного к себе отношения, становится агрессивным, а заботу воспринимает как контроль и ограничение свободы. Отношения в семье внешне не изменились – по-прежнему к подростку относятся как к «маленькому», многое он не делает сам, многое – не разрешают родители. Да, подросток по-прежнему не самостоятелен, родители зарабатывают деньги, кормят, одевают, принимают важные решения – до реальной взрослости подростку еще далеко.

Это «чувство взрослости» является новообразованием самосознания – стержневой особенностью личности, ее структурным центром, поскольку выражает новую жизненную позицию подростка по отношению к себе, к другим людям и к миру. Оно определяет особое направление и содержание его активности, систему его новых стремлений, переживаний и эмоциональных реакций [1].

Важный фактор психического развития в старшем подростковом возрасте – общение со сверстниками, которое выделяют в качестве ведущей деятельности этого периода. Стремление подростка занять удовлетворяющее его положение среди сверстников сопровождается повышенной конформностью (склонность индивида усваивать нормы, привычки) к ценностям и нормам группы сверстников [26].

Для него становится важным:

- умение познакомиться с понравившимся человеком;
- свободно чувствовать себя в компании, разделяя нормы и интересы значимой для него группы;
- ощущать, что при этом он не теряет индивидуальность, а может высказывать свои мысли и выражать чувства;
- подростку важно, чтобы его взрослость была заметна окружающим;
- подростку важно, чтобы его форма поведения не была детской;
- «героем» подростка является активный, целеустремленный, успешный человек;
- подросток склонен к мечтанию и фантазированию;
- группе подростков свойственно возникновение кодексов.

По складу личности подросток – общественник. Ребят привлекает коллективный способ жизни и деятельности, они тянутся к совместной общественно-полезной деятельности, активному участию в жизни коллектива. В любом мероприятии они предпочитают быть деятелями, а не созерцателями, проявлять активность, самостоятельность, инициативу [30].

Таким образом, старший подростковый возраст – это тот период жизни, при котором происходят сильные изменения в развитии, и особенно психологического характера. Ребенок начинает смотреть на мир «по- новому», у него появляются ценности, жизненные ориентиры, идеалы. Он находится в определенном диссонансе с окружением (в особенности с близкими, то есть с родителями), поэтому знание его возрастных психолого- педагогических особенностей необходимо взрослому для эффективного взаимодействия.

Глава 2. Организация обучения в рамках факультативного курса «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений»

2.1. Анализ содержания различных школьных учебников на предмет рассмотрения нестандартных методов решения алгебраических уравнений

Уравнение – центральное понятие математики. Изучение уравнений является одной из основных методических линий школьного курса математики. Этот раздел богат по содержанию, по разнообразию математических методов, по возможностям ее применения при изучении ряда других тем школьного курса алгебры. Его значимость обусловлена не только внутрипредметным использованием, но и широкими межпредметными связями. Изучение этого большого раздела начинается с алгебраических уравнений.

Уравнение вида $f_n(x) = 0,$ где $f_n(x)$ – многочлен одной переменной, называются алгебраическими уравнениями.

Многочленом называется выражение вида

$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$ где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ – коэффициенты уравнения.

Алгебраические уравнения бывают различных видов (рис. 2).

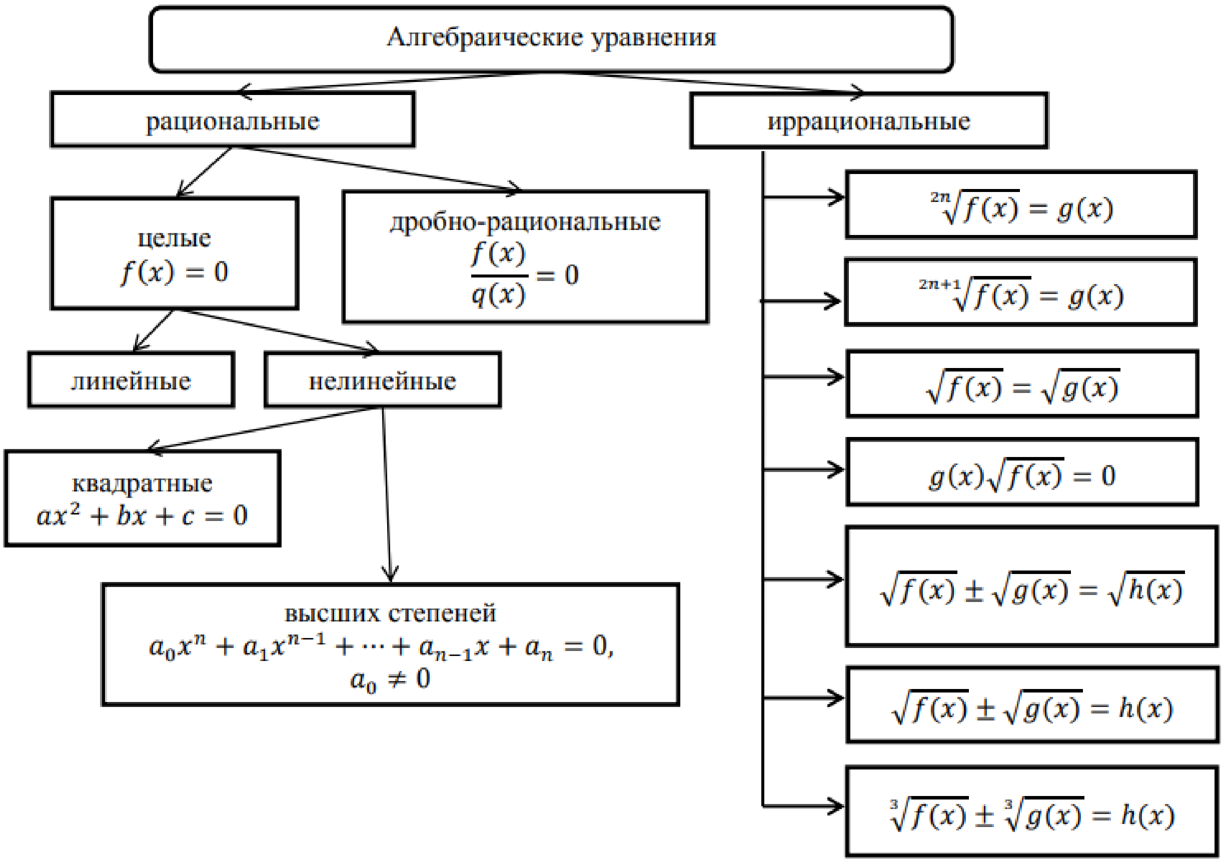

Рис. 2. Виды алгебраических уравнений, изучаемых в школьном курсе математики

Изучение уравнений начинается еще в начальной школе, однако в курсе математики не дается как математически корректных определений, так и описательного характера. В 5-6 классах происходит изучение понятий уравнения, корня уравнений, что значит решить уравнение. Решение наряду с простыми уравнениями, более сложных, содержащих неизвестное в одной части уравнения. Решение уравнений, содержащих переменную в обеих частях уравнения. Для этого изучается правило переноса слагаемых из одной части уравнения в другую. Применение уравнений к решению текстовых задач.

Начиная с 7 класса изучение алгебраических уравнений носит систематический характер. В содержании курса математики 7 класса впервые вводится понятие уравнения с одной и двумя переменными. Изучение понятия и свойств равносильных уравнений. Решение линейных уравнений, применение уравнений первой степени к решению текстовых задач.

В 8 классе добавляется понятие дробно-рационального и квадратного уравнений, их решение и применение к решению текстовых задач. Основные методы решения уравнений: разложение на множители, метод введения новой переменной.

Изучение уравнений высших порядков и иррациональных уравнений происходит в 9 классе, для решения которых в основном используются метод отыскания корней среди делителей свободного члена и метод сведения к рациональному уравнению.

Проанализировав различные школьные учебники на предмет рассмотрения раздела «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений» пришли к следующему выводу.

1. *«Алгебра 8», «Алгебра 9», авторы: Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.*

В 8 классе обучающиеся знакомятся с понятием «квадратное уравнение», его виды и методы решения. Самым первым методом решения квадратного уравнения вводится «прием выделения квадрата двучлена», далее выводятся общие формулы корней квадратного уравнения. Также рассматривается вторая формула корней квадратного уравнения $x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{2a}$, где $\sqrt{D_1}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$, ее также называют формулой корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом. В ознакомительном порядке в одном из заданий рассматривается биквадратное уравнение, которое решается методом замены переменной. В еще одном примере предлагается вывести формулу корней $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ для приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. В следующих параграфах рассматриваются «неполные квадратные уравнения» и методы их решения, теорема и формула Виета.

В данном учебнике есть параграф «Для тех, кому интересно» и в одном из таких параграфов доказывается утверждение: «Всякий целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена», которое применяется для нахождения корней не только квадратных уравнений, но и уравнений высших порядков.

В 9 классе более подробно останавливаются на изучении уравнений третьей и четвертой степени, которые решают методом разложения на множители. Для решения дробных уравнений необходимо избавиться от дроби, то есть умножить обе части уравнения на общий знаменатель, решить получившееся целое уравнение и исключить посторонние корни, если таковые есть. Для решения уравнений третьей степени, которые не удается решить методом разложения на множители, предлагается графический способ решения. Например, дано уравнение $x^3 + x - 5 = 0$, перенесем два последних члена за знак равенства и получим $x^3 = 5 - x$, построим графики функций $y = x^3$ и $y = 5 - x$, найдем их точки пересечения, они и будут являться корнями исходного уравнения.

2. *«Алгебра 8», «Алгебра 9», авторы: Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др.*

В 8 классе изучаются квадратные уравнения, в данном учебнике первый метод решения простейших и неполных квадратных уравнений – разложение на множители, далее применяется метод выделения полного квадрата. Затем выводится формула корней квадратного уравнения общего вида, а приведенные квадратные уравнения решаются с помощью формул Виета. В параграфе «Уравнения, сводящиеся к квадратным» рассматриваются биквадратные и дробные уравнения, которые решаются методом замены переменной и умножением на общий знаменатель соответственно.

В 9 классе решение алгебраических уравнений начинается с уравнений высших порядков методом отыскания корней среди делителей свободного члена. Рациональные уравнения решаются методом сведения его к алгебраическому уравнению, умножив на общий знаменатель дробей, входящих в это уравнение. Для нахождения корней иррациональных уравнений предлагается воспользоваться графическим методом, либо возведением обеих частей уравнения в квадрат.

3. *«Алгебра 8», «Алгебра 9», авторы: С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.*

Изучение алгебраических уравнений начинается с квадратных уравнений и первым методом решения рассматривается формула корней квадратного уравнения общего вида. Далее рассматриваются неполные квадратные уравнения и метод их решения – разложение на множители. Для нахождения корней приведенного квадратного уравнения$x^2 + px + q = 0$ предлагается следующая формула $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}$, $\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, после этого вводятся формулы Виета для приведенного квадратного уравнения и для уравнения общего вида. Биквадратные уравнения также решаются методом замены переменной, а рациональные уравнения методом сведения к алгебраическому виду, умножая на общий знаменатель дробей, перенося из одной части в другую, складывая и вычитая алгебраические дроби. В дополнении к этой главе для решения уравнений рассматривается теорема Безу.

В 9 классе добавляются иррациональные уравнения и предлагается единственный метод решения – возведение уравнения в некоторую степень, для перехода к рациональному уравнению.

Изучив данные учебники на предмет рассмотрения раздела «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений», можно сказать, что ни в одном учебнике не рассматриваются нестандартные методы решения алгебраических уравнений.

2.2. Классификация некоторых нестандартных методов решения алгебраических уравнений

Решая алгебраические уравнения, часто используют широко известные методы, изучаемые в школьном курсе математике. К таким методам можно отнести метод интервалов, метод разложения на множители, метод выделения полного квадрата и т.д. [2, 3, 11, 12, 21, 22]. Но существуют и другие методы решения алгебраических уравнений, так называемые нестандартные. В настоящем параграфе мы опишем такие методы, в основу которых положены те или иные свойства алгебраических функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Каждый из представленных методов проиллюстрирован примерами.

1. Использование области допустимых значений при решении уравнений.

Как правило, при нахождении области допустимых значений корней уравнения приходится определять область определения функций, входящих в состав уравнения, или получаемых при тождественном его преобразовании.

Пример 1. *Решите уравнение* $\frac{x}{x+1}-\frac{9x+13}{x^2-2x-3}=\frac{5}{3-x}$

Решение. Данное уравнение представляет собой один из видов дробно рациональных уравнений (рис. 2). Преобразуем данное уравнение, перенеся все дроби в левую часть уравнения, получим $\frac{x}{x+1}-\frac{9x+13}{x^2-2x-3}+\frac{5}{3-x}=0.$

Найдем область допустимых значений, зная, что знаменатель дроби не может равняться нулю, получили следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x^2-2x-3>0. \\ 3-x>0 \end{cases}$$

Решив эту систему, получили область допустимых значений $R\setminus\{-1;3\}$.

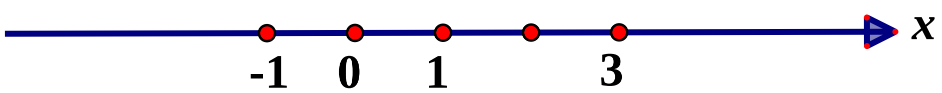

Рис. 3. Нахождение области допустимых значений дробно-рационального уравнения

Продолжая преобразования, вычислим алгебраическую сумму дробей с разными знаменателями: $\frac{x(x-3)-(9x+3)+5(x+1)}{(x-3)(x+1)} = 0.$ Произведя тождественные преобразования в числителе, получим равносильное уравнение:

$$\frac{x^2 - 7x - 8}{(x-3)(x+1)} = 0.$$

Как известно, дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Второе условие уже учтено при нахождении области допустимых значений. Таким образом, имеем: $x^2 - 7x - 8 = 0.$ Корни последнего уравнения $x_1 = -1;\ x_2 = 8.$ В то время как область

допустимых значений последнего уравнения – множество действительных чисел. Произошло расширение области определения заданного уравнения (за счет освобождения от знаменателя). В связи с этим обстоятельством, необходима проверка. Корень $x_2 = 8$ входит в область допустимых значений

заданного уравнения, в то время как, корень $x_1 = -1$ – нет. Следовательно,

заданное уравнение имеет единственный корень $x = 8$.

Ответ: 8.

2. Использование ограниченности функции.

Вспомним определение ограниченной функции: функция называется ограниченной, если существуют два числа A и B, такие, что для любого значения аргумента x выполняется неравенство $A \leq f(x) \leq B$.

Для решения уравнений будем использовать следующую теорему: пусть множество M есть общая часть (пересечение) областей существования функций $f(x)$ и $g(x)$ и пусть для любого $x \in M$ справедливы неравенства

$f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A – некоторое число. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Пример 2. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$$

Решение: Данное уравнение представляет собой один из видов иррациональных уравнений (рис. 2).

Пусть $f(x) = \sqrt{3x^2 + 6x + 7}$, найдем область значения этой функций. Для этого выделим полный квадрат под корнем: $f(x) = \sqrt{(\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2 + 4}$, отсюда видно что $E(f) \geq [2; +\infty)$. Проделаем те же действия и со вторым слагаемым из левой части уравнения. Положим

$$g(x) = \sqrt{5x^2 + 10x + 14} \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{(\sqrt{5}x + \sqrt{5})^2 + 9} \Rightarrow E(g) \geq 3.$$

Очевидно для функции $f(x) + g(x)$ $E(f) \geq [5; +\infty)$. Тем же способом найдем область значения функции в правой части уравнения: $h(x) = 4 - 2x - x^2 \Leftrightarrow$ $h(x) = (x - 1)^2 - 5 \Rightarrow E(h) \leq 5$.

Нетрудно увидеть, что общей частью (пересечением) областей существования функций $f(x) + g(x)$ и $h(x)$ является число 5 (рис.4),

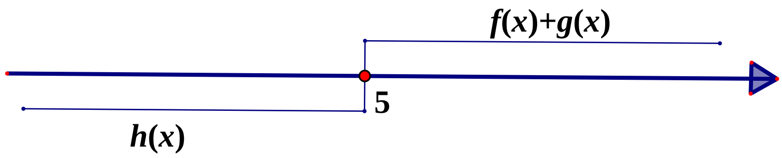

Рис.4. Область существования функций $f(x) + g(x)$ и $h(x)$

значит первоначальное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) \geq 5 \\ h(x) \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 6x + 7} = 2 \\ \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 3 \\ 4 - 2x - x^2 = 5 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений уже известными из школьного курса математики методами, получим корень уравнения $x = -1$.

Ответ: -1.

3. Использование монотонности функций.

Напомним некоторые утверждения, лежащие в основе методов решения алгебраических уравнений с использованием свойств монотонных функций:

- Если f – строго возрастающая (строго убывающая) на множестве X функция, то уравнение $f(x)=c$, где c – константа, имеет не более одного корня на множестве X.
- Если f – строго возрастающая, а g – строго убывающая на множестве X функции, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня на множестве X.

Пример 3. *Решите уравнение* $x^5+x^3+2x-4=0$

Решение: Функция $f(x)=x^5+x^3+2x-4=0$ – непрерывная и строго возрастающая функция, как сумма трех положительных и строго возрастающих функций на множестве действительных чисел. Тогда уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение. Легко видеть, что этим решением является $x=1$.

Ответ: 1.

4. Использование четности и нечетности функций при решении уравнений.

Чтобы решить уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ – четная или нечетная функция, достаточно найти положительные (или отрицательные) корни, после чего записать отрицательные (или положительные) корни, симметричные полученным.

Пример 4. *Решите уравнение* $x^2+|x|=12$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+|x|-12$, которая является четной на множестве действительных чисел, так как $f(-x)=f(x)$. Найдем корни заданного уравнения при $x\geq 0$. Уравнение принимает вид $x^2+x-12=0$ и имеет корни $x_1=-4, x_2=3$. Корень $x_1=-4$ не подходит, так как мы рассматриваем корни уравнения при $x\geq 0$. Следовательно при $x\geq 0$ корнем уравнения является число 3. В силу четности функции f число -3 тоже корень данного уравнения.

Ответ: {-3;3}.

5. Использование эскизов графиков функций.

Найти решение уравнения иногда помогает эскиз графиков функций, стоящих в правой и левой частях уравнения. Однако подчеркнем, что эскиз графиков выполняет лишь вспомогательную функцию, но не является заменой аналитического решения.

<u>Пример 5.</u> *Решите уравнение* $x^5 + x = \sqrt[3]{x-7}$.

<u>Решение:</u> Эскизы графиков функций $f(x) = x^5 + x$ и $g(x) = \sqrt[3]{x-7}$ представлены на рисунке 5.

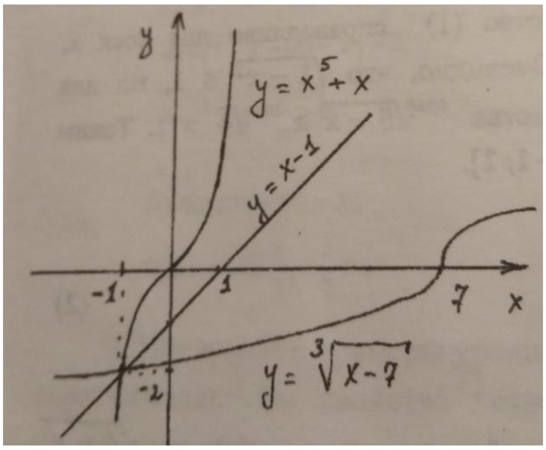

Рис. 5. Эскизы графиков функций $f(x)$ *и* $g(x)$

На рисунке 4 видно, что графики пересекаются в единственной точке $(-1; -2)$. Следовательно, $x = -1$ является корнем уравнения $x^5 + x = \sqrt[3]{x-7}$ (что проверяется подстановкой $x = -1$ в уравнение). Осталось аналитически доказать, что других решений уравнения нет. Для этого введем вспомогательную «промежуточную» функцию. Она должна иметь простое аналитическое выражение, проходить через точку $(-1; -2)$, и ее график должен располагаться между графиками f и g. В нашем примере оптимальной является линейная функция $y = x - 1$. Рассмотрим два промежутка: $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$.

1) Пусть $x \in (-\infty; -1)$. Покажем, что для всех таких x справедлива система неравенств $\begin{cases} \sqrt[3]{x-7} > x - 1, \\ x - 1 > x^5 + x. \end{cases}$ Действительно,

   $\sqrt[3]{x-7} > x - 1 \Leftrightarrow x - 7 > (x-1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 6 < 0.$

   Один корень многочлена $x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ нам уже известен: $x = -1$ (это абсцисса точки пересечения графиков функций $g(x) = \sqrt[3]{x-7}$ и

$y = x - 1$). Разделив многочлен $x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ на двучлен $x + 1$, получим:

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 6) < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0,$$

так как квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 6$ принимает положительные значения при любых действительных значениях переменной x. Таким образом, первое неравенство системы равносильно условию $x < -1$.

Но $x - 1 > x^5 + x \Leftrightarrow x^5 < -1 \Leftrightarrow x < -1$. Следовательно, решением системы являются все x, принадлежащие промежутку $(-\infty; -1)$, и только они. Но тогда $\sqrt[3]{x-7} > x - 1 > x^5 + x$, т.е. уравнение на промежутке $(-\infty; -1)$ корней не имеет.

2) Пусть $x \in (-1; +\infty)$. Аналогичные преобразования приведут к очевидному заключению, что решение системы $\begin{cases} \sqrt[3]{x-7} < x - 1, \\ x - 1 < x^5 + x \end{cases}$ является промежуток $(-1; +\infty)$. Таким образом, и на этом промежутке уравнение не имеет решений.

Ответ: -1.

6. Использование непрерывности функций при решении уравнений.

При решении уравнений часто используют следующую теорему Больцано-Коши: если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то в интервале $(a; b)$ существует хотя бы одна точка x_0, в которой функция обращается в ноль (то есть при указанных условиях уравнение $f(x) = 0$ имеет в интервале $(a; b)$ хотя бы один корень).

Если функция f еще и строго монотонна на отрезке $[a; b]$, то такая точка x_0 единственна.

Пример 6. Докажите, что уравнение $x^3 + 4x + 1 = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[-1; 0]$, и найдите его приближенное значение с точностью до 0,005.

Решение: функция $f(x) = x^3 + 4x + 1$ на отрезке $[-1; 0]$ непрерывна, строго возрастает (так как сумма двух строго возрастающих функций $y = x^3$ и $y = 4x + 1$) и принимает на концах отрезка значения разных знаков:

$f(-1) = -4 < 0, f(0) = 1 > 0$. Значит, на отрезке $[-1; 0]$ данное уравнение имеет единственный корень.

Применим для вычисления этого корня метод последовательного деления отрезка на 10 частей. Разделим отрезок $[-1; 0]$ на 10 равных частей и вычислим значения функции в точках деления. Имеем: $f(0) = 1; f(-0{,}1) = 0{,}599; f(-0{,}2) = 0{,}192; f(-0{,}3) = -0{,}227$. Получили $f(-0{,}3) = -0{,}227 < 0, f(-0{,}2) = 0{,}192 > 0$; значит, искомый корень лежит на отрезке $[-0{,}3; -0{,}2]$. Теперь разделим этот отрезок на 10 равных частей и вычислим значения функции в точках деления. Имеем: $f(-0{,}21) \approx 0{,}151; \dots; f(-0{,}24) \approx 0{,}026; f(-0{,}25) \approx -0{,}016$. Значит искомый корень лежит на отрезке $[-0{,}25; -0{,}24]$, т.е. с точностью до 0,005 искомый корень равен -0,245.

Ответ: -0,245.

7. Задачи на оптимизацию

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин, называемые оптимизационными, могут быть решены по следующей схеме:

1. Проанализировав условие задачи, определяют ту величину (обозначим ее y), наименьшее или наибольшее значение которой требуется найти, т.е. определяют, какую величину следует оптимизировать.
2. Из числа переменных, связанных с задачей, выбирают одну за независимую переменную, обозначают ее, например буквой x и определяют границы изменения x.
3. Строят математическую модель задачи, выражая y через x, т.е. вводят в рассмотрение функцию $y = f(x)$.
4. Работа с составленной моделью. Находят то значение x, при котором функция принимает наименьшее или наибольшее значение, и вычисляют соответствующее значение функции.
5. Исходя из условий задачи интерпретируют результаты.

Пример 7. База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход идет по дороге со скоростью 5 км/ч, а по лесу – со скоростью 3 км/ч. За какое минимальное время он может добраться от базы до станции?

Решение: Представим на рисунке геометрическую модель ситуации (рис.6). Точка A означает местонахождение базы, прямая BD – дорога, D – железнодорожная станция, $AB \perp BD, AB = 5$ км$, AD = 13$ км$, ACD$ – маршрут пешехода (причем положение C между точками B и D пока неизвестно).

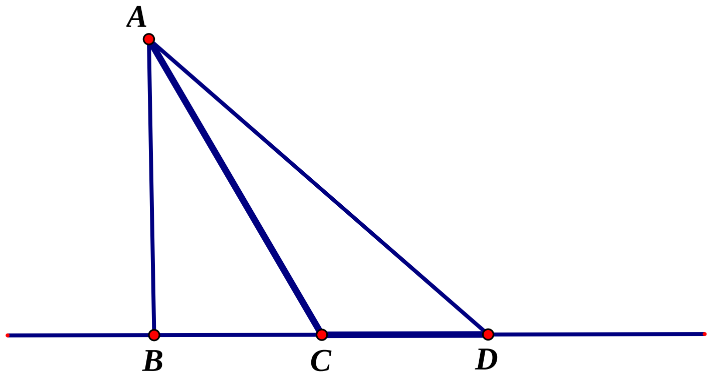

Рис.6. Геометрическая модель задачи 7

1. Оптимизируемая величина – время y движения пешехода от точки A до точки D.
2. Пусть x – расстояние от B до C. Найдем BD и укажем границы изменения x. $BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$. Итак, $0 \leq x \leq 12$.
3. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25 + x^2}$. Время, затраченное на путь AC, выражается формулой $y_1 = \frac{\sqrt{25+x^2}}{3}$. $CD = BD - BC = 12 - x$. Время, затраченное на путь CD, выражается формулой $y_2 = \frac{12-x}{5}$. Найдем время, затраченное на весь путь: $y = y_1 + y_2 = \frac{\sqrt{25+x^2}}{3} + \frac{12-x}{5}$. Итак, вводим в рассмотрение функцию $y = \frac{\sqrt{25+x^2}}{3} + \frac{12-x}{5}$, где $0 \leq x \leq 12$.
4. Найдем наименьшее значение указанной функции на отрезке $[0; 12]$. $y = \frac{\sqrt{25+x^2}}{3} + \frac{12-x}{5}$ функция возрастающая, значит наименьшее значение будет при наименьшем значении аргумента: $y(0) = \frac{\sqrt{25+0}}{3} + \frac{12-0}{5} = \frac{5}{3} + \frac{12}{5} = \frac{61}{15} = \frac{244}{60}$.

5. Так как наименьшее значение функции на отрезке $[0;12]$ равно $4\frac{4}{60}$, то минимальное время, за которое пешеход может добраться от базы до станции, равно 4 ч 4 мин.

Ответ: 4 ч 4 мин.

8. Уравнения с параметрами

Под параметром (в дальнейшем будем использовать для его обозначения латинские строчные буквы a, b и т.п.) понимается математический объект, имеющий двойственную природу: с одной стороны, это есть некоторое число, а с другой, само это число не фиксировано, может быть любым из некоторого числового множества (если это множество явно не указано в задании, то подразумевается множество действительных чисел), и в этом смысле параметр является переменной величиной. Необходимость учитывать это обстоятельство при решении уравнений с параметрами приводит к тому, что традиционные известные методы решении определенных типов уравнений (а также сводящиеся к ним другие математические задачи) дополняются исследованиями различных случаев, возникающих в связи со значениями, которые может принимать параметр.

Пример 8. *Решите уравнение* $(a^2-1)x = a+1$

Решение: Рассмотрим два случая:

1) $a^2-1 \neq 0$, тогда $x = \frac{a+1}{a^2-1} = \frac{1}{a-1}$;
2) $a^2-1=0 \Leftrightarrow a=1$ или $a=-1$.

При $a=1$ данное уравнение равносильно уравнению $0 * x = 2$, а это уравнение решений не имеет. При $a=-1$ уравнение равносильно уравнению $0 * x = 0$, множество решений которого совпадает с множеством действительных чисел.

Ответ: при $a \neq \pm 1$ $x = \frac{1}{a-1}$; при $a=1$ решений нет; при $a=-1$ x – любое действительное число [18].

2.3. Программа факультативного курса «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений», методические рекомендации

1. Объяснительная записка

Основной задачей модернизации российского образования является обеспечение нового качества школьного образования, соответствующего требованиям изменившейся системы общественных отношений и ценностей. Это касается и подготовки к итоговой аттестации выпускников, проводимой в новом формате. Есть много уравнений повышенной трудности или трудно разрешимых для обучающихся, которые могут быть включены в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ и ОГЭ, а также в содержание предметных олимпиад различного уровня. Для решения таких уравнений лучше всего применять ни традиционные методы решения, а методы не совсем привычные для обучающихся, изучение которых не подразумевается в рамках школьного курса математики. В содержании школьном курсе математики практически не содержится материала на эту тему, поэтому мы разработали факультативный курс, в рамках котором будет более подробно рассматриваться этот вопрос.

Данный курс рассчитан на 32 часа.

Основные цели данного курса:

- дополнение школьного материала, связанного с решениями алгебраических уравнений;
- систематизация и углубление знаний по теме «Алгебраические уравнения»;
- создание условий для формирования и развития практических умений учащихся решать алгебраические уравнения, используя различные методы и приемы;
- создание условий для формирования и развития практических умений учащихся использовать свойства функций при решении различных алгебраических уравнений;
- создание условий для овладения языком математики в устной и письменной форме, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественнонаучных

дисциплин, продолжения образования и для самостоятельной деятельности математики и ее приложениях;

— создание условий для осуществления рефлексивной деятельности.

Данный курс предполагает познакомить обучающихся с различными методами решения алгебраических уравнений, которые основаны на материале школьного курса математики, и тем самым показать широкое использование математического аппарата в различных областях науки, освоение обучающимися опыта употребления нестандартных методов рассуждения при решении задач. Факультативный курс является развитием системы ранее приобретённых знаний, его цель – как можно полнее развить потенциальные способности каждого ученика, повысить его математическую подготовку.

В школьном курсе математике при изучении алгебраических уравнений и методов их решения традиционно рассматриваются такие методы решения уравнений, как метод замены переменной, разложение на множители, метод интервалов и т.д. В данном курсе обучающиеся ознакомятся с различными видами алгебраических уравнений, их классификацией и решениями.

Занятия факультативного курса построены так, что учитель включает обучающихся в учебно-познавательную деятельность, организованную на основе внутренней мотивации; обеспечивает диалоговое общение не только между учителем и учениками, но и между обучающимися.

Тематическое планирование курса

Таблица 1. Тематическое планирование курса.

	Тема	**Количество часов**	
		Лекция	Практикум
1	Нахождение области допустимых значений решений уравнений	2	3
2	Использование ограниченности функции при решении уравнений	1	2
3	Промежуточный контроль по теме «Нахождение области допустимых значений решений уравнений»		1

	и «Использование ограниченности функции при решении уравнений»		
4	Использование монотонности функций при решении уравнений	1	2
5	Использование четности и нечетности функций при решении уравнений	1	2
6	Промежуточный контроль по теме «Использование монотонности функций при решении уравнений» и «Использование четности и нечетности функций при решении уравнений»		1
7	Использование эскизов графиков функций при решении уравнений	1	2
8	Использование непрерывности функций при решении уравнений	1	2
9	Промежуточный контроль по теме «Использование эскизов графиков функций при решении уравнений» и «Использование непрерывности функций при решении уравнений»		1
10	Решение уравнений с параметрами	2	3
11	Решение оптимизационных задач без использования аппарата дифференциального исчисления	1	2
12	Зачет		1
	Итого	32	

2. Методические рекомендации

Занятие 1. Тема: Использование области допустимых значений при решении уравнений.

Цели: формирование знаний и умений решать алгебраические уравнения, используя область допустимых значений.

Структура занятия: актуализация знаний (3 мин.), объявление темы и целей занятия (2 мин.), объяснение нового материала (13 мин.), выполнение заданий на закрепление новой темы (22 мин.), пояснение домашнего задания (2 мин.), подведение итогов занятия (3 мин.).

Комментарий к занятию

В начале занятия необходимо повторить виды уравнений, способы их решения, что такое область допустимых значений, как она находится.

Далее объявляется тема и цели занятия.

На доске записано уравнение $\frac{x}{x+1}-\frac{9x+13}{x^2-2x-3}=\frac{5}{3-x}$. Обучающиеся предлагают свои методы решения уравнения.

Учитель озвучивает способ решения уравнения $f(x)=g(x)$ (1).

Схема решения обычно выглядит так: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем уравнение (1), затем от уравнения (2) переходят к более простому уравнению (3) и т.д., пока не получат достаточно простое уравнение, решив которое, находят его корни.

Но, возникает вопрос: являются ли полученные корни корнями исходного уравнения (1)? Если, переходя от уравнения (1) к уравнению (2) и т.д., мы совершали равносильные преобразования, то ответ на вопрос положительный. Если же в равносильности всех произведенных преобразований мы не уверены, то однозначного ответа на этот вопрос мы не получим. Поэтому необходима проверка полученных корней, которая осуществляется подстановкой в исходное уравнение. Однако не всегда бывает просто эту проверку провести – иногда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями. В этом случае ищут обходные пути, самый легкий из которых – по области определения заданного уравнения.

Напомним, что областью определения уравнения $f(x)=g(x)$ называют множество тех значений переменного, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Но способ проверки по области допустимых значений является полноценным в том случае, когда при решении уравнения других причин нарушения равносильности, кроме расширения области допустимых значений, не было.

Наиболее часто встречающиеся причины расширения области определения уравнения:

1) освобождение от знаменателей, содержащих переменную величину;

2) освобождение от радикалов четной степени;

3) освобождение от знаков логарифмом.

Теперь решим уравнение $\frac{x}{x+1} - \frac{9x+13}{x^2-2x-3} = \frac{5}{3-x}$, используя этот метод.

Преобразуем данное уравнение, перенеся все дроби в левую часть уравнения, получим $\frac{x}{x+1} - \frac{9x+13}{x^2-2x-3} + \frac{5}{3-x} = 0$.

Найдем область допустимых значений, зная, что знаменатель дроби не может равняться нулю, получили такую систему неравенств: $\begin{cases} x+1>0 \\ x^2-2x-3>0 \\ 3-x>0 \end{cases}$

. Решив эту систему, получили область допустимых значений $R \setminus \{-1;3\}$. Продолжаем преобразования. Для этого вычислим алгебраическую сумму дробей с разными знаменателями: $\frac{x(x-3)-(9x+3)+5(x+1)}{(x-3)(x+1)} = 0$. Произведя

тождественные преобразования в числителе, получим равносильное уравнение: $\frac{x^2-7x-8}{(x-3)(x+1)} = 0$.

Как известно, дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменателен отличен от нуля. Второе условие уже учтено при нахождении области допустимых значений. Таким образом, имеем: $x^2-7x-8=0$.

Корни этого уравнения точки $x_1=-1$; $x_2=8$. Область допустимых

значений последнего уравнения – множество действительных чисел. Произошло расширение области определения заданного уравнения (за счет освобождения от знаменателя). В связи с этим обстоятельством, необходима проверка. Корень $x_2 = 8$ входит в область допустимых значений заданного уравнения, в то время как, корень $x_1 = -1$ – нет. Следовательно, заданное уравнение имеет единственный корень $x = 8$.

<u>Задание 1.</u> *Решите уравнение* $\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{3x-5}$.

<u>Решение:</u> Область допустимых значений данного уравнения задается системой неравенств: $\begin{cases} 8x+1 \geq 0, \\ 2x-2 \geq 0, \\ 7x+4 \geq 0, \\ 3x-5 \geq 0. \end{cases}$

Решая систему, получаем $x \geq \frac{5}{3}$.

Возводим обе части уравнения во вторую степень: $(\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2})^2 = (\sqrt{7x+4} - \sqrt{3x-5})^2 \Leftrightarrow$
$8x+1-2\sqrt{(8x+1)(2x-2)} + 2x - 2 = 7x + 4 - 2\sqrt{(7x+4)(3x-5)} +$
$3x-5$.

Приведем подобные и возведем обе части уравнения во вторую степень: $\sqrt{(8x+1)(2x-2)} = \sqrt{(7x+4)(3x-5)} \Leftrightarrow (8x+1)(2x-2) = (7x+$
$4)(3x-5)$

. Раскроем скобки и приведем подобные: $5x^2 - 9x - 18 = 0$.

Область допустимых значений полученного уравнения: множество действительных чисел. Его корни $x_1 = 3, x_2 = -\frac{6}{5}$. Так как произошло расширение области допустимых значений, необходима проверка. $x_1 = 3$

входит в область допустимых значений уравнения, а $x_2 = -\frac{6}{5}$ не входит. Следовательно, $x_1 = 3$ – единственный корень данного уравнения.

Ответ: 3.

<u>Задание 2.</u> *Решите уравнение* $x = \sqrt{41 - 8x} + 7$.

<u>Решение:</u> Перепишем данное уравнение в виде $x - 7 = \sqrt{41 - 8x}$. Область допустимых значений определяется системой неравенств: $\begin{cases} 41 - 8x \geq 0, \\ x - 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{41}{8} \\ x \geq 7 \end{cases}$,отсюда видно что область допустимых значений уравнения – пустое множество, следовательно уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

<u>Задание 3.</u>*Решите уравнение*$\sqrt{1 - x} + \sqrt[4]{x - 1} = 1$.

<u>Задание 4.</u>*Решите уравнение*$\sqrt{4 - x} - \sqrt{x - 7} = 2$.

В конце занятия учитель задает домашнее задание.

Решите уравнения:

1) $\sqrt{2 - x} + \sqrt{x - 4} = 1$

2) $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

Подводя итог занятия, можно спросить: является ли изученный сегодня метод решения уравнений рациональным? Каким методом эффективнее пользоваться при решении подобных уравнений?

2.4. Апробация разработанного факультативного курса

Созданный факультативный курс «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений» был апробирован в МАОУ «Лицей №6. Перспектива» г. Красноярска в 9 классе. Занятия посещали 5 человек, это те учащиеся, которые учатся на четыре и пять, и интересуются математикой. Нами было проведено только три занятия. Мы выбрали темы «Использование области допустимых значений при решении уравнений» и «Использование эскизов графиков функций при решении уравнений», на третьем занятии проверили уровень сформированности знаний по этим темам. Эти темы были выбраны неслучайно, так как шла подготовка девятиклассников к ГИА. Занятия проходили точно так же, как они описаны в факультативном курсе. После проведения второго занятия была беседа с учащимися о проведенных занятиях. Ниже приведены некоторые апробированные занятия из перечисленных.

Занятие №1

Тема. Использование области допустимых значений при решении уравнений.

На первом занятии, как и написано в методических рекомендациях, мы повторили необходимые для изучения данной темы известные учащимися сведения (виды уравнений, способы их решения, что такое область допустимых значений, как она находится). Далее на примере уравнения $\frac{x}{x+1} - \frac{9x+13}{x^2-2x-3} = \frac{5}{3-x}$ было рассмотрено решение с использованием области допустимых значений. Затем выполнили задания 1, 2, 3. Задание 4 не успели выполнить до конца. При выполнении заданий учащиеся работали активно, все старались высказать свою точку зрения по каждому заданию. Но темп занятия не был высок, потому что обучающиеся привыкли все досконально записывать.

Занятие №2

Тема. Использование эскизов графиков функций при решении уравнений.

В начале занятия мы повторили необходимые для изучения данной темы известные учащимися сведения (виды преобразований графиков функции, определение квадратичной функции, что собой представляет график квадратичной функции). Затем приступили к выполнению заданий 1, 2. Задание 3 выполнили самостоятельно, 4 не успели, взяли на дом. Обучающиеся работали хорошо.

Занятие №3

Тема. Зачет.

В начале занятия мы повторили необходимый материал (в чем заключаются методы решения с использованием области допустимых значений и эскизов графиков функций). Также вместе обговорили критерии оценивания. Затем приступили к выполнению задания. При решении самостоятельной работы, вопросов практически не возникало, все обучающиеся хорошо справились с работой.

Проведенные занятия позволили сделать некоторые предварительные выводы:

Подобранный нами материал по указанным темам посилен учащимся, они с интересом и активно работали на занятиях. Эти занятия показали, что решение алгебраических уравнений нестандартными методами не вызывает затруднений. Отыскание области допустимых значений и построение эскизов графиков функций для решения алгебраических уравнений понравилось обучающимся своей новизной.

Заключение

В ходе работы были решены следующие задачи:

1) проведен анализ современных тенденций развития математического образования;
2) проведен анализ психолого-педагогической и методической литературы на основные способы организации внеурочной деятельности;
3) проведен анализ представления информации на предмет рассмотрения нестандартных методов решения алгебраических уравнений в учебниках по математике различных авторов для общеобразовательных школ (VIII – IX кл.);
4) был отобран материал для факультативного курса;
5) составлена программа курса;
6) разработаны методические рекомендации к занятиям;
7) по созданному факультативному курсу было проведено три занятия в МАОУ «Лицей №6. Перспектива» г. Красноярска в 9 классе. Результаты проанализированы.

Выдвинутая в начале работы гипотеза была частично подтверждена. Но по проведенным занятиям можно сделать выводы: данный факультативный курс интересен учащимся и полезен. Мы считаем, что достаточно полный факультативный курс по теме «Нестандартные методы решения алгебраических уравнений» даст им более глубокие знания по данной теме, и будет способствовать ориентации на профиль в старшей школе и повышению мотивации в обучении.

Библиографический список

1. Абульханова К.А. Социальное мышление личности // Современная психология: состояние и перспективы исследований. Часть 3. Социальные представления и мышление личности. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2002. С. 88–103.
2. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / 19-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 255 с.
3. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / 17-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 287 с.
4. Андреева Г.М. Социальная психология: Учебник для вузов. М.: Наука, 2014. 324 с.
5. Ахияров К.Ш. Профилизация обучения старшеклассников как условие эффективного функционирования образовательной системы. Материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной памяти профессора А.Д. Сазонова. 2005. С. 16-19 [Электронный ресурс]. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29189989 (дата обращения 08.04.2018).
6. Балк М.Б. Балк Г.Д. Математический факультатив вчера, сегодня, завтра.: Москва 1987 №5 с. 14-17.
7. Березин С.В., Лисецкий К.С. Особенности старшего подросткового возраста. М., 2006. 140 с.
8. Божович Л.И. Личность и ее формирование в детском возрасте.- СПб.: Питер, 2008. 400 с.
9. Выготский Л.С. Психология развития человека. М.: Изд-во Смысл; Изд-во Эксмо, 2005. 1136 с.
10. Давыденко Н. В. Салошина Г. Е. Интеграция в обучении [Электронный ресурс]. URL: http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/571770/ (дата обращения 19.03.2018).
11. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.
12. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 336 с.
13. Кадыров И. Взаимосвязь внеклассных и факультативных занятий по математике.: Москва 1983. 5-11с.
14. Кон И.С. Психология ранней юности: Кн. Для учителя. М.: Просвещение, 2012. 140 с.

15. Кондратьева Л.Г. Индивидуализация и дифференциация в обучении [Электронный ресурс]. URL: https://nsportal.ru/blog/nachalnaya-shkola/all/2013/01/15/individualizatsiya-i-differentsiatsiya-v-obuchenii (дата обращения 19.03.2018).
16. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: http://lbz.ru/metodist/iumk/mathematics/krmorf.php (дата обращения 19.03.2018).
17. Кулагина И.Ю., Колюцкий В.Н. Возрастная психология: Полный жизненный цикл развития человека. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – М.: ТЦ «Сфера», 2001. – 464 с.
18. Литвинцева М.В., Шатохина М.П. Уравнения и неравенства, использование свойств функций, производной и интеграла: учебное пособие для студентов математических факультетов педагогических вузов / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2010. – 80 с.
19. Луковцева А.К., Психология и педагогика [Электронный ресурс]. URL: https://psyera.ru/4328/svoystva-sovremennogo-obrazovaniya (дата обращения 08.04.2018).
20. Маркова А.С. Психология обучения подростка. – М., 1975.
21. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.
22. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.
23. Основные тенденции развития образования [Электронный ресурс]. URL: https://studfiles.net/preview/5786933/ (дата обращения 19.03.2018).
24. Особенности обучения и психического развития школьников 13-17 лет / Под ред. И.В.Дубровиной, Б.С.Круглова. – М.: Педагогика, 1988. – 192 с.
25. Поливанова К.Н. Психология возрастных кризисов: учеб. пособие для студ. высш. пед. заведений. М.: Издат. центр, 2010. 184 с.
26. Практическая психология образования: учебное пособие. / Под. ред. И.В. Дубровиной 4-е изд., СПб.: Питер, 2004. 592 с.
27. Применение факультативных занятий в учебном процессе. М.: Просвещение, 1980.
28. Репкина Н.В., Заика Е.В. Оценка уровня сформированности учебной деятельности. – Томск: Пеленг, 1993
29. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. – М., 1958
30. Сиденко Е.А. К вопросу адаптации младшего и старшего подростка в социуме: как помочь подростку адаптироваться в школе и дома? //

Эксперимент и инновации в школе: журн. для учителей, педагогов, воспитателей образоват. учреждений. 2011. № 6. С. 3–9.
31. Сопова Е.И. Информатизация образования: проблемы и возможности. Роль учителя в информационном обществе [Электронный ресурс]. URL: http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/518288/ (дата обращения 19.03.2018).
32. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования от 17.12.2010 № 1897 [Электронный ресурс]. URL: http://docs.cntd.ru/document/902254916 (дата обращения: 28.05.2018).
33. Шварцбурд С.И. и др. Состояние и перспективы факультативных занятий по математике: Пособие для учителей. – М., 1977. -48с.
34. Щукина Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся. – М.: Педагогика. – 208 с.
35. Эльконин Д.Б. Детская психология. Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: Академия, 2007. 384 с.
36. Эльконин Д.Б. Психическое развитие детей в детских возрастах / Под ред. Д.И. Фельдштейна / Вступительная статья Д.И. Фельдштейна. 2-е изд. М.: Издательство «Институт практической психологии», Воронеж.: НПО «МОДЭК», 1997. 416 с. URL: http://www.childpsy.ru/lib/books/id/8347.php (дата обращения: 8.03.2018).