



# СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
<b>1 Определения, известные факты, обозначения</b>	<b>4</b>
<b>2 Классификация 16-составных многогранников</b>	<b>6</b>
2.1 Соединения 15-составных тел и пирамид $M_1, M_2, M_3$ .....	6
2.2 Соединения 14-составных и 2-составных тел .....	8
2.3 Соединения 13-составных и 3-составных тел .....	9
2.4 Соединения 12-составных и 4-составных тел .....	10
2.5 Соединения 11-составных и 5-составных тел .....	11
2.6 Соединения 10-составных и 6-составных тел .....	12
2.7 Соединения 9-составных и 7-составных тел .....	13
2.8 Соединения 8-составных тел .....	13
2.9 Разбиения 16-составных тел .....	14
<b>3 Выпуклые многогранники на уроках математики и профориентационных занятиях</b>	<b>15</b>
<b>4 Заключение</b>	<b>17</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	<b>18</b>

## Список иллюстраций

1 Соединение $S_{12,4} + S_{3,3}$ .....	5
2 Соединение $S_{12,4} + S'_{3,3}$ .....	5
3 Тело $S_{16,1}$ и его фундаментальные грани .....	7
4 Тело $S_{16,2}$ и его фундаментальные грани .....	7
5 Тело $S_{16,3}$ и его фундаментальные грани .....	8
6 Тело $S_{16,4}$ и его фундаментальные грани .....	8
7 Тело $S_{16,5}$ и его фундаментальные грани .....	9
8 Тело $S_{16,6}$ и его фундаментальные грани .....	9
9 Тело $S_{16,7}$ и его фундаментальные грани .....	10
10 Тело $S_{16,8}$ и его фундаментальные грани .....	10
11 Тело $S_{16,9}$ и его фундаментальные грани .....	11
12 Тело $S_{16,10}$ и его фундаментальные грани .....	12

## ВВЕДЕНИЕ

Несколько лет назад были найдены все выпуклые правильные многогранники, [1]. Напомним, *правильным* называется многогранник, каждая грань которого составлена из правильных многоугольников так, что каждая вершина многоугольника является и вершиной многогранника. Кроме правильных многоугольников гранями правильных многогранников могут служить изображенные на рис. 1 работы [2] многоугольники. Эти многоугольники относятся к *паркетным*, т.е. таким выпуклым многоугольникам, что каждый из них составлен из равноугольных многоугольников. Известно, [3], что существует 19 типов неправильных паркетных многоугольников. Изображение паркетного многоугольника каждого типа можно найти в процитированной выше работе [2].

Классификация типов выпуклых многогранников с паркетными гранями далека от завершения. В 1974 г. было замечено, [4], что её можно провести по схеме, которая привела к нахождению всех выпуклых многогранников с правильными гранями, [5]. Популярное введение в классификационную теорему о правильных телах опубликовано в журнале “Квант”, [6].

Пока не известен ответ на вопрос: “*Каковы все выпуклые соединения правильных пирамид с условием, что рёбра пирамид единичные и рёбра соединений имеют длину  $n \leq 2$ ?*”. Настоящая работа частично отвечает на этот вопрос, а точнее, в ней найдены все составленные из шестнадцати правильных пирамид с единичными рёбрами выпуклые многогранники с рёбрами длины один или два. Будем такие многогранники называть *16-составными*. Составленные из менее 15 правильных пирамид с единичными рёбрами выпуклые тела с рёбрами длины один или два найдены в работах [7, 8].

Результаты настоящей работы опубликованы, [9], и доложены в семинаре “Группы и правильные многогранники” 27 января 2017 г.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup><http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2017>

# 1 Определения, известные факты, обозначения

Расположенные ниже утверждения пронумерованы. Будем ссылаться на них, как на предложения с соответствующим номером.

1. Список всех выпуклых соединений  $\leq 15$  правильных пирамид  $M_1, M_2, M_3$  с единичными рёбрами и треугольником, квадратом, пятиугольником в основании соответственно, причём длина ребра соединения  $\leq 2$ :

- 1)  $M_1, M_2, M_3$ ;
- 2)  $M_1 + M_1, M_1 + M_2, M_2 + M_2, M_3 + M_3$ ;
- 3)  ${}^\circ S_{2,2} + M_1, S_{2,2} + M_2, {}^\circ S_{2,2} + M_2'$ ;
- 4)  ${}^\circ S_{3,1} + M_2, {}^\circ S_{3,1} + M_2', S_{3,2} + M_1, S_{2,2} + S_{2,2}, S_{2,2} + S_{2,2}', {}^\circ S_{2,2} + S_{2,2}''$ ;
- 5)  ${}^\circ S_{4,1} + M_1, {}^\circ S_{4,4} + M_2$ ;
- 6)  ${}^\circ S_{5,1} + M_1, {}^\circ S_{5,2} + M_1, {}^\circ S_{5,2} + M_2, {}^\circ S_{3,1} + S_{3,3}, {}^\circ S_{3,1} + S_{3,1}$ ;
- 7)  ${}^\circ S_{6,2} + M_1, {}^\circ S_{6,5} + M_2, {}^\circ S_{6,5} + M_2, S_{4,6} + S_{3,1}$ ;
- 8)  ${}^\circ S_{7,1} + M_1, {}^\circ S_{7,2} + M_1, {}^\circ S_{5,1} + S_{3,1}, S_{7,3} + M_2, {}^\circ S_{6,2} + S_{2,2}, {}^\circ S_{6,5} + S_{2,2}$ ;
- 9)  ${}^\circ S_{8,3} + M_2, {}^\circ S_{6,5} + S_{3,1}, {}^\circ S_{6,5} + S_{3,3}$ .
- 10)  ${}^\circ S_{9,1} + M_1, {}^\circ S_{9,1} + M_2, {}^\circ S_{9,3} + M_2, {}^\circ S_{8,3} + S_{2,2}, {}^\circ S_{5,1} + S_{5,1}$ ;
- 11)  ${}^\circ S_{10,1} + M_2, {}^\circ S_{10,4} + M_2, {}^\circ S_{10,5} + M_1$ ;
- 12)  ${}^\circ S_{11,2} + M_1, {}^\circ S_{11,3} + M_1, S_{9,1} + S_{3,1}, {}^\circ S_{9,1} + S_{3,1}', {}^\circ S_{9,3} + S_{3,1}$ ;
- 13)  ${}^\circ S_{12,3} + M_2, {}^\circ S_{12,4} + M_1, {}^\circ S_{10,4} + S_{3,1}$ ;
- 14)  ${}^\circ S_{13,1} + M_1, {}^\circ S_{13,1} + M_2, {}^\circ S_{13,3} + M_2, {}^\circ S_{12,3} + S_{2,2}, S_{7,3} + S_{7,3}, S_{7,3} + S_{7,3}'$ ;
- 15)  ${}^\circ S_{14,1} + M_2, S_{14,5} + M_2, S_{14,6} + M_2, S_{12,4} + S_{3,3}, {}^\circ S_{12,4} + S_{3,3}'$ .

Многогранник  $S_{i,j}$  расположен в списке ( $i$ ) на  $j$ -м месте:

$$S_{1,1} = M_1, S_{1,2} = M_2, S_{1,3} = M_3, S_{2,1} = S_{1,1} + M_1, \dots, S_{15,5} = S_{12,4} + S_{3,3}'.$$

Кружком помечены многогранники с фиктивными вершинами, штрих указывает на различие многогранников, составленных из двух одинаковых тел.

**Определение 1.** *Фиктивная вершина* — лежащая внутри ребра или грани общая вершина равноугольных многоугольников, из которых составлена паркетная грань.

2. Для многогранников утверждения 1 и некоторых известных тел справедливы равенства:  $J_{12} = S_{2,1}, P_{2,22} = S_{2,2}, [3^4] = S_{2,3}, J_{13} = S_{2,4}, P_{3,33} = S_{3,2}, P_{4,11} = S_{4,3}, P_{4,30} = S_{4,4}, P_{4,31} = S_{4,5}, {}^2M_1 = S_{6,1} = S_{5,1} + M_1, M_{2a} = S_{9,3} = S_{6,4} + S_{3,3}, M_4 = S_{7,4} = S_{4,6} + S_{3,1}, P_{2,25} = S_{8,4}$ . Буквой  $J$  с индексом обозначены тела Джонсона, а буквой  $P$  с двумя индексами — правильные многогранники, расположенные, например, в атласах [12, 13].

3. Справедливы равенства:  $S_{3,2} = S_{2,3} + M_1, S_{4,1} = S_{3,2} + M_1' = S_{2,2} + S_{2,2}''', S_{4,2} = S_{2,2} + S_{2,2}^{iv}, S_{4,3} = S_{2,2} + S_{2,2}^v, S_{6,1} = S_{3,1} + S_{3,1}', S_{10,1} = S_{6,2} + S_{4,1} = S_{6,4} + S_{4,2} = S_{5,1} + S_{5,2} = S_{8,4} + S_{2,2}', S_{10,4} = S_{6,2} + S_{4,2} = S_{6,2} + S_{4,6}, S_{10,2} = S_{6,3} + S_{4,1}$ .

4. Существует следующих два 15-составных многогранника, полученных соединением тел  $S_{12,4}$  и  $S_{3,3}$  прямоугольными и трапециевидными гранями:  $S_{15,4} = S_{12,4} + S_{3,3}, S_{15,5} = S_{12,4} + S_{3,3}'$  соответственно, рис. 1,2. Многогранник  $S_{15,4}$  относится к архимедовым телам. Его обозначают [3, 6, 6] или  $M_{10}$ .

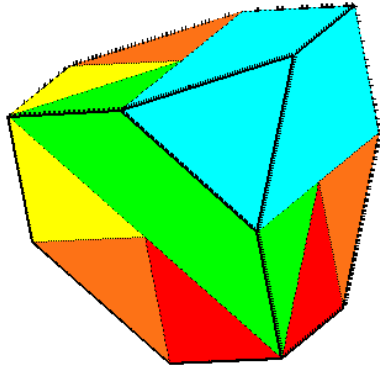


Рис. 1: Соединение  $S_{12,4} + S_{3,3}$

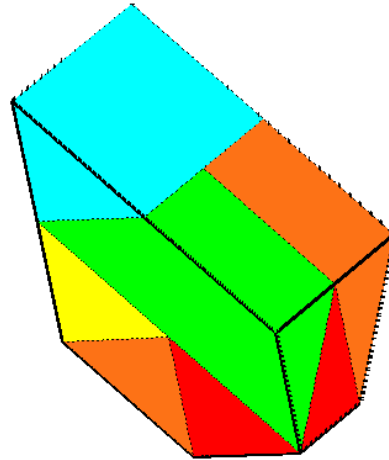


Рис. 2: Соединение  $S_{12,4} + S'_{3,3}$

**Определение 2.** *Фундаментальные грани* — такое минимальное по мощности подмножество множества граней многогранника, что действуя его группой симметрий на эти грани, получаем каждую грань многогранника.

**Определение 3.** *Группа симметрий* — группа всех движений, переводящих многогранник в себя.

**Определение 5.** *Правильногранник* — такой многогранник  $P$ , что каждая его грань составлена из одного или нескольких правильных многоугольников, и  $F_p$  - множество этих многоугольников, причем, во-первых, общая вершина многоугольников из  $F_p$  не лежит внутри ребра одного из них; во-вторых, сумма углов многоугольников из  $F_p$  в каждой их общей вершине меньше 360 градусов.

**Определение 6.** Пусть  $m$  — целое неотрицательное число. Выпуклый многогранник называется  *$m$ -правильногранником*, когда выполняются следующие условия:

- 1) грани составлены из правильных многоугольников, стороны которых измеряются натуральными числами;
- 2) максимальная длина ребра равна  $m + 1$ ;
- 3) у любого подобного многогранника с коэффициентом подобия меньше единицы существует ребро ненатуральной длины или существует грань, которую нельзя составить из правильных многоугольников с целыми рёбрами.

5. Принцип обозначений выпуклых многогранников заключается в следующем: цифра, стоящая на первом месте, обозначает количество правильногранных пирамид, из которых был составлен получившийся многогранник, а цифра, стоящая на втором месте, это порядковый номер многогранника.

## 2 Классификация 16-составных многогранников

**Теорема 1.** *Выпуклый многогранник с рёбрами длины один или два составлен из шестнадцати правильногранных пирамид с единичными рёбрами тогда и только тогда, когда он является одним из следующих тел:*

$$\begin{aligned} & \circ S_{15,1} + M_1, \circ S_{15,2} + M_2, S_{15,2} + M'_2, \circ S_{15,3} + M_2, S_{15,3} + M'_2, \circ S_{15,4} + M_1, \circ S_{15,5} + M_1, \circ S_{14,4} + S_{2,2}, \\ & \circ S_{13,1} + S_{3,1}, \circ S_{12,5} + S_{4,2}, \end{aligned}$$

*штрих указывает на различие многогранников, составленных из двух одинаковых тел, кружком помечены тела с фиктивными вершинами.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В основе доказательства лежат список всех выпуклых соединений  $\leq 15$  правильногранных пирамид с единичными рёбрами и компьютерные “живые” модели этих соединений. Будем доказывать по схеме, которую обозначим  $15+1, 14+2, 13+3, 12+4, 11+5, 10+6, 9+7, 8+8$ . Это значит, что сначала находим все выпуклые соединения первого 15-составного многогранника с каждой пирамидой. Затем второе 15-составное тело соединяем с пирамидами, затем третье, четвёртое и пятое. Каждое 14-составное тело соединяем с каждым 2-составным и так до соединений каждого 8-составного тела с каждым 8-составным. Отметим сразу, что соединение бипирамиды  $M_1 + M_1$  или  $M_3 + M_3$  с любым выпуклым соединением пирамид не будет выпуклым. Поэтому в дальнейшем названные 2-составные тела и 5-угольная пирамида  $M_3$  упоминаться не будут.

Ниже для каждого  $k = 1, 2, \dots, 8$  за обозначением многогранника  $S_{16-k,i}$  выписываются все его фундаментальные грани. Затем каждому многограннику  $S_{k,j}$  ставится в соответствие такая его фундаментальная грань, которая есть у тела  $S_{16-k,i}$ . Наконец описываются все выпуклые соединения этими гранями с условием, что рёбра имеют длину один или два, либо указывается почему таких соединений не существует. Если такие соединения отсутствуют среди ранее построенных тел, то записываем их как новые многогранники теоремы.

“Живые модели” составленных из не более 16 правильногранных пирамид тел можно найти в электронном атласе, см. файл. “allM1M2M3.mw”.

### 2.1 Соединения 15-составных тел и пирамид $M_1, M_2, M_3$

1.  $S_{15,1}$ , треугольник, трапеция, параллелограмм, пятиугольник, ромб с двойными рёбрами.  $M_1$ , треугольник,  $S_{16,1} = S_{15,1} + M_1$ .

Тело  $S_{15,1}$  обладает единственной фундаментальной треугольной гранью, соединение по которой с тетраэдром  $M_1$  приводит к 16-составному телу, которое будем обозначать  $S_{16,1}$ , рис. 3.

$M_2$ , треугольник. Соединение треугольными гранями тел  $S_{15,1}$  и  $M_2$  приводит к нарушению выпуклости.

2.  $S_{15,2}$ , 5 треугольников, 3 квадрата, 2 ромба.

Присвоим номера треугольникам тела  $S_{15,2}$ . Сначала занумеруем четыре треугольника, каждый из которых рассекает плоскость отражения. Первые два номера получают смежные треугольники: номер один присвоим треугольнику, у которого общая с ромбом вершина. Номер три припишем треугольнику, имеющему общую со вторым треугольником вершину. Пусть четвёртый треугольник смежен с квадратом. Номер пять получает оставшийся, лежащий вне плоскости отражения треугольник.

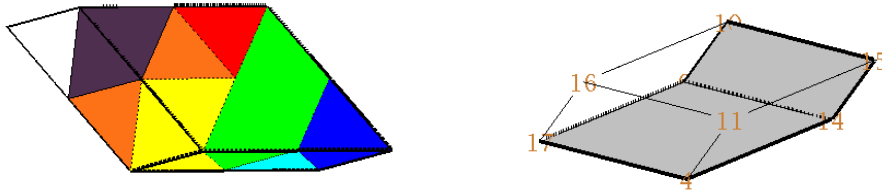


Рис. 3: Тело  $S_{16,1}$  и его фундаментальные грани

Плоскость отражения пересекает ещё квадрат и ромб, которым присвоим первые номера. Смежный с ромбом один ромб получает номер два. Квадраты, смежные с треугольниками 1 и 2 получают номера 2 и 3 соответственно.

$M_1$ , треугольник. Соединение треугольными гранями тел  $S_{15,2}$  и  $M_1$  приводит к нарушению выпуклости потому, что треугольные грани тела  $S_{15,2}$  являются гранями тетраэдра и соединение  $S_{2,1}$  двух тетраэдров не позволяет без нарушения выпуклости присоединять правильную пирамиду.

$M_2$ , треугольник. Теряется выпуклость потому, что являются тупыми двугранные углы, рёбра которых содержат рёбра треугольных граней тела  $M_{15,2}$ .

$M_2$ , квадрат 2,  $S_{16,2} = S_{15,2} + M_2$ , рис. 4.

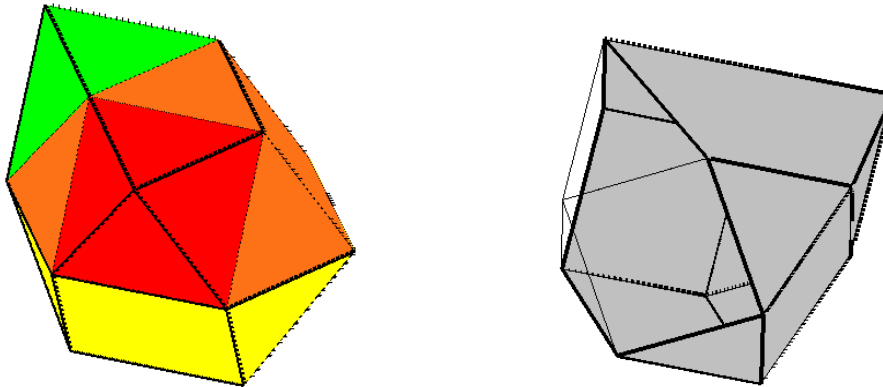


Рис. 4: Тело  $S_{16,2}$  и его фундаментальные грани

$M_2$ , квадрат 3,  $S_{16,3} = S_{15,2} + M'_2 = P_{4,12}$ , рис. 5.

3.  $S_{15,3}$ , 3 треугольника, ромб, 2 квадрата.

$M_1$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

$M_2$ , квадрат, смежный с ромбом,  $S_{16,4} = S_{15,3} + M_2$ , рис. 6.

квадрат с четырьмя смежными треугольниками,  $S_{16,5} = S_{15,3} + M'_2 = P_{4,13}$ , рис. 7.

4.  $S_{15,4}$ , треугольник, шестиугольник.

$M_1$ , треугольник,  $S_{16,6} = S_{15,4} + M_1$ , рис. 8.

$M_2$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

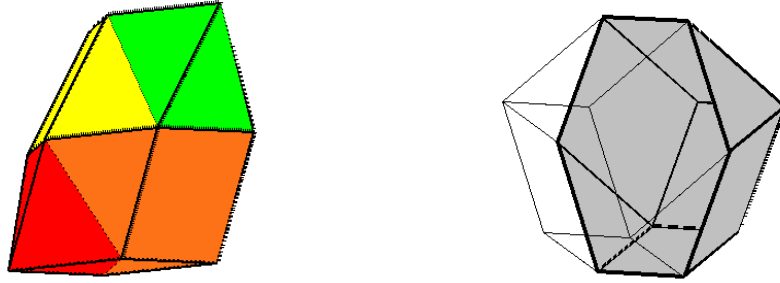


Рис. 5: Тело  $S_{16,3}$  и его фундаментальные грани

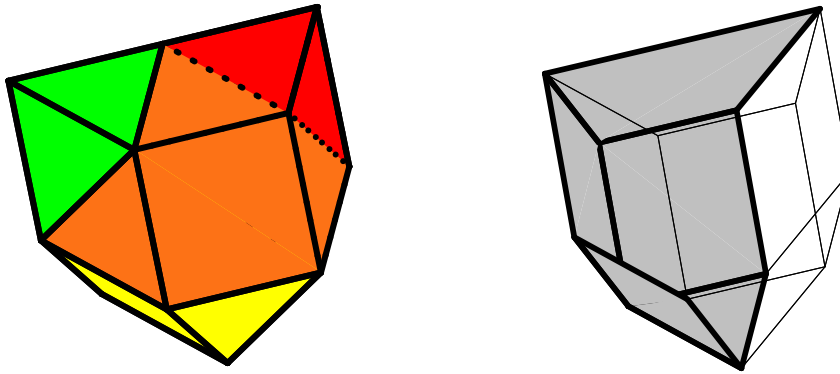


Рис. 6: Тело  $S_{16,4}$  и его фундаментальные грани

5.  $S_{15,5}$ , треугольник, трапеция, треугольник со стороной 2, квадрат, пятиугольник.  
 $M_1$ , треугольник,  $S_{16,7} = S_{15,5} + M_1 =^2 S_{2,2}$ , рис. 9.  
 $M_2$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

## 2.2 Соединения 14-составных и 2-составных тел

1.  $S_{14,1}$ , ромб, параллелограмм, квадрат, 2 пятиугольника.

$S_{2,2}$ , ромб. Три соединения приводят к невыпуклому телу, а ещё одно имеет рёбра длины 3.

$S_{2,2}$ , квадрат,  $S_{14,1} + S_{2,2} = S_{16,1}$ .

2.  $S_{14,2}$ , треугольник, трапеция, пятиугольник.

$S_{2,2}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

$S_{2,3}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

3.  $S_{14,3}$ , 2 треугольника, ромб, квадрат, 2 параллелограмма, прямоугольник, шестиугольник.

$S_{2,2}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

$S_{2,2}$ , ромб. Нарушение выпуклости или длины ребра.

$S_{2,2}$ , квадрат, из 4 различных соединений квадратными гранями три нарушают выпуклость, а одно имеет ребро длины 3.

$S_{2,3}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

4.  $S_{14,4}$ , 2 ромба, квадрат, параллелограмм, прямоугольник, 2 пятиугольника.



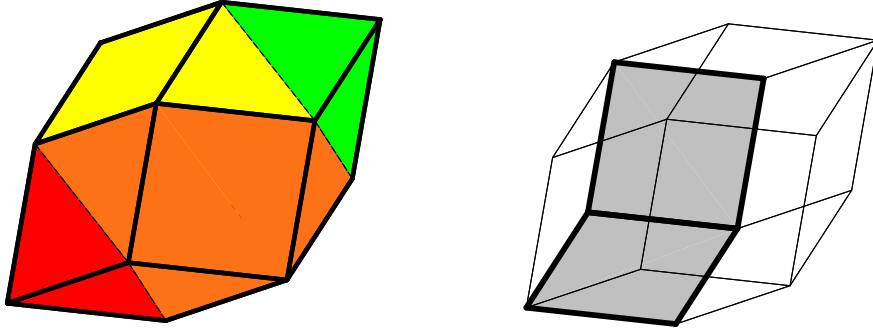


Рис. 7: Тело  $S_{16,5}$  и его фундаментальные грани

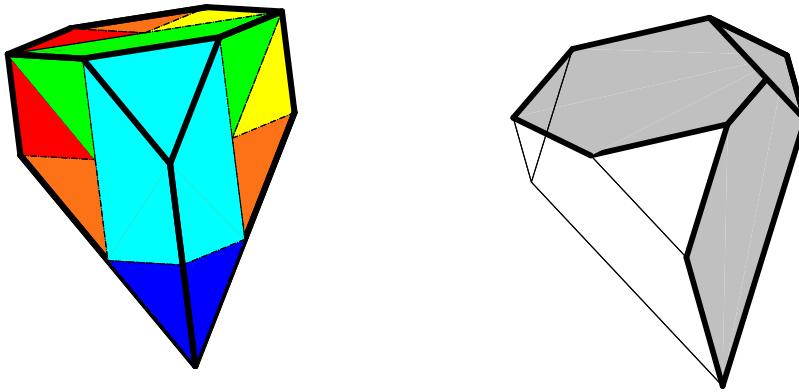


Рис. 8: Тело  $S_{16,6}$  и его фундаментальные грани

$S_{2,2}$ , ромб,  $S_{16,8} = S_{14,4} + S_{2,2}$ , рис. 10.

$S_{2,2}$ , квадрат. Получается ребро длины 3.

5.  $S_{14,5}$ , квадрат, 2 треугольника.

$S_{2,2}$ , треугольник, квадрат. Нарушение выпуклости.

6.  $S_{14,6}$ , квадрат, треугольник.

$S_{2,2}$ , треугольник, квадрат. Нарушение выпуклости.

### 2.3 Соединения 13-составных и 3-составных тел

1.  $S_{13,1}$ , треугольник, квадрат, ромб, трапеция, пятиугольник, шестиугольник.

$S_{3,1}$ , треугольник, квадрат. Нарушение выпуклости.

$S_{3,1}$ , трапеция,  $S_{16,9} = S_{13,1} + S_{3,1}$ , рис. 11.

$S_{3,2}$  ромб, треугольник. Нарушение выпуклости.

$S_{3,3}$ , треугольник, трапеция. Нарушение выпуклости из-за сложения двугранных углов, образованных смежными гранями октаэдра.

2.  $S_{13,2}$ , треугольник, треугольник большой, прямоугольник, трапеция, пятиугольник.

$S_{3,1}$ , треугольник, трапеция. Нарушение выпуклости по длинному основанию трапеции.

$S_{3,2}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

$S_{3,3}$ , трапеция,  $S_{13,2} + S_{3,3} = S_{16,7}$ .

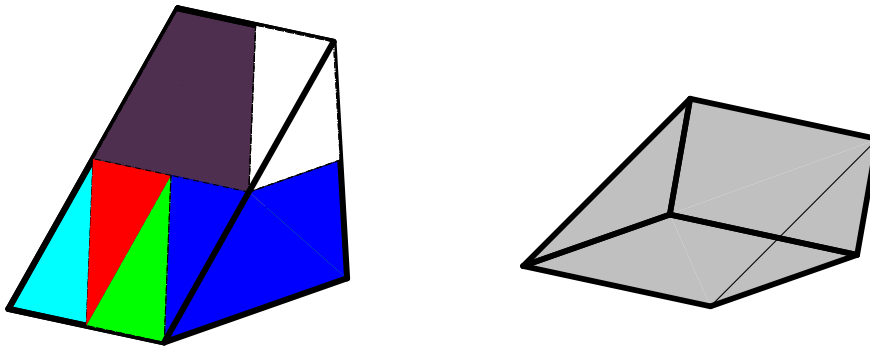


Рис. 9: Тело  $S_{16,7}$  и его фундаментальные грани

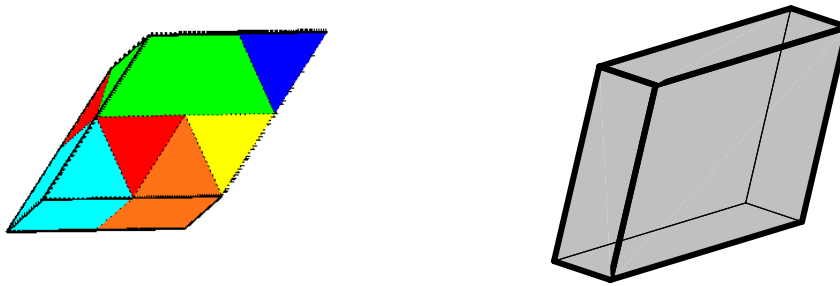


Рис. 10: Тело  $S_{16,8}$  и его фундаментальные грани

$S_{3,3}$ , прямоугольник,  $S_{13,2} + S'_{3,3} = S_{16,6}$ .

3.  $S_{13,3}$ , треугольник, квадрат, прямоугольник, 2 трапеции, шестиугольник.

$S_{3,1}$ , трапеция. Нарушение выпуклости по общему большому основанию, смежному с прямоугольником и по боковым рёбрам другой трапеции.

$S_{3,2}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

$S_{3,3}$ , прямоугольник,  $S_{13,3} + S_{3,3} = S_{16,9}$ .

$S_{3,3}$ , трапеция. Нарушение выпуклости.

## 2.4 Соединения 12-составных и 4-составных тел

1.  $S_{12,1}$ , прямоугольник, 2 параллелограмм, 2 трапеции, ромб.

$S_{4,1}$ , трапеции. Нарушение выпуклости или длины ребра.

$S_{4,2}$ , параллелограмм,  $S_{12,1} + S_{4,2} = S_{16,8}$ .

$S_{4,2}$ , параллелограмм,  $S_{12,1} + S'_{4,2} = S_{16,7}$ .

$S_{4,6}$ , трапеция. Нарушение выпуклости по длинному основанию.

2.  $S_{12,2}$ , треугольник. Тело подобно двойной пирамиде  $S_{2,1}$ , соединение которой с любым составленным из правильных пирамид многогранником приводит к нарушению выпуклости.

3.  $S_{12,3}$ , квадрат, ромб, шестиугольник.

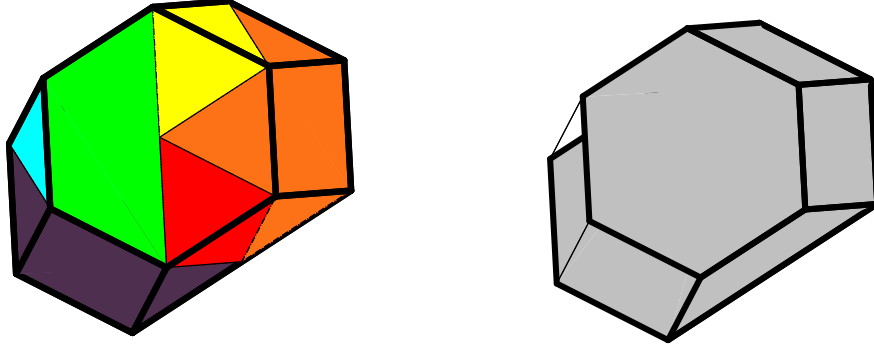


Рис. 11: Тело  $S_{16,9}$  и его фундаментальные грани

$S_{4,1}$ , ромб. Рёбрам соединяемых ромбов соответствуют два и три тупых двугранных угла, что ведёт к нарушению выпуклости.

$S_{4,3}$ , ромб. Рёбрам соединяемых ромбов соответствуют два и три тупых двугранных угла, что ведёт к нарушению выпуклости.

$S_{4,4}$ , квадрат, ромб. Встречаются три и два тупых двугранных угла, соответствующих сторонам каждой пары названных четырёхугольников.

$S_{4,5}$ , квадрат, ромб. Встречаются три и два тупых двугранных угла, соответствующих сторонам каждой пары названных четырёхугольников.

$S_{4,6}$ , квадрат. Встречаются три и два тупых двугранных угла, соответствующих сторонам соединяемых квадратов.

4.  $S_{12,4}$ , треугольник, прямоугольник, трапеция, шестиугольник.

$S_{4,1}$ , треугольник, трапеция. Соединяются тупые двугранные углы.

$S_{4,2}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

$S_{4,2}$ , прямоугольник,  $S_{12,4} + S_{4,2} = S_{16,6}$ .

$S_{4,5}$ , 2 треугольника. Три тупых двугранных угла соединяются с хотя бы одним таким углом.

$S_{4,6}$ , треугольник, трапеция. Соединяются тупые двугранные углы.

5.  $S_{12,5}$ , квадрат, прямоугольник, параллелограмм, 2 трапеции.

$S_{4,1}$ , трапеция. Нарушается выпуклость по двугранным углам, соответствующим основаниям трапеций.

$S_{4,2}$ , параллелограмм,  $S_{16,10} = S_{12,5} + S_{4,2}$ , рис. 12.

$S_{4,2}$ , прямоугольник,  $S_{12,5} + S'_{4,2} = S_{16,7}$ .

$S_{4,6}$ , трапеция. Нарушается выпуклость по двугранным углам, соответствующим малым основаниям трапеций.

## 2.5 Соединения 11-составных и 5-составных тел

1.  $S_{11,1}$ , трапеция, треугольник со стороной 2, треугольник со стороной 1, параллелограмм, пятиугольник.

$S_{5,1}$ , треугольник со стороной 2,  $S_{11,1} + S_{5,1} = S_{16,6}$ .

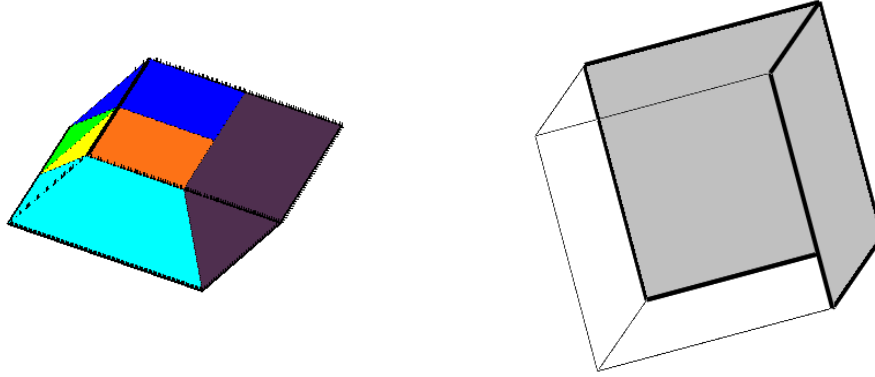


Рис. 12: Тело  $S_{16,10}$  и его фундаментальные грани

$S_{5,1}$ , трапеция,  $S_{11,1} + S'_{5,1} = S_{16,1}$ .

$S_{5,2}$ , трапеция. Соединение приводит к нарушению выпуклости по длинным основаниям.

2.  $S_{11,2}$ , треугольник, ромб, две трапеции, параллелограмм, прямоугольник, пятиугольник.

$S_{5,1}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

$S_{5,1}$ , трапеция. Появление ребра длины три.

$S_{5,2}$ , треугольник, ромб, трапеция. Нарушение выпуклости.

3.  $S_{11,3}$ , треугольник, трапеция, треугольник со стороной два.

$S_{5,1}$ , треугольник, трапеция, треугольник со стороной два. Нарушение выпуклости.

$S_{5,2}$ , треугольник, трапеция. Нарушение выпуклости.

## 2.6 Соединения 10-составных и 6-составных тел

1.  $S_{10,1}$ , треугольник, ромб, квадрат, две трапеции, параллелограмм, пятиугольник.

$S_{6,2}$ , квадрат, два ромба, две трапеции.

$S_{6,2}$ , параллелограмм,  $S_{10,1} + S_{6,2} = S_{16,9}$ .

$S_{6,3}$ , треугольник, трапеция. Выпуклых соединений нет.

$S_{6,4}$  ромб, квадрат, две трапеции. Нарушение выпуклости.

$S_{6,5}$ , треугольник, трапеция. Выпуклых соединений нет.

2.  $S_{10,2}$ , треугольник, трапеция, треугольник со стороной два, шестиугольник.

$S_{6,1}$ , треугольник со стороной два,  $S_{10,2} + S_{6,1} = S_{16,6}$ .

$S_{6,2}$ , трапеция. Нарушение выпуклости.

$S_{6,3}$ , треугольник, трапеция. Нарушение выпуклости.

$S_{6,4}$ , две трапеции, невозможно без нарушения выпуклости.

$S_{6,5}$ , треугольник, трапеция. Нарушение выпуклости.

3.  $S_{10,3}$ , треугольник, квадрат.

$S_{6,1}$ , треугольник,  $S_{10,3} + S_{6,1} = S_{16,7}$ .

4.  $S_{10,4}$ , треугольник, ромб, квадрат, 2 трапеции, прямоугольник, пятиугольник.

$S_{6,2}$ , 2 ромба, квадрат. Нарушение выпуклости.

$S_{6,2}$ , 2 трапеции. Нарушение выпуклости или длины ребра.

$S_{6,3}$ , треугольник, трапеция. Нарушение выпуклости.

$S_{6,4}$ , ромб, квадрат, 2 трапеции. Нарушение выпуклости.

$S_{6,4}$ , прямоугольник,  $S_{10,4} + S_{6,4} = S_{16,9}$ .

$S_{6,5}$ , треугольник, квадрат, трапеция. Нарушение выпуклости.

5.  $S_{10,5}$ , треугольник, трапеция. При соединении по трапециям нарушится выпуклость потому, что их большому основанию соответствует такой же двугранный угол, как двугранный угол, равный сумме двух двугранных углов между смежными гранями тетраэдра. К треугольной грани без нарушения выпуклости можно присоединить только тетраэдр  $M_1$ , который шестисоставным телом не является.

## 2.7 Соединения 9-составных и 7-составных тел

1.  $S_{9,1}$ , треугольник, ромб, квадрат, 2 трапеции, шестиугольник. Соединение тела  $S_{9,1}$  с  $S_{7,1}$ . Среди фундаментальных граней обоих тел есть ромб, треугольник и трапеция. Стороны треугольников соответствуют тупым двугранным углам, поэтому соединение треугольными гранями не может быть выпуклым. Три тупых двугранных угла, соответствующих сторонам ромбической грани тела  $S_{9,1}$ , встречаются с тупыми двугранными углами, соответствующими двум сторонам ромба тела  $S_{7,1}$ , поэтому соединение этими ромбическими гранями не может быть выпуклым. У каждой из трёх трапеций длинному основанию соответствует тупой двугранный угол. Поэтому при соединении трапециями встретятся два тупых двугранных угла.

Соединение тела  $S_{9,1}$  с  $S_{7,2}$ . Среди фундаментальных граней обоих тел есть треугольник и трапеция. Сторонам треугольника соответствуют тупые двугранные углы, поэтому соединение треугольниками не может быть выпуклым. При соединении трапеций встречаются тупые двугранные углы, соответствующие длинным основаниям, что приводит к нарушению выпуклости.

$S_{7,3}$ , треугольник, ромб, квадрат, 2 трапеции. Нарушение выпуклости.

$S_{7,4}$ , шестиугольник,  $S_{9,1} + S_{7,4} = S_{16,2}$ ;  $S_{9,1} + S'_{7,4} = S_{16,4}$ .

2.  $S_{9,2}$ , трапеция, прямоугольник.

$S_{7,1}$ , трапеция. Нарушение выпуклости.

$S_{7,2}$ , прямоугольник, трапеция. Нарушение выпуклости.

$S_{7,3}$ , трапеция. Нарушение выпуклости.

3.  $S_{9,3}$ , 2 квадрата, трапеция.

$S_{7,1}$ , трапеция. Нарушение выпуклости.

$S_{7,2}$ , трапеция. Нарушение выпуклости.

$S_{7,2}$ , квадрат, трапеция. Нарушение выпуклости.

$S_{7,4}$ , квадрат. Нарушение выпуклости.

## 2.8 Соединения 8-составных тел

1.  $S_{8,1}$ , ромб, параллелограмм.

$S_{8,1}$ , ромб. Нарушение выпуклости, либо длины ребра.

$S_{8,1}$ , параллелограмм,  $S_{8,1} + S_{8,1} = S_{16,1}$ .

$S_{8,2}$ , параллелограмм. Возникает ребро длины 3.

$S_{8,4}$ , ромб. Нарушение выпуклости.

$S_{8,5}$ , параллелограмм. Нарушение выпуклости.

$S_{8,6}$ , ромб, параллелограмм. Нарушение выпуклости.

2.  $S_{8,2}$ , 2 треугольника, параллелограмм, прямоугольник.

$S_{8,2}$ , треугольник,  $S_{8,2} + S_{8,2} = S_{16,7}$ .

$S_{8,2}$ , параллелограмм,  $S_{8,2} + S'_{8,2} = S_{16,8}$ .

$S_{8,2}$ , прямоугольник,  $S_{8,2} + S''_{8,2} = S_{16,1}$ .

$S_{8,3}$ , прямоугольник, параллелограмм. Соединение приводит к нарушению выпуклости, либо к рёбрам длины 3.

$S_{8,3}$ , треугольник. Нарушение выпуклости.

$S_{8,5}$ , параллелограмм. Появляется ребро длины 3.

3.  $S_{8,3}$ . Каждая грань содержит ребро, которому соответствует столь большой двугранный угол, что соединение с ним другого двугранного угла рассматриваемых многогранников приведёт к нарушению выпуклости.

4.  $S_{8,4}$ , 2 треугольника, 2 ромба, квадрат, 3 шестиугольник.

$S_{8,3}$ , треугольник, квадрат. Нарушение выпуклости.

$S_{8,4}$ , треугольник, ромб, квадрат. Нарушение выпуклости.

$S_{8,4}$ , шестиугольник,  $S_{8,4} + S_{8,4} = S_{16,3}$ ,  $S_{8,4} + S'_{8,4} = S_{16,4}$ ,  $S_{8,4} + S''_{8,4} = S_{16,5}$ .

$S_{8,5}$ , квадрат. Нарушение выпуклости.

$S_{8,6}$ , ромб. Нарушение выпуклости.

5.  $S_{8,5}$ , квадрат, параллелограмм.

$S_{8,3}$ , квадрат. Нарушение выпуклости.

$S_{8,5}$ , квадрат. Нарушение выпуклости, либо допустимой длины ребра.

$S_{8,5}$ , параллелограмм,  $S_{8,5} + S_{8,5} = S_{16,8}$ .

$S_{8,6}$ , параллелограмм. Нарушение выпуклости.

6.  $S_{8,6}$ , ромб, параллелограмм, прямоугольник.

$S_{8,6}$ , ромб. Нарушение выпуклости, либо допустимой длины ребра.

$S_{8,6}$ , параллелограмм,  $S_{8,6} + S_{8,6} = S_{16,10}$ .

$S_{8,6}$ , прямоугольник,  $S_{8,6} + S'_{8,6} = S_{16,8}$ .

Теорема 1 доказана.

## 2.9 Разбиения 16-составных тел

**Теорема 2.** Если расположенный на месте  $i$  многогранник теоремы 1 обозначить  $S_{16,i}$ ,

$i = 1, 2, \dots, 10$ , то  $S_{16,1} = S_{15,1} + M_1 = S_{14,1} + S_{2,2}$ ,  $S_{16,2} = S_{15,2} + M_2 = S_{11,1} + S'_{5,1} = S_{9,1} + S_{7,4} = S_{8,1} + S_{8,1} = S_{8,2} + S''_{8,2}$ ,  $S_{16,3} = S_{15,2} + M'_2 = S_{8,4} + S_{8,4} = P_{4,12}$ ,  $S_{16,4} = S_{15,3} + M_2 = S_{9,1} + S'_{7,4} = S_{8,4} + S'_{8,4}$ ,  $S_{16,5} = S_{15,3} + M'_2 = S_{8,4} + S''_{8,4} = P_{4,13}$ ,  $S_{16,6} = S_{15,4} + M_1 = S_{13,2} + S'_{3,3} = S_{12,4} + S_{4,2} = S_{11,1} + S_{5,1} = S_{10,2} + S_{6,1}$ ,  $S_{16,7} = S_{15,5} + M_1 = S_{13,2} + S_{3,3} = S_{12,1} + S'_{4,2} = S_{12,5} + S'_{4,2} = S_{10,3} + S_{6,1} = S_{8,2} + S_{8,2} = S_{2,2}$ ,  $S_{16,8} = S_{14,4} + S_{2,2} = S_{12,1} + S_{4,2} = S_{8,2} + S'_{8,2} = S_{8,5} + S_{8,5} = S_{8,6} + S'_{8,6}$ ,  $S_{16,9} = S_{13,1} + S_{3,1} = S_{10,1} + S_{6,2} = S_{10,4} + S_{6,4}$ ,  $S_{16,10} = S_{12,5} + S_{4,2} = S_{8,6} + S_{8,6}$ .

### 3 Выпуклые многогранники на уроках математики и профориентационных занятиях

Моё знакомство с выпуклыми многогранниками произошло впервые в 2015 году, когда я будучи на 4 курсе заочной формы обучения в КГПУ им. В. П. Астафьева, готовила учебную практику у Алексея Викторовича Тимофеевко. Изначально было много трудностей и вопросов, но сама работа затянула тем, что в ней присутствуют фигуры, которые ты можешь сам двигать и просматривать в специальной программе. Появился интерес, так как ты по сути с помощью программы и уже подготовленной базы фигур создаёшь что-то новое, то, что до тебя никто не делал. Конечно, раньше создавались фигуры, но составленные из пятнадцати правильных пирамид, а ты уже изобретаешь и рассматриваешь соединения большего числа пирамид.

Таким образом, в моей дипломной работе я рассматривала уже 16-составные тела. Мы доказали, что выпуклый многогранник с рёбрами длины один или два составлен из шестнадцати правильных пирамид с единичными рёбрами тогда и только тогда, когда он является одним из десяти тел, построенных в явном виде.

Часть заготовок для доказательства основной теоремы моей ВКР была создана на проведённых совместно с Е. С. Окладниковой занятиях по дисциплинам учебного плана старшекурсников и магистрантов математического отделения ИМФИ КГПУ им. В. П. Астафьева. Эти занятия проектируются на некоторые уроки математики, информатики и элективные курсы средних общеобразовательных школ. Доказательство теоремы основано на ранее опубликованных результатах коллективной работы группы лиц. Организационная сторона работы над доказательством теоремы отражена в позапрошлогодних публикациях [10, 11].

С февраля еженедельно работает мастер-класс “Правильногранники” в интерактивном музее науки “Ньютон-парк”<sup>2</sup>, куда семьи и учителя приходят с детьми и создают модели многогранников. Как учитель математики, планирую в 2017-18 учебном году подключить и своих учеников, потому что уверена в их заинтересованности такой работой. По опыту преподавателей, которые уже давно занимаются с учениками в данной сфере ясно, что одним нравится создавать готовые фигуры из бумаги или трубочек по компьютерной модели, а другим больше нравится работать с самой программой, открывать всё новые и новые виды многогранников. Уверена, данная работа никого не оставит равнодушным и заинтересует любого.

Со временем работа затягивает, появляется так сказать интрига, сколько всё таки получится соединений в итоге. Много фигур, которые получаются при помощи других соединений, уже встречались ранее, поэтому эта работа вроде и простая с первого взгляда, но на самом деле требует очень много внимания и концентрации. Внимательно нужно просматривать все модели, чтобы не пропустить нужную грань, так как именно она может оказаться очень важной и единственно возможной для соединения с другой рассматриваемой фигурой. И то соединение может не получиться, если двугранные углы соединяемых и смежных с ними граней в сумме дают больший развёрнутого угол. Но если всё таки они подходят по всем параметрам друг к другу, то мы уже переходим к самому интересному, к составлению нового многогранника. С помощью программы мы не только создаём новый, неизвестный до этого многогранник, но также окрашиваем его в разные цвета, так что каждая фигура которая

---

<sup>2</sup><http://newton-park.net>

была к нему присоединена раскрашивается своим определённым цветом, что бы в дальнейшем было ясно видно из каких частей эта фигура состоит.



## 4 Заключение

1. Теперь человечеству стало ясно, что шестнадцатисоставных тел существует ровно десять и они известны.

2. Созданы алгебраические и компьютерные модели новых многогранников, доступные для приложений.

3. Поскольку инструментарий доказательства достаточно элементарен, то такого типа доказательства могут служить основой элективного курса для учащихся средних и старших классов. Сегодня над проблемой нахождения всех выпуклых многогранников с паркетными гранями работают учащиеся школ №149 Красноярска и прошедшие отбор участники школы интеллектуального роста группы западных районов Красноярского края.

## Список цитированной литературы

- [1] *А. В. Тимофеевко*. К перечню выпуклых правильногранников, *Современные проблемы математики и механики*. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова. / Под ред. И.Х.Сабитова и В.Н.Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011,155—170.
- [2] *А. В. Тимофеевко*. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями, *Чебышевский сб.*, 12:2 (2011), 118—126. URL: <http://www.mathnet.ru/links/726a8c2f4cbea68fc3c59a31b85a8824/cheb84.pdf> (дата обращения: 27.05.2017)
- [3] *О. А. Табинова, А. В. Тимофеевко*. О классификации паркетных многоугольников // *Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П.Астафьева*, 2013, №1(23) 216–219. URL: <http://www.kspu.ru/upload/documents/2013/04/24/e4a976c1fc18691dc0f4404927e04813/2013-1.pdf> / (дата обращения: 27.05.2017)
- [4] *Ю. А. Пряжин*. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных, *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*, 45, 1974, 111–112. URL: <http://www.mathnet.ru/links/8f103b28efa047240a7ef380fb27cafc/zns12750.pdf> / (дата обращения: 27.05.2017)
- [5] *В. А. Залгаллер*. Выпуклые многогранники с правильными гранями // *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*. 1967. Т.2. С.5–218. URL: <http://www.mathnet.ru/links/2a161d9d58baaf2eea382949becfc95/zns1408.pdf> (дата обращения: 27.05.2017)
- [6] *Ю. В. Матиясевич*. Модели многогранников, *Квант*, №1(1978), 8–17. URL: [http://kvant.mccme.ru/1978/01/modeli\\_mnogogrannikov.htm](http://kvant.mccme.ru/1978/01/modeli_mnogogrannikov.htm) (дата обращения: 27.05.2017)
- [7] *Полтанов Е.В., Судаков Д.Н., Тимофеевко А. В., Якушева А.В.* О выпуклых соединениях правильногранных пирамид // *Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”*, Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016. С.148-158. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1662/top3.pdf> (дата обращения: 27.05.2017)
- [8] *Окладникова Е. С., Тимофеевко А. В.* О типах выпуклых многогранников с паркетными гранями // *Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием*. Красноярск, 16–17 ноября 2016 г. / В.Р. Майер (отв. ред.); ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016. С. 147-154. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27560035> (дата обращения: 27.05.2017)
- [9] *Тимофеевко А.В., Черепухина А.А.* Составленные из шестнадцати правильногранных пирамид выпуклые многогранники // *Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики»*. Нальчик, ИПМФ КБНЦ РАН, 2017. С.202-202.
- [10] *Тимофеевко А. В. Отмахова Е. С.* Комплекс решений, необходимых для организации работы над научной проблемой коллективом сотрудников и сту-

дентов // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева, 2015. №3(33), С.79—82.  
URL:<http://www.kspu.ru/upload/documents/2015/10/26/787be05a793a98e41a4ec13451dd56e4/nauchnyj-zhurnal-vestnik-kgrpu-im-vp-astafeva-2015-3-33.pdf> / (дата обращения 27.05.2017 г.)

- [11] *Отмазова Е. С., Тимофеевко А. В.* Этапы и способы организации коллективной работы над научной проблемой: видеолекция. Красноярск 2015 г. Регистрац.свидетельство №41337. Номер гос.регистрации 0321502701 . URL: <http://elib.kspu.ru/document/13817> / (дата обращения 27.05.2017 г.)
- [12] *Tupelo-Schneck R.* Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. URL: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra/> (дата обращения: 27.05.2017)
- [13] *E. W. Weisstein.* Johnson Solid. URL: <http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html> (дата обращения: 27.05.2017)