VI Международный научно-образовательный форум 2017
КГПУ им. В.П. Астафьева

ЧЕЛОВЕК, СЕМЬЯ И ОБЩЕСТВО: ИСТОРИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием

Красноярск, 15–16 ноября 2017 г.

Электронное издание

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева»

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием

Красноярск, 15–16 ноября 2017 г.

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2017

ББК 74.00
И 471

Редакционная коллегия:
В.Р. Майер (отв. ред)
А.В. Тимофеенко
С.В. Ларин

И 471 Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 15–16 ноября 2017 г. / В.Р. Майер (отв. ред.); ред. кол.; [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2017. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux, Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-145-2

ББК 74.00

ISBN 978-5-00102-145-2

(VI Международный форум
«Человек, семья и общество:
история и перспективы развития»)

© Красноярский государственный
педагогический университет
им. В.П. Астафьева, 2017

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Содержание

Майер В.Р., Джакетова С.Д.
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ 7

Шабанова М.В., Павлова М.А.
ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ДЕЙСТВИЙ
МАТЕМАТИКА-ЭКСПЕРИМЕНТАТОРА
У УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ 17

Сенашов В.И.
О ПРОБЛЕМЕ БЕРНСАЙДА ДЛЯ ГРУПП ПЕРИОДА 5...................................33

Ларин С.В.
МУЛЬТИМЕДИЙНЫЙ КОМПЛЕКС ПО АЛГЕБРЕ 7 КЛАССА 40

Гаврилов В.К.
ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И СЕКУЩИХ
В ТЕОРЕМЕ МЕНЕЛАЯ 46

Журавлева Н.А.
О ПРИМЕНЕНИИ КООРДИНАТНО-ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В СРЕДЕ *GEOGEBRA* 52

Ларин С.В., Чилбак-оол С.В.
РЕШЕНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
С ПОМОЩЬЮ АНИМАЦИОННЫХ РИСУНКОВ..61

Майер В.Р., Манченкова Е.О., Бушаева Т.А.
ОБУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
КОМПЬЮТЕРНО-АНИМАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
В СРЕДЕ *ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА* 69

Майер В.Р. , Кузьмина О.А., Анкова В.В.
ОБУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПОСТРОЕНИЯМ
НА ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ
СРЕДЫ *ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА*..82

Гиматдинова Г.Н.
О ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРОГРАММЫ *ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ*
ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ» 94

Елизарова Е.Ю.
НЕКОТОРЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ СТУДЕНТОВ, ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ 102

Иршко Н.Ю., Калачева С.И.
ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЦИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ 109

Калачева С.И.
РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ АЛГЕБРЕ 116

Саналова М.С., Калачева С.И.
РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В СОЗДАНИИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ 124

Клопот Е.Е., Кейв М.А.
К ВОПРОСУ ФОРМИРОВАНИЯ У ОБУЧАЮЩИХСЯ 5 КЛАССА МЕТАПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ *ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА* 130

Ускова А.В., Кейв М.А.
ОБУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПОСТРОЕНИЯМ НА ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СРЕДЫ *ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА* 136

Сивухина Е.А.
УЧЕБНЫЙ ФИЛЬМ «ФУНКЦИИ» 141

Кейв М.А., Самодурова В.А.
ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ *GEOGEBRA* ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ В 9 КЛАССЕ 149

Казакова Е.В.
УЧЕБНЫЙ ФИЛЬМ В РАМКАХ МУЛЬТИМЕДИЙНОГО ПРОДУКТА ПО АЛГЕБРЕ 7 КЛАССА 153

Лариончикова А.А., Чернова Н.Н.
УЧЕБНЫЙ ФИЛЬМ ПО ТЕМЕ АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА «ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ» 157

Бурнакова М.В.
УЧЕБНЫЙ ФИЛЬМ ПО АЛГЕБРЕ 7 КЛАССА
НА ТЕМУ «МНОГОЧЛЕНЫ» 167

Жеребцова А.Ф.
О КОЛЛЕКЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ
ДЛЯ ШКОЛЬНОГО ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА 172

Малышенко Т.С.
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДЫ *GEOGEBRA*
ДЛЯ ОТКРЫТИЯ НОВЫХ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА
ИЗВЕСТНЫХ ТОЖДЕСТВ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ 176

Голубкова В.В., Калачева С.И.
ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
К РАЗВИТИЮ НАВЫКА САМОКОНТРОЛЯ У ШКОЛЬНИКОВ 185

Михиенко Д.В., Фиряго И.Н.
МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ
В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В 5–6 КЛАССАХ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ
ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА 191

Козловская Т.В.
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ.
МОДУЛЬ «УРАВНЕНИЯ» 198

Корельская А.В., Овчинникова Р.П.
ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАНТОГРАФА
КАК СРЕДСТВО ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПОДОБИЕ» 209

Троякова Г.А., Михалев П.А.
МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ
НА ОСНОВЕ АКСИОМ В СРЕДЕ *GEOGEBRA* 218

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 223

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

В.Р. Майер, С.Д. Джакетова

Компьютерные эксперименты, компьютерная среда Живая геометрия, остроугольный треугольник, ортотреугольник, компьютерное моделирование.

Рассматриваются вопросы, связанные с использованием среды *Живая геометрия* как виртуальной лаборатории для проведения компьютерных экспериментов на уроках геометрии. Особое внимание уделяется методике обучения решению геометрических задач повышенного уровня сложности с использованием компьютерного эксперимента. В качестве примера рассмотрено исследование свойств ортотреугольника в стиле экспериментальной математики.

USING COMPUTER EXPERIMENTS ON GEOMETRY LESSONS

V.R. Mayer, S.D. Jaketova

Computer experiments, medium of Living geometry, oblique triangle, ortotreugolnik, computer simulation.

Are examined the questions, connected with the use of a medium *living geometry* as virtual laboratory for conducting the computer experiments on the lessons of geometry. Special attention is paid to the procedure of instruction in the solution of the geometric problems of the increased level of complexity with the use of a computer experiment. As an example is examined a study of the properties of ortotreugolnika in the style of experimental mathematics.

С каждым годом возрастают требования к интеллектуальной, умственной деятельности человека. В связи с этим традиционный взгляд на содержание целого ряда школьных предметов, в первую очередь естественнонаучного цикла, на методику их преподавания пересматривается и уточняется. В данной работе речь будет идти о математике, интерес к которой у школьников Казахстана, России и других стран за последние годы заметно снизился.

Многие учителя для поддержки и развития интереса к математике успешно практикуют на занятиях занимательные задачи [3; 5]. Это важно особенно в тот период, когда интерес учащихся еще недостаточно устойчив. На последующих занятиях, когда возрастает роль и значимость теоретических знаний, становятся приоритетными такие качества мышления, как системность и обобщенность. Для их формирования более значима уже самостоятельная математическая деятельность, а именно, решение задач, проработка теоретического материала, выполнение лабораторных работ, проведение компьютерных математических экспериментов. При этом важно организовать дифференцированный подход к учащимся, что позволяет не только избежать перегрузки, но и реализовать индивидуальные возможности каждого из них.

Математическая модель выражает существенные черты объекта или процесса языком уравнений, других математических средств. В этом смысле компьютерная модель выполняет аналогичную задачу, для решения которой используются иные средства, в первую очередь вычислительные и визуальные. Несомненно, компьютерные исследования и эксперименты необходимы и крайне востребованы в науке, технике и промышленности. А насколько оправдано их использование на уроках?

Большинство специалистов в области информатизации школьного математического образования считают, что использование в учебном процессе компьютерных программ, в первую очередь систем динамической математики, необходимо и чрезвычайно полезно. Самостоятельное построение динамической модели математической задачи, поиск и визуализация с помощью этой модели ее решения предоставляют среднестатистическому учащемуся дополнительные возможности, позволяющие позиционировать себя не только как стороннего наблюдателя за тем, как ловко работают с формулами учитель и продвинутые ученики, но и активного участника процесса познания математики.

В настоящее время в мире насчитывается более пятидесяти систем динамической математики, в Казахстане и России наиболее популярны русскоязычные версии *Живая геометрия* и *Живая математика* программы *Geometer's Sketchpad* (США), *GeoGebra* (Австрия) и *Математический конструктор* (Россия). Большинство этих систем дают возможность создавать не только компьютерные динамические модели геометрических конфигураций любой сложности, но и как в профессиональных математических пакетах решать целый ряд других задач, в частности визуализировать соответствующие графические зависимости, что повышает их наглядность.

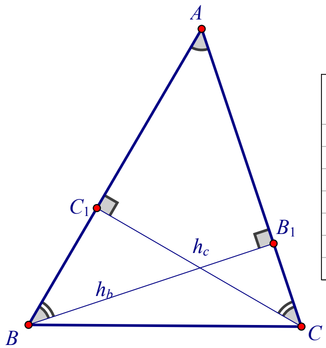
Отметим два основных дидактических преимущества использования компьютерных моделей, создаваемых с помощью среды *Живая геометрия* [4]. Во-первых, это возможность строить наглядные динамические чертежи к геометрическим задачам и теоремам, которые в большей степени, чем традиционные статичные рисунки способствуют пониманию и усвоению практического и теоретического материала. И, во-вторых, это возможность самостоятельно конструировать такие динамические чертежи, которые можно эффективно использовать в качестве виртуальных моделей для проведения компьютерных экспериментов и исследований, что способствует формированию исследовательских компетенций учащегося.

Вопросу обучения математике в вузе и школе с использованием компьютерных экспериментов посвящено немало работ, например статья [1], монографии [2; 6]. В этих работах подробно и обстоятельно рассматривается методика организации и проведения компьютерных экспериментов в случаях, которые, как правило, не связаны с экспериментальными заданиями повышенного уровня сложности. Как быть, если искомое соотношение между исследуемыми величинами представляет собой далеко не очевидную формулу, для вывода которой необходимо рассмотреть цепочку вспомогательных математических утверждений? В некоторых случаях педагоги ограничиваются тем, что дают обучающимся готовую формулу и предлагают протестировать ее с помощью среды *Живая геометрия*. Такая методика ориентирована лишь на формирование следующих умений: правильно строить геометрическую конфигурацию, соответствующую заданию; находить те объекты, о которых идет речь в формуле; выполнять с помощью опций среды необходимые измерения; и, наконец, пользоваться встроенным в среду графическим калькулятором. Все это, конечно, важно, но для обучения искусству самостоятельно выводить такие формулы явно недостаточно.

Больший эффект, на наш взгляд, принесет методика, которая ориентирует на формирование умения разбивать задачи повышенного уровня сложности на подзадачи, решение которых с использованием компьютерного эксперимента либо рассматривалось ранее, либо не является чрезмерно сложным. Самостоятельное создание такого банка подзадач в совокупности с технологией компьютерного эксперимента позволит учащимся справляться со многими неэлементарными задачами.

Проиллюстрируем отмеченные выше положения на серии конкретных задач, являющимися подзадачами при выводе формулы Шварца, устанавливающей зависимость между периметром треугольника, вершины которого являются основаниями высот данного треугольника, величиной любого угла данного треугольника и высоты, опущенной из вершины этого угла.

З а д а ч а 1. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Проведите компьютерные эксперименты и выясните, могут ли треугольники ABB_1 и ACC_1 оказаться: а) равными, если да, то в каком случае это произойдет; б) подобными, если да, то в каком случае это произойдет и чему будет равен коэффициент подобия; в) неподобными.*



$\angle ABB_1$	$\angle ACC_1$	AB	AC	AB_1	AC_1	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC_1}{AB_1}$
33,86°	33,86°	9,79 см	12,06 см	5,46 см	6,72 см	1,23	1,23
22,56°	22,56°	9,93 см	8,87 см	3,81 см	3,40 см	0,89	0,89
36,61°	36,61°	11,66 см	11,66 см	6,95 см	6,95 см	1,00	1,00
41,48°	41,48°	10,15 см	9,73 см	6,72 см	6,44 см	0,96	0,96
44,19°	44,19°	11,21 см	9,32 см	7,81 см	6,50 см	0,83	0,83
23,81°	23,81°	5,62 см	8,62 см	2,27 см	3,48 см	1,53	1,53
41,35°	41,35°	10,31 см	9,45 см	6,81 см	6,24 см	0,92	0,92

Рис. 1

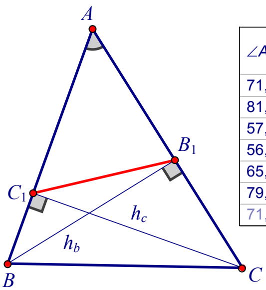
Для проведения компьютерного эксперимента в среде *Живая геометрия* строится динамический чертеж остроугольного треугольника ABC (рис. 1), проводятся высоты BB_1 и CC_1, вычисляются углы и стороны исследуемых треугольников, находятся необходимые соотношения. Перемещая с помощью мышки вершины треугольника ABC, получаем серию испытаний (их результаты заносим в специальную таблицу), которые позволяют высказать гипотезу о том, что исследуемые треугольники ABB_1 и ACC_1 равны, если

AB = AC, и подобны во всех случаях с коэффициентом подобия, равным отношению боковых сторон AC/AB.

Далее необходимо подтвердить или опровергнуть высказанную гипотезу. Основанием для этого могут быть лишь аксиомы и ранее доказанные теоремы геометрии (в частности первый признак подобия треугольников), которые должны быть связаны с гипотезой логически безупречными дедуктивными рассуждениями.

Следующие эксперименты рекомендуется связать с задачей 2, решение которой существенно опирается на задачу 1.

З а д а ч а 2. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Проведите компьютерные эксперименты и выясните, могут ли треугольники ABC и AB_1C_1 оказаться: а) равными, если да, то в каком случае это произойдет; б) подобными, если да, то в каком случае это произойдет и чему будет равен коэффициент подобия; в) неподобными.*

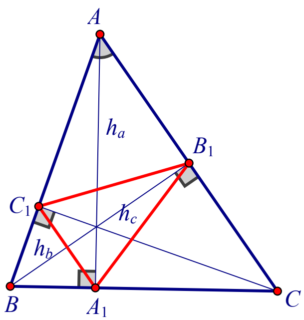


$\angle ABC$	$\angle AB_1C_1$	AB_1	AB	$\frac{AB_1}{AB}$	AC_1	AC	$\frac{AC_1}{AC}$	$\cos(\angle BAC)$
71,91°	71,91°	4,09 см	7,11 см	0,58	4,86 см	8,43 см	0,58	0,58
81,36°	81,36°	4,54 см	7,08 см	0,64	5,99 см	9,34 см	0,64	0,64
57,46°	57,46°	7,30 см	10,19 см	0,72	6,29 см	8,77 см	0,72	0,72
56,40°	56,40°	4,66 см	8,19 см	0,57	4,18 см	7,35 см	0,57	0,57
65,02°	65,02°	2,35 см	5,91 см	0,40	2,85 см	7,16 см	0,40	0,40
79,42°	79,42°	2,41 см	5,13 см	0,47	3,79 см	8,07 см	0,47	0,47
71,29°	71,29°	4,81 см	7,75 см	0,62	5,43 см	8,75 см	0,62	0,62

Рис. 2

Как и в предыдущем случае, строим в *Живой геометрии* динамический чертеж (рис. 2) в соответствии с условием задачи 2. Однако в отличие от задачи 1 для обоснования гипотезы о подобии рассматриваемых треугольников потребуется уже не первый, а второй признак подобия треугольников. Поэтому при проведении компьютерного эксперимента желательно проверить равенство отношений соответствующих сторон треугольника. Однако навязывать эту версию как приоритетную не стоит. Для нахождения коэффициента подобия все равно возникнет потребность найти отношение соответствующих сторон, что должно навести на мысль о том, что коэффициент подобия (например, отношение AB_1/AB) равен отношению прилежащего катета к гипотенузе в прямоугольном треугольнике BAB_1, т. е. косинусу угла A.

З а д а ч а 3. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется ортотреугольником треугольника ABC. Проведите компьютерный эксперимент и выясните, в каком отношении высоты треугольника ABC делят внутренние углы ортотреугольника $A_1B_1C_1$.*



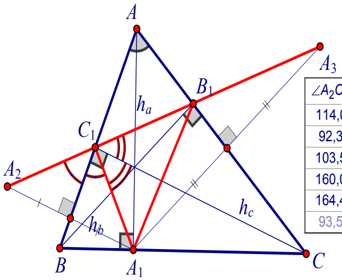
$\angle B_1A_1A$	$\angle C_1A_1A$	$\angle A_1B_1B$	$\angle C_1B_1B$	$\angle A_1C_1C$	$\angle B_1C_1C$
38,31°	38,31°	18,71°	18,71°	32,98°	32,98°
44,19°	44,19°	26,54°	26,54°	19,28°	19,28°
43,32°	43,32°	5,26°	5,26°	41,42°	41,42°
25,72°	25,72°	41,98°	41,98°	22,30°	22,30°
13,58°	13,58°	31,00°	31,00°	45,41°	45,41°
35,82°	35,82°	18,53°	18,53°	35,65°	35,65°

Рис. 3

Компьютерный эксперимент в этой задаче достаточно очевиден. Необходимо в среде *Живая геометрия* построить динамический чертеж треугольника ABC (рис. 3) и его ортотреугольника $A_1B_1C_1$, измерить величины углов, на которые лучи A_1A, B_1B и C_1C делят соответствующие внутренние углы ортотреугольника, и сравнить их.

По результатам эксперимента должна появиться гипотеза о том, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами его ортотреугольника. Обоснование этой гипотезы легко получить, используя результаты предыдущей задачи, поскольку, например, углы AB_1C_1 и CB_1A_1 равны углу ABC (задача 2), а прямая B_1B перпендикулярна AC.

З а д а ч а 4. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Точки A_2 и A_3 симметричны точке A_1 относительно прямых AB и AC соответственно. Проведите компьютерный эксперимент и выясните, как взаимно расположены точки A_2, A_3, B_1 и C_1.*



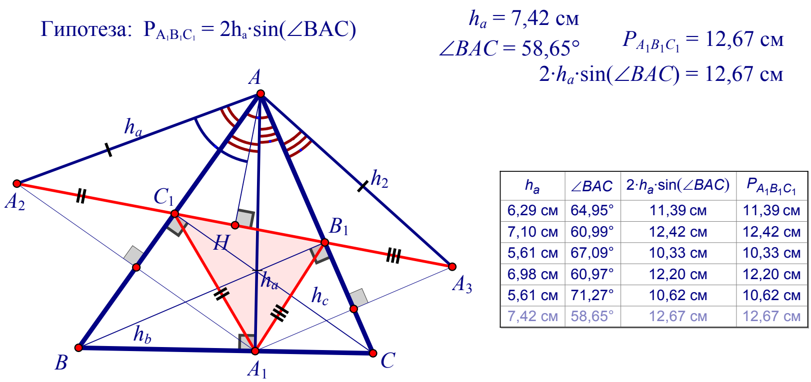
$\angle A_2C_1A_1$	$\angle A_1C_1B_1$	$\angle A_2C_1A_1 + \angle A_1C_1B_1$	$\angle C_1B_1A_1$	$\angle A_1B_1A_3$	$\angle C_1B_1A_1 + \angle A_1B_1A_3$
114,07°	65,93°	180,00°	32,99°	147,01°	180,00°
92,31°	87,69°	180,00°	12,44°	167,56°	180,00°
103,59°	76,41°	180,00°	57,44°	122,56°	180,00°
160,06°	19,94°	180,00°	81,68°	98,32°	180,00°
164,44°	15,56°	180,00°	89,94°	90,06°	180,00°
93,50°	86,50°	180,00°	43,41°	136,59°	180,00°

Рис. 4

Для проведения компьютерного эксперимента построим динамический чертеж (рис. 4) в соответствии с задачей 4, отрезки A_2C_1, C_1B_1 и B_1A_3. Перемещая A по рабочему полю, несложно сформулировать гипотезу о том, что построенные отрезки находятся на одной прямой. Для проверки гипотезы найдем сумму углов $A_2C_1A_1$ и $A_1C_1B_1$ при вершине C_1 и, аналогично, сумму углов при вершине B_1. Проведем серию испытаний, результаты которой занесем в таблицу (рис. 4).

Для того чтобы гипотезу можно было отнести к списку верных утверждений геометрии, необходимо провести аккуратное ее доказательство, которое будет опираться на задачу 3 и свойство осевой симметрии.

З а д а ч а 5. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Проведите компьютерный эксперимент и выясните, можно ли выразить периметр ортотреугольника $A_1B_1C_1$ через высоту AA_1 и угол BAC. Найдите соответствующую формулу.*



h_a	$\angle BAC$	$2 \cdot h_a \cdot \sin(\angle BAC)$	$P_{A_1B_1C_1}$
6,29 см	64,95°	11,39 см	11,39 см
7,10 см	60,99°	12,42 см	12,42 см
5,61 см	67,09°	10,33 см	10,33 см
6,98 см	60,97°	12,20 см	12,20 см
5,61 см	71,27°	10,62 см	10,62 см
7,42 см	58,65°	12,67 см	12,67 см

Рис. 5

Компьютерный эксперимент в задаче 5 является наиболее сложным в рассматриваемой цепочке экспериментов. Ясно, что предыдущая задача 4 подготавливает к дополнительному построению отрезка A_2A_3, длина которого представляет собой искомый периметр ортотреугольника. Несмотря на это обстоятельство, следует выполнить еще одно неочевидное дополнительное построение – соединить отрезками точку A с точками A_2 и A_3 и рассмотреть треугольник AA_2A_3. Используя свойства осевой симметрии, необходимо понять, что стороны AA_2 и AA_3 равны высоте AA_1 треугольника ABC, а угол A_2AA_3 равен удвоенному углу BAC. В этом случае высота AH в треугольнике AA_2A_3 является биссектрисой, поэтому угол HAA_2 равен углу BAC. Но тогда из определения синуса угла следует, что $HA_2/AA_2 = \sin A$. Отсюда возникает гипотеза о том, что периметр ортотреугольника равен удвоенному произведению высоты AA_1 на синус угла ВАС.

Шесть проведенных испытаний, результаты которых занесены в таблицу (рис. 5), показывают, что подсчитанный с использованием опции «измерить» периметр ортотреугольника $A_1B_1C_1$ (последний столбец таблицы) совпадает со значением, полученным в результате применения гипотетической формулы (предпоследний столбец таблицы). Для придания найденному соотношению статуса формулы необходимо выполнить ее аккуратный вывод с рассмотрением всех возможных случаев.

Поводя итог, отметим, что наш опыт проведения занятий в стиле экспериментальной математики со школьниками классов с углубленным изучением математики и со студентами педвуза показал, что у большинства обучающихся были сформированы умения самостоятельно разбивать задачи повышенного уровня сложности на элементарные подзадачи и решать последние с использованием компьютерного эксперимента.

Библиографический список

1. Майер В.Р. Компьютерные исследования и эксперименты при обучении геометрии // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2012. № 4 (22). С. 22–27.
2. Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2014. 516 с.
3. Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. М.: МАТИ, 2002
4. Живая геометрия: сб. метод. материалов. М.: ИНТ, 2013. 176 с.
5. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006
6. Шабанова М.В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова и др. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. 300 с.

ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ДЕЙСТВИЙ МАТЕМАТИКА-ЭКСПЕРИМЕНТАТОРА У УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

М.В. Шабанова, М.А. Павлова

Исследовательское обучение, универсальные исследовательские действия, внеурочная деятельность, экспериментальная математика.

В статье раскрываются понятия «универсальные исследовательские действия математика-экспериментатора» и «функционально полный комплекс универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора», которые используются авторами для характеристики специфических результатов исследовательского обучения в стиле экспериментальной математики, рассматриваемых с позиции системно-деятельностного и задачецентрированного подходов к обучению математике. Введение данных понятий расширяет возможности методического языка, предоставляя возможность обосновывать предлагаемую систему педагогических воздействий на каждом уровне исследовательского обучения с точки зрения актуального и потенциального уровней развития универсальных действий учащегося, осуществляемых при решении исследовательской задачи экспериментальной математики.

FORMATION OF UNIVERSAL RESEARCH ACTIONS OF THE MATHEMATICIAN-EXPERIMENTALIST AT OF THE SECONDARY SCHOOL STUDENTS

M.V. Shabanova, M.A. Pavlova

An inquiry-based mathematics education, universal student research actions, extracurricular education, experimental mathematics.

In the article describes «universal student research actions of the mathematician-experimentalist» and «a functionally complete complex of universal student research actions of the mathematician-experimentalist», which are used by the authors to characterize the specific results of an inquiry-based mathematics education in the style of experimental mathematics, that are viewed from the position of system-activity

and task-centered approaches to learning mathematics. The introduction of these concepts broadens the possibilities of the methodical language, providing an opportunity to substantiate the proposed system of pedagogical influences at each level of an inquiry-based mathematics education in terms of the actual and potential levels of development of the universal student research actions in solving of a research problem of experimental mathematics.

В ФГОС ОО, теоретическую основу которых составляет системно-деятельностный подход [7], введено требование целенаправленного формирования опыта исследовательской деятельности учащихся на всех ступенях обучения при изучении всех предметов и реализации программ внеурочной деятельности.

Содержание системно-деятельностного подхода раскрыто в трудах А.Г. Асмолова, Г.В. Бурменской, И.А. Володарской, О.А. Карабановой, Н.Г. Салминой, С.В. Молчанова и других авторов. В рамках данного подхода выделяются три уровня образовательных результатов: личностные, метапредметные и предметные, которые раскрываются с точки зрения ведущего вида мыследеятельности учащихся – учебной. Для этого используется категория «универсальные учебные действия» (УУД). Систему УУД представители этого подхода рассматривают как компетенцию, определяющую *умение учиться*, то есть умение самостоятельно осваивать (присваивать) социальный опыт, накопленный предыдущими поколениями.

При этом сторонники системно-деятельностного подхода (Ю.В. Громыко – руководитель, Н.В. Громыко, О.И. Глазунова, Д.Б. Дмитриев, Ю.В. Крупнов, А.Ю. Губанов, А.С. Лазарев, Л.Н. Алексеева, Э.С. Акопова, М.В. Максимовская, Л.В. Голубцова, И.И. Семин и другие) отмечают важность приобретения учащимися компетенций, относящихся к другим видам мыследеятельности: исследовательской и проектной.

Их полную классификацию представил в своих работах Г.П. Щедровицкий [11; 12]. В основу классификации он положил отношение к реальности. По этой классификации учение характеризуется как присвоение накопленных в обществе знаний об окружающей действительности, исследование как расширение границ известного о ней, проектирование как преобразование действительности.

Эти виды деятельности также различаются по степени свободы их субъекта. Так, А.И. Савенков пишет: «Проектирование изначально задает предел, глубину решения проблемы, в то время как исследование строится принципиально иначе. Оно допускает бесконечное движение вглубь. Проектирование – это не творчество в полной мере, это творчество по плану в определенных контролируемых рамках. В то время как исследование – путь воспитания истинных творцов» [3].

Результаты проведенного нами сравнительного анализа этих трех видов мыследеятельности по содержанию их структурных компонентов представлены в табл. 1. Он проведен нами с опорой на труды разработчиков ФГОС, а также авторов Концепции развития исследовательской деятельности учащихся [1].

Таблица 1

Параметры анализа	Учебная деятельность	Исследовательская деятельность	Проектная деятельность
1	2	3	4
Цель	Самосовершенствование на основе присвоения опыта поколений	Самореализация за счет внесения своего вклада в расширение накопленных обществом научных знаний	Самореализация за счет внесения своего вклада в улучшение окружающего мира и повышение качества жизни в нем

Окончание табл. 1

1	2	3	4
Предмет	Осваиваемый элемент социального опыта	Объект исследования	Объект проектирования
Результат	Изменения в самом ученике, в содержании его образования	Развитие научной теории	Создание нового продукта и его внедрение
Действия	Восприятие, осмысление, запоминание, воспроизведение репродукция, применение	Восприятие, осмысление, поиск, моделирование, генерирование, проверка, обоснование, объяснение, оценка	Восприятие, осмысление,поиск, моделирование, проектирование, прогнозирование, испытание, оценка
Способы осуществления действий (методы)	Методы учения	Методы исследования: теоретические, экспериментальные	Методы проектирования, конструирования
Этапы	Актуализация, изучение нового, освоение, закрепление, оценка учебных достижений	Постановка проблемы, разработка замысла исследования, реализация замысла, оценка результата	Подготовительные изыскания (исследования), технологический, оценка результата

Представленные в таблице данные показывают, что «*умение исследовать*» в сфере математики требует выделения в системе УУД, описанных во ФГОС ОО и ПООП ОО, действий, которые характерны для исследовательской деятельности в сфере математики. Сегодня форма этой деятельности претерпевает существенные изменения под воздействием возможностей, которые предоставляют компьютерная техника и информационные технологии. Одной из образовательно значимых черт этой новой формы, которая уже нашла отражение в требованиях ФГОС ОО, является изменение отношения математиков к роли и месту экспериментальных методов в научных исследованиях. Эксперименты, проводимые с использованием компьютерной техники, сегодня применяются практически на всех этапах исследования: для проверки корректности постановки задач, получения гипотез, их предварительной верификации, контроля доказательных рассуждений и аналитических выкладок, исследования возможностей обобщения полученных результатов, обнаружения интересных частных случаев и модификаций. Форма исследовательской математической деятельности, в которой широко используются возможности компьютерной техники и информационных технологий, получила специальное название «стиль экспериментальной математики» [13].

При обучении математике в общеобразовательной школе нужно сформировать у учащихся правильное отношение к результатам, получаемым методом компьютерного эксперимента, научить их рационально использовать при решении исследовательских задач сочетание экспериментальных и теоретических методов, классических и компьютерных инструментов поддержки математических исследований, т.е. сформировать у учащихся качества математика-экспериментатора [9]. Деятельностная составляющая этих качеств – *универсальные исследовательские действия математика-экспериментатора (УИД МЭ)*.

Задаче-центрированный подход требует описание системы УИД МЭ как функционально полного комплекса УИД МЭ, т. е. такого комплекса, который позволяет учащимся на том или ином уровне самостоятельности справляться с решением исследовательских задач экспериментальной математики (ИЗЭМ). Специфика таких задач раскрыта нами [10]. К данному виду мы относим задачи наивысшей степени неопределенности, для решения которых необходимо привлечение компьютерных экспериментов, осуществляемых средствами систем динамической математики (СДМ) в связи с одной или несколькими причинами: недостаточности теоретических знаний для их разрешения, недостаточности возможностей пространственного воображения и мышления для конструирования и оперирования образом объекта исследования, ограниченности временных ресурсов для перебора вариантов.

Для раскрытия содержания понятия «функционально полный комплекс УИД математика-экспериментатора» рассмотрим применение сочетания экспериментальных и теоретических методов на каждом из этапов решения ИЗЭМ.

1. Идентификация объекта исследования.

Объект математического исследования, в отличие от объекта естественнонаучного исследования (особенно экспериментального), является абстрактным понятием (предикатом), объем которого варьируется в зависимости от исходных данных, включенных в условие исследовательской задачи.

При применении теоретического подхода идентификация объекта исследования включает *действия подведения под известное понятие* или *конструирование определения нового понятия* на основе имеющихся данных, арсенала собственных математических знаний и результатов *работы с математическими справочниками*.

При применении экспериментального подхода идентификация объекта требует *умения преобразовывать исходные данные в алгоритм построения конструктивного объекта* – модели объекта исследования на основе исходных данных с учетом возможностей имеющихся в распоряжении конструктивных инструментов СДМ. Учащийся при выборе этого подхода должен *понимать, что конструк-*

тивный объект, полученный в результате реализации алгоритма, не тождественен объекту исследования. Как и всякая модель, конструктивный объект может визуализировать множество объектов, находящихся в различных отношениях с геометрической интерпретацией множества абстрактных объектов, входящих в объем объекта исследования: расширять, сужать его или даже находиться в частичном пересечении. В первом и третьем случаях модель называют динамически неустойчивым чертежом, во втором – динамически устойчивой моделью. Если эксперимент проводится для установления существования объекта исследования, то учащийся должен *уметь осознанно отказаться от части исходных данных (и/или заменять их новыми)* для получения динамически неустойчивого чертежа с последующим проведением действий, связанных с *разысканием среди множества визуализаций тех, которые обладают всеми требуемыми условиями*. Для разыскания новых свойств объекта исследования такой чертеж не годится.

2. Анализ, интерпретация данных, генерирование идей.

Реализация теоретического подхода на этом этапе требует *привлечения большого количества эвристик теоретического поиска*, описанных в трудах Я.И. Груденова [2], Д. Пойа [5], [6], Л.М. Фридмана [8] и многих других авторов. Привлечение большинства из них требует рефлексивного анализа проблемной ситуации и обращения к прежнему опыту разрешения таких ситуаций.

При использовании экспериментального подхода учащийся должен *создать динамически устойчивую модель (или ряд таких моделей) объекта исследования на «свободных» параметрах* (их количество не минимизировано, а изменения произвольны); *спланировать и провести эксперимент* (или серию экспериментов), позволяющий выявить свойства понятия как динамически устойчивые на параметрах или собрать данные, свидетельствующие о существовании взаимосвязей свойств, зафиксировать их как проявление изменчивости свойств под влиянием параметров.

3. Формулировка гипотез.

Гипотезы выдвигаются в ходе испытания идей, т.е. *критической оценки значимости включения обнаруженных свойств и связей в систему исходных данных* об объекте исследования для достижения намеченных целей.

Для реализации теоретического подхода учащиеся должны *уметь получать новые утверждения об объекте исследования выводным путем*.

Применение экспериментального подхода требует *реконструкции динамической модели объекта исследования* с целью визуализации дополнительных связей и свойств или испытания возможности их использования как основы построения модели, *понимания того, что визуальной оценки недостаточно для верификации идей*, *умения использовать инструменты СДМ для введения дополнительных параметров оценки успешности* (создание новых вычислимых переменных, отображения текущих значений, изменение точности, масштабирование, вывод аналитических интерпретаций и т.п.).

4. Доказательство.

Цель данного этапа – обоснование прошедшей проверку гипотезы с опорой на ранее доказанные теоремы, введенные определения и исходные данные об объекте исследования. Для достижения этой цели учащиеся должны уметь *осуществлять подбор подходящих для этого методов доказательства и поиск базовых утверждений, построение цепочки логических умозаключений*. В случае затруднений уметь *применять методы аналитического поиска*, описанные в [2], сочетать их с *варьированием мысленного образа* объекта исследования: выделение значимой части, введение дополнительных построений, переосмысления структурных элементов с точки зрения других понятий. В случае ограниченности возможностей визуального мышления или неуверенности в том, что логический вывод осуществляется без привлечения неявных допущений, *привлекать в качестве опоры динамическую модель объекта исследования*: снимать условия отображения части элементов чертежа, выводить на экран вспомогательные элементы, выполнять дополнительные построения, проводить эксперименты для выявления новых скрытых закономерностей. Если арсенала базовых утверждений недостаточно для восстановления всей цепочки логического вывода, то *переходить к рассмотрению частных или особых случаев, к выделению подклассов, для которых доказательство на уровне имеющихся теоретических знаний невозможно*. В этом случае *доказательство гипотезы учащиеся заменяют проведением серии контрольных компьютерных экспериментов* для повышения психологической убедительности утверждения.

5. Анализ результатов.

Данный этап направлен на оценку степени общности полученных доказательств, значимости результатов исследования для удовлетворения исходных познавательных потребностей, формирования новых познавательных потребностей на базе полученных результатов. Достижение целей этого этапа требует от учащихся *варьирования опорного мысленного образа объекта исследования* на области исходных значений параметров, *тестирования найденного способа доказательства* на измененных условиях; *осмысления новых знаний об объекте исследования с точки зрения контекста постановки исследовательской задачи*; *конструирования логических и смысловых модификаций доказанных утверждений*, *оценки их истинности и изменчивости* при выходе за пределы допустимых значений параметров. При недостаточности способности к мысленному модифицированию учащиеся должны *уметь осуществлять целесообразные модификации динамической модели.*

Функционально полный комплекс описанных выше УИД МЭ, обеспечивающий учащимся возможность реализации всех этапов процесса решения ИЗЭМ с той или иной степенью самостоятельности, представлен в табл. 2.

Представим пример формирования УИД ЭМ на каждом из этапов решения одной из исследовательских задач экспериментальной математики: «Найдите сумму углов правильного звездчатого многоугольника, ответ обоснуйте».

На этапе *идентификации объекта исследования* для конструирования определения нового понятия «правильный звездчатый многоугольник» учащиеся опираются на следующие базовые математические знания: определение и свойства правильных многоугольников, способы построения правильных многоугольников циркулем и линейкой; а также на поиски трактовок этого термина в сети Интернет.

В результате этой работы учащимися могут быть найдены или сконструированы самостоятельно следующие определения:

1. «Звездчатый многоугольник – многоугольник, у которого все стороны и углы равны, а вершины совпадают с вершинами правильного многоугольника».

2. «Звездчатый многоугольник – это замкнутая ломаная с самопересечениями, вершинами которого являются вершины A_i правильного n-угольника, каждая из которых последовательно соединена с i+m вершиной, где m – фиксированное число».

3. «Звездчатый многоугольник – невыпуклый многоугольник, который образован продолжениями всех сторон правильного многоугольника до их пересечения в точках, которые и являются вершинами звездчатого многоугольника».

Таблица 2

Этапы решения ЗЭМ/ уровень самостоятельности	Идентификация проблемы	Анализ проблемы	Выдвижение гипотез	Доказательство	Оценка результатов исследования
Уровень конфирматорного исследования	Выделяет объект исследования	Собирает дополнительные данные	Проверяет гипотезы	Обнаруживает несоответствие данных гипотезе	Проверяет результат на соответствие цели исследования
Уровень структурированного исследования	Представляет объект исследования набором исходных данных, значимых для исследования	Критически оценивает собранные данные	Выдвигает идеи и предположения о способе решения проблемы	Реализует способ доказательства	Критически оценивает результаты исследования
Уровень управляемого исследования	Использует исходные данные для создания модели объекта исследования	Планирует поиск и критический анализ данных	Предлагает способ проверки гипотез	Проводит поиск способа доказательства гипотезы	Предлагает направления улучшения результата
Уровень открытого, истинного исследования	Интерпретирует исходные данные в математических терминах, вводит определение нового понятия	Ставит проблему	Обосновывает выбор рабочей гипотезы	Предлагает альтернативный способ доказательства	Предлагает новое направление развития идеи проведенного исследования

4. «Звездчатым n-угольником называется многоугольник, вершины которого совпадают с вершинами правильного n-угольника, а стороны образованы его равными диагоналями».

Следующая часть работы – выбор из представленных трактовок предложения, которое можно принять за рабочее определение звездчатого многоугольника. Для подготовки к ней учащихся, учитель знакомит учащихся с критериями выбора:

1) определение должно сводить определяемое понятие к уже известным (ранее определенным) понятиям;

2) определение должно описывать способ получения (конструирования, выделения) объектов нового понятия;

3) определение должно содержать необходимый и достаточный набор свойств, позволяющий распознавать объекты, относящиеся к данному понятию.

Критерии могут быть проиллюстрированы на определениях известных понятий. Затем организуется обсуждение соответствия каждой трактовки понятия звездчатого многоугольника первому и второму критериям.

Экспериментальный подход начинается на этом этапе с проведения компьютерных экспериментов, верифицирующих предложенные трактовки термина на удовлетворение третьему критерию. Результатом этой работы является принятие в качестве рабочего определения трактовки, удовлетворяющей всем критериям (например, 3 или 4 определение).

На следующем этапе решения задачи (анализ, интерпретация данных, генерирование идей) учащиеся под руководством учителя на основе определения и полученных изображений уточняют представления об элементах звездчатых многоугольников: вершина, сторона, угол.

Для этого они создают динамически устойчивую модель правильного звездчатого многоугольника, задав в качестве «свободного» параметра количество его острых вершин (рис. 1).

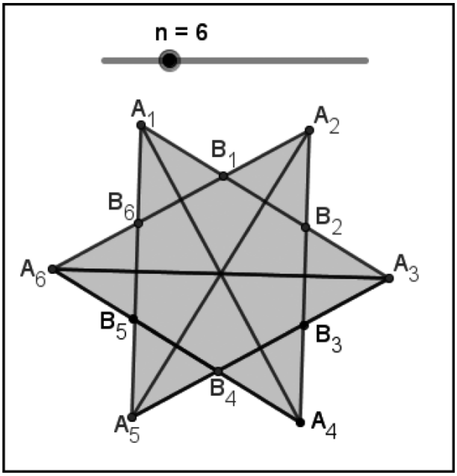


Рис. 1

Результаты формулируются как вспомогательные соглашения: вершинами звездчатого многоугольника будем называть вершины, ограничивающей его замкнутой ломаной; сторонами – стороны этой ломаной; углом – часть внутренней области звездчатого многоугольника, заключенной между двумя соседними звеньями ломаной.

После того как смысл понятия «угол звездчатого многоугольника» выяснен, учащиеся переходят к поиску формулы суммы углов звездчатого многоугольника.

На этапе *формулировки гипотез* учащиеся либо осуществляют численное экспериментирование с виртуальными моделями звездчатых многоугольников (рис. 2), либо подбирают подходящее разбиение звездчатого многоугольника на фигуры с известной суммой углов (рис. 3).

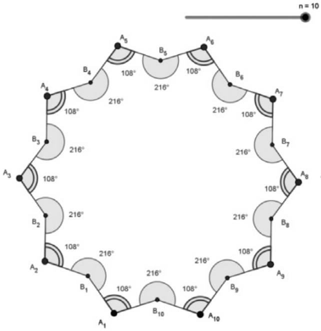


Рис. 2.

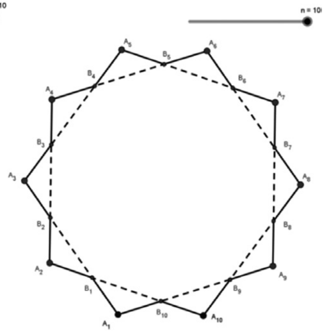


Рис. 3.

В результате может быть получена следующая зависимость суммы углов звездчатого многоугольника от количества вершин:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \angle A_i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \angle B_i = 180^\circ\left(\frac{n}{2} - 2\right) + 180^\circ\left(\frac{n}{2}\right) = 180^\circ(n-2),$$

где n – количество вершин звездчатого многоугольника.

Для верификации идей учащиеся могут использовать такие возможности СДГ, как подсчет суммы углов через строку ввода и отображение текущих значений этой суммы в графическом окне (рис. 4).

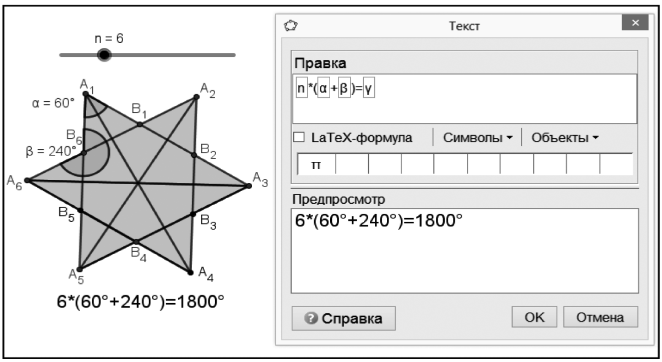


Рис. 4.

Если арсенала базовых утверждений недостаточно для аналитического *доказательства* полученной гипотезы на уровне имеющихся теоретических знаний, то учащиеся проводят серию контрольных экспериментов, которая состоит в изменении параметра *n* с оценкой правильности полученной формулы.

На этапе анализа результатов решения задачи с помощью модификации динамической модели (рис. 5) учащиеся определяют, что для второго определения правильного звездчатого многоугольника полученная формула для суммы углов также верна.

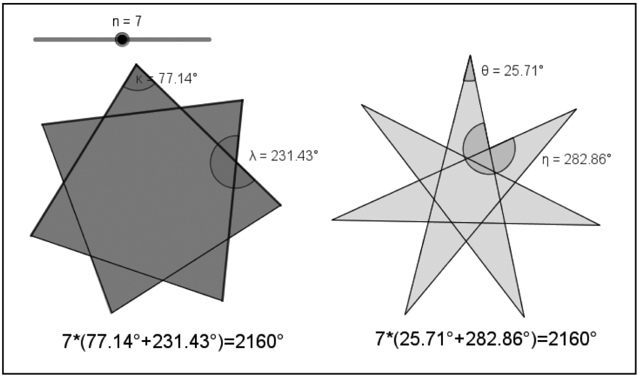


Рис. 5.

В качестве средства диагностики и управления развитием УИД ЭМ учащихся нами разработана персональная карта достижений математика-экспериментатора, которая позволяет не только визуализировать и описать в понятных учителю и ученику терминах актуальный уровень развития комплекса УИД, значимых для решения исследовательских задач экспериментальной математики, но и сориентировать учителя в выборе методов и средств помощи учащимся для организации их деятельности в зоне ближайшего развития. Подробное описание ее использования представлено нами в [4].

Библиографический список

1. Алексеев Н.Г. Концепция развития исследовательской деятельности учащихся / Н.Г. Алексеев, А.В. Леонтович, А.С. Обухов, Л.Ф. Фомина // Исследовательская работа школьников. 2002. № 1. С. 24–33.
2. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 224 с.
3. Савенков А.И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению: учебное пособие. М.: Ось-89, 2006. 230 с.
4. Павлова М.А. Персональная карта достижений как средство диагностики и управления развитием универсальных исследовательских действий учащихся // Психология образования в поликультурном пространстве. 2017. № 3. С. 130–143.
5. Пойа Д. Как решать задачу. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 208 с.
6. Пойа Д. Математическое открытие: пер. с англ. М.: Наука, 1970.
7. Федеральный государственный стандарт основного общего образования: утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.12.2010, № 1897.
8. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: учебное пособие. Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС. 248 с.
9. Шабанова М.В., Ястребов А.В. Воспитание математика-экспериментатора, или Мягкий манифест экспериментальной математики / Препринт статьи, направленной для публикации в журнал «Математика и информатика Болгарской академии наук. [Электронный ресурс]. URL: http: //mathinfo. azbuki.bg. (дата обращения: 10.10.2017).
10. Шабанова М.В., Павлова М.А., Николаев Р.Н. Теоретические основы конструирования задач экспериментальной математики для школьников // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II Международной научно-практической конференции посвященной 125-летию П.А. Ларичева / М-во обр. и науки РФ;

Вологод. гос. ун-т. Вологод. отд. науч.-метод. совета по ма-тем.; Яросл. гос. пед. ун-т им. К.Д. Ушинского. Вологда: Киселев А.В., 2017. 402 с.
11. Щедровицкий Г.П. Схема мыследеятельности-системно-структурное строение, смысл и содержание / Системные исследования. Методологические проблемы: Ежегодник. 1986.
12. Щедровицкий Г.П. Мышление. Понимание. Рефлексия. М., 2005. 800 с.
13. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов, М.А. Павлова, А.Е. Томилова, Л.В. Форкунова, Л.Н. Удовенко, Н.Н. Новоселова, Н.И. Фомина, М.В. Артемьева, Т.С. Ширикова, О.Л. Безумова, С.Н. Котова, В.В. Паршева, Н.Н. Патронова, М.В. Белорукова, В.В. Тепляков, Т.П. Рогушина, Е.А. Тархов, О.Н. Троицкая, Л.Н. Чиркова. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. 300 с.

О ПРОБЛЕМЕ БЕРНСАЙДА ДЛЯ ГРУПП ПЕРИОДА 5

В.И. Сенашов

Группа, порождающие элементы, проблема Бернсайда, алфавит, локальная конечность.

В 1902 г. У. Бернсайд поставил вопрос о локальной конечности групп, все элементы которых имеют конечные порядки. Первый отрицательный ответ был получен лишь спустя 63 года Е.С. Голодом. Конечность свободной бернсайдовской группы периода n установлена в разное время для $n=2$, $n=3$ (У. Бернсайд), $n=4$ (У. Бернсайд; И.Н. Санов), $n=6$ (М. Холл). Доказательство бесконечности этой группы для нечетных $n \geq 665$ – в книге С.И. Адяна (1975). Более наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$ был предложен А.Ю. Ольшанским (1989). Для $n=5$ ответ до сих пор неизвестен. В связи с этими результатами интересно рассмотреть множество 5-апериодических слов. В монографии А.Ю. Ольшанского (1989) доказана теорема о бесконечности множества 6-апериодических слов и получена оценка снизу количества таких слов любой данной длины. В докладе приводится оценка для функции $f(n)$ количества 5-апериодических слов длины n в двубуквенном и трехбуквенном алфавите. Дается обзор результатов по проблеме Бернсайда. Рассматриваются результаты, связанные с проблемой Бернсайда для групп показателя 5, полученные в Красноярской школе по теории групп.

ON THE BURSIDE PROBLEM FOR GROUPS OF PERIOD 5

V.I. Senashov

Group, generating elements, Burnside problem, alphabet, local finiteness.

In 1902 W. Burnside posed the question of the local finiteness of groups, all elements of whose have finite orders. The first negative answer was received only 63 years later by E.S. Golod. The finiteness of the free Burnside group of the period n is established at different times for n = 2, n = 3 (W. Burnside), n = 4 (W. Burnside, I. N. Sanov), n = 6 (M. Hall). The proof of the infinity of this group for odd $n \geq 665$ is given in the book by S.I. Adian (1975). A more obvious version of the proof for odd $n > 1010$ was proposed by A.Yu. Olshansky (1989). For n = 5, the answer is still unknown. In connection with these results it is interesting to consider the set of 5-aperiodic words. In the monograph A.Yu. Ol'shanskii (1989) proved the theorem on the infinity of the set of 6-aperiodic words and obtained a lower estimate for the number of such words of any given length. The report gives an estimate for the function of the number of 5-aperiodic words of length in a two-letter and three-letter alphabet. An overview of the results on the Burnside problem is given. The results related to the Burnside problem for groups of exponent 5 obtained at the Krasnoyarsk School on Group Theory are considered.

В 1902 г. Уильям Бернсайд поставил вопрос о локальной конечности групп, все элементы которых имеют конечные порядки [1]. Впоследствии этот вопрос приобрел статус проблемы Бернсайда о периодических группах. Отрицательный ответ на него был получен впервые лишь спустя 62 года в 1964 г. Е.С. Голодом [2]. Позднее С.В. Алешиным (1972) [3], Р.И. Григорчуком (1980) [4], В.И. Сущанским (1979) [5] была предложена целая серия отрицательных примеров. Сам У. Бернсайд в своей статье 1902 г. [1] обратил особое внимание на вопрос о локальной конечности групп с тождественным соотношением $x^n=1$.

Группа $B(d,n)=F/F^n$, $d>1$, которая получается факторизацией свободной группы $F=F(d)$ с d образующими по нормальной подгруппе F^n, порожденной n-ми степенями всех элементов из F, называется сейчас *свободной бернсайдовской группой показателя* (*или периода*) n. Ее конечность установлена в разное время для $n=2$ (тривиальный случай), $n=3$ (У. Бернсайд), $n=4$ (У. Бернсайд для $d=2$; И.Н. Санов [6] для произвольного d), $n=6$ (М. Холл [7]).

Доказательство бесконечности группы $B(d,n)$, $d \geq 2$, для нечетных показателей $n \geq 4381$ было дано в работе П.С. Новикова – С.И. Адяна [8], а для нечетных $n \geq 665$ – в книге С.И. Адяна [9]. Гораздо более доступный и геометрически наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$ был предложен А.Ю. Ольшанским [10], который на основе усовершенствованного им геометрического метода построил для каждого достаточно большого простого числа p бесконечную p-группу, все собственные подгруппы которой имеют порядок p. Это наиболее сильная форма отрицательного ответа на вопрос Бернсайда, означающая существование бесконечного множества конечно порожденных периодических групп с тождеством, сколь угодно далеких по своим свойствам от конечных.

Вопрос о конечности конечно порожденной группы периода 5 до сих пор остается открытым.

В 1950 г. В. Магнусом была поставлена еще одна проблема, известная как ослабленная проблема Бернсайда.

В ней требовалось выяснить, существует ли максимальная нильпотентная периодическая группа $B_0(2,5)$ с данным числом порождающих элементов m и фиксированным периодом n. Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ проведен в работах [12; 14].

В статье [12] с использованием вычислений на ЭВМ получен новый результат, дающий достаточные условия существования в группе $B(2,5)$ двупорожденных подгрупп, не изоморфных $B(2, 5)$.

В работе [13] подробно описывается алгоритм, при помощи которого можно вычислять элементы и соотношения в бернсайдовых группах и, в частности, в группе $B(2, 5)$. После чего проводится сравнение групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ на основе указанного алгоритма.

В работе [14] подробно описан новый алгоритм для вычисления элементов и соотношений в бернсайдовых группах в формате минимальных слов, основанный на свойстве ассоциативности групповой операции. При помощи данного алгоритма для бернсайдовой группы $B(m,n)$ строится последовательность специальных объектов, каждый из которых состоит из последовательности слов F_s, не превышающих по длине s. Продолжен начатый в [13] сравнительный анализ групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ до слов длины 35. Показано, что в формате минимальных слов данные группы $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ совпадают на словах с длинами ≤ 29. На длинах 30–35 в группе $B_0(2,5)$ найден ряд таких соотношений, что невыполнение хотя бы одного из которых в $B(2,5)$ будет означать бесконечность данной группы.

Представляют интерес два вопроса о подгруппах группы $B(2,5)$, поставленные Б.Б. Симсом [15], ответы на которые до настоящего времени не известны:

– существуют ли в $B(2,5)$ нециклические конечные подгруппы?

– существуют ли в $B(2,5)$, при условии ее бесконечности, бесконечная двупорожденная подгруппа периода 5, не изоморфная $B(2,5)$?

Положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда А.И. Кострикиным для групп периода 5 приведено в 1955 г. в [11].

В работе [13] отмечается, что наибольший интерес представляет двупорожденная группа периода 5 (группа $B(2,5)$), поскольку эта группа имеет наименьший показатель и наименьшее число порождающих элементов в сравнении с другими бернсайдовыми группами, конечность которых не определена.

Автором был сделан доклад «Апериодические слова» в 2015 г. на конференции «Решетневские чтения» [16], затем исследования по этому вопросу были продолжены: в [17] была улучшена оценка А.Ю. Ольшанского из [18] количества 6-апериодических слов и в данной работе рассматриваются 5-апериодические слова.

Под *периодическим словом с периодом H* понимается любое подслово некоторой степени H^p, $p>0$.

В этом смысле *ababa* – периодическое слово с периодом *ab* или *ba*.

Под *l-апериодическим словом* понимают слово X, если в нем нет непустых подслов вида Y^l.

В 1906 г. А. Туэ установил существование 3-апериодических слов произвольной длины в любом неоднобуквенном алфавите [19]. В монографии С.И. Адяна [9] приведено доказательство С.Е. Аршона 1937 г. [20] того, что в алфавите из двух букв существует бесконечное множество сколь угодно длинных 3-апериодических слов. В работе [21] рассмотрена задача, являющаяся обобщением задачи о существовании сколь угодно длинных бесквадратных слов над алфавитом из трех букв.

В работе [18] была доказана теорема (доказательство близко к [22]) о бесконечности множества 6-апериодических слов и получена оценка снизу функции $f(n)$ – количества таких слов длины n: *в алфавите* $\{a,b\}$ *существует сколь угодно длинные 6-апериодические слова. Более того, число* $f(n)$ *таких слов длины* n *больше, чем* $(3/2)^n$.

В связи с этими результатами представляет интерес оценить количество 5-апериодических слов.

При доказательстве следующих результатов использован метод А.Ю. Ольшанского из [18]:

Теорема. *В алфавите* $\{a,b\}$ *существует сколь угодно длинные 5-апериодические слова. Более того, число* $f(n)$ *таких слов длины* n *больше, чем* $1{,}76929235^n$.

Теорема. *В алфавите* $\{a,b,c\}$ *существует сколь угодно длинные 5-апериодические слова. Более того, число таких слов длины* n *больше, чем* $(5/2)^n$.

Библиографический список

1. Burnside W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure. Appl. Math. 1902. V. 33. P. 230–238.
2. Голод Е.С. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР Сер. мат. 1964. Т. 28. № 2. С. 273–276.
3. Алешин С.В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Т. 11. № 3. С. 319–328.
4. Григорчук Р.И. О проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14. № 1. С. 53–54.
5. Сущанский В.И. Периодические *p*-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // ДАН СССР. 1979. Т. 247. С. 557–560.
6. Санов И.Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. ЛГУ. 1940. Т. 55. С. 166–170.
7. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ. 1962. 468 с.

8. Новиков П.С., Адян С.И. О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка // Изв. АН СССР. Серия математическая 1967. Т. 32. № 1. С. 212–244, Т. 32. № 2. С. 251–324, Т. 32. № 3. С. 708–731.
9. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука. 1975. 336 с.
10. Ольшанский А.Ю. Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 5. С. 555–618.
11. Кострикин А.И. Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5 // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1955. Т. 19. № 3. С. 233–244.
12. Шлепкин А.А. О подгруппах свободной двупорожденной бернсайдовой группы периода пять // Вестник СибГАУ. 2012. № 4 (44). С. 70–75.
13. Кузнецов А.А., Шлепкин А.А. Сравнительный анализ соотношений бернсайдовых групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ // Тр. Ин-та математики и механики Урал. отд. Рос. акад. наук. 2009. Т. 15. № 2. С. 125–132.
14. Кузнецов А.А., Шлепкин А.А. Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ // Тр. Ин-та математики и механики Урал. отд-ния Рос. акад. наук. 2010. Т. 2. С. 133–138.
15. Havas G., Wall G., Wamsley J. The two generator restricted Burnside group of exponent five // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. Vol. 10. P. 459–470.
16. Сенашов В.И. Апериодические слова // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 55-летию Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева (10–14 нояб. 2015, г. Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю.Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т им. акад. М.Ф. Решетнева. Красноярск, 2015. Ч. 2. С. 132–133.
17. Сенашов В.И. Улучшение оценки количества 6-апериодических слов фиксированной длины // Вестник СибГАУ. 2016. № 2 (17). С. 168–172.
18. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука. 1989. 300 с.

19. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih // Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania. 1906. Bd. 7. S. 1–22.
20. Аршон С.Е. Доказательство существования n-значных бесконечных асимметричных последовательностей // Мат. сб. 1937. Т. 2(44). № 4. С. 769–779.
21. Котляров Н.В. О словах, избегающих квадраты с одной возможной ошибкой замещения // Материалы Междунар. молодежн. науч. форума «Ломоносов-2014» / отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс]. М.: МАКС Пресс, 2014.
22. Гуревич Г.А. Бесповторные последовательности // Квант. 1975. № 9. С. 7–11.

МУЛЬТИМЕДИЙНЫЙ КОМПЛЕКС ПО АЛГЕБРЕ 7 КЛАССА

С.В. Ларин

Мультимедийный дидактический материал, анимация, среда GeoGebra, учебный фильм, программа Bandicam, алгебра 7 класса.

В статье представлены три составляющие мультимедийного дидактического материала по алгебре 7 класса: текст учебного пособия, Альбом анимационных рисунков и учебные фильмы, демонстрирующие использование анимационных рисунков на уроках алгебры.

MULTIMEDIYNYY COMPLEX ON THE ALGEBRA 7 THE CLASS

S.V. Larin

Multimedia teaching materials, animations, GeoGebra Wednesday educational film, program Bandicam, algebra class 7.

This article presents three components of multimedia didactic material for algebra class 7: the text of the training manual, Album pictures and animated training films to demonstrate the use of animated drawings on the lessons of algebra.

Компьютерная анимация – это то новое в преподавании математики, что все более завоевывает симпатии не только современных школьных учителей, но и преподавателей вуза. Конечно, динамические определения, скажем, кривых второго порядка, циклоиды и кардиоиды, известны с древности, а «натурные» модели при решении задач на движение применялись с давних времен. Но только теперь возникли условия малозатратного и эффективного моделирования движений, математических понятий и физических явлений.

С целью организации учебно-научных исследований школьников и стимулирования их учителей к использованию компьютерной анимации на уроках математики полезно было бы создать отдельный сайт, скажем, под названием «Энциклопедия анимации в математике», ориентированный прежде всего на школьных учителей и их учеников, который представлял бы собой мультимедийный продукт, включающий в себя публикации следующего содержания.

1. Проектные статьи модераторов, где ставятся задачи и намечаются пути их решения, причем в качестве модератора может выступить энтузиаст любого ранга учености, включая академиков.

2. Описания создания анимационных рисунков для исследований и экспериментов по решению исследовательских задач.

3. Описание методики использования анимационно-дидактического материала на уроках математики.

4. Учебные фильмы, демонстрирующие анимационное решение задачи, использование анимационного материала на уроках математики.

5. Специализированные подборки анимационно-дидактического материала по отдельным предметам, классам и темам как школьной, так и вузовской математики.

Сайт был бы полезен и будущим учителям – студентам педагогических вузов, желающим уже на студенческой скамье приобщиться к компьютерным технологиям в образовании.

В качестве примера учебного материала, который можно было бы разместить на проектируемом сайте, приведем описание созданного мультимедийного продукта по алгебре 7 класса. Он состоит из учебного пособия, где описываются построения анимационных рисунков и методика их использования на уроках с привязкой к конкретному учебнику [2], Альбом анимационных рисунков, выполненных в среде *GeoGebra*, и 7 учебных фильмов (по числу глав пособия), демонстрирующих использование анимационных рисунков на уроках. Фильмы созданы с использованием программы *Bandikam*. Учебное пособие написано в том же стиле, что и книга [1].

Мы не ставим цели устранить «ручной труд» учащегося – выполнение упражнений в тетради. Мы хотим лишь пополнить арсенал средств обучения математике для поиска решения задач, для выполнения алгоритмов решений с устранением вычислительных трудностей, для построения анимационных моделей изучаемых математических понятий, формул, процессов и явлений.

Методика преподавания математики рассматривается нами как практико-ориентированное искусство обучения с опорой на интуитивное, чувственное восприятие математических понятий и утверждений через формирование ассоциаций между абстрактными понятиями и чувственно воспринимаемыми объектами реального мира.

Под анимацией мы понимаем ручное или инструментальное изменение объекта на экране – геометрической фигуры, формулы или текста.

Нами использованы следующие три вида анимации.

1. Геометрическая анимация – управляемое изменение чертежа с сохранением алгоритма его построения.

2. Алгебраическая анимация – управляемое изменение параметров формул (в частности, с помощью Ползунков), обеспечивающее выполнение решения данной математической задачи.

3. Текстовая анимация – управляемое преобразование текста (с помощью встроенного инструмента Ползунок и условий видимости) для реализации некоторого алгоритма решения математической задачи.

Приведем краткое описание содержания каждого фильма.

Первый фильм посвящен знакомству с программой *GeoGebra*. Выбор программы мотивируется тем, что для ее использования не требуется знаний программирования. Надо лишь знать, под какой кнопкой, изображенной на экране, лежит нужный инструмент. Образно говоря, среда *GeoGebra* представляет собой «мастерскую с инструментами» по изготовлению анимационных рисунков.

Первый фильм является вводным и представляет собой очень краткое введение в программу GeoGebra с демонстрацией различных видов анимации.

Второй фильм сопровождает тему «Выражения, тождества, уравнения». Главным является формирование понимания переменной. При этом используется как геометрическая, так и алгебраическая анимация. При нахождении значения выражения могут возникнуть нежелательные отвлекающие вычислительные трудности. Устранить их – наша задача. Демонстрируются анимационные рисунки как в алгебраической, так и в геометрической форме, посвященные сравнению значений выражений. В дополнение к учебному тексту, посвященному введению понятия уравнения с одной переменной [2, с. 23], демонстрируются соответствующие анимационные рисунки, приводящие к понятиям линейного уравнения и линейного неравенства. Решение линейного уравнения завершается его анимационным исследованием.

Третий фильм посвящен функциям. В дополнение к введению понятия функции в учебнике [2, глава II] демонстрируется анимационный дидактический материал для формирования понятия функции и функциональной зависимости переменных. Далее рассматривается линейная функция, анимационное вычерчивание графика линейной функции, зависимость графика от коэффициентов. Рассмотрение прямой пропорциональности сопровождается анимационным вычерчиванием графика этой зависимости и одновременным моделированием соответствующего движения.

Четвертый фильм посвящен теме «Степень с натуральным показателем». Демонстрируются анимационные рисунки, позволяющие отработать понимание натуральной степени данного числа и закрепить навыки действий со степенями, а также осознать десятичную запись натурального числа. Далее в соответствии с учебником рассматриваются одночлены. Демонстрируется анимационный рисунок для создания одночлена и нахождения его значений. Затем анимационно демонстрируются действия над одночленами. Тема «Абсолютная и относительная погрешности» представлена анимационными рисунками по измерению длины отрезка.

Пятый фильм посвящен теме «Многочлены». Сначала упорядочиваются основные понятия, которыми должен овладеть ученик по этой теме: числовое выражение и его значение, выражение с переменной и его значение при данном наборе значений переменных, понятие одночлена, и, наконец, понятие многочлена и его степени. Затем демонстрируется использование кнопки CAS (Computer Algebra Sistem – система компьютерной алгебры). Эта система обеспечивает символьные вычисления с формулами. На конкретных примерах из учебника демонстрируется решение ряда примеров. Возможности CAS можно использовать для проверки «ручного» решения, а также при решении более сложных примеров. Использование кнопки CAS помогает конструировать примеры с «хорошими» ответами. Система CAS позволяет также экспериментировать с формулами, переоткрывая известные формулы и придумывая новые. Демонстрируется организация учебно-научной деятельности учащегося по решению задачи анимационного нахождения произведения двух многочленов, по восстановлению многочлена по его графику. Демонстрируется применение анимационных рисунков для написания формулы по ее названию и для отработки правильного чтения формул.

Шестой фильм посвящен выводу основных формул сокращенного умножения. Демонстрируется анимационно-геометрический вывод формул квадрата и куба суммы двух чисел, а затем показан вывод из них остальных изучаемых формул сокращенного умножения.

Седьмой фильм посвящен заключительной теме учебника «Системы линейных уравнений». Демонстрируется анимационный рисунок, позволяющий найти общее решение и частные решения линейного уравнения с двумя переменными. При этом алгебраическое решение сопровождается графическим решением с построением графика соответствующей линейной функции. В помощь школьному учителю демонстрируется анимационный рисунок, позволяющий создать систему линейных уравнений с задуманным (хорошим) решением. Демонстрируются анимационные рисунки для решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки, способом исключения одной переменной с последующей подстановкой и способом двойного исключения переменных. Заключает тему анимационное исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Приводится дополнительный материал, связанный с выводом формул Крамера и решением и исследованием системы методом Крамера.

Созданные анимационные рисунки можно использовать на различных стадиях изучения учебного материала: на стадии первичного знакомства с понятием, на стадии закрепления знаний и на стадии проверки усвоения пройденного материала. Наконец, можно познакомить школьников с технологией построения соответствующего анимационного рисунка и направить его на учебно-исследовательскую работу по созданию подобных рисунков, на экспериментирование с ними.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-н/Д: Легион, 2015.
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. / под ред. С.А. Теляковского. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2004.

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И СЕКУЩИХ В ТЕОРЕМЕ МЕНЕЛАЯ

В.К. Гаврилов

Теорема Менелая, многоугольник, контур, подобие.

По расширенной теореме Менелая предложены вариант трактовки термина «контур», вариант построения подобных треугольников по двум отношениям сторон на контуре заданного треугольника, вариант построения подобных треугольников и секущих в теореме Менелая.

SIMILARITY OF TRIANGLES AND CROSSING STRIGHT LINES IN MENELAU'S THEOREM

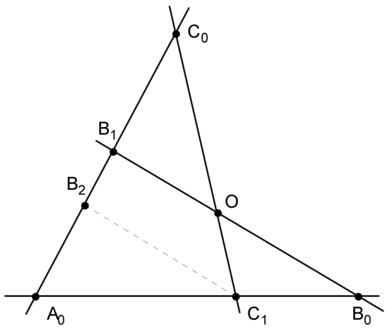
V.K. Gavrilov

Menelaus' theorem, polygon, contour, similarity.

On extend Menelaus' theorem it is offered variant of interpretation the term «contour». It is received condition of similarity the triangles on equalities of two ratios of sides on contours the triangles. It is offered variant of building the similar figures in Menelaus' theorem.

Одной из задач элементарной геометрии является задача построения многоугольника, подобного заданному [1, с. 129]. В качестве заданного многоугольника рассмотрим в теореме Менелая многоугольную фигуру, образованную треугольником и прямой, секущей треугольник (рис. 1).

Известен способ графического построения многоугольника, подобного заданному (гомотетия) [1, с. 129]. В то же время по определению две геометрические фигуры подобны «если отношение расстояний между любыми парами соответствующих точек равно одной и той же постоянной величине *k*» [2, с. 465] (*k* – коэффициент подобия). Это свойство подобных фигур отражено в третьем признаке подобия треугольников: «если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны» [1, с. 120]. Третий признак подобия треугольников позволяет сохранить информацию о форме заданного треугольника в виде ряда чисел: указания длин трех сторон треугольника и величины коэффициента подобия. Дальнейшее построение подобного треугольника по трем сторонам известно [1, с. 48].



$$\left(\frac{A_0B_0}{B_0C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0B_1}{B_1A_0}\right) = 1{,}00$$

$$\left(\frac{B_0A_0}{A_0C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1C_0}{C_0O}\right)\cdot\left(\frac{OB_1}{B_1B_0}\right) = 1{,}00$$

Рис. 1

Будем искать вариант сохранения информации о форме многоугольной фигуры в теореме Менелая в виде ряда чисел.

В работе [3, с. 9] предложен вариант обобщения теоремы Менелая на случай пересечения ряда прямых по теореме 1.

Теорема 1. *Если прямые A_0B_0, A_0C_0, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются, то отрезки между точками пересечения прямых образуют ряд контуров, на каждом из которых, при направленном обходе контура, произведение отношений длин отрезков равно единице.*

Для случая пересечения четырех прямых по теореме 1 получены равенства:

$$\frac{A_0B_0}{B_0C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0B_1}{B_1A_0}=1; \tag{1}$$

$$\frac{B_0B_1}{B_1O}\cdot\frac{OC_0}{C_0C_1}\cdot\frac{C_1A_0}{A_0B_0}=1. \tag{2}$$

$$\frac{A_0C_0}{C_0B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}=1; \tag{3}$$

$$\frac{C_0C_1}{C_1O}\cdot\frac{OB_0}{B_0B_1}\cdot\frac{B_1A_0}{A_0C_0}=1. \tag{4}$$

Перемножив равенства (1) – (4), получим:

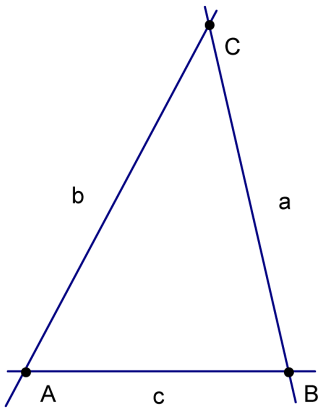
$$\frac{A_0B_0}{B_0C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0B_1}{B_1A_0}\cdot\frac{B_0B_1}{B_1O}\cdot\frac{OC_0}{C_0C_1}\cdot\frac{C_1A_0}{A_0B_0}\cdot\frac{A_0C_0}{C_0B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}\cdot\frac{C_0C_1}{C_1O}\cdot\frac{OB_0}{B_0B_1}\cdot\frac{B_1A_0}{A_0C_0}=1. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что равенство (5) – это произведение равенств единице для контуров треугольников (рис. 1): $A_0B_0B_1$, $A_0C_1C_0$, C_1B_0O, OC_0B_1. В частности, согласно теореме 1 на контуре треугольника $A_0B_0B_1$ равенство единице имеет вид:

$$\frac{A_0B_0}{B_0B_1} \cdot \frac{B_1A_0}{A_0B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{B_1A_0} = 1,$$

т.е. для треугольника со сторонами *a, b, c* (рис. 2) на контуре треугольника имеем очевидное равенство:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} = 1. \tag{6}$$



$$\left(\frac{BC}{CA}\right) \cdot \left(\frac{AB}{BC}\right) \cdot \left(\frac{CA}{AB}\right) = 1{,}00$$

Рис. 2

Таким образом, равенства единице типа (6) и равенства (1) – (4) образуют пары треугольник – секущая: $A_0C_1C_0$ – B_0B_1 (1), $C_0B_1O - A_0B_0$ (2), $A_0B_0B_1 - C_0C_1$ (3), $OC_1B_0 - A_0C_0$ (4).

Ключевым понятием теоремы 1 является понятие «контур». Согласно Интернет, Википедия: «Контур – в общем случае, замкнутая линия, … Контур в планиметрии – граница плоской фигуры». Другая трактовка термина «контур» не обнаружена, например в [2] термин «контур» отсутствует. Равенство (6) позволяет уточнить трактовку термина «контур», понимая под определением «замкнутый» повторение величин отношений отрезков при направленном обходе контура. Возможна, например, такая трактовка: «контур» – это замкнутая в пространстве линия, при направленном обходе которой значения переменной величины [2, с. 453] (отношение отрезков) на линии повторяются.

Известно, что если треугольники подобны, то «отношение любых двух сторон одного треугольника равно отношению сходственных сторон другого треугольника» [1, с. 120]. Это утверждение и равенство (6) позволяют сформулировать теорему 2.

Теорема 2. *Если на контурах треугольников два отношения сторон равны, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть в равенстве (6) для треугольников 1) и 2) равны два первых отношения сторон:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2};\ \ \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2},\ \text{тогда следует:}\quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

т.е. получили выполнение третьего признака подобия треугольников, теорема 2 доказана.

Построение подобного треугольника по заданным величинам отношений сторон заключается в следующем: задают длину общей стороны в паре заданных отношений равенства (6), тогда величины отношений позволяют определить длины двух других сторон и построение подобного треугольника сводится к известному [1, с. 48] построению треугольника по трем сторонам. Эквивалент такого способа построения – нормировка длин сторон треугольника на длину одной из сторон.

Равенство (6) является равенством подобия контура треугольника. Тогда равенство (5) является равенством подобия сложного контура, составленного из треугольников, а равенства (1) – (4) являются равенствами подобия соответствующих контуров. Отметим, что равенство (5) подтверждает известную теорему: «Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников» [1, с. 127].

Общий алгоритм построения треугольника и секущей, подобных заданным в теореме Менелая, сводится к построению двух контуров, на каждом из которых заданы два отношения отрезков, при необходимости третье отношение отрезков на контуре определяют из равенства единице. Для построения можно выбрать любую пару из четырех треугольников в теореме Менелая, или выбрать пару треугольник – секущая; например (рис. 1), выбирают треугольник $A_0C_1C_0$ и равенство (1); после построения подобного треугольника из равенства (1) определяют на сторонах треугольника положение точек O, B_1, через которые проводят секущую.

Таким образом, для построения треугольника и секущей, подобных заданным в теореме Менелая, необходимо задать два отношения сторон в равенстве подобия треугольника и два отношения отрезков в равенстве Менелая, содержащего соответствующую треугольнику секущую.

Библиографический список

1. Киселев А.П. Геометрия / под ред. Н.А. Глаголева. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. БЭС Математика / гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.
3. Гаврилов В.К. Равенства Менелая, Чевы и другие равенства // «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием, г. Красноярск, 2016 г. С. 8–12. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=27468320

О ПРИМЕНЕНИИ КООРДИНАТНО-ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В СРЕДЕ *GEOGEBRA*

Н.А. Журавлева

Задачи с параметром, координатно-графический метод, среда GeoGebra.

В статье на примерах заданий с параметром, представленных в Едином государственном экзамене 2017 г., рассматриваются особенности применения координатно-графического метода решения в динамической среде *GeoGebra*. Описываются особенности применения этого метода и представлены возможности использования компьютерно-математических моделей.

ABOUT APPLICATION OF A COORDINATE AND GRAPHIC METHOD FOR THE SOLUTION OF TASKS WITH PARAMETER IN THE ENVIRONMENT OF *GEOGEBRA*

N.A. Zhuravleva

Tasks with parameter, a coordinate and graphic method, Wednesday GeoGebra.

In article on examples of the tasks with parameter presented in the unified state examination of 2017 features of application of a coordinate and graphic method of the decision in the dynamic environment are considered *GeoGebra*. Features of application of this method are described and possibilities of use of computer and mathematical models are presented.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования устанавливает новые требования к обучающимся «владение опытом построения и использования компьютерно-математических моделей» [3]. Формирование такого опыта происходит при систематическом использовании в процессе обучения математике компьютерной среды *GeoGebra*. Особенности построения различных графических объектов в *GeoGebre* описаны в книге [2].

Решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики. В таких задачах требуется не только владение стандартными методами решения уравнений и неравенств, но и умение проводить анализ графической информации, учитывая область допустимых значений переменного и параметра. Цель статьи – рассмотреть особенности использования координатно-графического метода решения заданий с параметром в среде *GeoGebra*.

Рассмотрим задания с параметром, предлагаемые на профильном экзамене 2017 г. При проверке заданий с развернутым ответом экспертами было замечено, что в прошлом году такие задания решались лучше за счет многовариативности решения [1]. В этом году были представлены задания с параметром, решаемые координатно-графическим методом – исследование различных вариантов решения уравнения $F(x,a)=0$ относительно переменного x на области допустимых значений параметра a.

Координатно-графический метод представляет искомое решение в виде геометрического места точек на координатной плоскости, где в качестве одной из координат выступает параметр, а в качестве другой – искомая переменная. Данный метод можно применить, если в задаче фигурируют лишь один параметр a и одна переменная x, они конструируют некоторое аналитическое выражение $F(x,a)$, и графики функций $F(x,a)=0$ в системе координат Oax строятся несложно. Далее процесс решения проходит следующим образом. Строится графический образ, затем, пересекая полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси Oa, «снимаем» нужную информацию.

Пример 1. Для каждого значения параметра a найдите количество корней уравнения $\dfrac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0$, принадлежащих отрезку $[4;8]$.

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю и выражение не теряет смысла, следовательно, данное уравнение равносильно совокупности решений $\left[\begin{array}{l} x=a+7 \\ x=2-a \end{array}\right.$ при условии, что $10x-x^2-a^2>0$. Для решения неравенства выделим полный квадрат $a^2+(x^2-10x+25)<25$ и получим аналитическую формулу круга $a^2+(x-5)^2<25$ с центром в точке $(0;5)$ радиуса 5 на плоскости Oax. По условию задачи $x\in[4;8]$, т.е. выполняется двойное неравенство $4\le x\le 8$.

В программе *GeoGebra* в плоскости Oax построим две прямые $x=\grave{a}+7$ и $x=2-a$, а также две области $a^2+(x-5)^2<25$ и $4\le x\le 8$ (рис. 1).

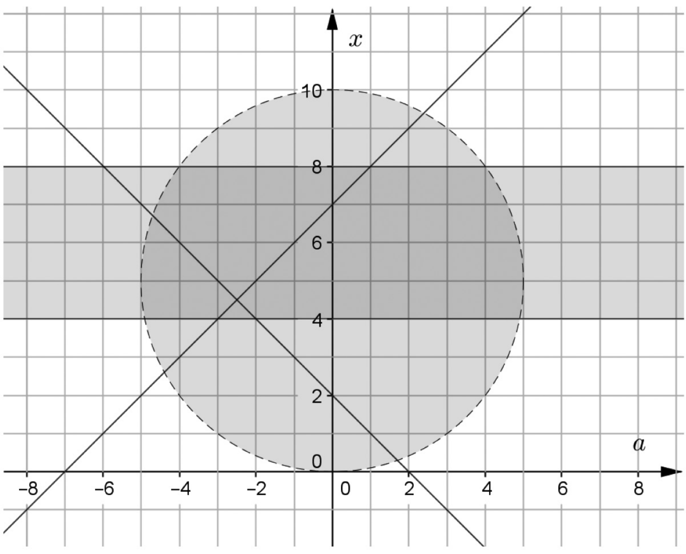


Рис. 1

Отметим точки пересечения прямых с границами выделенной области и точку пересечения прямых (рис. 2).

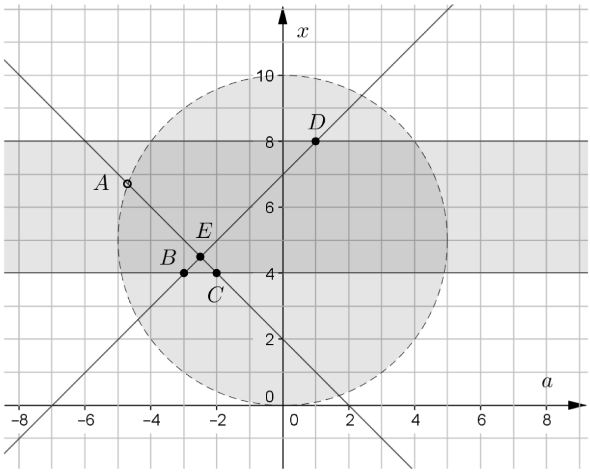


Рис. 2

Выделим отрезки *AC* и *BD* и уберем остальные элементы (рис. 3).

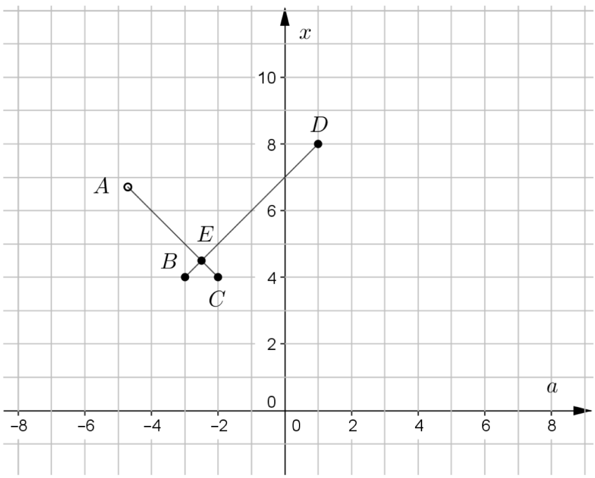


Рис. 3

Проведем вертикальную прямую и будем перемещать ее слева направо, каждый раз фиксируя, сколько точек – решений уравнения с параметром получается в результате пересечения вертикальной прямой с отрезками AC и BD (рис. 4).

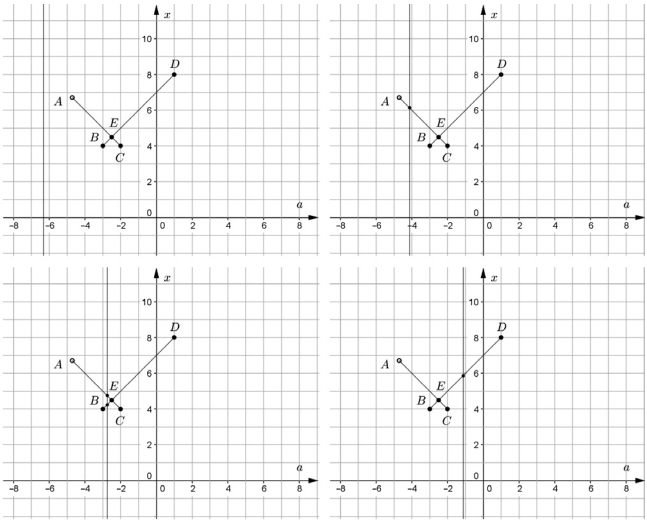


Рис. 4

Последовательно выпишем все промежутки значений параметра a и количество решений уравнения: при $a \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{41}}{2}\right]$ решений нет; при $a \in \left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right)$ одно решение; при $a \in [-3; -2{,}5)$ два решения; при $a = -2{,}5$ одно решение; при $a \in (-2{,}5; -2]$ два решения; при $a \in (-2; 1]$ одно решение; при $a \in (1; +\infty)$ решений нет.

Ответ. При $a \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{41}}{2}\right] \cup (1; +\infty)$ решений нет; при $a \in \left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \{2{,}5\} \cup (-2; 1]$ одно решение; при $a \in [-3; -2{,}5) \cup (-2{,}5; -2]$ два решения.

Пример 2. Для каждого значения параметра a найдите количество корней уравнения $\frac{x^2-10x+a^2}{\sqrt{(a-x+8)(a+x-3)}}=0$, принадлежащих отрезку $[2;6]$.

Решением задачи будут точки окружности $a^2+(x-5)^2=$ 25 при условии, что $(a-x+8)(a+x-3)>0$ и $2\le x\le 6$.

Рассмотрим более подробно получение области $(x-a-8)(x+a-3)<0$

Прямые $x=a+8$ и $x=3-a$ разбивают плоскость на четыре области. Некоторые из них являются решением неравенства. Конкретно какие – можно установить, взяв из каждой области по пробной точке. Та область, точка которой удовлетворяет неравенству, является его решением. Для неравенства $(x-a-8)(x+a-3)<0$ решением будет левая и правая области (рис. 5).

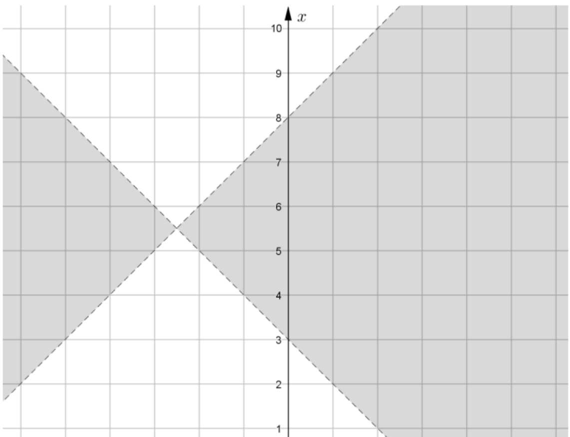


Рис. 5

Построим окружность $a^2+(x-5)^2=25$ и область $2\le x\le 6$ на той же координатной плоскости (рис. 6). Отметим точки пересечения окружности с границами выделенной области.

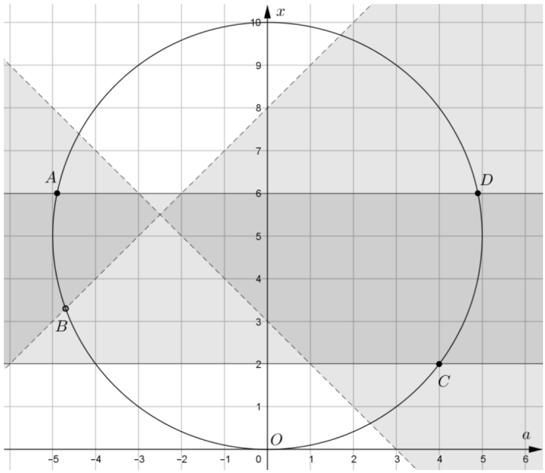


Рис. 6

Вычислим абсциссы отмеченных точек: $A\left(-2\sqrt{6}\right)$, $B\left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}\right)$, $C(4)$, $D\left(2\sqrt{6}\right)$.

Выделим дуги *AB* и *CD* и уберем остальные элементы (рис. 7).

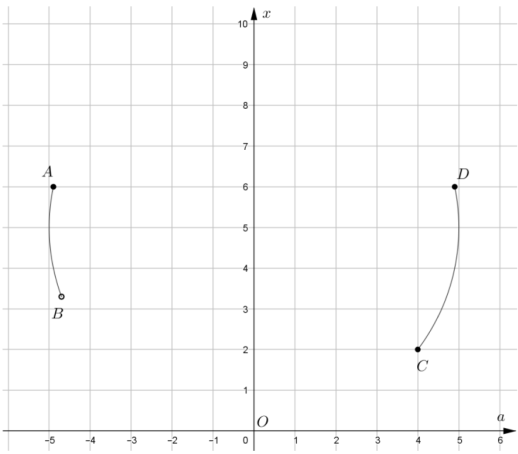


Рис. 7

Проведем вертикальную прямую и будем перемещать ее слева направо, каждый раз фиксируя, сколько точек получается в результате пересечения вертикальной прямой с дугами AB и CD (рис. 8).

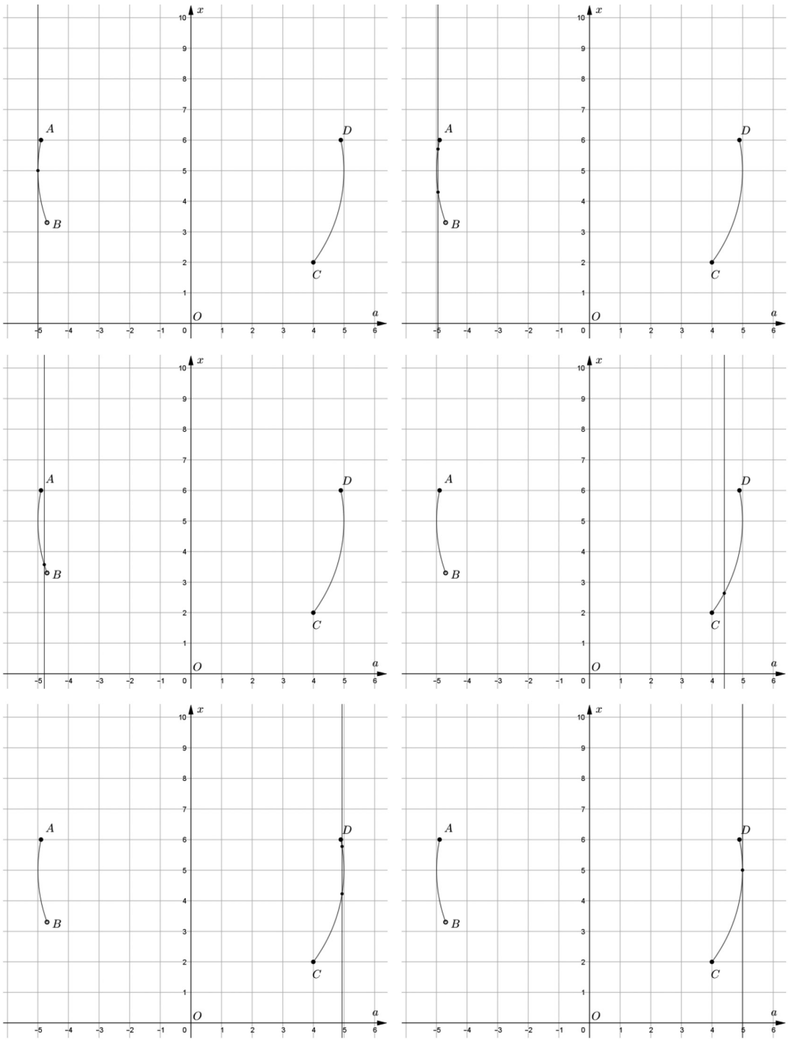


Рис. 8

Выпишем ответ:

При $a \in (-\infty;-5) \cup \left[\frac{-3-\sqrt{41}}{2};4\right) \cup (5;+\infty)$ решений нет;

при $a \in \{-5\} \cup \left(-2\sqrt{6};\frac{-3-\sqrt{41}}{2}\right) \cup [4;2\sqrt{6}) \cup \{5\}$ одно решение;

при $a \in (-5;-2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6};5)$ два решения.

Таким образом, в процессе выполнения данных заданий обучающиеся совершенствуют уровень математической подготовки и использования компьютерно-математических моделей. Изучив особенности использования координатно-графического метода и рассмотрев решение примеров в динамической среде *GeoGebra*, у обучающихся появляется возможность подготовиться к решению заданий с параметром ЕГЭ. Поскольку, чем большим количеством методов решения заданий с параметром владеет обучающийся, тем больше вероятность решить данное задание на экзамене.

Библиографический список

1. Журавлева Н.А., Шашкина М.Б. ЕГЭ 2016. Извлекаем уроки и делаем выводы: задания с параметром // Математика в школе 2016. № 9–10. С. 21–27.
2. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов н/Д: Легион, 2015. 192 с.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (10–11 кл.) / Утв. приказом Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413) [Электронный ресурс]. URL: минобрнауки.рф/документы/2365 (дата обращения: 06.10.2017).

РЕШЕНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ АНИМАЦИОННЫХ РИСУНКОВ

С.В. Ларин, С.В. Чилбак-оол

Программа GeoGebra, анимационный рисунок, многочлены, вычислительные алгоритмы.

В статье дано краткое описание использования при обучении алгебре анимационных рисунков, созданных в среде *GeoGebra*, которые реализуют некоторые вычислительные алгоритмы с исключением вычислительных трудностей, поскольку вычисления выполняет компьютер.

THE DECISION OF ALGORITHMIC ALGEBRAIC TASKS USING ANIMATED PICTURES

S.V. Larin, S.V. Chilbak-ool

GeoGebra program, entertainment figure, polynomials, computational algorithms.

The article briefly describes how to use when teaching algebra animated pictures to *GeoGebra Wednesday* that implement some computational algorithms with the exception of the computational difficulties because the computation executes computer.

Цель статьи – представить использование анимационных возможностей программы *GeoGebra* при изучении многочленов в школе и вузе на примере анимационного моделирования вычислительных алгоритмов: деление «уголком» для чисел и многочленов, геометрический аналог схемы Горнера и алгоритм Евклида. При этом устраняются вычисления, которые поручаются компьютеру. При создании анимационных рисунков использовались три вида анимации: геометрическая анимация, основанная на сохранении последовательности построения чертежа при его преобразованиях, алгебраическая анимация с использованием встроенного инструмента Ползунок, позволяющего изменять параметры формул, и текстовая анимация – управляемое изменение текста с помощью условий видимости.

Все рисунки выполнены в среде *GeoGebra* и взяты с экрана компьютера. Статья является продолжением идей, заложенных в [1]. Созданный анимационный материал является новым и, по мнению авторов, будет востребован в свете современных требований применения информационных технологий в обучении математике.

1. Алгоритм деления чисел «уголком». Пользуясь анимационным рис. 1, разделим число 155112 на число $b = 567$. Записи на экране точно такие же, как и при «ручном» делении «уголком». Преимущество состоит в том, что исключаются вычислительные трудности при подборе очередной цифры частного *c*, нахождении произведения *bc* и промежуточного остатка r. Представим шаги алгоритма.

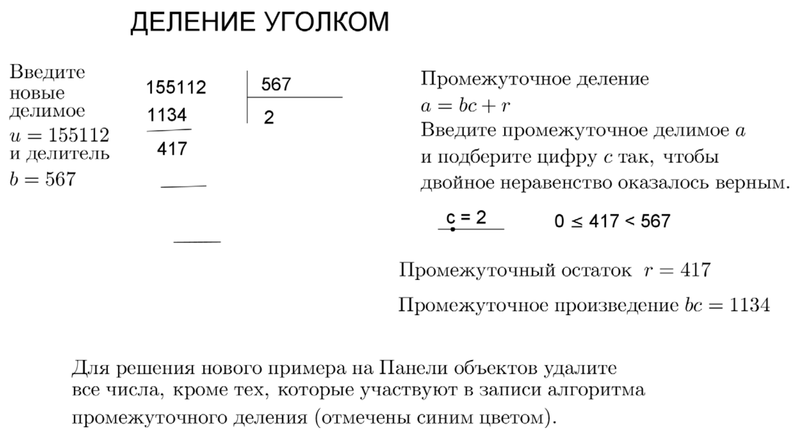


Рис. 1

1. Вводим (через Строку ввода) делимое $u = 155112$ и делитель $b = 567$. Записываем их на нужном месте (с помощью кнопки ABC).

2. Вводим (снова через Строку ввода) промежуточное делимое $a = 1551$.

3. Используя Ползунок, подбираем первую цифру частного $c = 2$, добиваясь выполнения двойного неравенства, (моделирующего неравенство $0 \le r < b$), и записываем ее на нужном месте.

4. Записываем (с помощью кнопки ABC) на нужном месте найденные компьютером произведение $bc = 1134$ и промежуточный остаток $r = 417$.

5. «Сносим» цифру 1.

Дальнейшие вычисления см. на рис. 2.

6. (Повторение пункта 2). Вводим промежуточное делимое $a = 4171$.

7. (Повторение пункта 3). Подбираем вторую цифру частного $c = 7$ и записываем ее на нужном месте.

8. (Повторение пункта 4). Записываем на нужном месте готовые произведение $bc = 3969$ и промежуточный остаток $r = 202$.

9. (Повторение пункта 5). «Сносим» цифру 2.

10. (Повторение пункта 2). Вводим промежуточное делимое $a = 2022$.

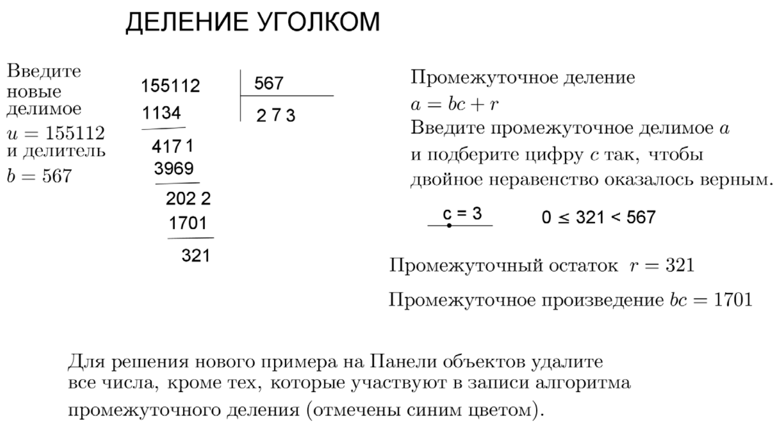


Рис. 2

11. (Повторение пункта 3). Подбираем третью цифру частного $c = 3$ и записываем ее на нужном месте.

12. (Повторение пункта 4). Записываем на нужном месте готовые произведение $bc = 1701$ и промежуточный остаток $r = 321$.

Деление «уголком» закончено. Ответ: $155112 = 567 \cdot 273 + 321$.

2. Д е л е н и е м н о г о ч л е н о в «у г о л к о м».

Пользуясь анимационным рис. 3, выполним деление «уголком» многочлена $f(x) = 2x^5 - 3x + 5$ на многочлен $b(x) = x^2 + x + 1$. В правом нижнем углу рисунка расположен своеобразный «калькулятор», который выполняет шаг алгоритма деления «уголком». При его использовании вводим многочлен $a(x)$ и очередное слагаемое $c(x)$ неполного частного (расположенное под «уголком»). «Калькулятор» выдает произведение $b(x)\times c(x)$ и остаток от деления многочлена $a(x)$ на многочлен $b(x)$. Так, на первом шаге деления «уголком» в качестве $a(x)$ вводим данный многочлен $f(x)$.

Процесс вычисления.

1. Вводим (строкой ввода) многочлены $f(x)$ и $b(x)$ и записываем их на Полотне (берем из Объектов).

ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ УГОЛКОМ

Введите делимое $f(x)$ и делитель $b(x)$
Запишите $f(x) = 2\,x^5 - 3\,x + 5$ и $b(x) = x^2 + x + 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
2\,x^5 - 3\,x + 5 & x^2 + x + 1 \\
\cline{2-2}
2x^5 + 2x^4 + 2x^3 & 2x^3 - 2x^2 + 2 \\
\quad -2x^4 - 2x^3 - 3x + 5 & \\
\quad -2x^4 - 2x^3 - 2x^2 & \\
\qquad\qquad 2x^2 - 3x + 5 & \\
\qquad\qquad 2x^2 + 2x + 2 & \\
\qquad\qquad\quad -5x + 3 &
\end{array}
$$

Промежуточное деление
$a(x) = b(x) \cdot c(x) + r(x)$
Введите промежуточное делимое $a(x)$ и слагаемое частного $c(x)$.
Запишите $c(x) = 2$,
$b(x) \cdot c(x) = 2\,x^2 + 2\,x + 2$
$r(x) = -5\,x + 3$.

Рис. 3

2. Вводим (строкой ввода) многочлен $a(x) = 2x^5 - 3x + 5$.

3. Вводим (строкой ввода) первое слагаемое частного $c(x) = 2x^3$ и записываем его на Полотне (с помощью кнопки ABC).

4. Записываем (с помощью кнопки ABC) готовые произведение $b(x) \cdot c(x) = 2x^5 + 2x^4 + 2x^3$ и остаток $r(x) = -2x^4 - 2x^3 - 3x + 5$.

5. (Повторение пункта 2). Вводим (строкой ввода) многочлен $a(x) = -2x^4 - 2x^3 - 3x + 5$.

6. (Повторение пункта 3). Вводим (строкой ввода) второе слагаемое частного $c(x) = 2x^2$ и записываем его на Полотне.

7. (Повторение пункта 4). Записываем готовое произведение $b(x) \cdot c(x) = -2x^4 - 2x^3 - 2x^2$, вычисленное компьютером, и готовый остаток $r(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

8. (Повторение пункта 2). Вводим (строкой ввода) многочлен $a(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

9. (Повторение пункта 3). Вводим (строкой ввода) третье слагаемое частного $c(x) = 2$ и записываем его на Полотне.

10. (Повторение пункта 4). Записываем готовое произведение $b(x) \cdot c(x) = 2x^2 + 2x + 2$ и готовый остаток $r(x) = -5x + 3$.

Деление «уголком» закончено.

Ответ: $f(x) = b(x) \cdot (2x^3 - 2x^2 + 2) + (-5x + 3)$.

Пользуясь рис. 3, уже не надо бояться вычислительных трудностей и можно смело выполнять деление «уголком», «не взирая» на коэффициенты многочленов, ибо вычисления берет на себя компьютер «в лице» «калькулятора».

3. Разложение многочлена по степеням *x-c* с помощью параллельных переносов.

Одним из главных применений схемы Горнера, позволяющее осуществить деление многочлена на многочлен *x-c*, является разложение данного многочлена по степеням *x-c*.

Вместе с тем последнее можно осуществить с помощью геометрических преобразований графика многочлена. Рассмотрим пример (рис. 4).

Разложение многочлена $f(x)$
по степеням $x - c$

Введите многочлен $f(x)$

$$f(x) = 2\ x^3 - 3\ x^2 + 5$$

Введите число с $\quad \mathrm{c} = 2$

$$\text{Ответ : } 2\ (x-2)^3 + 9\ (x-2)^2 + 12\ (x-2) + 9$$

Рис. 4

Пусть надо разложить многочлен $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ по степеням $x - 2$. В нашем случае $c = 2$. Вводим данный многочлен в компьютер и на экране получаем его график. Построим вектор $\vec{u} = (-2,0)$ и график данного многочлена передвинем на этот вектор. На Панели объектов обнаружим запись преобразованного многочлена: $f_1(x) = 2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 5$. Воспользуемся командой Упростить$[f_1(x)]$ и получим результат раскрытия скобок в виде многочлена $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 9$. Если теперь передвинуть график многочлена $g(x)$ на вектор $\vec{v} = -\vec{u} = (2,0)$, то получим график исходного многочлена, а на Панели объектов обнаружим запись преобразованного многочлена $g_1(x) = 2(x-2)^3 + 9(x-2)^2 + \ 21\ (x-2) + 9$. В то же время это и есть искомое разложение данного многочлена по степеням $x - 2$.

Делаем пояснительные надписи, удаляем оси и графики многочленов и получаем анимационный рисунок для разложения любого многочлена по степеням $x - c$ (рис. 4).

4. Алгоритм Евклида. Подбор многочленов

Напомним, что для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух многочленов применяется алгоритм Евклида. Он представляет собой следующую последовательность делений с остатком:

$f(x) = h(x)\times q_1(x) + r_1(x)$, степень $r_1(x) <$ степени $h(x)$;

$h(x) = r_1(x)\times q_2(x) + r_2(x)$, степень $r_2(x) <$ степени $r_1(x)$;

$r_1(x) = r_2(x)\times q_3(x) + r_3(x)$, степень $r_3(x) <$ степени $r_2(x)$;

……………………………………………………

$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)\times q_n(x) + r_n(x)$, степень $r_n(x) <$ степени $r_{n-1}(x)$;

$r_{n-1}(x) = r_n(x)\times q_{n+1}(x) + r_{n+1}(x)$, $r_{n+1}(x) = 0$.

При осуществлении алгоритма Евклида на уроке могут возникнуть нежелательные вычислительные трудности. Чтобы их избежать, желательно заранее подготовить «хорошие» многочлены. С этой целью создан анимационный рис. 5, позволяющий найти пару многочленов, имеющих задуманный НОД и заранее придуманную последовательность неполных частных. При его использовании следует лишь передвигать точку на Ползунке от $n = 9$ до $n = 1$ и выполнять появляющиеся предписания.

Введите число итераций $k \leq 9$
и установите $n = 9$.

n = 1

Введите $q_1(x)$.
Искомые многочлены
$f(x) = 6\,x^5 + 13\,x^4 + 27\,x^3 + 42\,x^2 + 27\,x + 9,$
$h(x) = 3\,x^4 + 2\,x^3 + 10\,x^2 + 6\,x + 3.$

Рис. 5

Например, при $n=9$ мы заказали число шагов алгоритма (число итераций) $k=3$. При $n=9,\ldots,4$ согласно предписаний вводим $r_9(x)=0$, …, $r_4(x)=0$. При $n=3$ по предписанию вводим задуманный НОД в виде $d(x)=x^2+3$ и задуманное неполное частное $q_3(x)=x$. При $n=2$ вводим задуманное неполное частное $q_2(x)=3x+2$ и $r_2(x)=d(x)$. При $n=1$ вводим задуманное неполное частное $q_1(x)=2x+3$ и получаем искомые многочлены $f(x)=6x^5+13x^4+20x^3+42x^2+27x+9$, $h(x)=3x^4+2x^3+10x^2+6x+3$. С этой парой многочленов можно смело идти на урок, никаких неожиданностей не будет.

5. Н а х о ж д е н и е НОД с п о м о щ ь ю а л г о р и т м а Е в к л и д а.

Анимационный рис. 6 реализует алгоритм Евклида для нахождения НОД данных многочленов. В качестве данных взяты многочлены, найденные в предыдущем пункте.

Процесс вычислений точно такой же, как и при «ручном» выполнении алгоритма Евклида, только вычисления выполняет «калькулятор», о роли которого подробно рассказано выше при выполнении деления «уголком».

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Введите $f(x)$ и $h(x)$
Запишите $f(x)=6\,x^5+13\,x^4+23\,x^3+42\,x^2+27\,x+9$
и $h(x)=3\,x^4+2\,x^3+10\,x^2+6\,x+3$.

$$\begin{array}{l|l}
6\,x^5+13\,x^4+23\,x^3+42\,x^2+27\,x+9 & 3\,x^4+2\,x^3+10\,x^2+6\,x+3 \\
\cline{2-2}
6x^5+4x^4+20x^3+12x^2+6x & 2x+3 \\
\quad 9x^4+7x^3+30x^2+21x+9 & \\
\quad 9x^4+6x^3+30x^2+18x+9 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3\,x^4+2\,x^3+10\,x^2+6\,x+3 & x^3+3x \\
\cline{2-2}
3x^4+9x^2 & 3x+2 \\
\quad 2x^3+x^2+6x+3 & \\
\quad 2x^3+6x &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x & x^2+3 \\
\cline{2-2}
x^3+3x & x \\
\quad 0 &
\end{array}$$

Промежуточное деление
$a(x)=b(x)\cdot c(x)+r(x)$
Введите промежуточное делимое
$a(x)$ и слагаемое частного $c(x)$.
Запишите $c(x)=2$,
$b(x)\cdot c(x)=2\,x^3+6\,x$
$r(x)=x^2+3$.

Рис. 6

Единственным ограничением при решении подобных примеров может оказаться ограниченность места на экране. Это может заставить пользователя прибегать к записям промежуточных данных на бумаге.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов н/Д: Легион, 2015.

ОБУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНО-АНИМАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СРЕДЕ *ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА*

В.Р. Майер, Е.О. Манченкова, Т.А. Бушаева

Дидактические принципы обучения, системы динамической геометрии, Живая математика, компьютерно-анимационный метод.

В статье рассматривается теория и методика обучения геометрии с использованием среды *Живая математика*, в первую очередь ее анимационные возможности. Развивается предложенный С.В. Лариным анимационно-геометрический метод обучения геометрии. Основные дидактические принципы этой теории иллюстрируются конкретными примерами.

INSTRUCTION IN GEOMETRY WITH THE USE OF COMPUTER- ANIMATED SIMULATION ON MEDIUM *LIVING MATHEMATICS*

V.R. Mayer, E.O. Manchenkova, T.A. Bushaeva

The didactic principles of instruction, the system of dynamic geometry, Living mathematics, computer-animated method.

In the article is examined the theory and the procedure of instruction in geometry with the use of a medium *Living mathematics*, first of all its animated possibilities. Is developed, proposed S.V. Larin the animated-geometric method of instruction in geometry. The basic didactic principles of this theory are illustrated by concrete examples.

Термин «анимация» в переводе с латинского означает «душа». Применение анимационных возможностей современных компьютерных программ вполне соответствует стремлению педагогов-новаторов не только повысить качество обучения, но и вложить весь свой интеллект, всю свою душу в обучение молодого поколения. Лидирующую позицию здесь занимает обучение такой абстрактной дисциплине, как «Математика».

Большое внимание внедрению компьютерной анимации в обучение школьной и вузовской математике уделяется в Красноярском государственном педагогическом университете им. В.П. Астафьева. Профессором С.В. Лариным и его единомышленниками подготовлены и опубликованы более десятка статей (см. материалы I–V Всероссийских научно-методических конференций «Информационные технологии в математике и математическом образовании» 2012–2016 гг.) и учебное пособие [2], которые посвящены так называемым анимационно-геометрическим методам обучения алгебре с использованием системы динамической геометрии *GeoGebra*. Цель настоящей статьи – сформулировать и обосновать основные положения методики обучения геометрии на основе анимационных возможностей среды *Живая математика*, которые имеют общедидактический характер.

Полностью оставаясь в рамках действия общедидактических принципов обучения математике [1], сформулируем и обоснуем дополнительно три дидактических положения методики обучения геометрии с использованием анимационно-геометрических методов, которые носят общий характер и не зависят от выбора конкретного раздела геометрии, его содержания, методов и средств обучения. Под анимационно-геометрическим методом, вслед за С.В. Лариным, будем понимать «решение на экране компьютера математической задачи с помощью геометрического моделирования и анимации» [3].

П е р в о е п о л о ж е н и е. В [4] отмечается, что «Принцип наглядности вытекает из сущности процесса восприятия, осмысления и обобщения учащимися изучаемого материала. На отдельных этапах изучения учебного материала наглядность выполняет различные функции. Когда учащиеся изучают внешние свойства предмета, то рассматривая предмет или его изображение, они могут сами непосредственно извлекать знания. Если же дидактической задачей является осознание связей и отношений между свойствами или между предметами и формирование научных понятий, то средства наглядности служат лишь опорой для осознания этих связей, конкретизируют и иллюстрируют эти понятия».

Практикой обучения разработаны специальные средства, способствующие реализации этого принципа. Кроме классических средств (модели геометрических фигур, плакаты, учебные кино и видеофильмы, презентации и т.д.), в последние годы применяются средства обучения, связанные с использованием информационных технологий. Из большого количества разработанных типов программных средств, направленных на обучение математике, в школе «прижилось» не более трех-четырех, и среди них бесспорный лидер – системы динамической геометрии (СДГ) или интерактивные геометрические среды (ИГС). Главным дидактическим достоинством этих сред является динамика (движение), которая реализуется, в том числе, средствами компьютерной анимации.

Наличие возможности создания эффекта анимации предоставляет СДГ целый ряд преимуществ по сравнению с традиционными средствами наглядности. Особо остановимся на одном из них. В учебном пособии [1] отмечается, что «излишнее увлечение наглядностью обучения может привести к нежелательным результатам. Так, например, чрезвычайно полезное применение различных моделей фигур на первых уроках стереометрии может привести в дальнейшем к торможению развития пространственного воображения». По мнению авторов, это может произойти, если «при изучении стереометрии конкретная наглядность (рассмотрение пространственных моделей) не будет постепенно уступать место «абстрактной наглядности» (рассмотрению плоских чертежей)». Соглашаясь с беспокойством авторов, отметим, что стереометрические чертежи в среде *Живая математика* являются плоскими динамическими чертежами, т.е. относятся к моделям не конкретной, а «абстрактной наглядности».

При их создании ученик осуществляет все построения, которые он выполняет традиционными чертежными инструментами в школьной тетради. Отличие от рисунка на листе бумаги заключается в том, что на рабочем поле *Живой математики* появляется чертеж, в который «вшит» алгоритм построения, т.е. на самом деле результатом виртуального построения является не один чертеж, а целое семейство чертежей. Это позволяет ученику при необходимости изменять положение независимых объектов чертежа и получать новый чертеж, в котором сохраняются все заложенные при построении отношения между элементами чертежа (параллельность и перпендикулярность, принадлежность точек линиям, деление отрезков в данном отношении и т.д.).

Такая возможность создания с помощью среды *Живая математика* динамических чертежей усиливает общедидактический принцип наглядности. Назовем это положение методики обучения геометрии на основе использования анимационных возможностей систем динамической геометрии *принципом усиления основного дидактического принципа наглядности в обучении за счет анимационных возможностей средства обучения*.

В т о р о е п о л о ж е н и е. Одна из первых серьезных попыток воспользоваться достижениями науки и техники для визуализации эффекта трансформации геометрических конфигураций из одного состояния в другое с целью повышения качества обучения математике была предпринята американцем Генри Шером в 1945 г. Он предложил использовать в процессе обучения возможности кинематографии для получения изображений движущихся объектов. Немногочисленные эксперименты, проведенные в то время, показали, что результат усвоения учащимися абстрактного материала существенно повышался. Однако создание таких фильмов учебного характера оказалось трудоемким и финансово затратным мероприятием. По этой причине использование учебных кино, а позднее и видеофильмов, не получило широкого распространения среди педагогов.

Появившиеся в 1960-е гг. электронно-вычислительные машины, а позднее персональные компьютеры позволили существенно снизить временные и трудовые издержки на создание эффекта анимации. Насколько сложно в системе динамической геометрии создать эффект «оживления» геометрических объектов, позволяющий понять присущие этим объектам свойства, увидеть нужную закономерность, заметить неожиданный подход к решению задачи?

В среде *Живая математика* существует несколько уровней сложности создания эффекта анимации, которые в большей степени зависят не от технологических возможностей и интерфейса среды, а от типа задачи, от уровня сложности ее математической составляющей (геометрической «начинки»), от тех целей, которые стоят перед учителем и обучающимся.

Рассмотрим в качестве первого примера следующую задачу:

З а д а ч а 1. *Какую линию вычертит точка M в результате вращения отрезка OM постоянной длины R вокруг точки O?*

Для создания эффекта анимации, иллюстрирующей вычерчивание этой линии, достаточно, во-первых, построить окружность c_1 с центром O и точкой A на окружности (третья сверху кнопка на вертикальной панели инструментов), выбрать на c_1 произвольную точку M, соединить O и M отрезком OM, обозначить его R (рис. 1 а), во-вторых, спрятать точку A и окружность c_1 (рис. 1 б) и, наконец, в-третьих, в меню команд «Вид» задать для точки M сначала опцию «Оставлять след», затем опцию «Анимация». На экране точка M начнет вычерчивать окружность (на рис. 1 (в) представлен один из стоп-кадров анимации).

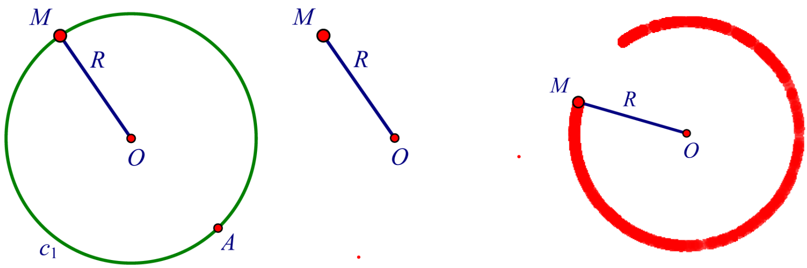


Рис. 1 (а, б, в)

Сформулируем вторую задачу, имеющую более высокий уровень сложности, которая взята нами из школьного учебника (И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия 7–9, М., 2009). Его авторы предлагают изучать эллипс, гиперболу и параболу в 8 классе.

З а д а ч а 2. *Даны две кнопки, карандаш и нить со связанными концами. Кнопки прикрепляем к листу бумаги, рас-*

полагая их внутри области, ограниченной нитью. Кончиком карандаша натягиваем нить и перемещаем карандаш так, чтобы нить оставалась в натянутом состоянии. Какую линию вычертит карандаш в результате его непрерывного перемещения?

Создание эффекта анимации, иллюстрирующей вычерчивание искомой линии, возможно по следующему алгоритму:

1) заранее подготовим собственные инструменты: «эллипс по фокусам», «кнопка» и «карандаш» (они могут понадобиться нам в дальнейшем при решении аналогичных задач),

2) воспользовавшись инструментом «эллипс по фокусам», построим эллипс и его фокусы F_1, F_2, поместим на эллипсе точку M;

3) «прикрепим» к точке M кончик карандаша (для этого используется собственный инструмент «карандаш»),

4) соединим отрезками фокусы и точку M (тем самым создадим эффект натянутой нити со связанными концами),

5) зададим для точки M опции «оставлять след», создадим анимационную кнопку «вычерчивание эллипса»,

6) спрячем изображение эллипса, имя точки M, и, нажав на кнопку «вычерчивание эллипса», запустим анимацию. На рабочем поле кончик карандаша начнет вычерчивать эллипс. На рис. 2 представлены три стоп-кадра (а), (б) и (в) соответствующей анимации.

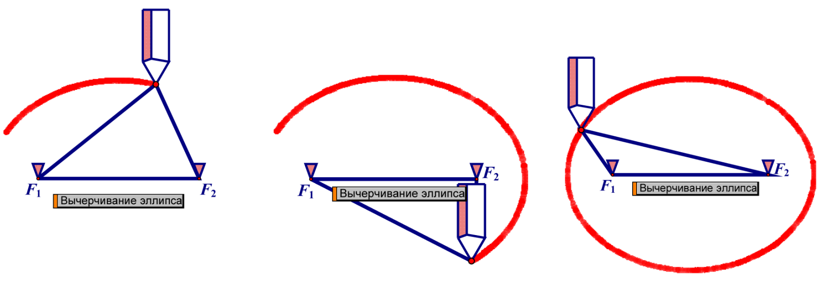


Рис. 2 (а, б, в)

Решение большинства задач, связанных с созданием эффекта анимации, содержит элементы творческой и исследовательской деятельности. Для ее реализации необходимо хорошо знать геометрические свойства исследуемого объекта, познакомиться со всеми нюансами его построения с помощью подходящих инструментов, в частности циркуля и линейки. Поэтому самостоятельное создание учеником эффекта анимации означает глубокое его проникновение в существо проблемы, формирование на деятельностной основе у обучающегося компетенций исследователя и экспериментатора.

В профессиональном стандарте педагога [5] перечислены необходимые умения, которыми должен владеть учитель математики. Среди них выделим следующее: «Учитель должен владеть умением совместно с обучающимся создавать и использовать наглядные представления математических объектов и процессов с помощью компьютерных инструментов на экране». С нашей точки зрения, обучение учеников самостоятельному созданию и использованию компьютерных анимациий различных процессов геометрического характера будет способствовать более качественному, заинтересованному и результативному изучению школьниками геометрии.

Назовем это положение методики обучения геометрии на основе использования анимационных возможностей систем динамической геометрии *принципом самостоятельности создания обучающимися эффекта анимации*.

Третье положение. Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования ориентирует учителя математики на развитие способностей учеников к исследовательской деятельности. Формирование исследовательских умений учащихся представляет собой одну из основных задач современной школы. Все системы динамической геометрии максимально ориентированы на проведение экспериментов и исследований при обучении математике, поддержку проектной деятельности, развитие у учащихся навыков восприятия математических объектов, проведения с ними активных действий. Поскольку среда *Живая математика* позволяет эффективно реализовать исследовательский и экспериментальный компонент обучения математике средствами компьютерной анимации, то использование анимации при решении геометрических задач исследовательского типа представляет собой важнейшее дидактическое положение разрабатываемой нами методики. Назовем это положение методики обучения геометрии на основе использования анимационных возможностей систем динамической геометрии *принципом использования анимации при решении задач исследовательского типа*.

В качестве примера реализации этого принципа рассмотрим следующую исследовательскую задачу на существование:

З а д а ч а. *Каждый из двух равных отрезков разбили на две части. Выясните, всегда ли среди полученных четырех частей существует три, из которых можно составить треугольник?*

Для формулировки гипотезы построим на рабочем поле *Живой математики* динамический чертеж и воспользуемся анимационными возможностями среды. Возможен следующий алгоритм построения динамического чертежа:

1. Построим два отрезка равной длины (сначала строится первый отрезок, затем произвольный луч, на котором с помощью циркуля откладывается второй отрезок, равный первому).

2. Поместим на первый отрезок произвольную точку, которая разобьет его на две части, обозначим их a и b (спрячем исходный отрезок и изобразим разными цветами отрезки-части a и b). Прикрепим к точке Ползунок.

3. Как и в предыдущем случае, поместим на второй отрезок произвольную точку, полученные две части обозначим c и d (также спрячем исходный отрезок и изобразим c и d). Прикрепим к точке Ползунок.

4. Создадим собственный инструмент «Треугольник по трем сторонам», который позволяет, подсветив последовательно три данных отрезка, получить готовый треугольник, стороны которого равны данным.

5. Создадим динамический чертеж для проведения экспериментальных исследований: выберем инструмент «Треугольник по трем сторонам», подсветим последовательно части a, b и c и построим ΔABC, в котором BC=a, AC=b, AB=c (рис. 3); аналогично для частей a, b и d строим ΔABD, для частей a, c и d – ΔACD, и, наконец, для частей b, c и d – ΔBCD.

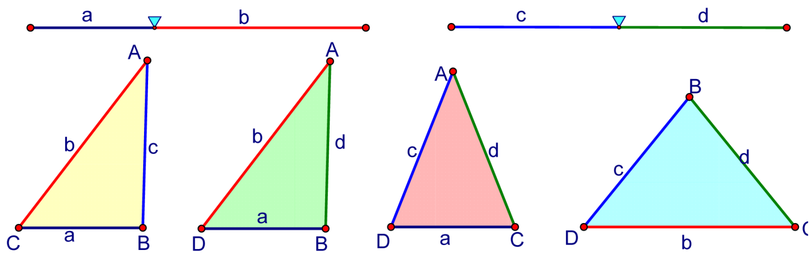


Рис. 3

Приступим к проведению исследовательского эксперимента. Зафиксируем некоторое положение Ползунков.

Как видно из рис. 3, для указанных разбиений данных отрезков во всех четырех случаях существуют соответствующие треугольники.

Продолжим эксперимент. Сдвинем Ползунок на втором отрезке вправо, увеличив тем самым часть c и уменьшив d (рис. 4). На динамическом чертеже останется лишь три треугольника, треугольник ACD исчезнет, что явится результатом того, что сумма сторон a и d окажется меньше c.

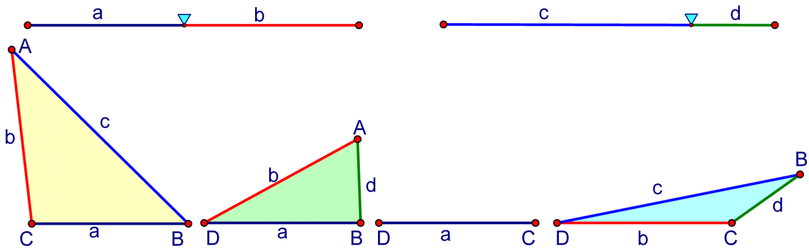


Рис. 4

Сдвинем Ползунок на второй прямой еще правее, увеличив c. Это приведет к исчезновению очередного треугольника BCD (рис. 5).

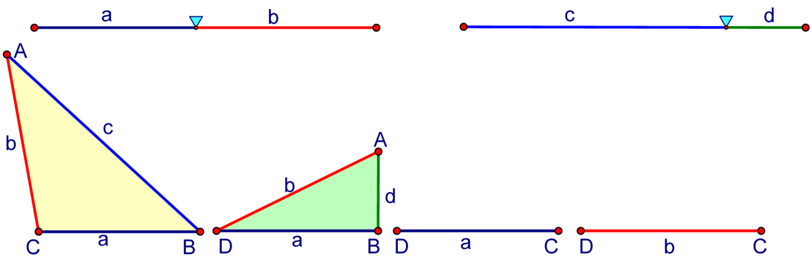


Рис. 5

Попытаемся так расположить Ползунки, чтобы на рабочем поле исчез еще один треугольник. Если проанализировать динамический чертеж, представленный на рис. 5, то можно заметить, что ситуация с треугольником ABD критическая: дальнейшее уменьшение длины части d может привести к тому, что сумма длин частей a и d окажется меньше части b. Ясно, что это уменьшение должно быть таковым, чтобы оно не повлекло за собой уменьшение a.

Очевидно, что если мы продолжим сдвигать Ползунок на втором отрезке вправо, то получим искомый результат: указанное смещение Ползунка приведет к исчезновению еще одного треугольника ABD (рис. 6).

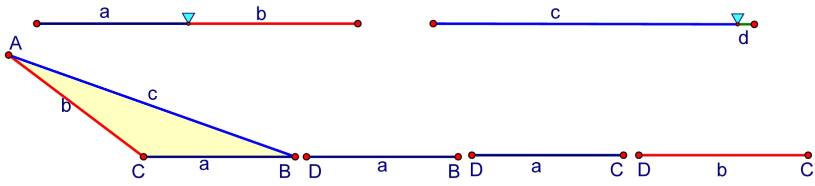


Рис. 6

Любые попытки так расположить Ползунки, чтобы исчезли все четыре треугольника, не приведет к успеху. Анализируя геометрическую конфигурацию на рис. 6, можно заметить, что никакие дальнейшие уменьшения части d не смогут привести к такому увеличению с, чтобы исчез и треугольник ABC. И понятно, по какой причине. Дело в том, что длина части с строго меньше длины второго отрезка, равного $c + d$. Но по условию задачи $c + d = a + b$ (два данных отрезка имеют равные длины), отсюда следует, что $c < a + b$. Ясно также, что в силу выбора с как максимально большей части, каждая из частей первого отрезка будет меньше суммы второй части этого отрезка и части с.

Итак, использование анимационных возможностей позволило не только сформулировать гипотезу о том, что среди полученных четырех частей всегда существует три, из которых можно составить треугольник. Оно предоставило нам и идею доказательства этой гипотезы, которая заключается в следующем:

1. Среди четырех частей всегда существует такая, что ее длина будет не меньше длин трех остальных. Обозначим эту часть через с.

2. Рассмотрим теперь отрезок, который не содержит часть с, обозначим через a и b – части, лежащие на этом отрезке.

3. Очевидно, что части a, b и c являются сторонами некоторого треугольника, т.к. $c < a + b$, $a < b + c$ (т.к. $a \le c$) и $b < a + c$ (т.к. $b \le c$).

Остальные положения методики обучения геометрии с использованием анимационных возможностей систем динамической геометрии ориентированы на обучение конкретным темам курса геометрии, на решение определенных типов задач и зависят от содержания того или иного раздела геометрии. В качестве примера перечислим без обоснования некоторые принципы методики обучения геометрии в 7–9 классах на основе использования анимационных возможностей систем динамической геометрии.

Принцип использования анимации для визуализации преобразований симметрии, поворота, параллельного переноса и подобия плоскости.

Принцип использования анимации при решении задач на нахождение множества точек плоскости, удовлетворяющих определенному условию.

Принцип использования анимации при решении задач на вычисление площадей и разрезание.

Принцип использования анимации при решении задач реальной геометрии.

Подводя итог, отметим, что использование при обучении геометрии анимационных возможностей системы динамической геометрии *Живая математика* позволяет мотивировать обучающихся на решение геометрических задач, проведение экспериментов и исследований, реализацию творческих проектов с геометрическим содержанием.

Библиографический список

1. Колягин Ю.М., Оганесян В.А., Саннинский В.Я., Луканкин Г.Л. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. институтов. М., Просвещение, 1975. 462 с.
2. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов н/Д: Легион, 2015. 192 с.

3. Ларин С.В. Анимационно-геометрический метод в алгебре // Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Красноярск, 2015. С. 38–42.
4. Педагогическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1964. Т. 1. 832 с.
5. Профессиональный стандарт педагога (утверждён приказом Министерства труда и социальной защиты РФ от 18 октября 2013 г., № 544н.), 2013.

ОБУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПОСТРОЕНИЯМ НА ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СРЕДЫ *ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА*

В.Р. Майер, О.А. Кузьмина, В.В. Анкова

Геометрические построения на плоскости, компьютерная среда Живая математика, виртуальные инструменты, дидактические возможности.

В статье исследуются дидактические возможности компьютерной среды *Живая математика*, которые появляются у педагога в результате использования при обучении геометрическим построениям на плоскости этой русскоязычной версии популярной американской обучающей программы *Geometer' s Sketchpad*.

INSTRUCTION IN GEOMETRIC CONSTRUCTIONS ON THE PLANE WITH THE USE OF POSSIBILITIES OF MEDIUM *LIVING MATHEMATICS*

V.R. Mayer, O.A. Kuzmina, V.V. Ankova

Geometric constructions on the plane, computer medium Living mathematics, virtual tools, didactic possibilities.

In the article are investigated the didactic possibilities of the computer medium *living mathematics*, which appear in the teacher as a result of use with the instruction in geometric constructions at the plane of this Russian-language version of the popular American training program *Geometer' s Sketchpad*.

Пополним набор аксессуаров, традиционно используемый при решении конструктивных задач (лист бумаги, ручка, карандаш, циркуль и линейка), динамическими листами, виртуальными циркулем и линейкой, другими процедурами, функциями и опциями системы динамической геометрии *Живая математика*. Появится ли у преподавателя в результате этого дополнительный электронный ресурс в обучении древнейшей математической дисциплине, каковой является конструктивная геометрия? Если да, то будет ли он способствовать формированию навыков решения задач на построение циркулем и линейкой? И, последнее, сохранятся ли у обучающегося сформированные навыки, если он в дальнейшем откажется от виртуальной «зависимости»?

Классическая методика решения конструктивных задач рекомендует использовать схему решения, состоящую из следующих четырех этапов: анализ; построение; доказательство и исследование. Известно, что первый этап является основным, т.к. качественно проведенный анализ создает основу для успешной реализации остальных этапов и, следовательно, является в определенном смысле гарантом верного решения задачи.

Цель данной статьи – исследовать дидактические возможности виртуальной среды *Живая математика* [1], которые появляются у педагога в результате использования этого электронного ресурса при обучении решению задач на построение циркулем и линейкой на этапе анализа.

1. Основная цель анализа заключается в установлении зависимости между элементами искомой фигуры и данных фигур. Обнаруженная зависимость должна привести к нахождению способа построения искомой фигуры. Для этого от руки строится чертеж-набросок, который рекомендуется начинать с искомой фигуры, поочередно пририсовывая к ней данные фигуры таким образом, чтобы они находились в за-

данных отношениях с искомой. В соответствии с принципом наглядности желательно максимально визуализировать данные и искомые фигуры, а также заданные условием задачи отношения между этими фигурами.

Зачастую определенная небрежность и неряшливость в чертеже-наброске, а порой и элементарное незнание основных фактов планиметрии, приводит к неверным выводам и, как следствие, к ошибке. Так, например, при построении треугольника по высоте, биссектрисе и медиане, проведенным из одной вершины (рис. 1), учащиеся нередко изображают эти отрезки не в том порядке, в каком они расположены на самом деле (например, медиану располагают между высотой и биссектрисой), что приводит к неверному результату. *Живая математика*, которая с компьютерной скрупулезностью позволяет строить верные изображения середин отрезков, биссектрис углов, высот треугольников и т.д., помогает избежать подобных ошибок. В связи с этим сформулируем первое дидактическое преимущество, которое предоставляет среда *Живая математика* в результате ее использования на этапе анализа.

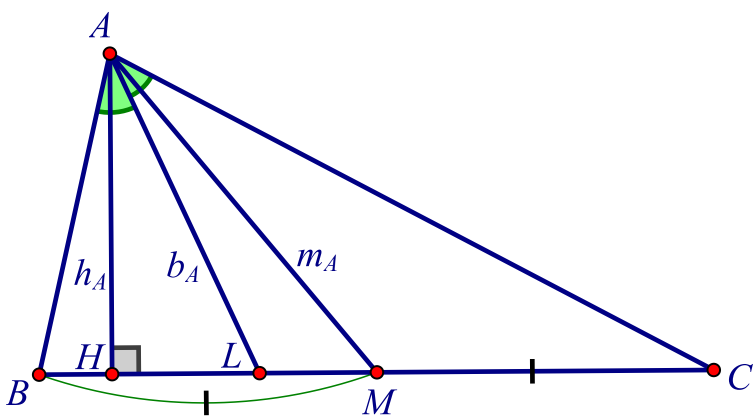


Рис. 1

Живая математика предоставляет на этапе анализа возможность построения качественного, точного и верного чертежа, изображающего данные и искомые фигуры, удовлетворяющие всем условиям задачи.

2. Нередко при проведении анализа первый вариант чертежа-наброска не позволяет увидеть связь между данными и искомой фигурами по причине неудачного расположения некоторых фигур, входящих в состав чертежа. Необходимо отказаться от этого варианта и выполнить второй набросок, а возможно, и третий, что отнимает порой достаточно много времени. Рассмотрим простой пример: при нахождении центра окружности, описанной около треугольника, точка пересечения серединных перпендикуляров к двум сторонам треугольника оказалась далеко за пределами листа бумаги (например, рис. 2 (а)).

Живая математика при построении чертежа не только визуализирует результат в виде рисунка на динамическом листе, но и «запоминает» весь алгоритм его создания. Это позволяет с помощью мыши изменить положения или размеры исследуемых фигур, выбрать нужный ракурс. В нашем случае можно ухватиться мышкой за вершину B и «приподнять» ее выше, растянув одновременно стороны AB и BC, рис. 2 (б). Несмотря на деформацию сторон, серединные перпендикуляры к ним будут продолжать оставаться таковыми.

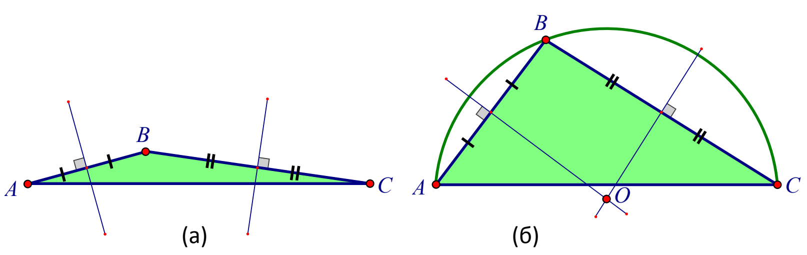


Рис. 2

В связи с этим сформулируем следующее дидактическое преимущество использования *Живой математики* на этапе анализа.

Живая математика позволяет в процессе проведения анализа изменять положение и (или) размеры данных и искомых фигур или их частей так, чтобы, с одной стороны, не нарушались заданные условием задачи отношения между объектами конфигурации, а с другой – искомые геометрические зависимости оказались визуально более четкими и явными.

3. Проводя анализ задачи с использованием методов вспомогательных фигур, геометрических преобразований или других методов, нередко возникает потребность выполнить дополнительные построения, которые не всегда оказываются удачными. При реализации второй и последующих попыток анализируемая геометрическая конфигурация пополняется неудачными вспомогательными фигурами, которые, заслоняя часть чертежа, мешают нахождению верного решения задачи на построение.

Встроенные в среду *Живая математика* вспомогательные опции и функции позволяют избежать превращения анализируемого чертежа-наброска в геометрический коллапс с большим числом дополнительных фигур и построений, оказавшихся невостребованными. Этой цели может служить опция, позволяющая «спрятать» (или сделать «невидимым») любой выделенный пользователем геометрический объект. *Живая математика* предоставляет также возможность в случае построения неудачной вспомогательной фигуры использовать стандартную для многих программных средств опцию «откатывания» назад на любое число шагов.

Итак, сформулируем очередное дидактическое преимущество использования *Живой математики* на этапе анализа.

Живая математика предоставляет возможность выполнять на этапе анализа любое количество дополнитель-

ных построений, отказываясь без всяких негативных чертежных последствий от тех из них, которые оказались неудачными.

4. Одним из самых распространенных методов решения конструктивных задач является метод геометрических мест или, как его еще называют, метод пересечения множеств. Овладение умением эффективно применять этот метод существенно зависит от следующих факторов:

во-первых, от умения находить на анализируемом чертеже-наброске точку и два свойства, которыми обладает найденная точка;

во-вторых, от умения строить геометрические множества на плоскости по заданным свойствам его точек.

Так, например, решение задачи на построение треугольника по основанию, высоте и углу при вершине, противолежащей основанию, сводится к построению вершины треугольника, находящейся на заданном расстоянии от основания (первое условие), и такой, что основание треугольника «видно» из этой точки под заданным углом (второе условие).

Живая математика предоставляет возможность построить два множества, одно из которых удовлетворяет первому условию (две параллельные прямые), а другое – второму условию (две открытые дуги, опирающиеся на основание). Более того, обучающийся может самостоятельно создать в *Живой математике* собственные инструменты построения необходимых ему множеств с заданными свойствами их точек. У педагога же есть возможность с помощью *Живой математики* донести до сознания своего подопечного необходимую информацию о том, в каком направлении надо двигаться, чтобы построить искомое множество.

В качестве примера рассмотрим построение в среде *Живая математика* множества точек, из которых данный отрезок виден под данным углом. Построим на рабочем поле *Живой* *математики* отрезок AB и некоторый угол CDE. Измерим величину этого угла. Предположим, что M – одна из искомых точек, т.е. углы AMB и CDE равны (рис. 3). Попытаемся реализовать идею построения M как точки пересечения произвольного луча с началом в точке A и луча, исходящего из B и образующего с лучом BA угол, равный $180^\circ - \angle BAM - \angle AMB$. Луч, исходящий из A, мы зададим его началом, т.е. A, и произвольной точкой F, лежащей на окружности с центром A и радиуса AB. Поскольку сумма углов при вершинах A и M в треугольнике ABM не может превышать 180°, то угол BAM меньше либо равен $180^\circ - \angle AMB = 180^\circ - \angle CDE$. По этой причине для выбора точки F ограничимся дугой BB' окружности, где B' – образ B при повороте плоскости вокруг A на угол $180^\circ - \angle CDE$ против движения часовой стрелки (рис. 4). Выберем на дуге BB' произвольную точку F, построим луч AF, измерим величину угла BAF. Найдем с помощью команды «Вычислить…» разность $180^\circ - \angle CDE - \angle BAM$ и повернем точку A вокруг B по часовой стрелке на этот угол (перед величиной угла поворота надо поставить знак минус). Построим луч BA' и точку M его пересечения с лучом AF. Для контроля измерим величину угла AMB и убедимся в том, что она равна величине данного угла.

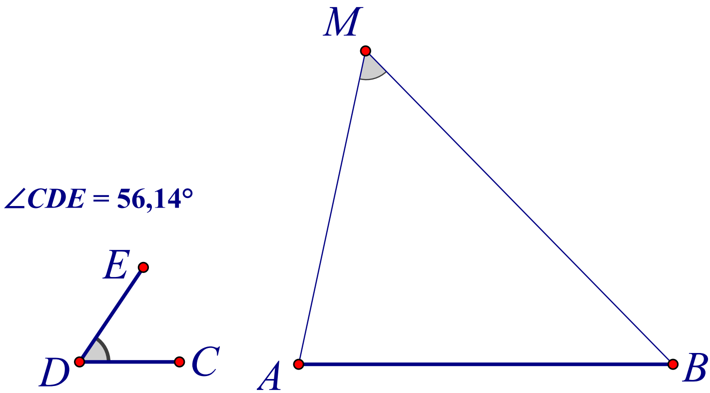


Рис. 3

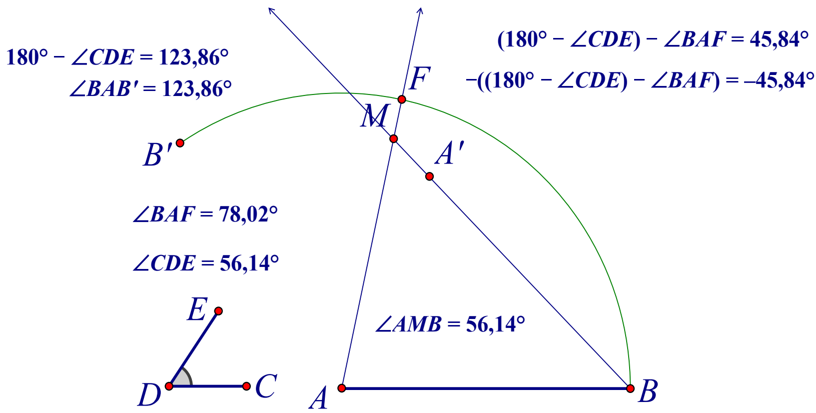


Рис. 4

Зададим для точки М опцию «оставлять след» и начнем с помощью мыши перемещать точку F. На рабочем поле появится изображение искомой дуги, которую вычертит точка М. Поскольку в другой полуплоскости относительно прямой АВ будет находиться вторая дуга искомого множества, то построим точку М', симметричную М, относительно АВ.

Для окончательного построения искомого множества подсветим пару точек F и М и обратимся к опции «геометрическое место». На рабочем поле появится изображение одной дуги. После аналогичной процедуры с парой точек F и М¢ на экране появится изображение второй дуги. Спрячем все дополнительные построения и оставим только данные фигуры и построенное множество (рис. 5).

Итак, сформулируем очередное дидактическое преимущество использования *Живой математики* на этапе анализа.

Живая математика предоставляет на этапе анализа возможность эффективно строить множества точек, удовлетворяющие тому или иному условию (геометрические места), создавать собственные инструменты построения таких множеств.

5. Одним из методов, который позволяет находить оригинальные решения задач на построение циркулем и линейкой, является метод геометрических преобразований. Умение использовать этот метод зависит не столько от понимания сущности преобразования множества вообще, сколько от знания основных свойств конкретных движений, подобий, аффинных и проективных преобразований, от умения строить образы фигур под действием, например, поворота плоскости, гомотетии и инверсии, от владения навыками устанавливать связь между искомой фигурой и тем образом, который появляется на анализируемом чертеже-наброске в результате действия, допустим, подходящей осевой симметрии.

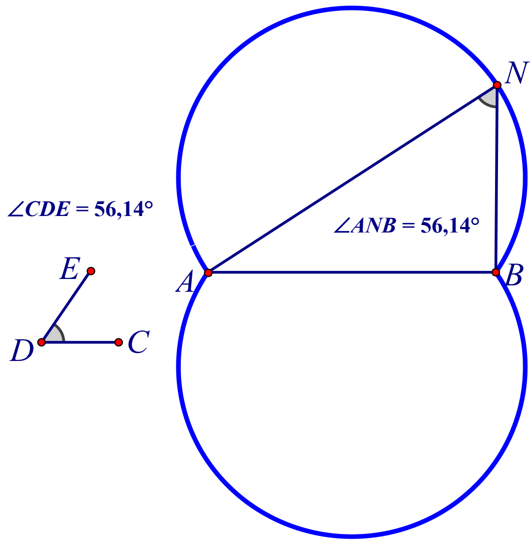


Рис. 5

Живая математика с ее уникальными функциями и опциями, позволяющими не только задавать классические преобразования плоскости и пространства, которые встречаются в школьном и вузовском курсах геометрии, но и создавать собственные преобразования, предоставляет возможность строить вспомогательные фигуры, находить искомую точку или отрезок, определять оптимальный путь, приводящий к решению задачи на построение циркулем и линейкой.

В качестве примера рассмотрим задачу (№ 359) школьного курса геометрии [2], в которой предлагается через данную точку A, лежащую вне данной окружности с центром O и радиуса R, провести прямую, пересекающую окружность в точках B и C, таких, что AB = BC. При решении этой задачи учащиеся имеют возможность использовать лишь тот метод, с которым они познакомились в 7 классе, т.е. метод пересечения множеств. Однако найти точку, к построению которой сводится задача, достаточно сложно. Проведем анализ с использованием *Живой математики*.

Построим динамический чертеж (рис. 6), на котором изобразим данную окружность Окр(O, R), данную точку A, лежащую вне окружности, и искомые точки B и C. Если бы эта задача рассматривалась после изучения параллелограмма, то используя его признак, учащиеся могли заметить, что треугольник AOC достраивается до параллелограмма AOCD с помощью построения вспомогательной точки D, симметричной O относительно B. По свойству параллелограмма AD = OC = R и в соответствии с построением, OD = 2OB = 2R. Таким образом, искомая точка O находится на пересечении окружности с центром O и радиуса 2R и окружности с центром A и радиуса R. Однако в 7 классе увидеть это дополнительное построение не просто. Поэтому авторы вынуждены давать указание в ответе к этой задаче.

По нашему мнению, целесообразно рассмотреть решение этой задачи в 8 классе, после изучения подобных треугольников и центрально-подобных (гомотетичных) фигур. В этом случае анализ будет выглядеть более естественно и вполне соответствовать изучаемой теме.

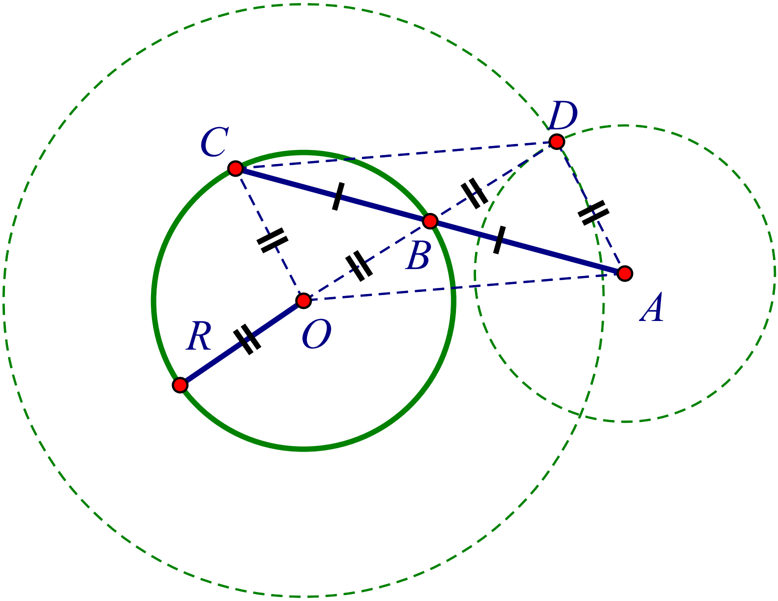
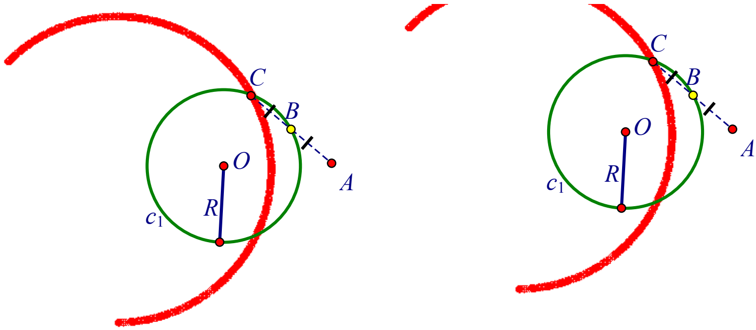


Рис. 6

Изобразим данные окружность и точку A вне ее, поместим на окружность произвольную точку B, на луче AB от точки B отложим отрезок BC, равный AB. Подберем (пока на «глаз») с помощью мыши такие положения точки B, чтобы C оказалась на окружности. Таких точек может оказаться не более двух. Для их построения с помощью циркуля и линейки необходимо ответить на следующий вопрос: какую линию вычертит точка C, если B будет непрерывно перемещаться по данной окружности?

Подсветим C и зададим для нее опцию «Оставлять след». Начнем мышкой перемещать B по данной окружности Окр(O, R). Одновременно будем наблюдать за точкой C, которая начнет вычерчивать линию, похожую на дугу окружности (рис. 7 а). После того как B вернется в исходную позицию, точка C вычертит линию, каждая точка которой, как нетрудно показать, отстоит от O' на расстоянии 2R (O' – образ O при гомотетии с центром A и коэффициентом 2). Это означает, что вычерчиваемая точкой O линия представляет собой окружность с центром O' и радиуса 2R (рис. 7 б). Искомая точка C (на рисунке их две: C_1 и C_2) будет лежать на пересечении окружностей Окр(O, 2R) и Окр(A, R). Отметим, что на рис. представлен динамический чертеж, на котором построено изображение окружности c_1' с помощью опции «Гомотетия…» среды *Живая математика*, центр гомотетии – A, коэффициент – 2.



а) б)

Рис. 7

В связи с этим сформулируем последнее дидактическое преимущество использования среды *Живая математика* на этапе анализа.

Живая математика предоставляет возможность при решении задач методом геометрических преобразований на этапе анализа построить вспомогательную фигуру, представляющую собой образ некоторой фигуры или ее части под действием того или иного геометрического преобразования.

Подводя итог, отметим, что наш опыт обучения решению задач на построение циркулем и линейкой в основной школе и педагогическом вузе свидетельствует о следующем. В результате использования виртуальных инструментов и опций *Живой математики* у преподавателя появляется дополнительный мощный ресурс обучения, который способствует формированию у школьников и студентов навыков решения конструктивных задач. Более того, сформированные навыки оказались весьма устойчивыми. Выборочное тестирование показало, что они сохраняются вне зависимости от того, используют учащиеся в дальнейшем электронные средства обучения или решают задачи на построение только традиционными инструментами: циркулем и линейкой.

Библиографический список

1. Живая математика 5.0: Сборник методических материалов. М.: ИНТ, 2013. 205 с.
2. Атанасян Л.С. Геометрия, 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. М.: Просвещение, 2012. 384 с.

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРОГРАММЫ *ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ* ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ»

Г.Н. Гиматдинова

Программа Живая геометрия, графики тригонометрических функций, преобразование графиков функций.

В статье рассматриваются возможности компьютерной программы *Живая геометрия* на уроках алгебры и начал математического анализа в рамках изучения темы «Преобразование графиков тригонометрических функций». Приводятся примеры функций, графики которых строятся с помощью программы.

ABOUT THE OPPORTUNITIES OF THE PROGRAM *LIVING GEOMETRY* AT THE STUDY OF THE THEME «TRANSFORMING SCHEDULES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS»

G.N. Gimatdinova

The program Living geometry, graphs of trigonometric functions, transformation of graphs of functions.

The article considers the possibility of a computer program *Living geometry* on the lessons of algebra and mathematical analysis within the framework of the study of the topic «Transformation of graphs of trigonometric functions». Examples of functions are given, the graphs of which are built using the program.

Стремительный переход от постиндустриального к информационному обществу, увеличение роли информации и информационных технологий во всех сферах жизни общества заставляет пересмотреть место компьютера в образовательном процессе. Уже сейчас сложно представить себе урок без применения информационно-коммуникационных технологий.

Большую часть всей информации человек получает с помощью зрения, поэтому представление математических данных с помощью визуализации способствует существенному увеличению скорости их понимания. Для установления взаимосвязи аналитических и графических форм представления математической информации возможно использование программы *Живая геометрия* [1]. Программа позволяет создавать красочные чертежи, с которыми можно работать в режиме онлайн.

У пользователей, незнакомых с *Живой геометрией,* может сложиться мнение, что эта среда полезна только на уроках геометрии при графических построениях. Однако ее применение возможно и на уроках алгебры и начал анализа, например, при изучении преобразования графиков тригонометрических функций.

Тригонометрические функции являются одним из сложнейших разделов школьного курса математики. В частности, большинство учащихся сталкиваются с трудностями преобразования графиков тригонометрических функций. Рассмотрим применение программы *Живая геометрия* на уроках по сформулированной теме. В рамках данной статьи ограничимся двумя тригонометрическими функциями $y = \sin x$, $y = \cos x$. Программная среда будет выступать в роли помощника учителя, позволяя быстро создавать «живые» плакаты и вносить движение при изучении темы.

Основной дидактической целью уроков является формирование навыков построения графиков тригонометрических функций, используя геометрические преобразования, в том числе тригонометрических функций с модулем.

Перед изучением преобразования графиков тригонометрических функций необходимо обобщить случаи преобразования графиков, изученные на уроках в основной школе [4]:

1. $y = f(x) + m$ – график перемещается на m единиц вверх при $m > 0$ и вниз при $m < 0$, т.е. изменяется значение функции на m единиц;
2. $y = k * f(x)$ – график растягивается вдоль оси ординат при $|k| > 1$ и сжимается при $|k| < 1$, т.е. изменяется значение функции в k раз;
3. $y = f(x + m)$ – график перемещается на m единиц вправо при $m > 0$ и влево при $m < 0$, т.е. изменяется значение аргумента на m единиц;
4. $y = f(kx)$ – график сжимается вдоль оси абсцисс при $|k| > 1$ и растягивается при $|k| < 1$, т.е. изменяется значение аргумента в k раз;

5. $y = -f(x)$ – частный случай второго случая: график функции $y = -f(x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси x .

6. $y = f(-x)$ – частный случай четвертого случая: график функции $y = f(-x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси y.

7. $y = |f(x)|$ – части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси x и на оси x, остаются без изменения, а лежащие ниже оси x – симметрично отражаются относительно этой оси (вверх).

8. $y = f(|x|)$ – часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси y, удаляется, а часть, лежащая правее оси y, остается без изменения и симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика, лежащая на оси y, остается неизменной.

Рассмотрим преобразование графика функции $y = \sin x$ (рис. 1, 2). Как было сказано выше, данный график можно передвигать вверх-вниз по оси y и вправо-влево по оси x , а также растягивать и сжимать вдоль оси x и оси y х [3].

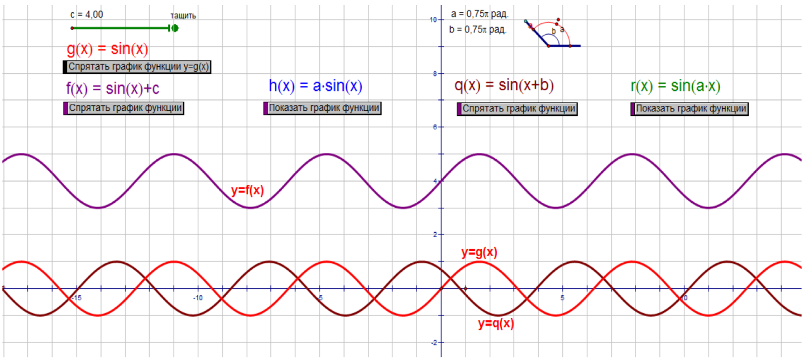


Рис. 1. Преобразование функции $y = \sin x$ *к виду* $y = \sin x + c$ *и* $y = \sin(x + b)$

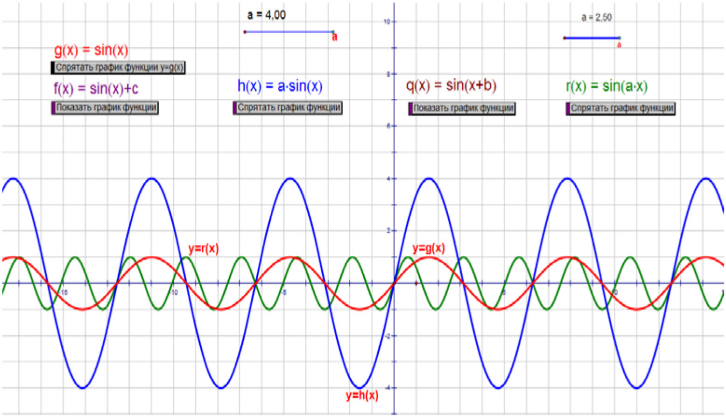


Рис. 2. Преобразование функции $y = \sin x$
к виду $y = a \cdot \sin x$ *и* $y = \sin(ax)$

Аналогичные преобразования можно выполнять с графиком функции $y = \cos x$ (рис 3, 4).

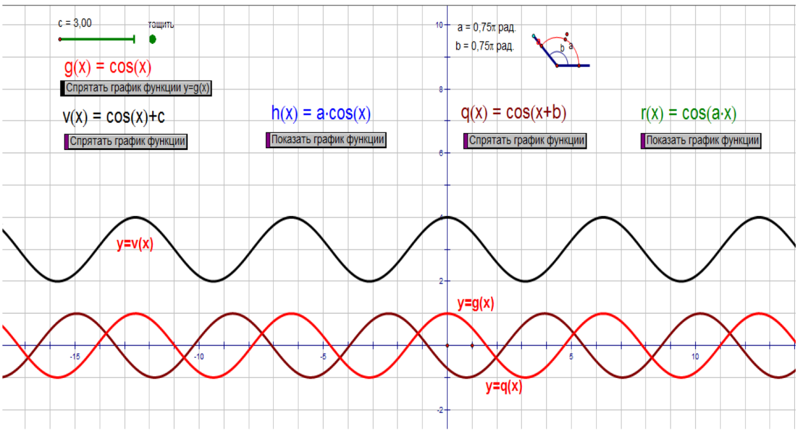


Рис. 3. Преобразование функции $y = \cos x$
к виду $y = \cos x + c$ *и* $y = \cos(x + b)$

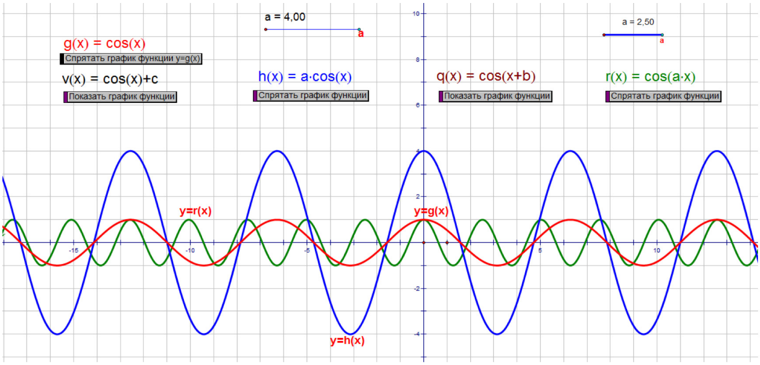


Рис. 4. Преобразование функции $y = \cos x$ *к виду* $y = a \cdot \cos x$ *и* $y = \cos(ax)$

Далее необходимо разобрать с учащимися частные случаи преобразования графиков $y = -\sin x$, $y = -\cos x$, а также преобразования графиков тригонометрических функций с модулем, т.е. $y = |\sin x|$, $y = |\cos x|$, $y = \sin|x|$, $y = \cos|x|$ (рис. 5).

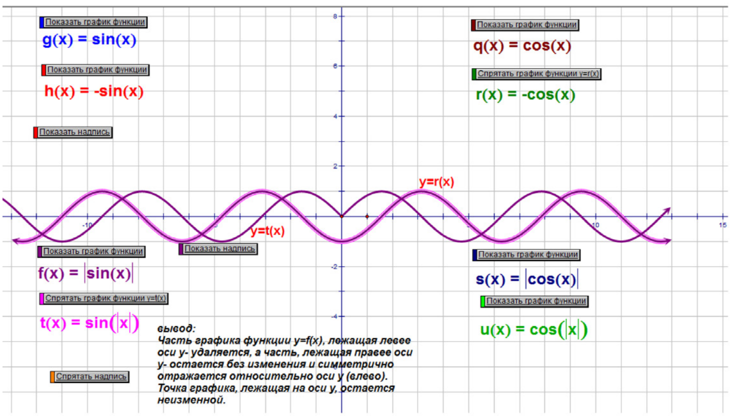


Рис. 5. Преобразование функций $y = \sin x$ *и* $y = \cos x$ *к виду* $y = -\sin x$, $y = -\cos x$, $y = |\sin x|$, $y = |\cos x|$, $y = \sin|x|$, $y = \cos|x|$

После обсуждения принципов преобразования графиков тригонометрических функций учащимся предлагается построить следующие графики функций в классе и дома в своих тетрадях (табл.). В начале предлагаются задания, в которых необходимо выполнить одно преобразование, а после – несколько преобразований (рис. 6, 7) [3].

Таблица

Задания для учащихся по преобразованию графиков тригонометрических функций

В классе	Дома
$y = \sin x + 2$	$y = \cos x - 1$
$y = 2\cos x$	$y = \frac{1}{2}\sin x$
$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \cos 2x$	$y = \sin\frac{1}{2}x$
$y = 2\sin x - 1$	$y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
$y = 3\cos\frac{x}{2}$	$y = -\frac{1}{2}\sin 2x$

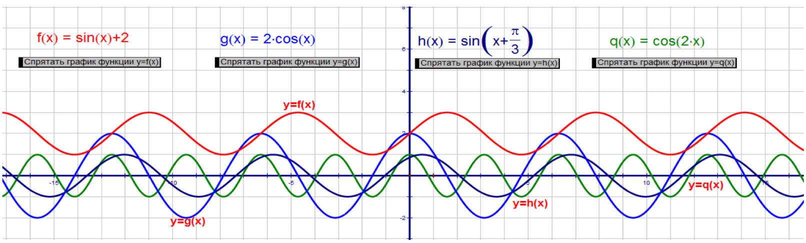


Рис. 6. Графики функций $y = \sin x + 2$, $y = 2\cos x$, $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ *и* $y = \cos 2x$

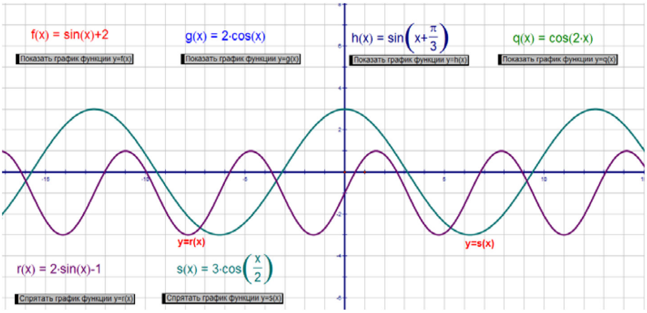


Рис. 7. Графики функций $y = 2\sin x - 1$, $y = 3\cos\frac{x}{2}$

Построение графиков тригонометрических функций с помощью программы *Живая геометрия* оживляет изучение темы и делает ее привлекательным, развивает умение анализировать, сравнивать, делать выводы, развивает навыки самостоятельного мышления, позволяет заинтересовать учащихся и побуждает в них потребность получения дополнительных знаний.

Библиографический список

1. Горский Е.А. Компьютерные визуализационные модели в изучении математики // Современные проблемы образования в поликультурном регионе (Шестые Лозинские чтения): материалы Международной научно-методической конференции. Псков, 23–24 апреля 2015 г. Псковский государственный университет, 2015. Ч. II. С. 81–85.
2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: в 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). М.: Мнемозина, 2009.
3. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: в 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). М.: Мнемозина, 2009.
4. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс: в 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2010.

НЕКОТОРЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ СТУДЕНТОВ, ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Е.Ю. Елизарова

Алгебра, MathCad, структура учебного занятия, мотивационно-ориентировочный этап, актуализация, мотивация, демонстрационный прием, отличительные характеристики.

В статье рассматривается подход к изучению дисциплины «Алгебра» студентами первого курса, обучающимися по направлению Педагогическое образование. В рамках подхода представлена структура учебного занятия в вузе, основанная на исследованиях в области личностно-деятельностного подхода в обучении. Выделены педагогические приемы использования возможностей специальных математических программ для преобразования объекта (на примере среды *Mathcad*).

SOME PEDAGOGICAL TECHNIQUES OF USING INFORMATION TECHNOLOGIES IN TEACHING ALGEBRA STUDENTS ENROLLED IN THE DIRECTION «PEDAGOGICAL EDUCATION»

E.Y. Elizarova

Algebra, MathCad, the structure of training sessions, motivation and orientation stage, actualization, motivation, demonstration technique, distinctive features.

The article discusses the approach to the study of discipline «Algebra» first-year students studying in the direction Pedagogical education. In the approach to the structure of the training sessions at the University, based on research in the field of personal and activity approach to teaching. Selected pedagogical methods of use of the special mathematical software of converting an object (for example, the environment of *Mathcad)*.

Проблема использования компьютерной техники в качестве эффективного средства обучения, воспитания и развития студентов на материале различных учебных предметов приобретает все большую актуальность. Пути ее решения следует искать с учетом всего многообразия психолого-педагогических, организационных и собственно технических факторов.

Чтобы установить методические основы использования компьютера при изучении конкретной учебной дисциплины, мы начали с комплексного анализа целей и содержания обучения, процесса и результатов обучения. В качестве учебной дисциплины выбрана дисциплина «Алгебра», которая изучается студентами педагогического университета.

Основная цель дисциплины «Алгебра» – формирование у будущего учителя математики целостного взгляда на основные алгебраические понятия и развитие алгебраического мышления. В процессе изучения курса студенты должны овладеть основной теоретической базой, получить необходимые навыки решения типовых задач, научиться пользоваться алгебраическими понятиями при изучении математических дисциплин.

Изучение «Алгебры» строится традиционно в системе лекционно-практических занятий, где основным средством обучения выступает мел и доска.

В качестве содержательной основы для постановки эксперимента по использованию компьютерной техники как средства обучения алгебре мы выбрали материал второго семестра. Выбор объясняется следующими причинами. Во-первых, в этом семестре изучается важнейший раздел «Линейная алгебра», где студенты знакомятся с такими вопросами, как теория матриц: понятие матрицы, операции над матрицами, элементарные преобразования над матрицами, ранг матрицы, различные виды матриц; теория систем линейных уравнений: критерии совместности и определенности, методы Гаусса и Крамера и т.д.; теория определителей [3]. Все выполняемые преобразования над матрицами и определителями являются довольно трудоемкими в «безмашинном» исполнении. Этот фактор и небольшое количество часов, отводимых на изучение соответствующих операций, делает весьма проблематичным формирование необходимых умений у обучаемых. Во-вторых, ко второму семестру студенты приобретают требуемые навыки работы с персональным компьютером. И, наконец, в-третьих, к этому разделу курса можно подобрать соответствующую компьютерную программу, в частности *Mathcad* [2].

Таким образом, экспериментально предстояло проверить возможности такого изучения алгебры, при котором формирование умений работать с матрицами и определителями осуществляется поэтапно. На первом – лекционном этапе – студенты получают теоретические представления об основных понятиях, способах действий и алгоритмах. На втором – происходит осмысление теоретических фактов и первичное закрепление отдельных операций формируемых действий на практическом занятии. На третьем – этапе применения – определяется круг типовых задач, к которым применяется осваиваемый алгоритм. На четвертом этапе происходит знакомство студентов с компьютерной программой, позволяющей упростить вычисления, проводимые на втором и третьем этапах, и перейти к более сложным содержательным задачам.

С точки зрения деятельностного подхода в структуре учебных занятий можно выделить три части: мотивационно-ориентировочную, исполнительную (содержательную), рефлексивно-оценочную. Первая часть связана с установлением целей (ориентиров) занятия, вторая – с достижением поставленных ориентиров, третья –

с осознанием достигнутого. Таким образом, опираясь на исследования, посвященные личностно-деятельностному подходу [1], структуру учебного занятия можно представить в следующем виде:

Учебное занятие

Мотивационно-ориентировочная часть	Исполнительная (содержательная) часть	Рефлексивно-оценочная часть
Этапы:	*Этапы:*	*Этапы:*
1) актуализации; 2) мотивации; 3) постановки учебных целей и задач	1) преобразования условий учебной задачи; 2) моделирования; 3) преобразования модели; 4) решения конкретно-практических задач	1) контроля и самоконтроля; 2) оценки; 3) рефлексии выполненных действий

Основным средством этапа актуализации являются специальные упражнения, конкретно-практические задачи, которые преподавателю нетрудно составить самому, исходя из анализа темы. Цель таких упражнений и задач состоит в том, чтобы актуализировать знания и опыт студентов, непосредственно связанный с новой темой.

Использование информационных технологий для реализации этих целей позволяет визуально представить весь необходимый арсенал знаний для включения студентов в активную работу на этом этапе и оптимизировать время. Выбор информационного средства во многом зависит от способа организации данного этапа.

Цель этапа мотивации – создание условий для формирования у каждого студента потребности в последующей деятельности на практическом занятии. Дело в том, что довольно часто первокурсник, комментируя свои неудачи в освоении алгебраических понятий, ссылается на то, что «теорию он знает, а решать задачи не умеет». Поэтому этап мотивации необходим для того, чтобы помочь студенту «перекинуть мостик» от теоретических знаний, полученных на лекции, к их применению при решении задач на практических занятиях. Для этого на этапе мотивации важно создавать различные типы проблемных ситуаций.

Применительно к «Алгебре» целью этапа мотивации является формирование интереса к предмету, чувства красоты и изящности алгебры и всей математики в целом, создание и развитие мнения об универсальности метода моделирования для описания явлений окружающего мира.

Формирование потребности практического выполнения конкретного действия над алгебраическим объектом является основным приемом в организации этапа мотивации и связано с демонстрацией на экране некоторой модели реального объекта (математического объекта, математической ситуации) и вариантов их преобразования. Цель демонстрации – ориентировать студентов на поиск противоречия между изученной теорией и отсутствием необходимых умений практического ее применения.

Возможности специальных математических программ преобразования объекта (*Mathcad*, *Mat Lab*, *Maple* и др.), а также возможности создания «собственных» программ преобразований объекта с помощью современных языков программирования (Pascal, Visual Basic и др.) позволяют студентам проследить за явными изменениями объекта и выполнить манипуляции с ним. Прием демонстрации объекта в динамике способствует повышению интереса студентов к рассматриваемой проблеме и стремлению к ее разрешению.

Раскроем специфику использования этого приема на примере темы «Матрицы. Элементарные преобразования над матрицами», изучаемой студентами первого курса направления Педагогическое образование.

Преподаватель на занятии с помощью программы *Mathcad* демонстрирует приведение матрицы к ступенчатому виду:

$$rref\begin{pmatrix} 2 & 6 & -9 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Предлагает студентам определить все преобразования и их количество, которые были выполнены над матрицей.

Компьютерное визуальное представление преобразования матрицы играет здесь важную мотивационную роль, поскольку виден результат преобразования, но не известен способ его получения.

В ходе поиска ответа на этот вопрос студенты сталкиваются с несоответствием между известными им теоретическими знаниями об элементарных преобразованиях над матрицами и отсутствием практических навыков применения этих знаний. Таким образом, у них появляется потребность в осмыслении теоретических фактов с точки зрения применения отдельных операций формируемого действия.

Анализ практических занятий по алгебре в контрольной группе («традиционное» обучение) и экспериментальной группе с использованием компьютерной программы *Mathcad* 2000 Professional, осуществляемый на основе наблюдения и анкетирования обучаемых, позволил выделить ряд важных отличительных характеристик используемых технологий.

1) Меняется характер процесса учебной деятельности. Об этом можно судить по ряду показателей: как ставится и решается учебная задача. При использовании компьютера студенты принимают задание с готовностью к действиям, если даже процесс вычисления длительный; выполняется учебная задача каждым студентом самостоятельно, студент

сам создает модель решения задачи, «быстрота вычислений ведет к экономии времени, тем самым появляется больше времени для исследований».

2) Меняется отношение студента к процессу своей деятельности. В анкетах студенты экспериментальной группы отмечали следующие характеристики: «интересно, увлекает», «интересно работать за компьютером, чем писать в тетради или на доске», «захватывает быстрота вычислений», «использование компьютера – практическое применение теоретических знаний».

Важно заметить, что студенты осознают необходимость использования компьютера после освоения теоретических основ формируемых действий. Они отмечают, что применение компьютера необходимо тогда, когда нужно сократить вычислительный процесс, освободиться от выполнения рутинных операций, суть которых освоена. Расширяется степень свободы в выборе новых типов задач, т.к. у студента появляется возможность, не обращаясь к педагогу, получить определенную информацию по способу решения задачи; исчезает страх допустить ошибку, осознавая, что она будет исправлена и не вызовет отрицательной реакции педагога; существует возможность приобщения студента к исследовательской деятельности.

Таким образом, опытная проверка разработанной технологии по использованию компьютерных технологий для формирования конкретных умений обучаемых в курсе алгебры позволила выявить новые возможности для совершенствования качества подготовки студентов. Внедрение компьютерных технологий в учебно-воспитательный процесс затрагивает принципиальные основы традиционного подхода к обучению, приводит к изменению характера процесса учебно-познавательной деятельности студентов, к изменению их отношения к процессу и результату своей деятельности, что создает условия для формирования навыков самоконтроля и способности к рефлексии.

Библиографический список
1. Григорьева Т.П., Иванова Т.А., Кузнецова Л.И., Перевощикова Е.Н. Теоретические основы обучения математике. Н. Новгород: НГПУ, 2003. 178 с.
2. Елизарова Е.Ю. Компьютерная математика. Н. Новгород: НГПУ им. К. Минина, 2013. 80 с.
3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979. 559 с.

ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЦИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ

Н.Ю. Иршко, С.И. Калачева

Компьютерные технологии в образовании, обучение математике, обучение информатике, интегрированные уроки.

Необходимость интеграции учебных дисциплин в школьном образовании диктуется требованиями социального и экономического развития общества, отраженными в образовательном стандарте. В статье приводятся обоснование возможности интеграции математики и информатики, пример интегрированного урока.

EXAMPLE OF REALIZATION OF INTEGRATION OF MATHEMATICS AND INFORMATICS IN TUTORING OF SCHOOL STUDENTS

N.U. Irshko, S.I. Kalacheva

Computer technologies in education, training in mathematics, training in informatics, the integrated lessons.

Need of integration of subject matters for school education is dictated by the requirements of social and economic development of society reflected in the educational standard. Justification of ability to integrate mathematics and informatics is given in article, the example of the integrated lesson is given.

Основная задача школы – воспитать из ученика гармонично развитую личность, умеющую применять свои знания на практике в любой жизненной ситуации. Поэтому назрела реальная необходимость проводить такие уроки, на которых от учащихся требуется проявление своих знаний по нескольким предметам в комплексе. Важным шагом на пути к использованию информационных и коммуникационных технологий учителями-предметниками является проведение интегрированных уроков.

Особенно важно проведение интегрированных уроков информатики с математикой. Потребность в синтезе научных знаний этих учебных дисциплин обусловлена все увеличивающимся количеством комплексных проблем, решение которых невозможно без привлечения знаний из одной научной отрасли. Ставится вопрос о формировании нового, интегрированного способа мышления, характерного и необходимого для современного человека. Интегрированные уроки информатики и математики обладают ярко выраженной прикладной направленностью и вызывают несомненный познавательный интерес обучающихся.

Задача интегрированных уроков информатики и математики состоит не только в углублении и систематизации знаний учащихся, но и в привитии им математической грамотности, развитии интереса к предмету.

Наиболее подходящей программной средой для проведения интегрированных уроков математики и информатики, на наш взгляд, является математический пакет *Mathcad*.

Анализ базовых учебников по информатике позволяет сделать вывод о том, что реализация межпредметных связей с математикой осуществляется в основном на уровне односторонних и содержательных связей. Практически отсутствуют многосторонние и методические связи, что позволяет сделать вывод о необходимости усиления межпредметных связей курсов информатики и математики в рамках специально разработанной методики. На наш взгляд, учебно-методический комплект под редакцией Н.В. Макаровой – это оптимальный выбор для реализации интеграции с математикой.

Анализ основных содержательно-методических линий школьного курса математики позволяет выделить темы, в рамках которых целесообразно осуществлять поддержку в курсе изучения информатики:

№ п/п	Основные содержательные линии курса математики	Темы курсов, позволяющие реализовывать межпредметные связи	
		математика	информатика
1	2	3	4
1	Числа и вычисления	1. Действия над рациональными числами	1. Вычисления на компьютере с помощью калькулятора. 2. Работа с электронными таблицами Excel, математические расчеты. 3. Ввод математического текста, работа с редактором формул в Word. 4. Использование Mathcad в качестве суперкалькулятора
2	Уравнения и неравенства	1. Рациональные и трансцендентные уравнения и неравенства. 2. Системы уравнений и неравенств	1. Численное решение уравнений в Excel и Mathcad. 2. Решение нелинейных уравнений в Mathcad. 3. Решение неравенств в Excel и Mathcad. 4. Решение систем уравнений и неравенств в Excel и Mathcad
3	Функции и их свойства	1. Элементарные функции и их свойства. 2. Построение графиков функций. 3. Производная функции	1. Построение графиков функций с помощью Paint. 2. Построение простейших графиков функций в Excel. 3. Табулирование функций в Word и Excel

1	2	3	4
		4. Интеграл	4. Интервальная переменная. Способы задания функции в Mathcad. 5. Построение графиков функции в Mathcad. 6. Вычисление интегралов и производных в Mathcad
4	Геометрические фигуры и тела	1. Свойства геометрических фигур (треугольник, окружность, многоугольники). 2. Свойства геометрических тел (призма, пирамида, круглые тела)	1. Построение геометрических фигур в Paint и Word. 2. Создание геометрических композиций в Paint. 3. Геометрическое моделирование в Excel. 4. Геометрические операции. в Mathcad. Программирование в Mathcad
5	Геометрические величины	1. Вычисления площадей, длин отрезков, углов, объемов	1. Моделирование геометрических операций в Paint. 2. Математические вычисления в Excel и Mathcad
6	Векторный анализ	1. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. 2. Действия над векторами	1. Векторная графика в Paint и Word. 2. Иследование математических моделей и программирование в Mathcad

Из анализа учебников по информатике и математике видно, что их содержание не всегда соответствует друг другу: присутствуют темы, изучаемые в информатике раньше, чем темы математики, на материал которых опирается их содержание. Однако достаточно имеется точек соприкосновения, т. е. тем по математике, которые можно отрабатывать на уроках информатики и наоборот.

Приведем *пример интегрированного урока информатики и математики по теме «Функции, их свойства и графики. Построение графиков в электронных таблицах Excel» (для учащихся 10 классов).*

Данный интегрированный урок математики и информатики является первым уроком изучения темы «Функции» в 10 классе, а также третьим уроком при изучении теме «Графическое представление данных в электронных таблицах Excel».

В качестве обучающих на урок ставились *цели*:

– Повторение и обобщение понятия функции и ее свойств.

– Закрепление умений преобразования графиков, а также чтения свойств функции по ее графику.

– Закрепление навыков построения графиков с помощью табличного процессора.

Данный урок направлен на обобщение и закрепление учащимися следующих *знаний:* понятие функции; типы функций, их графики и свойства; понятие электронной таблицы; алгоритм построения графика функций с помощью электронных таблиц, и *умений* строить графики функций с помощью преобразования графиков элементарных функций, строить графики функций с помощью электронных таблиц Excel, определять свойства функции по ее графику.

Кроме этого, в процессе урока учащиеся должны повторить и закрепить на практике основные принципы работы в табличном процессоре MS Excel, а именно:

– автоматическое заполнение таблицы данными;

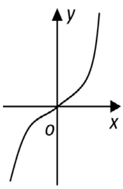
– работа с формулами в табличном процессоре MS Excel.

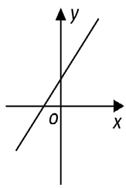
Все знания и умения, обобщенные и закрепленные учащимися на данном уроке, являются необходимыми для дальнейшего изучения курса математики и информатики.

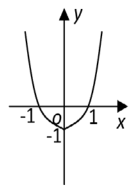
Остановимся на *основных этапах проведения* интегрированного урока математики и информатики по теме «Функции, их свойства и графики. Построение графиков функций в электронных таблицах Excel».

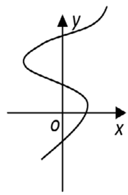
Во время устной работы учащимся предлагается, работая в группах, ответить на вопросы теста. Варианты ответов обозначены таким образом, чтобы способствовать развитию у учащихся когнитивных процессов, а учителю предоставить прекрасную возможность плавно перейти к следующему этапу урока.

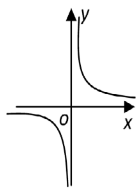
(На экране с помощью проектора выведены изображения графиков)











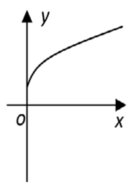


Рис. 1 *Рис. 2* *Рис. 3* *Рис. 4* *Рис. 5* *Рис. 6*

«Ребята, внимательно посмотрите на доску. Какой рисунок не является графиком функции? Почему?

– Сформулируйте тему нашего сегодняшнего урока (учащиеся формулируют тему урока «Графики функций»).

– Графики каких функций изображены на рисунках?

– Давайте с вами подробнее остановимся на рис. 3. Вспомним свойства функции, изображенной на данном графике».

Далее учащимся предлагается вспомнить алгоритм построения графика функции с помощью табличного процессора Excel. После чего ребята (в зависимости от своего «уровня») выполняют задания в тетрадях или за компьютером. Каждая группа работает за своим компьютером. Ответы на вопросы записываются в тетрадь.

Вывод после теста: «сегодня на уроке мы не только повторим материал курса алгебры, но и отработаем навыки работы в электронных таблицах. Поэтому давайте с вами уточним тему нашего сегодняшнего урока: Функции, их свойства и графики. Построение графиков функций в электронных таблицах Excel».

После выполнения работы в тетрадях учащиеся подсаживаются к тем, кто работал за компьютером, и далее идет работа в парах.

– Внимательно посмотрите на графики, выполненные на компьютере с помощью табличного процессора Excel и в тетрадях с помощью карандаша и линейки. Где построения точнее? Почему?»

Анализируем полученные графики.

Совместный анализ в парах выполненных заданий способствует развитию у учащихся навыков совместной работы, а также формированию мыслительных процессов.

Заключительная работа в парах составлена с учетом начальной подготовки учащихся. Таким образом, на уроке реализуются не только идеи интеграции, но и уровневой дифференциации.

Изучение опыта работы по предлагаемой системе позволяет сделать *выводы о результатах и значении интегрированного обучения*, которые сводятся к следующему.

Интегрированное обучение:

1) способствует развитию научного стиля мышления учащихся;

2) дает возможность широкого применения учащимися естественнонаучного метода познания;

3) формирует комплексный подход к учебным предметам, единый с точки зрения естественных наук взгляд

на ту или иную проблему, отражающую объективные связи в окружающем мире;

4) повышает качество знаний учащихся;

5) повышает и развивает интерес учащихся к предметам естественно-математического цикла;

6) формирует у учащихся общие понятия математики и информатики. Обобщенные умения и навыки: вычислительные, измерительные, графические, моделирования, наблюдения, экспериментирования;

7) формирует убеждение учащихся, что они могут изучать с пониманием более сложные вещи в сравнении с теми, которые предлагаются в учебнике;

8) позволяет использовать авторские компьютерные программы учащихся (созданные на базе интеграции) в дальнейшем учебном процессе;

9) расширяет кругозор учащихся, способствует развитию творческих возможностей учащихся, помогает более глубокому осознанию и усвоению программного материала основного курса математики, информатики на уровне применения знаний, умений, навыков в новых условиях;

10) приобщает школьников к научно-исследовательской деятельности.

РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ АЛГЕБРЕ

М.С. Саналова, С.И. Калачева

Анимационно-геометрический метод, компьютерная анимация, среда GeoGebra, математическое образование, алгебра многочленов, школьное образование.

На примере применения анимационно-геометрического метода, реализуемого с помощью *GeoGebra*, к обучению школьников алгебре многочленов автор демонстрирует один из подходов к повышению эффективности обучения школьников алгебре.

ANIMATED-GEOMETRIC ANALOGUE OF THE DIVISION OF THE POLYNOMIAL BY THE POLYNOMIAL WITH REMAINDER

M.S. Sanalova, S.I. Kalacheva

Animated-geometric method, computer animation, medium GeoGebra, mathematical education, algebra of polynomials, school education.

The author demonstrate one of the approaches to increase the effectiveness of teaching algebra in schools on the basis of using animated geometric method implemented in *GeoGebra* for solving problems of algebra of polynomials.

В обучении в рамках системно-деятельностного подхода большое значение имеет эксперимент. Когда учащийся принимает активное участие в приобретении знаний, усвоение материала происходит гораздо лучше. Однако на уроках математики практически все эксперименты в основном носят теоретический характер, т.е. ученик с помощью уже полученных знаний и направляющей помощи учителя приходит к новым знаниям. Наиболее интересен самостоятельно организованный и проведенный эксперимент. В этой ситуации на помощь учителю математики приходят компьютерные технологии. Система динамической математики *GeoGebra* позволяет создавать «живые» чертежи. Задавая основные параметры объектов, мы можем проследить изменение исследуемых характеристик.

GeoGebra позволяет реализовать следующие способы анимации: с помощью простого механического перетаскивания мышью и изменения размеров; с помощью кнопки «анимация»; с помощью Ползунка. В зависимости от методической цели, которую ставит перед собой педагог, возможно применение любого из данных видов анимации.

Анимация также хороша своей формой – по сути, это игра, которая не заставляет обучающегося испытывать комплекс неполноценности от незнания материала, а стимулирует в игровой форме заполнить этот пробел. Но, как и всякая дидактическая игра, использование компьютерной анимации в учебных целях требует от учителя четкого планирования результата.

Изначально геометрическая направленность компьютерной анимации приводит к заключению, что анимация применима только при обучении геометрии и основам математического анализа. Однако и многие алгебраические понятия и действия с ними могут иметь геометрический смысл. Например, алгебраические операции с целыми числам. Понятие многочлена можно, рассмотрев как функцию, также интерпретировать как график этой функции. Опции современных пакетов компьютерной математики, таких как *Maple*, *GeoGebra*, позволяют связывать два определения многочлена – теоретико-функциональное и формально-алгебраическое, и получать по графику формальное выражение многочлена и наоборот. Это позволит совершенно по-другому взглянуть на алгебраические операции, их свойства и, как следствие, лучше их понять и запомнить. Графическое выполнение алгебраических операций потребует от учащегося серьезной работы по моделированию этих операций, самостоятельного создания алгоритмов. Построение любых алгоритмов действий требует тщательного продумывания всех шагов, знания основных понятий, свойств, правил выполнения действий, их геометрической интерпретации, алгоритмов решения математических задач. Построенные алгоритмы для правильного их применения и поиска решения более сложных задач требуют математической интуиции, также основанной на знании теоретического материала. Среда *GeoGebra* сочетает все перечисленные возможности.

Анимационно-геометрический метод, описанный С.В. Лариным в [1], демонстрирует возможности изложения практически всех алгебраических алгоритмов геометрическим языком. За счет анимации эти процессы становятся «живыми». Можно с помощью этого метода оживить процесс сложения, вычитания, умножения и деления чисел, даже деление с остатком. Такой нестандартный подход к изучению алгебры позволяет посмотреть на привычные алгоритмы с другой стороны, что способствует лучшему их освоению.

Чтобы занятие «GeoGebra» не превращалось просто в игру, учитель может продумать задания, которые бы требовали применения ранее полученных знаний. Как бы ни были привлекательны возможности анимации, предлагаемые компьютерными программами, необходимо в первую очередь думать о целесообразности их использования в учебном процессе. Попробуем, например, рассмотреть программы изучения многочленов в 7 классе с точки зрения применения анимационных возможностей *GeoGebra* для повышения эффективности обучения.

В школьном курсе математики изучение многочленов в 7 классе преследует цель научить школьников преобразовывать рациональные выражения и решать рациональные уравнения, неравенства и их системы. Здесь на первый план выходят тождественные преобразования выражений. С этой целью из теории многочленов следует вынести на отработку в 7 классе форму записи многочлена, стандартный вид многочлена. Именно это может стать толчком начала работы в *GeoGebra*. С самой программой ученики могут познакомиться задолго до 7 класса, даже учащиеся начальной школы смогут освоить самые простые функции *GeoGebra* и научиться их применять. Для серьезного освоения данной программы именно с 7 класса существует несколько причин: в 7 классе начинается изучение геометрии, а *GeoGebra* большей частью оперирует именно геометрическими объектами; в курсе алгебры до 7 класса изучаемый материал больше требует «ручной» отработки – выработки вычислительных навыков, умения оперировать с рациональными числами; в то же время содержание геометрического и алгебраического материала в 7 классе позволяет использовать *GeoGebra* для решения задач, направленных большей частью на освоение возможностей самой *GeoGebra*. Это же относится к теории многочленов.

В 7 классе учащиеся должны хорошо освоить такие понятия, как *одночлен, многочлен, степень одночлена, степень многочлена, старший член многочлена, стандартный вид одночлена, многочлена, сложение многочленов, умножение многочлена на число и умножение многочленов*. Для успешного понимания данных понятий и закрепления умений необходимо дополнительно освоение следующих знаний и умений:

– сложение, вычитание, умножение натуральных чисел;

– сложение и вычитание, умножение рациональных чисел;

– понятие алгебраического выражения и его значения;

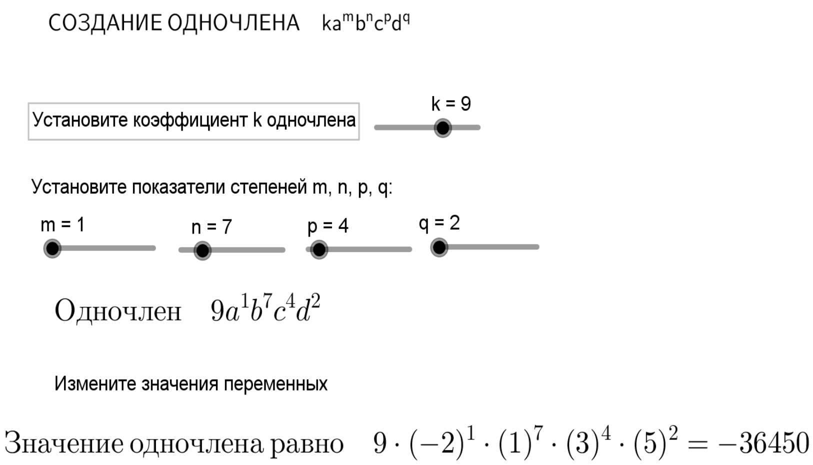
– действия с алгебраическими выражениями;

– приведение подобных членов в алгебраическом выражении.

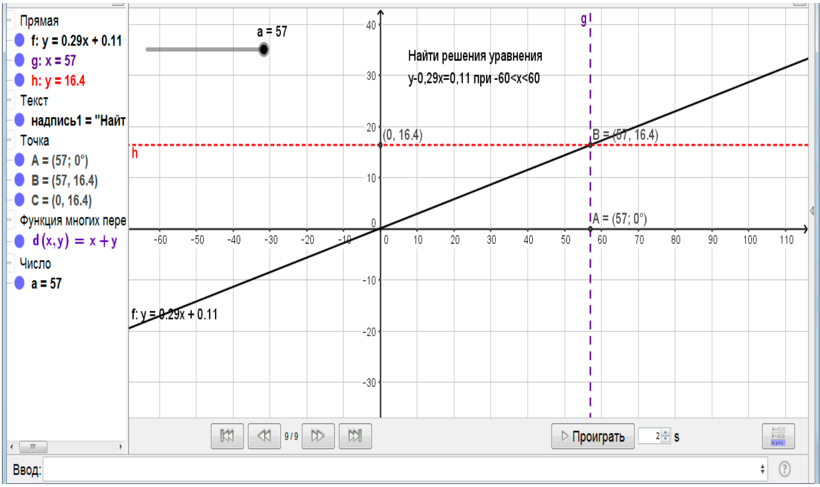
Отработка перечисленных умений и закрепление новых понятий и действий может происходить с помощью среды *GeoGebra*. Освоение основных функций *GeoGebra* не займет у учащихся много времени. Закрепление умений выполнения анимации в *GeoGebra* возможно на уроках алгебры при решении задач, направленных на освоение таких понятий и умений, как: геометрический смысл алгебраических операций над числами, линейная функция, квадратичная функция, рациональная функция, значение одночлена, значение многочлена, линейное уравнение, рациональное уравнение, приложение этих умений к физическим задачам. При решении задач такого типа с использованием *GeoGebra* освоение понятий и правил принимает игровую форму. Учащиеся сами смогут выводить правила. Помощь учителя в данном случае будет заключаться в создании шаблонов, так как ученикам на первом этапе знакомства с новым понятием сложно понять, что именно от него требуется. Имея перед глазами готовый шаблон, учащийся без предварительной теории в состоянии самостоятельно сформулировать свойства исследуемого объекта, правила действий над ним.

Приведем примеры решения задач из перечисленных выше, решаемых в теории многочленов с помощью анимации *GeoGebra*, доступных учащемуся 7 класса.

Пример 1. *Закрепление понятия одночлена и значения одночлена.* С помощью Ползунков учащиеся меняют степени переменных в записи одночлена, подставляя вместо переменных числовые значения, и находят значения полученных одночленов.

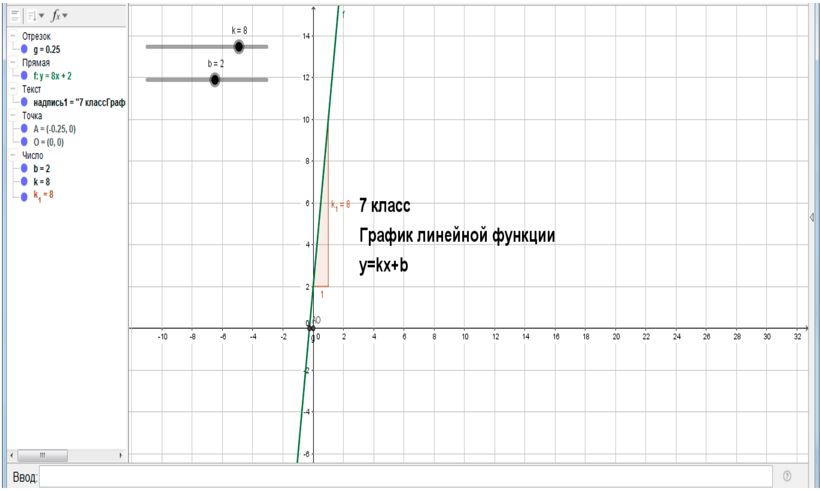


Пример 2. *С помощью Ползунка учащиеся могут находить решение уравнения с двумя неизвестными.*



Школьники визуально могут убедиться, что их бесконечно много, даже если значения одной из переменных ограничить в заданном диапазоне. Записав в функциональной строке уравнение, получим график определяющей ее функции. Передвигая прямую, перпендикулярную оси ОХ в заданном интервале, в пересечении с графиком функции будем получать точки, координаты которых и будут решением данного уравнения. Здесь у учеников вырабатывается понимание, что такое уравнение с двумя переменными, значение функции, решение уравнения, решение уравнения с двумя переменными. Ответ учащиеся могут смотреть как непосредственно на чертеже, так на панели объектов слева от чертежа.

Пример 3. *Исследование графика функции.* На примере самый простой случай – линейная функция. Работая в *GeoGebra,* учащиеся выводят правила расположения графика в зависимости от значений коэффициента и свободного члена.



При решении алгебраических задач в *GeoGebra* с использованием геометрической интерпретации действий анализ решения нередко осуществляется через поиск геометрического места точек. В этом случае значительно облегчает задачу возможность геометрических объектов в *GeoGebra* оставлять след при движении.

Анализ учебников алгебры 8–9 классов показал, что изучение нового материала теории многочленов в этот период не происходит. Значит, можно в этот период с учениками решать задания на отработку навыков работы с анимацией в *GeoGebra*. Подходящих задач для этого в курсе алгебры достаточно. Это и задачи на моделирование какого-нибудь физического, химического процессов, и задачи на исследование свойств функций, на выполнение действий над алгебраическими выражениями.

В учебном пособии С.В. Ларина «Компьютерная анимация в среде *GeoGebra* на уроках математики» [1] очень подробно и доступно описаны правила геометрического моделирования операций над действительными числами.

Обучающиеся визуально видят все происходящие изменения и могут вывести свойства операций, опираясь на свое чувственное восприятие происходящего. Это способствует развитию образного мышления. Увиденная «живая» алгебра гораздо лучше запоминается, потому что при этом задействуется не только визуальное восприятие, но и чувственное.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов на/Д: Легион, 2015.

РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В СОЗДАНИИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ

М.С. Саналова, С.И. Калачева

Компьютерные технологии в образовании, начальные классы, индивидуализация обучения, индивидуальные образовательные траектории, личностный подход к обучению, Живая математика.

В работе обосновывается необходимость и возможность создания индивидуальных образовательных траекторий в обучении младших школьников математике. Авторами предлагается для этого использовать компьютерные технологии, в частности приведены примеры разработки для учащихся 2 класса заданий, проектов с применением динамической компьютерной среды *Живая математика*.

THE ROLE OF COMPUTER TECHNOLOGIES IN THE ESTABLISHMENT OF INDIVIDUAL EDUCATIONAL TRAJECTORIES FOR TRAINING YOUNG SCHOOLBOYS MATHEMATICS

M.S. Sanalova, S.I. Kalacheva

Computer technologies in education, primary classes, individualization of education, individual educational trajectories, personal approach to learning, Living mathematics.

The paper substantiates the necessity and possibility of creating individual educational trajectories in the teaching of junior schoolchildren to mathematics. Authors are invited to use computer technologies for this purpose, in particular, examples of development for students of the 2nd class of tasks, projects using the dynamic computer environment *Living mathematics*.

Проблема индивидуализации образования младших школьников, как правило, в школе не озвучивается и, соответственно, не решается. Принято считать, что в младшей школе реализовывать индивидуальные траектории обучения сложно и нет необходимости, поскольку одной из основных реальных задач учитель младшей школы считает выравнивание уровня подготовки учащихся для удобства организации классно-урочной деятельности. Учитель пытается привить учащимся навыки, необходимые для успешной учебной деятельности в школе, в условиях коллективного обучения. Таким образом, ребенок, поощряемый родителями и воспитателями в детском саду, осваивая мир семимильными шагами до школы, попадает в условия, где не учитываются его индивидуальные наклонности, способности, интересы, а важно только следование инструкциям учителя. Невнимание к индивидуальным способностям и наклонностям обучающихся ведет к потере мотивации. Известный исследователь Маслоу (Maslow A.H., 1970) в своем определении мотивации подчеркивал, что «это человеческое стремление… проявить себя в том, к чему он чувствует себя потенциально способным». Возникает вполне резонное предположение о тесной связи способностей и мотивов деятельности. Предположение об определенных врожденных способностях и направленности каждого человека на вполне определенные виды человеческой деятельности подтверждается и последними генетическими исследованиями, в которых четко прослеживается генетическая природа направленности человеческих способностей.

«Природные способности человека – это тот сигнализатор, который дает человеку сигнал о его возможности достичь успеха («ощущение достижения») при встрече с очередным стимулятором поведения: видом деятельности или учебным предметом. Происходит как бы подсознательное и интуитивное сопоставление в мозгу учащегося его врожденных способностей и требований учебного предмета. Если действие этого оценочного механизма находит у учащегося необходимые способности, как жажду этой деятельности, возникает то, что названо Маслоу «потребность в самоактуализации», и учебная мотивация начинает работать в полную силу: ученик с охотой учится и стремится проявить себя возможно лучше и полнее в том, «к чему он чувствует себя потенциально способным», то есть к тому, к чему у него есть природные способности. В случае, когда сопоставление предмета изучения и способностей дает учащемуся отрицательный сигнал, учащийся всеми способами стремится избежать изучения данного предмета, предвосхищая возможные неприятные ощущения, связанные с неспособностью к достижению успеха, которого от него ждут и требуют» [1].

Повысить мотивацию учащихся к обучению искусственными способами извне нельзя. Мотивацию нельзя ни усилить, ни ослабить, как нельзя изменить по нашему желанию врожденные способности человека, которыми она вызывается и направляется. Она или есть, или ее нет. Ее мы можем только учитывать в своей деятельности. Это возможно только при индивидуализации обучения, создании ситуации успеха для каждого ученика, что в свою очередь требует от учителя дополнительных и не маленьких усилий, знания психолого-педагогических тонкостей различных теорий.

Однако, требуя от учителя создания индивидуальных образовательных траекторий для каждого ученика, нужно учитывать, что один учитель управляет учением трех-четырех десятков учащихся, ему не до этих тонкостей. «Только в строго индивидуализированном процессе обучения можно осуществить личностный подход к управлению учением каждого учащегося, и в этом учитель сегодня получает достойного коллегу – современный компьютер, единственно, кому посильна задача индивидуализации обучения в массовом образовании» [1].

Приход в начальную школу компьютерных технологий может значительно облегчить задачу учителю. Одним из плюсов этого является переход обучения из чисто теоретического в более практико направленное. Значение практического эксперимента трудно переоценить. Учитель, пусть и в виртуальном мире, может демонстрировать учащимся изучаемые явления. Ученик из пассивного участника превращается в исследователя. С помощью компьютера на уроке математики можно наглядно показать процессы сложения, вычитания, умножения, деления, понятия величины, меры, масштаба, геометрической фигуры, произвести на опыте разные вычисления, измерения тех величин и объектов, которых в условиях обычного урока произвести нельзя. Например, можно найти периметр здания, которое учащиеся сами построят, или построить здание с заданным периметром и т. д.

Другим плюсом применения компьютерных технологий в начальной школе является возможность учащимся самим искать, обрабатывать и оформлять информацию. Это без компьютера в начальной школе возможно было организовать лишь с помощью обычных стандартных учебников, что не давало возможности учащимся проявить себя. Имея под рукой компьютер, каждый ученик получает возможность найти интересную информацию и представить ее остальным.

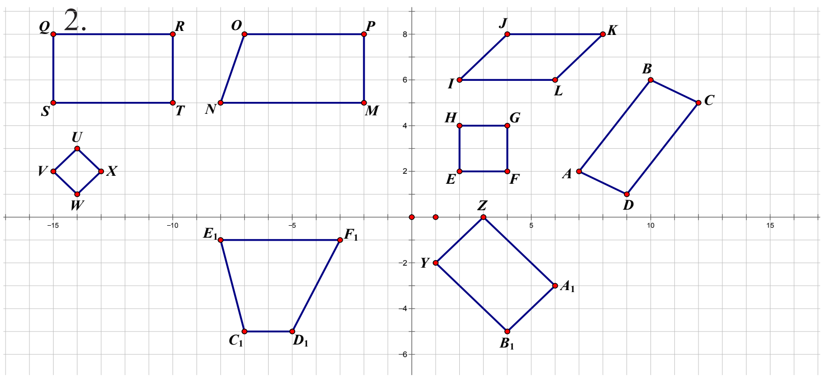
Самым главным плюсом, на наш взгляд, является возможность создания с помощью компьютера индивидуальных образовательных траекторий. Учитель, наблюдая за успехами учащихся, может отметить для себя тех учеников, которые не проявляют интереса к коллективной работе, и организовать для них индивидуальную работу с помощью компьютеров. Можно организовать групповую работу для небольшой группы учащихся в виде проекта. Для учащихся, не усвоивших материал урока, можно организовать индивидуальную пошаговую отработку необходимых для этого навыков. Самое главное, учитель может учесть на уроке и вне его темп усвоения материала каждым учеником, дать возможность каждому ученику проявить свои способности, учесть склонность учащихся к определенным видам деятельности.

Приведем примеры заданий для учащихся 2 класса, выполняемых в динамической компьютерной среде *Живая математика*.

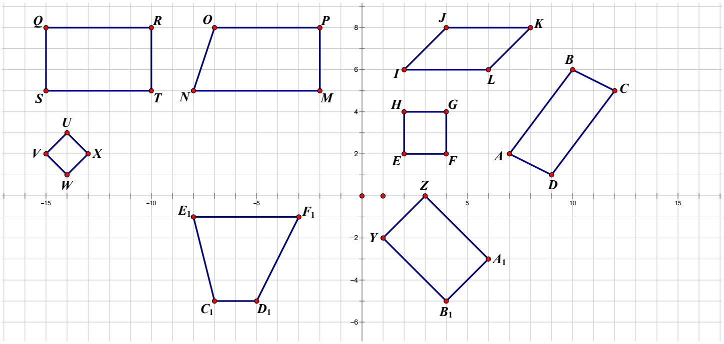
Часть умений, которыми должны овладеть выпускники 2 класса, связана с геометрическими фигурами (прямоугольник, квадрат, окружность) и их измерениями (длина, периметр, площадь).

С помощью среды *Живая математика* возможно организовать выработку этих умений с помощью следующих заданий.

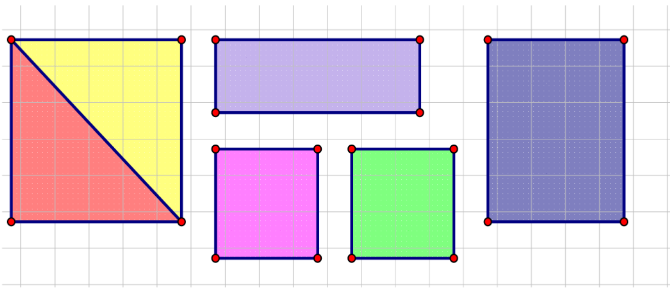
1. Среди изображенных на рисунке фигур определить прямоугольники, квадраты.



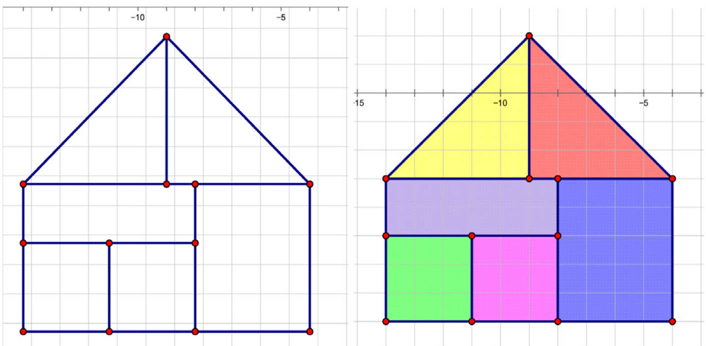
С помощью легко выполняемых в *Живой математике* вычислений ученики делают выводы о типе каждой фигуры.



2. Из данных фигур построить дом и определить его площадь.



Подсказка и решение:



Задание выполняется с помощью простого «перетаскивания» объектов измерения длин и вычисления площадей (без использования встроенной функции вычисления площадей).

Все задания можно выполнять как на персональных компьютерах, так и с помощью проектора и одного компьютера, интерактивной доски.

Применение компьютера в обучении школьников позволит создать банк заданий, направленных на отработку различных умений, и использовать их в дальнейшем для индивидуальной или групповой работы обучающихся. Это позволит повысить эффективность обучения школьников за счет отработки именно тех умений, которые нужны данному школьнику с учетом его индивидуальных способностей.

Библиографический список

1. Беспалько В.П. Образование и обучение с участием компьютеров (педагогика третьего тысячелетия). М., 2002.

К ВОПРОСУ ФОРМИРОВАНИЯ У ОБУЧАЮЩИХСЯ 5 КЛАССА МЕТАПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ *ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА*

Е.Е. Клопот, М.А. Кейв

Компьютерная система Живая математика, метапредметные результаты обучения, формирование метапредметных результатов обучения, обучение математике в 5 классе.

В статье актуализируется проблема формирования метапредметных результатов обучения математике обучающихся 5 класса. Представлен опыт формирования метапредметных результатов обучения математике обучающихся 5 класса посредством использования компьютерной системы *Живая математика*.

TO THE QUESTION OF FORMING AT THE LEARNING 5 CLASSES OF METAPREDITETAL RESULTS OF TEACHING MATHEMATICS ON THE BASIS OF USING THE OPPORTUNITIES OF THE COMPUTER SYSTEM *LIVING MATHEMATICS*

E.E. Klopot, M.A. Keiv

Computer system Live мathematics, meta-subject results of training, formation of meta-subject results of training, teaching mathematics in the 5th grade.

The article actualizes the problem of formation of meta-subject results of training for mathematicians of the 5th grade students. The experience of forming meta-subject results of teaching the mathematics of students of the 5th grade through the use of the computer system *Live Mathematics* is presented.

Федеральные государственные образовательные стандарты основного общего образования определили новые требования к метапредметному результату обучения школьников. В состав этих требований включены универсальные учебные действия (УУД) школьников: познавательные, регулятивные и коммуникативные. Трудно переоценить роль и значение способности и готовности школьников к выполнению этих действий как для обучения, так и для самообразования в течение всей жизни.

Появление прикладного программного обеспечения нового поколения позволяет расширить область применения информационных технологий в учебном процессе, расширить методические горизонты при обучении математике в школе. К этой группе программного обеспечения относятся универсальные математические пакеты символьных, численных вычислений и геометрических построений – так называемые системы компьютерной математики [4].

Под системами компьютерной математики (СКМ) будем понимать комплексные программные средства, обеспечивающие автоматизированную, технологически единую и замкнутую обработку задач математической направленности при задании их условий на специально предусмотренном языке пользователя [3, с. 40].

Системы компьютерной математики обладают богатым набором инструментов для построения анимационных чертежей. Они удобны и просты в использовании. Для учителя СКМ представляет собой ансамбль инструментов, с помощью которых можно добиваться разнообразных педагогических целей. Для обучаемого – это среда обитания, «населенная» многочисленными разнотипными инструментами, многие из которых имеют индивидуальные настройки [5].

Исследования, проведенные С.А. Дьяченко [2], показывают, что среди достоинств применения компьютера в обучении математике можно отметить следующие: возможность наглядного представления графических данных; быстроту и точность вычислений; разнообразие способов предъявления учебной информации; возможность конструирования анимационных компьютерных моделей математических объектов и проведения на их основе компьютерных экспериментов и исследований; расширение комплекса учебных задач; повышение информационной культуры и активизация учебно-познавательной деятельности обучающихся.

Наиболее ярким представителем компьютерной математики является система динамической геометрии *Живая математика*.

В данной статье представим опыт использования компьютерной системы *Живая математика* в процессе обучения математике учащихся 5 классов с целью формирования регулятивных УУД.

Важное место в формировании умения учиться занимают регулятивные универсальные учебные действия, обеспечивающие организацию, регуляцию и коррекцию учебной деятельности. Поэтому поиск инновационных технологий и методов обучения, использование которых способствует формированию регулятивных УУД при обучении предмету, является одной из приоритетных задач математического образования школьников.

К регулятивным УУД относят следующие группы действий:

– *целеполагание* как постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимся, и того, что еще неизвестно;

– *планирование* – определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата; составление плана и последовательности действий;

– *прогнозирование* – предвосхищение результата и уровня усвоения, его временных характеристик;

– *контроль* – в форме сличения способа действия и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона;

– *коррекция* – внесение необходимых дополнений и корректив в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его продукта;

– *оценка* – выделение и осознание учащимся того, что уже усвоено и что еще подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения;

– *волевая саморегуляция* как способность к мобилизации сил и энергии; способность к волевому усилию – к выбору в ситуации мотивационного конфликта и к преодолению препятствий [1].

Компьютерная система динамической геометрии *Живая математика* позволяет формировать у обучающихся основы регулятивных УУД посредством специальных заданий.

Так, например, с целью формирования основ регулятивных УУД учащимся 5 класса можно предложить выполнить следующие задания в компьютерной среде *Живая математика* (рис. 1):

1) Составьте план действий для выполнения следующего задания учителя: «Определить периметр участка земли, план которого изображен на рис. 1, если величину клетки принять за единицу измерения».

2) Согласно составленному плану в задании 1, выполните задание: «Определить периметр участка земли, план которого изображен на рис. 1, если величину клетки принять за единицу измерения».

При выполнении заданий 1) и 2) обучающиеся работают в среде *Живая математика* – на рабочем поле оформляют план решения и осуществляют его реализацию. Правильное выполнение заданий с помощью специальных кнопок среды *Живая математика* можно скрыть от учащихся и показать только после их выполнения для проведения самопроверки и самоконтроля.

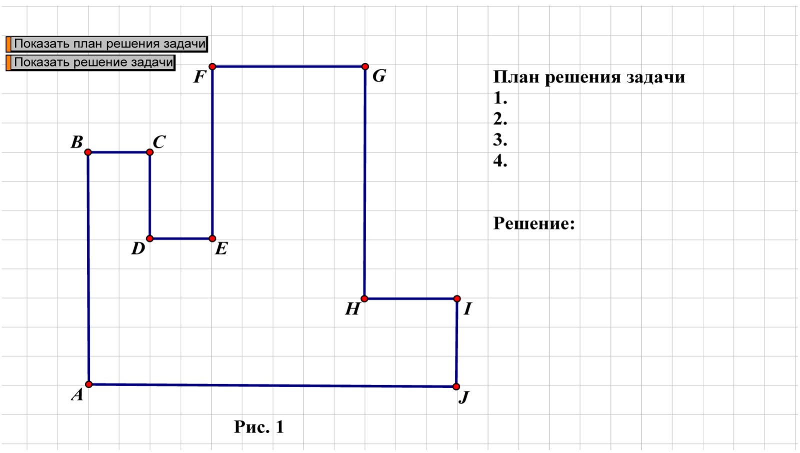


Рис. 1. Задание в компьютерной среде Живая математика

В ходе выполнения заданий, подобных заданиям 1) и 2), у учащихся формируются и отрабатываются не только предметные знания, но и универсальные учебные умения, такие как: правильно читать и понимать условие задания; составлять план решения; действовать в соответствии с планом; осуществлять самопроверку и самоконтроль.

Таким образом, возможности компьютерной системы *Живая математика* позволяют учителю формировать метапредметные результаты освоения основной образовательной программы в процессе обучения математике.

Библиографический список

1. Гаврилова Т.Ю. Формирование навыков УУД при изучении величин // Первое сентября. 2013. № 2. С. 42.
2. Дьяченко С.А. Использование интегрированной символьной системы Mathematica в процессе обучения высшей математике в вузе: дис. ... канд. пед. наук. Орел, 2000. 164 с.
3. Зайцева В.В. Методика преподавания высшей математики с применением новых информационных технологий. Елабуга, 2005. 140 с.
4. Плясунова У.В. Использование компьютерных математических систем в обучении математике студентов специальности «Информатика» педагогических вузов: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Ярославль, 2004.
5. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016.

АНИМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ *GEOGEBRA* В ОБУЧЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИИ

А.В. Ускова, М.А. Кейв

Компьютерная система GeoGebra, анимационные возможности, обучение тригонометрии, обратные тригонометрические функции, аркфункции.

В статье рассматриваются методические аспекты использования анимационных возможностей компьютерной системы *GeoGebra* в процессе обучения математике. Представлен опыт использования анимационных возможностей компьютерной системы *GeoGebra* в процессе изучения обратных тригонометрических функций.

ANIMATION FEATURES OF THE *GEOGEBRA* COMPUTER SYSTEM IN TRIGONOMETRIC TRAINING

A.V. Uskova, M.A. Keiv

Computer system GeoGebra, animation capabilities, training trigonometry, inverse trigonometric functions, arkfunktsii.

The article deals with methodical aspects of using the animation capabilities of the *GeoGebra* computer system in the process of teaching mathematics. The experience of using the animation capabilities of the *GeoGebra* computer system in the process of studying inverse trigonometric functions is presented.

Одним из основных и обязательных разделов школьного курса математики является тригонометрия. Трудности, которые испытывают учащиеся в изучении тригонометрии, непосредственно связаны как с высоким уровнем абстракции понятий, так и с использованием числовой окружности как модели, с помощью которой переопределяются тригонометрические функции и решаются многие задачи тригонометрии. Эти трудности в основном состоят в том, что нужно многое учитывать: определение тригонометрических функций и их свойства; направление вращения начального радиуса; значения тригонометрических функций и др. Особенно трудным для изучения является раздел тригонометрии, посвященный обратным тригонометрическим функциям.

Использование визуальных форм, несущих определенную смысловую нагрузку и делающих знание видимым, особо актуально при изучении основ тригонометрии.

Сопровождение занятий по математике компьютерными имитационными моделями и интерактивными иллюстрациями (анимационные чертежи, «живые» рисунки) значительно облегчает проникновение в сущность математических понятий.

Анимационные чертежи можно использовать на разных стадиях изучения материала: как готовые наглядные пособия при изучении нового, как источник задач и сопровождения их решений, как инструмент для экспериментирования и проведения научных исследований. Попутно ученик учится использованию компьютерных технологий не только в обучении, но и при решении исследовательских задач [1].

Анимационное компьютерное моделирование математических объектов предполагает использование специализированных программ для создания компьютерной анимации: непрерывное вычерчивание графиков функций, вычерчивание различных кривых, моделирование разного рода преобразований и другое.

Возможность наглядного представления учебной информации посредством конструирования анимационных компьютерных моделей математических объектов и проведения на их основе компьютерных экспериментов и исследований, предоставляет компьютерная среда *GeoGebra*.

В данной статье представим опыт использования анимационных чертежей, созданных в компьютерной среде *GeoGebra* в процессе изучения аркфункций.

С методической точки зрения посредством конструирования анимационных компьютерных моделей в среде *GeoGebra*, целесообразно обучающихся познакомить с различными вариантами формулировки определений аркфункций.

В качестве примера рассмотрим различные подходы к введению понятия функции арккосинуса, используя анимационные возможности компьютерной системы *GeoGebra*.

Исходя из определения обратной функции, аркфункция – это функция, обратная тригонометрической функции, то есть, арккосинус – функция, обратная функции косинус на отрезке $[0;\pi]$. Отсюда имеет место следующее определение: $y=\arccos(x)$, $x\in[-1;1]$ ó $x=\cos(y)$, $y\in[0;\pi]$. Для иллюстрации процесса построения графика функции арккосинус в компьютерной системе *GeoGebra* можно воспользоваться инструментом построения точек, симметричных точкам графика функции косинус на отрезке $[0;\pi]$ относительно прямой $y=x$. Процесс построения точек графиков функций косинус и арккосинус можно продемонстрировать с помощью анимации, которую можно задать в среде *GeoGebra* с помощью Ползунка для числа $a\in[0;\pi]$. Строим точку $X(a,\cos(a))$ и симметричную ей точку X\` относительно прямой $y=x$ (рис. 1). Для Ползунка включаем анимацию и точки $X$, $X$\` заставляем оставлять след, в результате чего получаем множество точек графиков функций косинус и арккосинус соответственно (рис. 2).

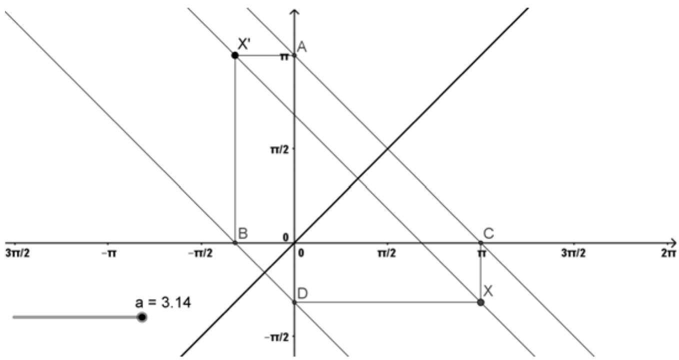


Рис. 1. Модель инструмента для построения графиков функций косинус и арккосинус в среде GeoGebra

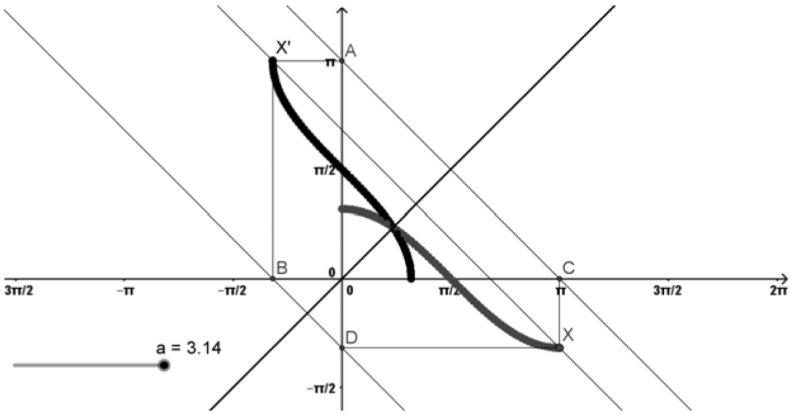


Рис. 2. Модель инструмента для построения графиков функций косинус и арккосинус в среде GeoGebra (чертеж с анимацией)

Так как слово «arcus» в переводе с латинского означает «дуга», то в основе второго подхода к введению понятия *арккосинус* лежит следующее определение: арккосинус числа *а* – дуга, косинус которой равен *а*. С позиций данного подхода для наглядного представления данного определения в компьютерной среде *GeoGebra* сконструируем следующий инструмент:

1 шаг. Строим окружность с центром в начале координат (точка А) и радиуса, равного 1, на которой отмечаем точки С, D (рис. 3).

2 шаг. Строим дугу d с центром в точке А по двум точкам С, D и отрезок AD.

3 шаг. Строим точку Y(cos(d);d) и заставляем ее оставлять след.

4 шаг. Для объектов d, Y, D, AD задаем условие их отображения: $0 \le d \le \pi$. Перемещением точки D (для точки D можно задать анимацию), вдоль дуги d, появляются точки графика функции арккосинус (рис. 4).

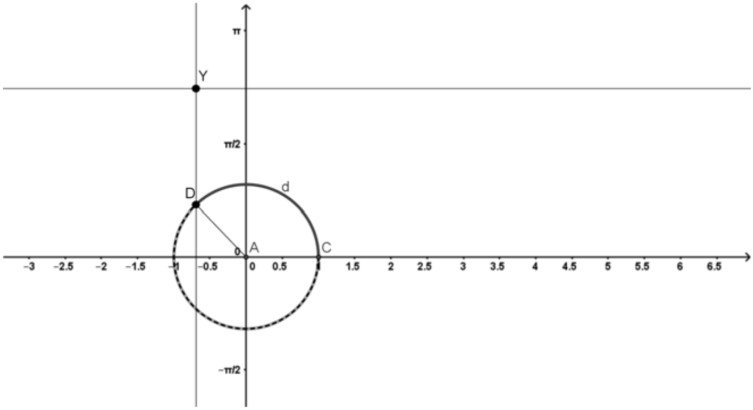


Рис. 3. Модель инструмента для демонстрации определения арккосинуса с помощью числовой окружности в среде GeoGebra

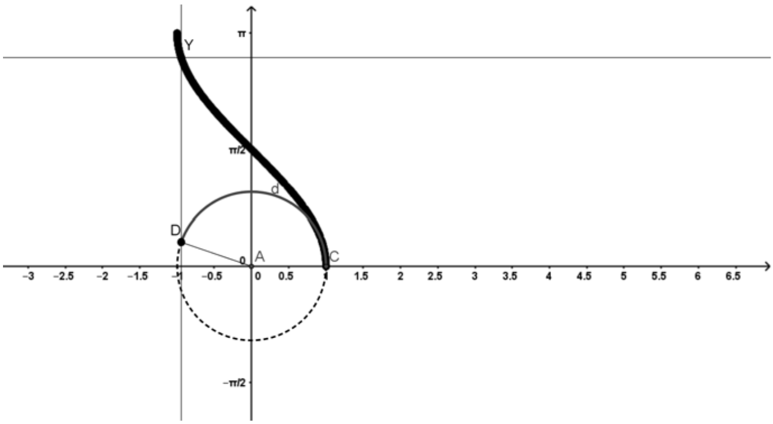


Рис. 4. Модель инструмента для демонстрации определения арккосинуса с помощью числовой окружности в среде GeoGebra (чертеж с анимацией)

Используя инструмент для демонстрации определения арккосинуса числа *a* как дуги, косинус которой равен *a,* обучающиеся учатся отмечать соответствующие значения арккосинуса на числовой окружности.

Таким образом, средства компьютерного моделирования и мультимедиа позволяют обеспечить наглядность обучения, стимулировать познавательный интерес к математике и максимально использовать потенциальные мыслительные возможности обучающихся.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов н/Д: Легион, 2015. 192 с. (Мастер-класс).

УЧЕБНЫЙ ФИЛЬМ «ФУНКЦИИ»

Е.А. Сивухина

Алгебра 7 класса, программа GeoGebra, анимационный рисунок, функция, программа Bandicam.

Под руководством С.В. Ларина осуществляется проект создания мультимедийного продукта, состоящего из учебного пособия по использованию анимационных возможностей компьютерной среды *GeoGebra* при обучении алгебре в 7 классе, «Альбома анимационных рисунков» и семи учебных фильмов (по числу глав учебного пособия). Цель статьи – краткое изложение содержания учебного фильма из этой серии, посвященного функциям и созданного автором с помощью программы Bandikam.

EDUCATIONAL FILM «FUNCTIONS»

E.A. Sivuhina

The algebra 7 of class, program is GeoGebra, animated figure, function, the program Bandicam.

Under the leadership of S.v. Larina, a project to create a multimedia product consisting of a training manual on the use of animated computer capabilities medium when teaching algebra *GeoGebra* 7 class, «an Album of animated drawings» and seven educational films (according to the number of chapters of the textbook). The purpose of the article is a summary of the contents of a training film in this series on functions and created by author using the program *Bandikam*.

Цель статьи – представить анимационные возможности среды *GeoGebra* при изучении функций в алгебре 7 класса. Актуальность темы продиктована острой нехваткой готового к использованию анимационного дидактического материала для практикующего учителя математики с учетом новых требований по применению информационных технологий в обучении математике. Все рисунки взяты с экрана компьютера.

Хотя идея функциональной зависимости пронизывает все обучение математике в школе, систематически понятие функции начинает развиваться в алгебре 7 класса. Мы придерживаемся изложения учебного материала по теме «Функции» в учебнике «Алгебра» для 7 класса общеобразовательных учреждений авторов Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова, 2004 года издания.

Вместе с тем отметим отличие трактовки понятий «функция» и «функциональная зависимость». Если в учебнике эти понятия означают одно и то же, то мы их разделяем: функция есть соответствие, а функциональная зависимость есть правило, устанавливающее это соответствие. Мы приводим примеры, показывающие, что различные правила соответствия (различные функциональные зависимости) могут привести к одному и тому же соответствию (к одной и той же функции).

Основная задача учебного фильма – продемонстрировать целесообразность и эффективность использования компьютерной анимации при изучении названной темы. При этом мы не ставим цели замены учебных заданий из учебника. Мы хотим лишь пополнить арсенал дидактических средств обучения школьного учителя математики.

Как и в учебнике Макарычева, начинаем с примера вычисления площади s квадрата через длину его стороны a по формуле $s = a^2$. Эта формула устанавливает соответствие между длинами отрезков и площадями квадратов на них. Демонстрируется анимационный рис. 1, на котором можно увидеть эту зависимость (при n=1). Длина стороны изменяется с помощью Ползунка.

Это соответствие между числовыми величинами называется *функцией*. В нашем случае говорят, что площадь квадрата есть функция от его стороны. При этом a называют *независимой переменной*, а s – *зависимой переменной*. Правило нахождения s по данному a называют *функциональной зависимостью*. В нашем случае правило звучит так: чтобы по данному значению независимой переменной a найти соответствующее значение зависимой переменной s, нужно значение независимой переменной возвести в квадрат. Множество всех значений независимой переменной a называется *областью определения функции*. Множество всех значений зависимой переменной s называется *областью значений функции*.

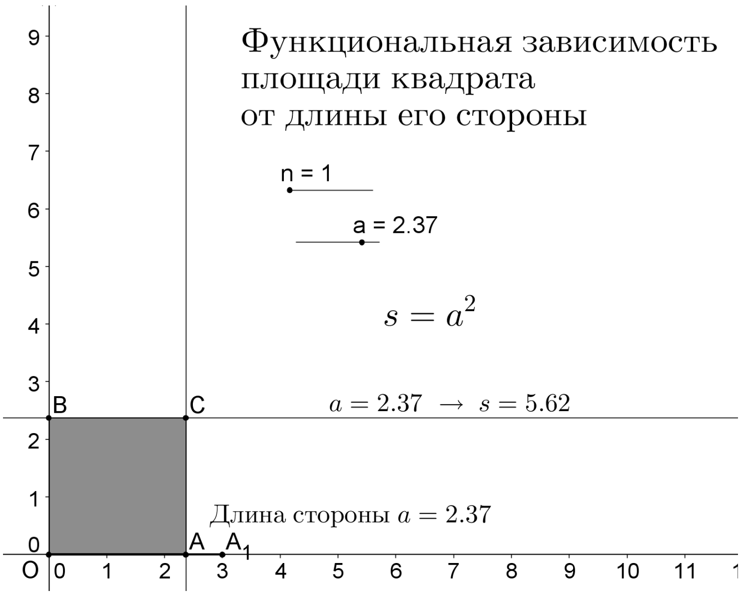


Рис. 1

На базе рассмотренного примера вводятся общие понятия.

Определение. *Функцией* называется соответствие, при котором каждому значению независимой переменной x ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной y. При этом независимую переменную называют также аргументом функции. Описание правила зависимости y от x называется *функциональной зависимостью*.

Общая запись функции имеет вид: $y = f(x)$. Здесь буква f обозначает функциональную зависимость – правило нахождения значения y по данному значению x.

Множество всех значений независимой переменной x, при которых существует значение y, называется *областью определения функции*, а множество всех значений переменной y называется *областью значений функции*. Заметим, что область определения функции может быть ограничена дополнительными условиями.

Для наглядного представления зависимости с помощью графика устанавливаем *n*=2. Заставим точку F оставлять след и включим анимацию точки *A*.

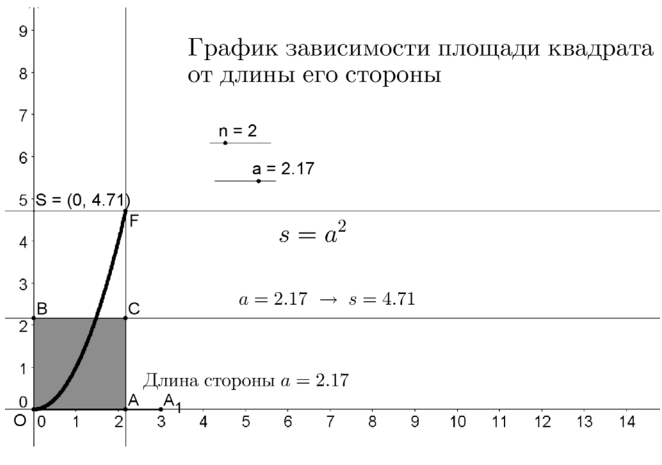


Рис. 2

Множество всех положений точки F называется *графиком* данной функции. Наблюдаем *графическую* зависимость площади квадрата от длины отрезка, на котором он построен.

Переходим к демонстрации зависимости геометрической фигуры «квадрат» от геометрической фигуры «отрезок», на котором построен квадрат (рис. 3).

Рис. 3

Для этого устанавливаем n=3 и удаляем (делаем невидимыми) оси координат за ненадобностью. Затем правой кнопкой мыши кликнем на свободном месте Полотна и в появившемся списке команд выбираем команду «Шаги построения». После нажатия кнопки «Проиграть» мы увидим последовательность построений. В фильме комментируются эти построения.

Таким образом, каждому отрезку соответствует свой единственный квадрат. Такое соответствие также является *функцией*. В этом случае говорят, что *квадрат есть функция от его стороны*, а построение квадрата задает *функциональную зависимость*. Множество значений независимой переменной есть множество всех отрезков *OA*, оно является *областью определения функции*, а множество всех значений зависимой переменной – множество всех построенных квадратов – является *множеством значений функции*.

Теперь продемонстрируем движение шара по такому же закону, по которому изменялась площадь квадрата в зависимости от длины его стороны. В нашем случае шар поднимается по закону движения $s = t^2$, где t – время, s – путь, пройденный за время t (рис. 4).

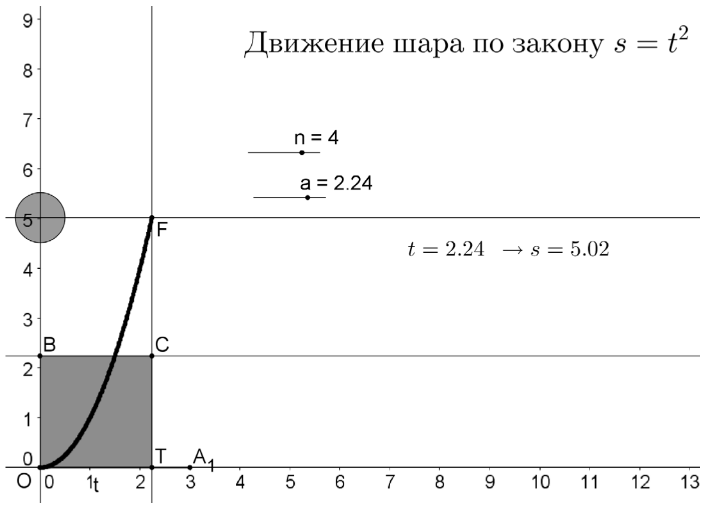


Рис. 4

Устанавливаем *n*=4 (рис. 4). Включаем анимацию и наблюдаем ускоряющийся взлет шара и одновременно график полета.

Теперь мы можем забыть о происхождении наших независимой и зависимой переменных и изучать функцию $y = x^2$, где зависимая переменная y выражается через независимую переменную x. В соответствии с определением области определения функции – это множество тех и только тех значений независимой переменной, для которых существуют соответствующие значения зависимой переменной. Следовательно, областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, а множеством значений является множество неотрицательных действительных чисел. Анимационный рис. 5 демонстрирует наглядно как само соответствие, так и его график.

В предыдущих примерах функция была задана и мы строили ее график. Но иногда функциональная зависимость задается в виде графика. Этот пример демонстрирует рис. 5.

Рис. 5

Мы рассматриваем эту функцию на отрезке $[-3, 3]$. График устанавливает соответствие $x \to y$, которое мы наблюдаем при анимации точки X (рис. 5). Стрелки указывают путь соответствия. Вводится понятие чтения графика.

На анимационном рис. 6 демонстрируется расположение простых чисел в натуральном ряду. Рисунок позволяет понять словесное определение функции: $f(n)$ есть простое число с номером n в натуральном ряду.

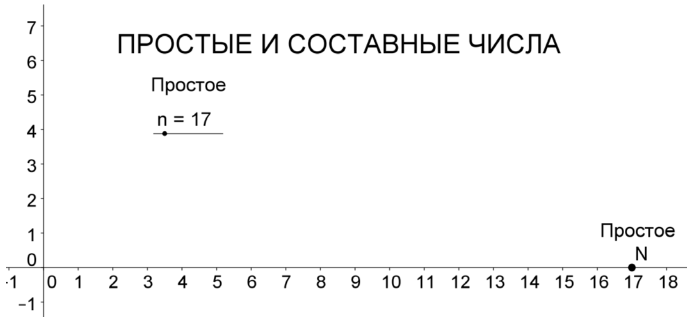


Рис. 6

Перемещая точку на Ползунке, видим характеристику очередного натурального числа: простое оно или составное. Если точка N уходит с экрана, рисунок можно передвинуть с помощью инструмента «Переместить чертеж».

Затем демонстрируется анимационный рисунок, изображающий термометр и последовательное изменение температуры с одновременным вычерчиванием температурного графика. Наблюдения сопровождаются обсуждением и записями в тетради. Демонстрируются движения, задаваемые данными функциями. Подробно рассматривается линейная функция в сопровождении анимационных рисунков равномерных движений. Демонстрируется анимационное исследование зависимости графика линейной функции от коэффициентов.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов н/Д: Легион, 2015.
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б.; под ред. С.А. Теляковского Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2004.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ *GEOGEBRA* ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ В 9 КЛАССЕ

М.А. Кейв, В.А. Самодурова

Компьютерная система GeoGebra, обобщающее повторение, методы организации обобщающего повторения, школьный курс математики, обучение математике в 9 классе, квадратные уравнения и неравенства.

В статье актуализируется роль, место и значение обобщающего повторения курса алгебры в рамках подготовки обучающихся 9 класса к итоговой государственной аттестации по математике. Представлен опыт использования возможностей компьютерной системы *GeoGebra* при организации обобщающего повторения курса алгебры в 9 классе.

ON THE USE OF THE COMPUTER SYSTEM *GEOGEBRA* IN THE ORGANIZATION OF GENERALIZING REPETITION OF THE ALGEBRA COURSE IN GRADE 9

M.A.Kejv, V.A. Samodurova

Computer system GeoGebra, generalizing repetition, methods of organization of generalizing repetition, school course of mathematics, learning mathematics in grade 9, quadratic equations and inequalities.

The article actualizarea the role, place and importance of generalizing the recurrence rate of algebra in preparing students of grade 9 to the final state certification in mathematics. Presents the experience of using the computer system *GeoGebra* in the organization of generalizing repetition of the algebra course in 9th grade.

Актуальность проблемы обобщающего повторения курса алгебры в 9 классе обусловлена по ряду причин, среди которых: подготовка обучающихся к итоговой государственной аттестации по образовательным программам основного общего образования в форме основного государственного экзамена (ОГЭ); формирование прочных, системных предметных знаний по математике как одно из требований новых образовательных стандартов.

С методической точки зрения при организации повторения особо важное значение приобретают следующие вопросы: Когда повторять? Что повторять? Как повторять?

Чтобы ответить на данные вопросы, учителю необходимо, прежде всего, определить дидактическую цель организации процесса повторения. Если таковой является цель актуализации знаний, то в этом случае повторение осуществляется на этапе подготовки к изучению нового материала, при введении и формировании учителем новых понятий. Если же основной целью повторения является закрепление и отработка новых предметных знаний, то тогда имеет место текущее повторение, которое осуществляется в ходе изучения темы. Если же целью повторения является систематизация и обобщение ранее изученного материала, то в этом случае имеет место итоговое, обобщающее повторение, организуемое при окончании изучения темы или большого раздела программы или в конце учебного года.

Цели и время проведения повторения в процессе обучения тесно связаны и взаимообусловлены и в свою очередь определяют содержание, формы организации и методы повторения.

В данной статье представим опыт организации обобщающего повторения курса алгебры в 9 классе посредством компьютерной системы *GeoGebra*.

Под обобщением мы будем понимать процесс перехода от частного понятия к общему.

Поскольку обобщение предполагает некую систематизацию мыслей, то на этапе подготовки обучающихся к итоговой государственной аттестации по математике целесообразно организовывать обобщающее повторение ранее изученного материала.

Возможности компьютерной системы *GeoGebra* позволяют организовывать обобщающее повторение курса алгебры в 9 классе.

Так, например, при повторении алгоритмов решения квадратных уравнений и неравенств уместно предложить обучающимся так называемый интерактивный тренажер, созданный в компьютерной среде *GeoGebra* (рис. 1, рис. 2).

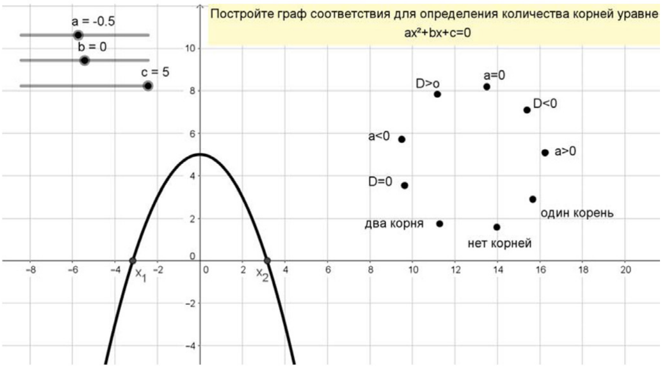


Рис. 1. Модель тренажера в компьютерной системе GeoGebra для обобщающего повторения алгоритма решения квадратных уравнений

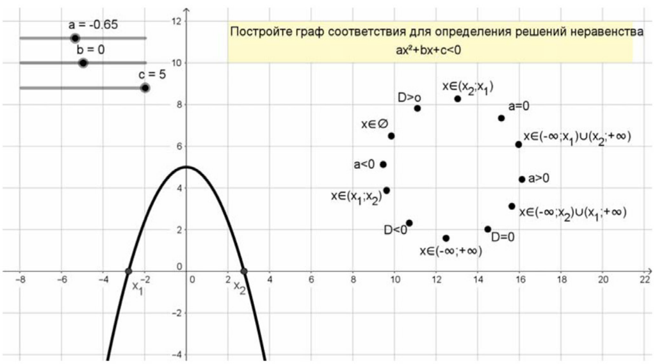


Рис. 2. Модель тренажера в компьютерной системе GeoGebra для обобщающего повторения алгоритма решения квадратных неравенств

Основная суть работы с данным тренажером состоит в том, что с помощью Ползунков, созданных для коэффициентов квадратного трехчлена, моделируются различные квадратные уравнения или неравенства.

С помощью возможностей компьютерной системы *GeoGebra* обучающийся получает обобщенную задачу и, изменяя значения коэффициентов квадратного трехчлена, рассматривает целую серию задач. Причем решение задач иллюстрируется наглядно с помощью графика квадратичной функции.

Итогом работы с таким тренажером является построение графа соответствий – обобщенной модели решения подобных задач (рис. 3).

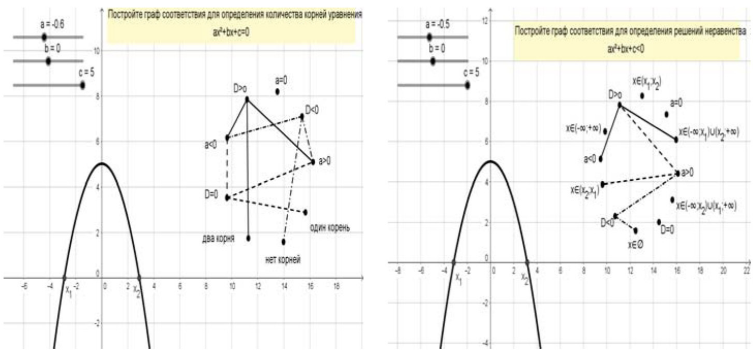


Рис. 3. Промежуточный итог работы с тренажером в компьютерной системе GeoGebra в ходе обобщающего повторения алгоритмов решения квадратных уравнений и неравенств

Таким образом, возможности компьютерной системы *GeoGebra* позволяют учителю достаточно эффективно организовывать обобщающее повторение курса алгебры в 9 классе, а обучающемуся помогают увидеть в старом нечто новое, установить логические связи и систематизировать ранее изученный материал.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде *GeoGebra* на уроках математики: учебное пособие. Ростов н/Д: Легион, 2015. 192 с. (Мастер-класс).
2. Шабанова М.В., Овчинникова Р.П., Ястребов А.В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография. М.: Издательский дом Академии естествознания, 2016.
3. Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Алгебра. 9 класс. Издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ».

УЧЕБНЫЙ ФИЛЬМ В РАМКАХ МУЛЬТИМЕДИЙНОГО ПРОДУКТА ПО АЛГЕБРЕ 7 КЛАССА

Е.В. Казакова

Мультимедийный дидактический материал, среда GeoGebra, программа Bandicam, алгебра 7 класса.

Под руководством С.В. Ларина создан мультимедийный продукт «Компьютерная анимация на уроках алгебры 7 класса», состоящий из учебного пособия по созданию и методике использования анимационного дидактического материала на уроках алгебры 7 класса в соответствии с изложением учебного материала по учебнику Ю.Н. Макарычева [2], Альбома анимационных рисунков, созданных с использованием программы *GeoGebra*, и семи учебных фильмов (по числу глав учебного пособия), созданных с использованием программы *Bandicam*. Статья посвящена созданию первого из них. В нем кратко рассказывается о программе *GeoGebra*, о ее анимационных возможностях и об особенностях изложения учебного материала в учебнике Макарычева.

EDUCATIONAL FILM WITHIN THE MULTIMEDIA PRODUCT ON 7 CLASS ALGEBRA

E.V. Kazakova

Multimediynyy didactic material, medium is GeoGebra, program Bandicam, the algebra 7 of class.

Under the guidance of S.V. Larin created a multimedia project «Computer Animation in Class 7 Algebra Lessons», consisting of a textbook on the creation and methodology of using animated didactic material in class 7 algebra lessons in accordance with the teaching material on the textbook Yu. N. Makarychev [2], the Album of animated drawings created with the *GeoGebra* program, and seven educational films (according to the number of chapters of the training manual) created using the Bandicam program. The article is devoted to the creation of the first of them. It briefly tells about the program *GeoGebra*, about its animation capabilities and about the features of the presentation of educational material in the textbook of Makarychev.

По форме фильм представляет собой общение учителя математики с коллегами, который в непринужденной форме рассказывает об опыте применения компьютерной анимации на уроках алгебры в 7 классе. Демонстрируются анимационные рисунки и комментируется их использование при прохождении соответствующей темы. В некоторых фильмах приведены фрагменты уроков.

Цель фильма – убедить учителя в том, что программа *GeoGebra* полезна в учебных целях, что научиться создавать анимационные рисунки не сложно и даже увлекательно. Что можно использовать естественный интерес школьника ко всему новому и вовлечь его в это творчество, открыть перед учащимися путь к самостоятельному экспериментированию и решению задач с использованием различных видов анимации.

В фильме характеризуются и приводятся примеры следующих трех видов анимации.

1) Геометрическая анимация – управляемое изменение чертежа с сохранением алгоритма его построения. В качестве примера приводятся геометрическое моделирование арифметических действий над числами.

2) Алгебраическая анимация – управляемое изменение параметров формул (в частности, с помощью Ползунков), обеспечивающее выполнение решения данной математиче-

ской задачи. В качестве примера приводится анимационная реализация деления «уголком».

3) Текстовая анимация – управляемое преобразование текста (с помощью встроенного инструмента «Ползунок» и условий видимости) для реализации некоторого алгоритма решения математической задачи. В качестве примера текстовой анимации приводится анимационный рисунок, показывающий распределение простых чисел в натуральном ряду.

Созданием анимационного дидактического материала мы хотим пополнить арсенал средств обучения математике для поиска решения задач, для выполнения алгоритмов решений с устранением вычислительных трудностей, для построения анимационных моделей изучаемых формул, процессов и явлений.

Мы рассматриваем методику преподавания математики как практико-ориентированное искусство обучения с опорой на интуитивное, чувственное восприятие математических понятий и утверждений через формирование ассоциаций между абстрактными понятиями и чувственно воспринимаемыми объектами реального мира.

При создании компьютерного сопровождения уроков алгебры мы придерживаемся следующих принципов.

1) *Принцип наглядности.* Математические рисунки должны наглядно раскрывать основные положения, заложенные в математическом понятии или утверждении, быть яркими, эстетичными, запоминающимися.

2) *Принцип анимационности изображения.* Изображение должно включать в себя анимацию в различных ее проявлениях: «ручное» перемещение объектов на экране, изменение данных с помощью встроенного инструмента под названием «Ползунок», использование условий видимости объектов и др.

3) *Принцип адекватности.* Изображение должно соответствовать учебному материалу и целям обучения.

4) *Принцип вариативности.* Необходимо предусмотреть возможность создания анимационного рисунка для решения целого класса (однотипных) задач с помощью процедуры настраивания изображения.

5) *Принцип убедительности.* Изображаемое должно не оставлять сомнений в выводах из наблюдений. Вместе с тем эти выводы должны опираться на существование математического доказательства в рамках строгой математической теории.

Обсуждается и характеризуется последовательность изложения учебного материала в учебнике Макарычева. В отдельных темах предлагаются авторские изменения в терминологии, в последовательности изложения, в расстановке акцентов.

Так, например, более обоснованно вводятся понятия переменной, независимой переменной, зависимой переменной и параметра.

При рассмотрении формул сокращенного умножения показывается наглядно-геометрический анимационный способ вывода формул квадрата и куба суммы, а затем из них через задачи выводятся остальные формулы сокращенного умножения. Можно организовать учебно-исследовательскую работу по переоткрытию некоторых известных и новых тождеств.

При рассмотрении систем линейных уравнений способы решения систем целесообразно называть не по форме преобразований, а по идее нахождения решения и название «способ сложения» заменить на «способ исключения переменной». В соответствии с этим рассматривать «способ подстановки», «способ исключения переменной с последующей подстановкой» и «способ двойного исключения переменных». Последний естественным образом ведет к формулам Крамера, и об этом тоже можно рассказать «продвинутым» школьникам.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов н/Д: Легион, 2015.
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. / под ред. С.А. Теляковского Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2004.

УЧЕБНЫЙ ФИЛЬМ ПО ТЕМЕ АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА «ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ»

А.А. Лариончикова, Н.Н. Чернова

Компьютерная анимация, среда GeoGebra, алгебра, числовые выражения, выражения с переменными, уравнения, тождества, программа Bandicam.

В статье кратко представлен сценарий учебного фильма по теме «Выражения, тождества, уравнения» в соответствии с учебником по алгебре 7 класса. Рассказывается о сопровождении учебного материала анимационными рисунками, выполненными в среде *GeoGebra*. Фильм снят с помощью программы *Bandicam*.

EDUCATIONAL FILM ON THE TOPIC OF ALGEBRA CLASS 7 «EXPRESSIONS, IDENTITIES, EQUATIONS»

A.A. Larionchikova, N.N. Chernova

Computer animations, GeoGebra medium, algebra, numerical expressions, expressions with variables, equations, identities, program Bandicam.

The article briefly introduced educational film script on «Expressions, identities, equations», in accordance with the textbook on algebra 7 class. Discusses the teaching material accompanied by animated drawings, met medium in *GeoGebra*. Filmed using the program *Bandicam*.

Под руководством С.В. Ларина совместно со студентами создан мультимедийный продукт «Компьютерная анимация на уроках алгебры 7 класса», состоящий из учебного пособия по созданию и методике использования анимационного дидактического материала на уроках алгебры 7 класса в соответствии с изложением по учебнику Ю.Н. Макарычева [2], Альбома анимационных рисунков, созданных с использованием программы *GeoGebra*, и семи учебных фильмов (по числу глав учебного пособия), созданных с использованием программы *Bandicam*. По форме все фильмы представляют собой общение учителя математики с коллегами, который рассказывает об опыте применения компьютерной анимации на уроках алгебры в 7 классе. Первый фильм является вводным.

Представим кратко сценарий второго фильма, концентрируясь на содержании и опуская некоторые детали. Заголовки пунктов демонстрируются в фильме на страницах учебника.

1. Числовые выражения

– По этой теме учащиеся знакомятся с понятием числового выражения и его значения.

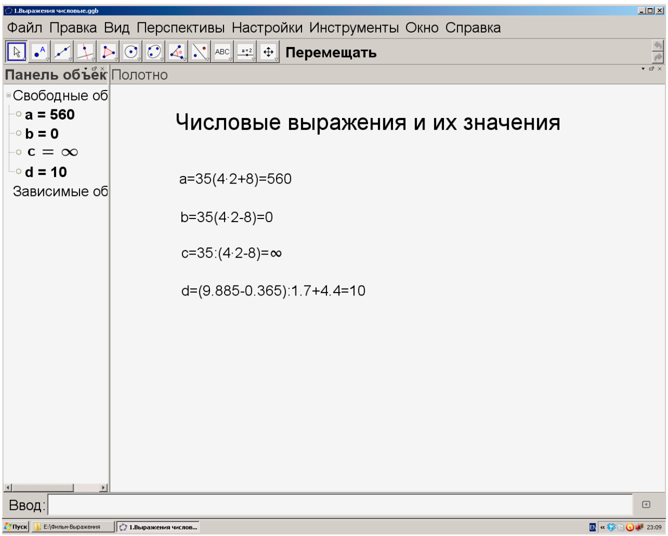


Рис. 1

– Сначала решаем примеры из учебника с помощью Строки ввода.

– Технология решения следующая. Сначала на Полотне делаем надпись: $a = 35 \cdot (4 \cdot 2 + 8)$. Потом вводим эту запись в Строку ввода. На Панели объектов получаем числовое значение $a = 560$. Возвращаемся к надписи. Кликнем на нее и дополним: =*a*, причем букву *a* берем из Объектов.

– С помощью этой технологии решаем примеры $b = 35 \cdot (4 \cdot 2 - 8)$, $c = 35 : (4 \cdot 2 - 8)$, $d = (9.885 - 0.365) : 1.7 + 4.4)$. Обсуждаем вычисления и результаты. Последний пример демонстрирует вычисления с десятичными дробями. Для обеспечения точности вычислений заходим в Настройки и выбираем Округление с тем количеством десятичных знаков, которое обеспечивает точность вычислений. Во всех этих вычислениях компьютер выполняет роль калькулятора.

– Для выполнения действий с обыкновенными дробями используется встроенная команда CAS (Computer Algebra Sistem – система компьютерной алгебры). Она обеспечивает символьные вычисления.

– На рис. 2 показан пример таких вычислений. Можно организовать тренинг на запись и чтение числовых выражений: один ученик диктует выражение, другой записывает, третий – читает.

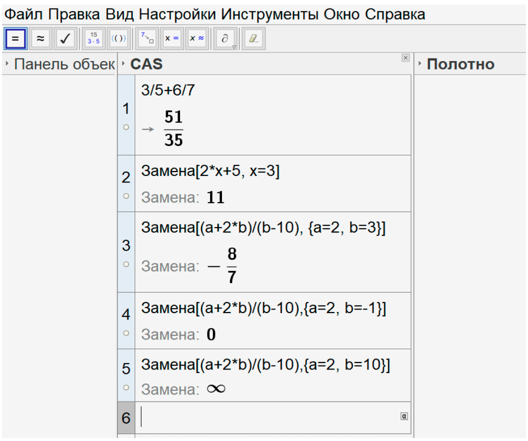


Рис. 2

2. Выражения с переменными

– Кнопку CAS можно использовать для плавного перехода от понятия «числовое выражение» к понятию «выражение с переменной».

– Рассмотрим числовое выражение, например, $2\cdot3+5$ и вместо числа 3 поставим букву x, считая, что она обозначает любое число. Получим запись $2\cdot x+5$, которая называется *выражением с переменной* x. Если вместо буквы x подставить любое число и подсчитать полученное числовое выражение, то получим значение этого числового выражения, которое теперь называется *значением выражения с переменной при заданном значении этой переменной*.

– При рассмотрении выражений с переменными главным является формирование понимания переменной. При нахождении значения выражения могут возникнуть нежелательные отвлекающие вычислительные трудности. Использование кнопки CAS устраняет эти трудности.

– На следующем рис. 3 для переменных построены так называемые Ползунки. Пользуясь ими, можно построить таблицу значений выражения. Предусмотрена возможность замены одного выражения на другое с теми же переменными.

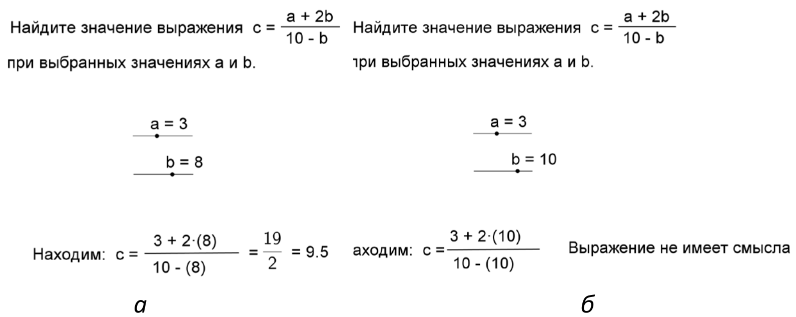


Рис. 3

– Можно переменную a зафиксировать, скажем, взять $a=3$, а переменную b изменять. Тогда значение выражения

c будет изменяться в зависимости от значений b. В этом случае переменную b называют *независимой переменной* (и обычно обозначают буквой x), а переменную c *зависимой переменной* (и обозначают буквой y). Зафиксированную переменную a в этом случае называют *параметром*.

На экране демонстрируется графическая анимационная модель выражения $y = \dfrac{a+2x}{10-x}$ с переменной x и параметром a. Тем самым проводится пропедевтика понятия функции и ее графика.

– Ученикам полезно дать следующие задания.

1) Для данного значения переменной x найдите значение выражения «вручную» с проверкой на графике. Найдите значение выражения по графику. При каком значении x значение выражения не существует?

2) При каком значении переменной x значение выражения равно данному числу?

3) Измените значение параметра a и ответьте на те же вопросы 1), 2) по графику нового выражения.

– В учебнике Макарычева на стр. 8 приведено упражнение 34, где предлагается, используя чертеж, составить формулу для вычисления площади фигуры. Анимационный рисунок 4 дополняет это задание.

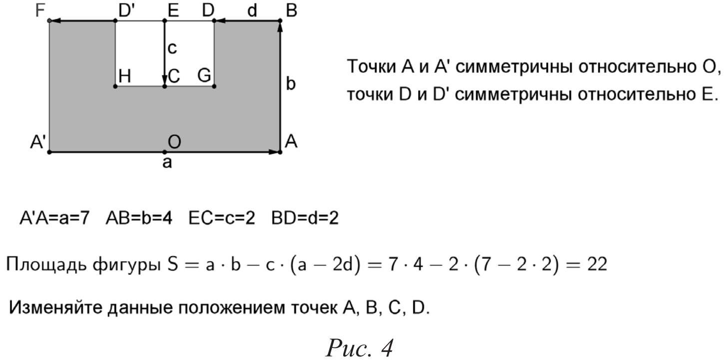


Рис. 4

Затем демонстрируется и обсуждается обобщение этого рисунка, когда вырезанная часть перемещается слева направо.

3. Сравнение значений выражений

– В учебнике [2, с. 10] приводится пример сравнения значений выражений $2a$ и $4+a$.

– При этом остается в тени, как найдено рубежное значение переменной $a=4$, и нет ли других подобных рубежных значений этой переменной. Исправить это положение можно анимационным дополнением. Для этого мы используем сначала алгебраическую анимацию (рис. 5), а потом геометрическую (графическую).

– На анимационном рис. 5 при $n=1$ демонстрируем алгебраическое решение задачи сравнения значений двух выражений. При этом прячем оси координат за ненадобностью. Затем изменяем значения переменной a и наблюдаем за сменой надписей $u<v$, $u=v$, $u>v$. На основе наблюдений записываем ответ. Его можно увидеть на экране при $n=2$. При $n=3$ возвращаем оси координат и демонстрируем графическое решение.

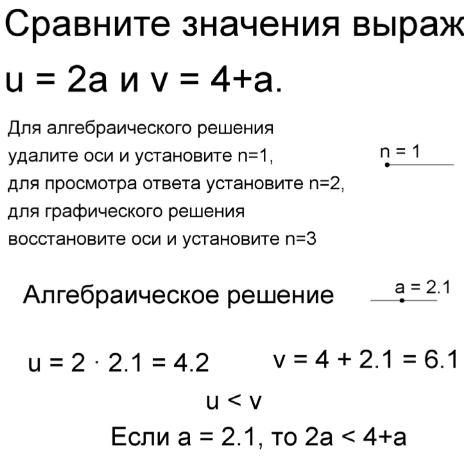
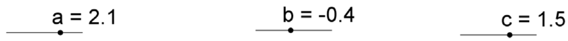


Рис. 5

4. С в о й с т в а д е й с т в и й н а д ч и с л а м и

– Для демонстрации использования свойств действий над числами при вычислениях создан анимационный рис. 6.

Найдите значение числового выражения



$$2.1 + (1.5) - (-0.4) + (3.5) - (-3.6) + (0.9) =$$

$$2.1 + (-5.5) + (-3.6) + (-6.1) + (-0.4) + (1.5) =$$

$$2.1 + (-0.4) + (1.5) + (1.5) + (2.9) + (-3.6) =$$

Рис. 6

– Рисунок помогает создавать примеры для тренировки в рациональных вычислениях. Изменяя значения параметров a, b, c на Ползунках, получаем новые однотипные примеры. Ученик должен подсказать удобную последовательность вычислений. Количество примеров можно увеличить.

5. Т о ж д е с т в а

– Продемонстрируем анимационный рис. 7, который можно использовать для проверки, является ли данное равенство (от не более, чем двух переменных) тождеством. Рисунок ярко показывает основное определяющее свойство тождества: оставаться верным равенством при любых значениях входящих в него переменных.

– Одновременно демонстрируется контр-пример: равенство $\frac{a^3}{a^2} = a$ не является тождеством, поскольку при $a = 0$ оно неверно: его левая часть не существует при этом значении переменной (при других значениях a на экране появляется соответствующее числовое значение этого выражения). Это равенство получается из тождества $a^3 = a^2 \cdot a$ путем деления обеих частей на a^2. Следовательно, это преобразование не является тождественным преобразованием. Для понимания и усвоения математического понятия контрпримеры столь же важны, как и примеры, демонстрирующие понятие.

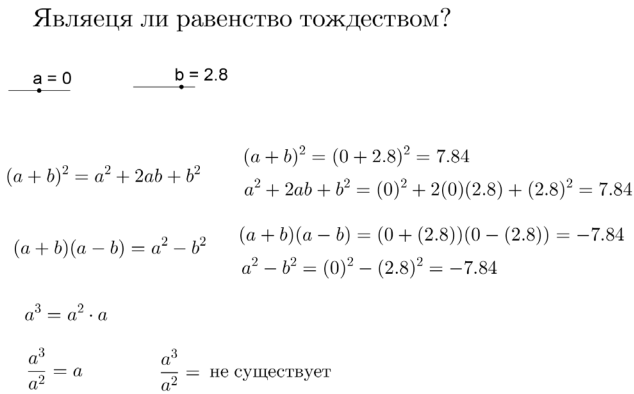


Рис. 7

– Конечно, выполненная проверка тождественности первого равенства выглядит убедительно. Но проверка не может заменить доказательства! Необходимо привести учащимся это доказательство. Тем более что оно опирается на только что пройденный материал – свойства действий над числами.

– Приведем это доказательство, обосновывая каждый шаг:

$$(a+b)^2 \overset{1}{=} (a+b)\cdot(a+b) \overset{2}{=} (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b \overset{3}{=} a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b \overset{4}{=}$$

$$= a^2 + b\cdot a + a\cdot b + b^2 \overset{5}{=} a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 \overset{6}{=} a^2 + 2\,ab + b^2.$$

– Учеников попросим назвать обоснование каждого равенства, обозначенного цифрой:

1 – расшифровываем обозначение «в квадрате»;

2 – используем распределительное свойство;

3 – еще раз пользуемся распределительным свойством;

4 – используем обозначение произведений $a \cdot a$ и $b \cdot b$;

5 – используем переместительное свойство умножения;

6 – приводим подобные;

7 – еще мы используем сочетательное свойство сложения и не ставим скобки при сложении нескольких чисел.

6. Уравнение и его корни

– В дополнение к учебному тексту учебника Макарычева, посвященному введению понятия уравнения с одной переменной, рассмотрим еще один возможный подход.

– Продолжим сравнение значений выражений $u = 2x$ и $v = 4 - x$ (мы сменили обозначение переменной). Для сравнения чисел u и v достаточно найти разность $r = u - v$. Если окажется, что $r < 0$, то $u < v$, если $r = 0$, то $u = v$, а если $r > 0$, то $u > v$. В нашем случае $r = u - v = 2x - (4 + x) = x - 4$. Следовательно, если $r = x - 4 < 0$, то $u < v$, если $r = x - 4 = 0$, то $u = v$, а если $r = x - 4 > 0$, то $u > v$. Полученные неравенства $x - 4 < 0$ и $x - 4 > 0$ называются *неравенствами с переменной* x, а равенство $x - 4 = 0$ называется *уравнением с переменной* x. Решить уравнение (неравенство) – значит найти все те значения переменной x, при подстановке которых в уравнение (неравенство) оно превращается в верное равенство (неравенство).

Далее демонстрируется графическое решение уравнений и неравенств $2x + 3 = 0$, $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (решений нет), $2x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$, $-(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 = 0$ (два решения).

7. Линейное уравнение с одной переменной

– Решение линейных уравнений полезно завершить исследованием линейного уравнения $ax = b$ с параметрами a и b. На анимационном рис. 8 изменяем значения параметров a и b и наблюдаем как геометрическое решение уравнения, так и алгебраическое. При этом видим, что график выражения $y = ax + b$ есть прямая. Если $a \neq 0$, то эта прямая пересекает ось абсцисс в единственной точке, указывающей корень уравнения. Одновременно видим алгебраическое нахождение корня.

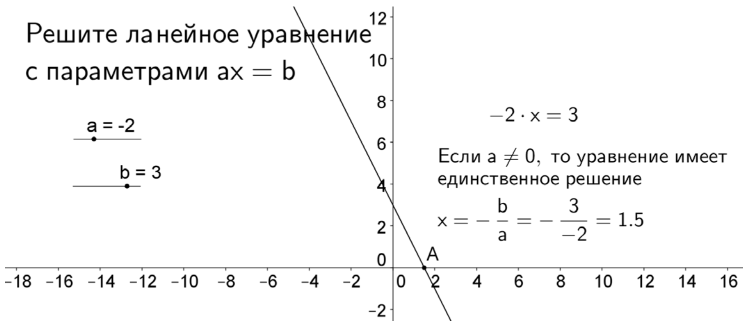


Рис. 8

– Если $a = 0$, то прямая либо совпадает с осью абсцисс и тогда всякое действительное число является корнем уравнения, вследствие чего уравнение имеет бесконечное множество решений, либо прямая параллельна оси абсцисс, а значит, уравнение не имеет корней. Все случаи демонстрируются на анимационном рисунке.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов н/Д: Легион, 2015.
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. / под ред. С.А. Теляковского. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2004.

УЧЕБНЫЙ ФИЛЬМ ПО АЛГЕБРЕ 7 КЛАССА НА ТЕМУ «МНОГОЧЛЕНЫ»

М.В. Бурнакова

Мультимедийный продукт, программа GeoGebra, программа Bandicam, многочлены, алгебра 7 класса.

В статье дано краткое описание содержания учебного фильма «Многочлены» к урокам алгебры 7 класса. Фильм является составной частью мультимедийного продукта «Компьютерная анимация на уроках алгебры 7 класса», созданного под руководством С.В. Ларина. Мультимедийный комплекс состоит из учебного пособия, в котором рассказывается о создании анимационных рисунков в среде *GeoGebra* и методике их использованиях на уроках алгебры 7 класса, Альбома анимационных рисунков и семи учебных фильмов (по числу глав учебного пособия), созданных с помощью программы *Bandicam*.

TRAINING FILM ON THE ALGEBRA 7 OF CLASS ON THE THEME «POLYNOMIALS»

M.V. Burnakova

Multimediynyy product, program is GeoGebra, program Bandicam, polynomials, the algebra 7 of class.

The article provides a brief description of the contents of the educational film «Polynomials» the lessons of algebra 7 class. The film is part of the multimedia product «Computer animation on the lessons of algebra class 7» created under the direction of S.V. Larina. Multimedia complex consists of a training manual, which describes how to create animated images in their methodology and *medium GeoGebra* uses the lessons of algebra class 7 Album animated drawings and seven educational films (by number of Heads the training manual) created using the program *Bandicam*.

Цель статьи – представить краткое описание содержания учебного фильма про использование анимационного дидактического материала на уроках алгебры 7 класса по теме «Многочлены» в соответствии с изложением учебного материала в учебнике Алгебра 7 класса авторов Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова.

При создании анимационных рисунков использовались три вида анимации: геометрическая анимация, основанная на сохранении последовательности построения чертежа при его преобразованиях, алгебраическая анимация с использованием встроенного инструмента Ползунок, позволяющего изменять параметры формул, и текстовая анимация – управляемое изменение текста с помощью условий видимости.

В начале фильма выстраивается последовательность понятий в учебнике Ю.Н. Макарычева [2], ведущая к понятию «многочлен».

Формулируются правила действий над многочленами.

При отработке действий с одночленами и многочленами можно использовать символьные вычисления в системе CAS программы *GeoGebra*. CAS – Computer Algebra Sistem – система компьютерной алгебры, которая обеспечивает символьные вычисления, вычисления с формулами. После «ручного» решения ученику предлагается для проверки выполнить вычисления, используя программу *GeoGebra*. После открытия файла кликаем «Настройки», CAS и в появившемся окне записываем пример. На рис. 1 показаны решения следующих примеров из учебника Макарычева:

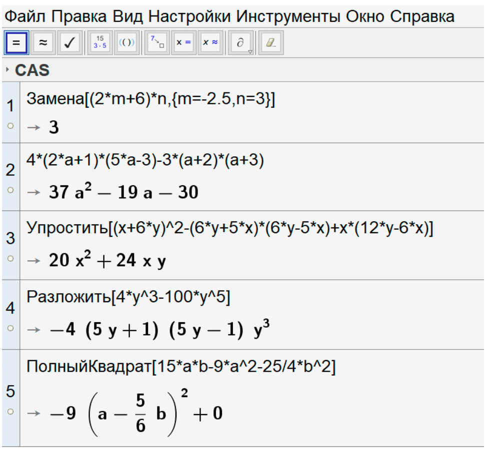


Рис. 1

1. Задание 30. Вычислите значение выражения:

а) $(2m+6)\cdot n$ при $m=-2\dfrac{1}{2}$, $n=3$.

2. Задание 977. Преобразуйте в многочлен:

д) $4(2a+1)(5a-3)-3(a+2)(a+3)$.

3. Задание 981. Упростите выражение:

г) $(x+6y)^2-(6y+5x)(6y-5x)+x(12y-6x)$.

4. Задание 991 (аналогично 853). Представьте в виде произведения:

е) $4y^3-100y^5$.

5. Задание 986. Представьте данный трехчлен, если это возможно, в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена: в) $15ab-9a^2-6\dfrac{1}{4}b^2$. При решении этого примера используется команда, позволяющая выделить полный квадрат.

Понятно, что примеры из учебника Макарычева предполагается решать «вручную», чтобы ученик мог проявить при их решении определенную сообразительность. Возможности CAS можно использовать для проверки, а также при решении более сложных примеров.

Использование кнопки CAS позволяет конструировать примеры с «хорошими» ответами. При решении примера немаловажно, чтобы ученик, придя к «красивому» ответу, получил эмоционально-эстетическое удовлетворение. Работу по изготовлению «хороших» примеров может существенно облегчить система CAS, устраняя вычислительные трудности.

Наметим учебно-исследовательскую работу с учащимися по созданию анимационного нахождения произведения двух многочленов.

Пусть даны два многочлена от одной переменной степени 5:

$$A = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$$B = b_5x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Задание 1. Создать анимационную запись многочленов с регулируемыми коэффициентами.

Решение. Для каждого коэффициента нужно задать Ползунок, моделирующий этот коэффициент.

Задание 2. Как записать в общем виде многочлен, равный произведению данных многочленов?

Ответ:

$$A \cdot B = c_{10}x^{10} + c_9x^9 + c_8x^8 + c_7x^7 + c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

Задание 3. Найдите формулы, выражающие коэффициенты произведения через коэффициенты сомножителей.

Ответ: $c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_1b_0 + a_0b_1$,

$$c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 \quad c_3 = a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3,$$

$$c_4 = a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4,$$

$$c_5 = a_5b_0 + a_4b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4 + a_0b_5,$$

$$c_6 = a_5b_1 + a_4b_2 + a_3b_3 + a_2b_4 + a_1b_5,$$

$$c_7 = a_5b_2 + a_4b_3 + a_3b_4 + a_2b_5,$$

$$c_7 = a_5b_2 + a_4b_3 + a_3b_4 + a_2b_5$$

Задание 4. Записать на экране компьютера многочлен, равный произведению данных многочленов при выбранных коэффициентах.

Решение. Создаем запись формулы для $A \cdot B$, беря коэффициенты c_i из Объектов. Анимационный рис. 2 реализует построения.

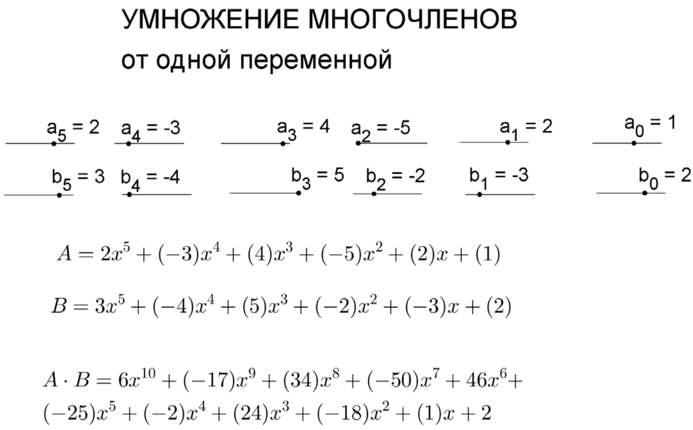


Рис. 2

Система CAS позволяет также манипулировать с формулами. Например, рис. 2 демонстрирует «переоткрытие» формулы квадрата суммы n слагаемых.

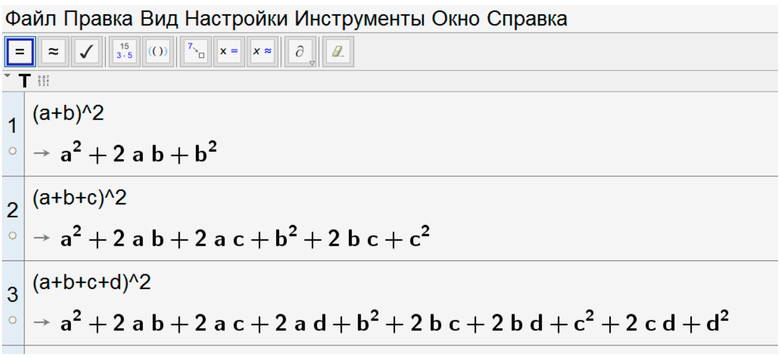


Рис. 2

Ученику предлагается после экспериментирования сформулировать вывод: квадрат суммы n слагаемых равен сумме квадратов слагаемых, сложенной со всевозможными их удвоенными произведениями.

На рис. 3 подмечается формула куба суммы *n* слагаемых.

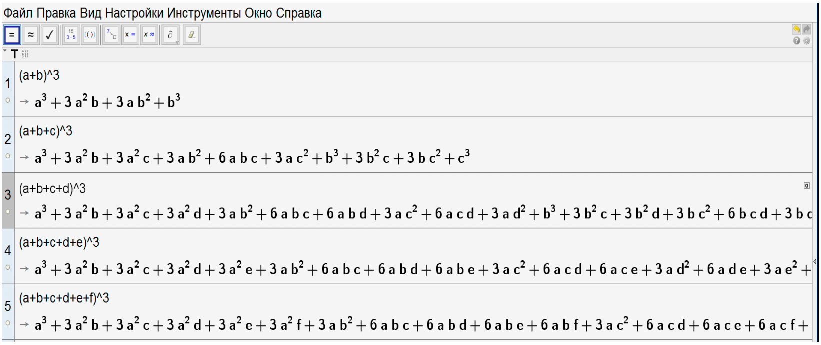


Рис. 3

Ученик должен результаты эксперимента сформулировать в виде правила написания соответствующей формулы.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов н/Д: Легион, 2015.
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. / под ред. С.А. Теляковского. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2004.

О КОЛЛЕКЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ ДЛЯ ШКОЛЬНОГО ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

А.Ф. Жеребцова

Геометрическое моделирование, системы динамической геометрии, Живая математика, фракталы, итерации.

Статья посвящена популярному научному направлению в математике – фракталам. Приводится пример построения статического фрактала, построенного на основе известного «ковра Серпинского» с использованием функции итерации в системе динамической геометрии *Живая математика*.

ON THE COLLECTION OF GEOMETRIC FRAKTALOV FOR THE SCHOOL ELECTIVE COURSE

A.F. ZHerebtsova

Geometric modeling, dynamic geometry, Living mathematics, fractals, and iteration.
The article is devoted to popular science in mathematics – fractals. An example of generation of the author's static fractal, was constructed based on «the Sierpinski carpet» using the function iteration in dynamic geometry *Living mathematics*.

Фрактальная геометрия – молодое быстроразвивающееся научное направление в математике, развитие которого связано не только с выдвижением новых математических идей, но и бурным развитием программирования, компьютерной графики, художественного компьютерного творчества [3]. Данным направлением интересуются не только математики, программисты и художники, но и представители многих других профессий и специальностей, фракталы с успехом внедряют в учебный процесс высших учебных заведений и школ. Некоторые природные и искусственные фракталы настолько красивы и эстетичны, что не могут не вызывать восхищение и восторг у обучающихся. Геометрические фракталы просты в построении, легко воспринимаются и понимаются людьми, владеющими элементарными геометрическими знаниями даже на интуитивном уровне.

Чтобы построить геометрический фрактал, необходимо создать подходящий шаблон-заготовку или, как его называет Е. Федер [Федер], «затравку», выполнить необходимую подготовку и, используя функцию итерации, завершить построение фрактала. На рабочем поле появляется статическое изображение фигуры.

В Интернете огромное множество примеров геометрических фракталов. Все они разнообразны по сложности и строению и вызывают интерес. Те, кто решает начать заниматься изучением фрактальной геометрией, как правило, начинают с построения простых фракталов (Кривая Коха, треугольник Серпинского [1]) и далее переходят к более сложным.

Система динамической геометрии *Живая математика* предоставляет пользователю возможность создавать большое количество геометрических фракталов с использованием встроенной в эту среду функции итерации. Особо отметим, что анимационные возможности среды позволяют конструировать не только статические фракталы, но и динамические [Жеребцова, 2017], в том числе являющиеся геометрическими аналогами некоторых природных фракталов, например движущихся облаков, контуров растущих деревьев и т.д.

Среда Живая математика, ее дружественный интерфейс позволяют любому заинтересованному школьнику создавать собственные несложные фракталы. В качестве примера рассмотрим следующий фрактал, алгоритм создания которого заимствован нами у известного фрактала «ковер Серпинского». В качестве затравки для него возьмем квадрат, в котором закрашена его правая нижняя четверть (рис. 1).

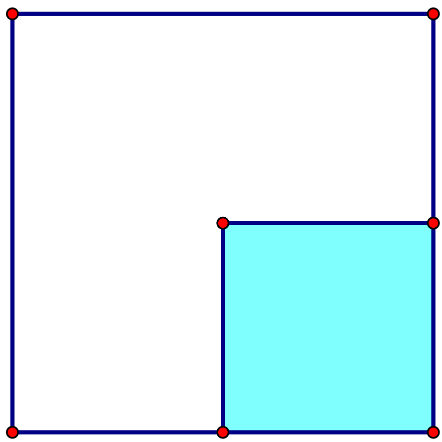


Рис. 1. Затравка

При выборе итерации затравки можно пойти по двум направлениям. Первое связано с итерацией нашей затравки только лишь в верхнюю левую четверть. Тогда мы получим несложный фрактал, но с четко выраженным самоподобием (рис. 2).

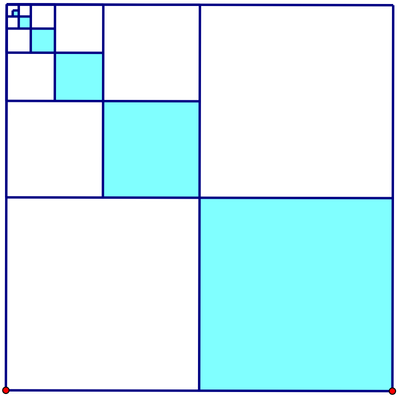


Рис. 2. Первый вариант

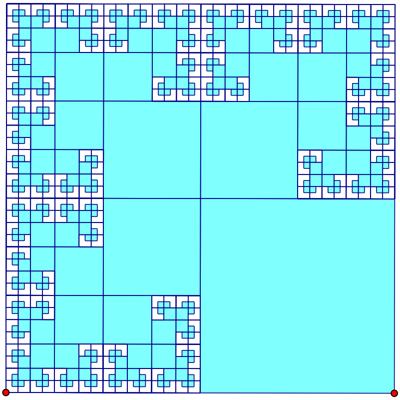


Рис. 3. Второй вариант

Более сложный и интересный фрактал может получиться из данной затравки, если произвести функцию итерации на все незакрашенные области квадрата (рис. 3). Полученная конфигурация наглядно демонстрирует основное свойство геометрического фрактала – самоподобие, что позволяет без всяких сомнений отнести ее к этому классу фигур.

Таким образом, используя один и тот же шаблон-основу и среду *Живая математика*, любой заинтересованный школьник может без особого труда построить разнообразные геометрические фракталы. Нами ведется целенаправленная работа, в основе которой лежит:

а) составление коллекции статических и динамических фракталов для школьного элективного курса «Геометрические фракталы»;

б) пополнение коллекции как известными, так и новыми геометрическими фракталами;

в) изучение дидактических возможностей среды *Живая математика* для конструирования геометрических фракталов;

г) разработка методики обучения школьников проведению исследований в области фрактальной геометрии в стиле экспериментальной математики;

д) создание механизмов по формированию у слушателей элективного курса исследовательских компетенций.

Планируется подготовка сборника задач, ориентированных на самостоятельное построение обучающимися фрактальных фигур, создание мультимедийного учебного продукта.

Библиографический список

1. Азевич А.И. Фракталы: геометрия и искусство // Математика в школе. 2005. № 4.
2. Жеребцова А.Ф. Динамические фракталы в среде Живая математика // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы II Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 18 мая 2017 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2017. С. 281–284.
3. Секованов В.С. Что такое фрактальная геометрия? М.: URSS; ЛЕНАНД, 2016. 260 с.
4. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДЫ *GEOGEBRA* ДЛЯ ОТКРЫТИЯ НОВЫХ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ИЗВЕСТНЫХ ТОЖДЕСТВ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Т.С. Малышенко

Компьютерные анимации, среда GeoGebra, математическое образование, модель, формулы сокращенного умножения.

Рассматривается подход к изучению темы «Формулы сокращенного умножения» с использованием динамической среды *GeoGebra*. В рамках подхода наглядно демонстрируется геоме-

трическая обоснованность формул сокращенного умножения, рассмотрены геометрические модели различных видов данных формул. Применение представленных моделей в совокупности со школьной теорией позволит более убедительно и ярко показать геометрическое представление формул сокращенного умножения, что облегчает вывод и доказательство данных формул. Описан процесс самостоятельного экспериментирования школьников по выводу новых для них тождеств.

ISPRLZOVANIE *GEOGEBRA* ENVIRONMENT FOR DISCOVERING NEW AND EVIDENCE KNOWN IDENTITIES IN SCHOOL MATHEMATICS

T.S. Malyshenko

Computer animation, medium GeoGebra, mathematics education, the model, formulas of reduced multiplication.

An approach to the study of the topic «Formula reduced multiplication» using dynamic medium *GeoGebra*. The approach clearly demonstrates the validity of the formulas reduced geometric multiplication, geometric patterns are considered different types of data. Application of the presented models in conjunction with the school's theory will allow more convincingly and vividly show the geometric representation of formulas abbreviated multiplication, which facilitates finding and data proof formulas. Describes the process of self experimentation schoolchildren to withdraw new identities for them.

Под руководством С.В. Ларина осуществляется проект создания мультимедийного продукта для анимационного сопровождения обучения алгебре в 7 классе. Проект включает в себя серию из учебных фильмов, учебного пособия по использованию анимационных возможностей компьютерной среды *GeoGebra* и «Альбома анимационных рисунков». Данная статья призвана кратко изложить содержание одного из учебных фильмов на тему «Формулы сокращенного умножения», созданного в программе *Bandicam*.

Цель нашего фильма – демонстрация компьютерной анимации для сопровождения главы № 5 «Формулы сокращенного умножения» учебного пособия «Алгебра» для 7 класса общеобразовательных учреждений, авторы Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова, 2013 года издания.

Знакомство с темой «Формулы сокращенного умножения» в учебнике Макарычева начинается с формулы квадрата суммы. Эту формулу можно использовать для упрощения выражения и для вычисления квадратов больших чисел.

В учебнике также представлено геометрическое доказательство этой формулы, которое было впервые описано Евклидом и опубликовано в его книге «Начала». Некоторые правила сокращенного умножения были известны еще около 4 тыс. лет назад. Тогда было принято все алгебраические утверждения выражать в геометрической форме.

На рис. 1 представлен квадрат со стороной $(a + b)$, его площадь равна $(a + b)^2$. В противоположных углах рассматриваемого квадрата строятся квадраты со сторонами a и b. Тогда большой начальный квадрат будет разделен на четыре части: два квадрата с площадями a^2 и b^2, а также два прямоугольника с площадями, равными ab. Очевидно, что:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

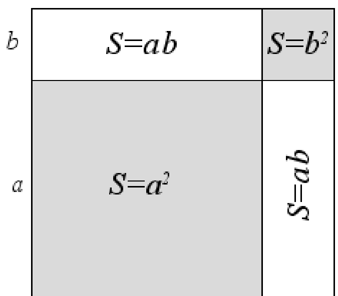


Рис. 1

Воспользуемся геометрическим доказательством Евклида и представим эту формулу в виде анимационного рис. 2, созданного в среде *GeoGebra.* Он делает очевидной в буквальном смысле слова формулу квадрата суммы. Длины отрезков a и b регулируются перемещениями точек соответственно A и B.

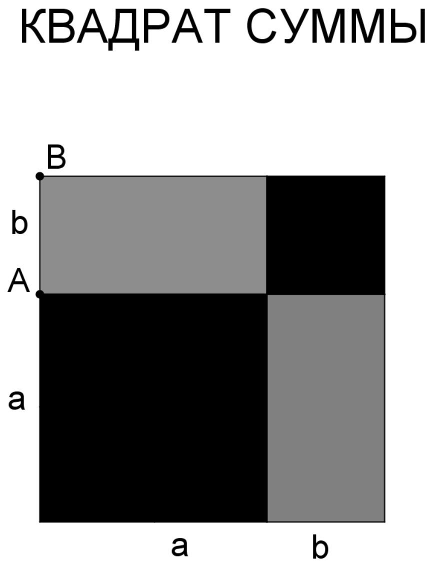


Рис. 2

На анимационном рис. 3 представлена «сборно-разборная» модель формулы куба суммы, управляемая Ползунком. При $n=1$ видим модель выражения a^3+b^3. При $n=2$ видим модель выражения $3a^2b$. При $n=3$ – модель выражения $3ab^2$. Наконец, при $n=4$ слагаемые формулы куба суммы суммируются (объединяются) и мы получаем формулу $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. В цветном исполнении анимационная модель формулы более выразительна. Длины отрезков a и b можно изменять.

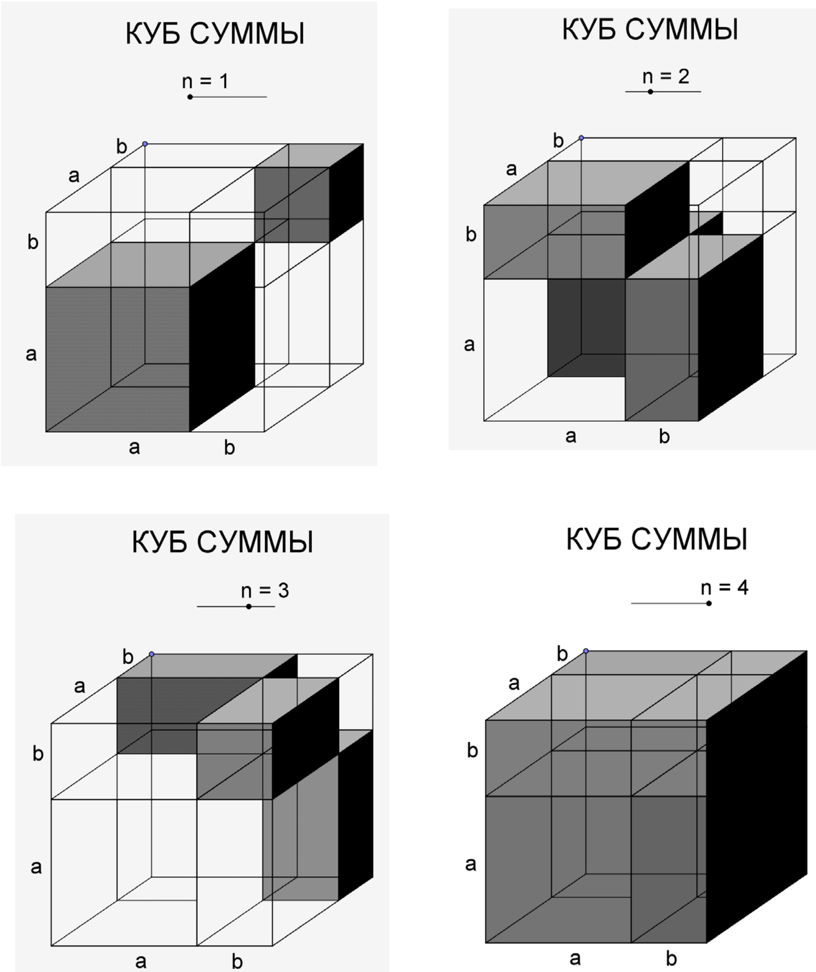


Рис. 3

Анимационный рис. 4 можно использовать для проверки, является ли данное равенство (от не более, чем двух переменных) тождеством. Рисунок ярко показывает основное определяющее свойство тождества: оставаться верным равенством при любых значениях входящих в него переменных.

Одновременно демонстрируется контр-пример: равенство $\frac{a^3}{a^2} = a$ не является тождеством, поскольку при $a = 0$ оно неверно: его левая часть не существует при этом значении переменной. Это равенство получается из тождества $a^3 = a^2 \cdot a$ путем деления обеих частей на a^2. Следовательно, это преобразование не является тождественным преобразованием.

Являецця ли равенство тождеством?

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = (0+2.8)^2 = 7.84$

$a^2 + 2ab + b^2 = (0)^2 + 2(0)(2.8) + (2.8)^2 = 7.84$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)(a-b) = (0+(2.8))(0-(2.8)) = -7.84$

$a^2 - b^2 = (0)^2 - (2.8)^2 = -7.84$

$a^3 = a^2 \cdot a$

$\frac{a^3}{a^2} = a$ $\qquad$ $\frac{a^3}{a^2} =$ не существует

Рис. 4

Для понимания и усвоения математического понятия контр-примеры столь же важны, как и примеры, демонстрирующие понятие.

Конечно, выполненная проверка тождественности первого равенства выглядит убедительно. Но проверка не может заменить доказательства! Она лишь придает нам уверенности в существовании доказательства. Необходимо привести учащимся это доказательство. Тем более что оно опирается на только что пройденный материал – свойства действий над числами.

Приведем это доказательство, обосновывая каждый шаг:

$$(a+b)^2 \overset{1}{=} (a+b)\cdot(a+b) \overset{2}{=} (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b \overset{3}{=} a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b \overset{4}{=}$$

$$= a^2+b\cdot a+a\cdot b+b^2 \overset{5}{=} a^2+a\cdot b+a\cdot b+b^2 \overset{6}{=} a^2+2ab+b^2.$$

Учеников попросим назвать обоснование каждого равенства, обозначенное цифрой:

1 – расшифровываем обозначение «в квадрате»;

2 – используем распределительное свойство;

3 – еще раз пользуемся распределительным свойством;

4 – используем обозначение произведений $a\cdot a$ и $b\cdot b$;

5 – используем переместительное свойство умножения;

6 – приводим подобные;

7 – еще мы используем сочетательное свойство сложения и не ставим скобки при сложении нескольких чисел.

В дополнение к алгебраической части рассматриваемого материала можно показать, как остальные формулы сокращенного умножения получаются из рассмотренных. При замене b на $-b$ получаем формулы квадрата разности и куба разности. При замене в формуле квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ переменной a на $a-b$ получаем формулу разности квадратов: $(a-b+b)^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)b + b^2$, откуда $a^2-b^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)b = (a-b)(a-b+2b) = (a-b)(a+b)\cdot$ Из формулы куба суммы той же заменой получаем формулу разности кубов:

$(a-b+b)^3 = (a-b)^3 + 3(a-b)^2 b + 3(a-b)b^2 + b^3$, откуда

$$a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3(a-b)^2 b + 3(a-b)b^2 = (a-b)((a-b)^2 + 3(a-b)b + 3b^2) =$$

$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab - 3b^2 + 3b^2) = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Заметим, что обобщением формул разности квадратов и разности кубов является формула разности n-х степеней:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Доказывается формула прямым вычислением правой части равенства.

Помимо умения вывести каждую формулу сокращенного умножения, ученик должен их просто вызубрить, как в свое время он вызубрил таблицу умножения. Для проверки запоминания формул сокращенного умножения и их чтения созданы анимационные рисунки 5 и 6.

На анимационном рис. 5 по названию формулы открывается сама формула.

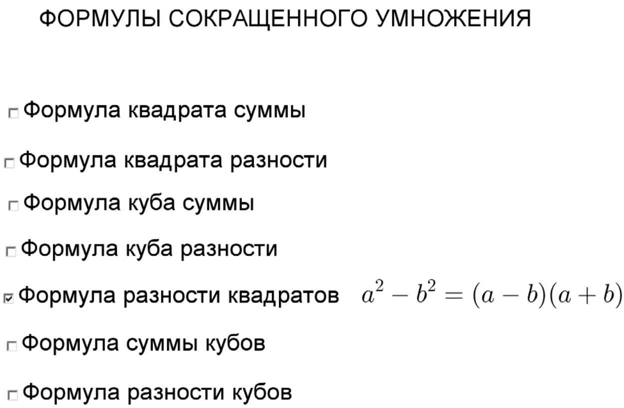


Рис. 5

Рис. 6 помогает выучить чтение формул сокращенного умножения.

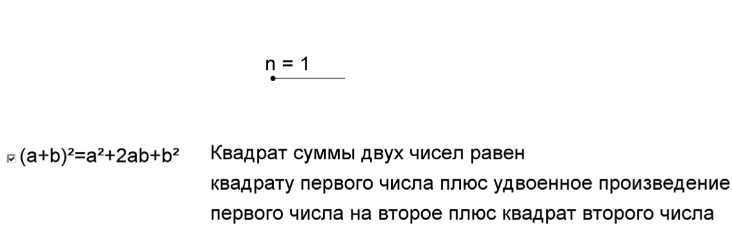


Рис. 6

При создании этого рисунка использован Ползунок и условия видимости. Изменением *n* на Ползунке и появляются поочередно все 7 формул сокращенного умножения. «Птичка» возле формулы позволяет скрыть/открыть текстовую надпись.

Покажем на примере использование кнопки CAS (Computer Algebra Sistem – система компьютерной алгебры, которая обеспечивает символьные вычисления, вычисления с формулами). На рис. 7 с использованием CAS демонстрируется «переоткрытие» формулы квадрата суммы *n* слагаемых.

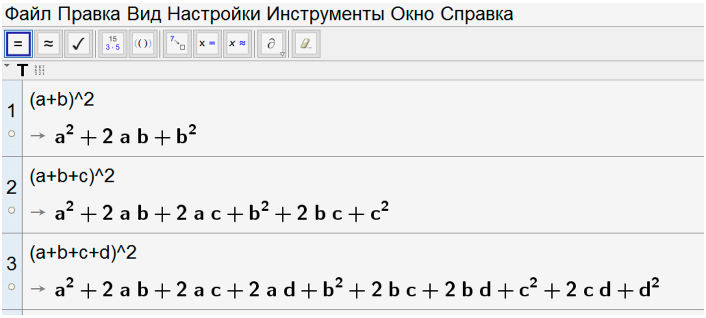


Рис. 7

Ученику предлагается после экспериментирования сформулировать вывод: квадрат суммы *n* слагаемых равен сумме квадратов слагаемых, сложенной со всевозможными их удвоенными произведениями.

На рис. 8 подмечается формула куба суммы *n* слагаемых.

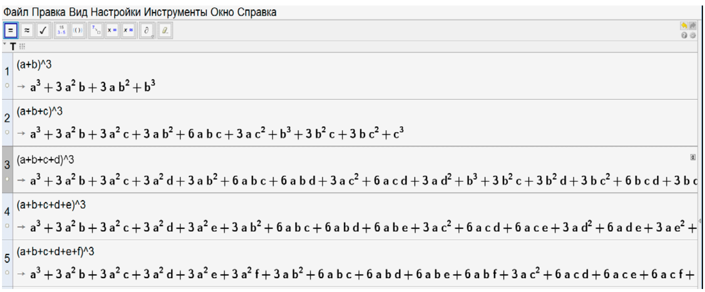


Рис. 8

Ученик должен результаты эксперимента сформулировать в виде правила написания соответствующей формулы.

Основное содержание статьи использовано при создании учебного фильма, посвященного тождествам в алгебре 7 класса.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов н/Д: Легион, 2015.
2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. / под ред. С.А. Теляковского. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2004.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ К РАЗВИТИЮ НАВЫКА САМОКОНТРОЛЯ У ШКОЛЬНИКОВ

В.В. Голубкова, С.И. Калачева

Самоконтроль, компьютерные технологии в образовании, процессуальный контроль, обучение математике, школьное образование, Живая математика.

В статье обосновывается необходимость выработки навыков самоконтроля школьников. Особое значение придается пошаговому контролю деятельности. Применение компьютерных технологий в обучении поможет организовать процесс обучения школьников математике, способствующий выработке необходимых навыков.

USE OF COMPUTER TECHNOLOGIES TO DEVELOPMENT OF SKILL OF SELF-CHECKING IN SCHOOL STUDENTS

V.V. Golubkova, S.I. Kalacheva

Self-control, computer technologies in education, procedural control, teaching mathematics, school education, Live Mathematics.

The article proves the necessity of developing skills for self-control of schoolchildren. Particular importance is given to step-by-step control

of activities. The use of computer technologies in teaching will help organize the process of teaching schoolchildren to mathematics, contributing to the development of necessary skills.

В стандарте основного общего образования по математике отмечается, что одной из главных его целей является интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясности и точности мысли, критичности мышления, интуиции, способности к преодолению трудностей. Основой для развития этих качеств служит самоконтроль, посредством которого человек всякий раз осознает правильность своих действий.

Выполнение различного рода заданий на уроках математики можно организовать так, что ученик, сделав ошибку, без помощи учителя обнаружит ее, сам или с помощью дополнительной информации исправит ее и подойдет к следующему этапу работы только после полного усвоения предыдущего материала, выполнив, таким образом, задание только правильно.

Это произойдет в том случае, если у ребенка сформирован навык самоконтроля. Самоконтроль является составной частью любого вида деятельности человека и направлен на предупреждение или обнаружение уже совершенных ошибок. Иначе говоря, с помощью самоконтроля человек всякий раз осознает правильность своих действий, в том числе в игре, учебе и труде.

В практике обучения следует учитывать наличие прямой зависимости между уровнем самостоятельности учащихся при выполнении учебных заданий и степень владения ими навыком самоконтроля.

П.П. Блонский показал зависимость развития самоконтроля от изменений, происходящих в соотношении между такими психическими процессами, как память и мышление.

Он подчеркивал всевозрастающую роль мышления в развитии и совершенствовании самоконтроля и в процессе усвоения знаний. Вывод им формулируется так: «Усвоение без проверки – простая, безотчетно происходящая работа памяти; усвоение, контролируемое самопроверкой, – память, работающая под контролем мышления».

П.М. Эрдниев, А.К. Маркова, Н.А. Омельченко и др. подтвердили правильность выводов П.П. Блонского, заметив, что качеству усвоения знаний учащимися заметно способствует их самоконтроль за ходом и результатами учебной работы. С.И. Архангельский, Н.В. Кузьмина, Н.Ф. Талызина и др., освещая вопросы управления процессом приобретения и усвоения знаний, также признают необходимость осуществления внешней обратной связи (к тому, кто обучает) и внутренней (к тому, кто обучается). Они доказали, что развитый самоконтроль не только улучшает результаты познавательной деятельности, но и способствует повышению его активности. Учеными было показано значение самоконтроля как весомого звена учебного процесса, сущность которого заключается в обеспечении внутренней обратной связи.

Первоначальной и простейшей формой контроля, который осваивают обучающиеся, является контроль по результату, или так называемый *итоговый* контроль. Его функция состоит в сличении результатов с заданным образцом. Эта форма контроля не затрагивает процессуальной стороны деятельности. Последовательность и полнота проделанных учащимися операций остаются вне этого контроля.

Контроль по результату не ставит перед обучающимися задачи осознанного усвоения учебных действий, поэтому наряду с данным видом контроля необходимо формировать *процессуальный* контроль. Функция этой формы контроля состоит в выявлении полноты, правильности и последовательности производимых учащимися операций. Этот вид контроля, определяемый в психологической литературе как *пошаговый* контроль, в первую очередь обращает внимание обучающегося на способы осуществления им деятельности.

Еще более сложной формой контроля, определяющей уровень сформированности учебной деятельности, является *предваряющий*, или *прогнозирующий* контроль, дающий обучающемуся как субъекту деятельности возможность предвосхищать результаты еще не осуществленного, дискурсивного планируемого действия. Проигрывая во внутреннем плане последовательность действий, необходимых для решения учебной задачи, прогнозируя возможные результаты деятельности, учащийся с помощью этой формы контроля может выделить наиболее трудные для него этапы решения учебной задачи, наметить пути его совершенствования.

Учителями чаще всего используется итоговый вид контроля успеваемости обучающихся. Он проводится в конце изучения темы, оставляя мало времени на коррекцию. Это не способствует выработке необходимых универсальных учебных действий, в том числе навыков самоконтроля. Для того чтобы обучающийся освоил все описанные виды контроля по отношению к своей деятельности, он должен выполнять его регулярно. Без применения компьютерных технологий учителю трудно организовать такую работу ученика. Компьютер в этом случае служит дополнительным компонентом учебного процесса. Это то новое, что принесли с собой компьютерные технологии в образование. Компьютер выступает не просто как средство обучения, а выполняет функции учителя. Современные обучающие компьютерные программы позволяют организовать работу ученика с учетом потребностей именно данного ученика и цели, которую ставит на урок учитель. С помощью этих программ можно организовать самостоятельное освоение материала, пошаговую отработку основных алгоритмов, объективное обоснование получаемой оценки знаний (т.е. с оцениванием конкретных составляющих), провести как общую проверку знаний, так и всех составляющих.

Большое значение для формирования самоконтроля учащихся имеют компьютерные оболочки, направленные на широкий спектр действий. Рассмотрим в этом отношении возможности компьютерной динамической среды *Живая математика*. Обычно обучающая программа устроена так, что работа в ней отличается от работы на уроке в безкомпьютерном режиме лишь тем, что ученик может работать в индивидуальном темпе, выбирать самостоятельно порядок освоения материала (либо он сначала хорошо осваивает теорию, затем вырабатывает умения и отрабатывает навыки на практических заданиях, либо, наоборот, начинает с практических заданий и пошагово ищет ответы на возникающие вопросы в теории). *Живая математика* позволяет организовывать учебную деятельность отличным от традиционного способом. Ученик может получать знания в процессе выполнения задания, не пользуясь теоретическими подсказками, а приобретая их самостоятельно, отталкиваясь от основных понятий и правил. Организовать самоконтроль учащихся при использовании *Живой математики* на уроке возможно, используя встроенные функции. Например, отрабатывая понятие параллелограмма, ученик, опираясь на определение параллелограмма, может проверять параллельность противолежащих сторон, равенство противолежащих сторон и углов, положение точки пересечения диагоналей. В данном случае, если при построении ученик пренебрег строгим следованием определению параллелограмма, то и свойства параллелограмма ему увидеть не получится, а значит, и решить связанные с ними задачи. При решении задач на геометрическое место точек *Живая математика* исключает небрежность в соблюдении всех условий задачи. Ученик уже не сможет схитрить, если у него что-то не получается, он должен решить эту проблему, чтобы двинуться дальше. Учитель же должен так продумывать задания, чтобы ученик мог контролировать правильность его выполнения на каждом этапе. Например, в случае с тем же параллелограммом, задание не должно ограничиваться только его построением. Можно провести какие-либо измерения, вычисления или дополнительные построения.

Например, в среде *Живая математика* решить задачу: «*Точка, лежащая внутри параллелограмма, соединена со всеми его вершинами. В каком отношении друг к другу находятся площади противолежащих треугольников?*». Задача проста в решении, когда под рукой есть *Живая математика*, но только в том случае, если при построении параллелограмма ученик не допустил никаких вольностей и построил его согласно признакам или определению на парах параллельных прямых. В данном случае учитель не ставит цели доказательства полученного результата, а цель заключается в отработке основных понятий. Такого плана задания позволяют вырабатывать у учащихся навык процессуального или пошагового контроля действий. Компьютер позволяет решать такие задачи в гораздо большем объеме, чем можно было бы это сделать без него, а значит, учащийся получает возможность, прорешав достаточное количество однотипных задач, вырабатывать интуицию, делать общие выводы о свойствах объектов. Это будет способствовать выработке навыков *прогнозирующего* контроля.

Описанные выше возможности *Живой математики* в обучении школьников применимы не только в обучении геометрии, но и алгебре. Так, в среде *Живая математика* можно проводить исследование свойств функций, привлекать учащихся к самостоятельному их описанию, применению к решению задач. Например, в *Живой математике* можно производить решение уравнений, а с помощью анимации решение уравнений с двумя неизвестными, параметрами. При этом ученик может самостоятельно вывести принцип решения уравнений разного типа, определить допустимые области значений неизвестных, параметров, функций. Ученики должны самостоятельно построить компьютерную модель для решения данной задачи, а значит, разбить решение на составляющие, провести анализ, четко соблюсти все условия. Причем, выполняя решение за компьютером, невозможно какие-то шаги пропустить, сославшись на их выполнение в уме.

Применение компьютера в учебном процессе, с одной стороны, позволяет обеспечить непрерывный контроль действий учащихся, чего не хватает на обычном уроке. С другой стороны, этот контроль осуществляется негласно и самим учеником с помощью компьютера. Это дает возможность ученику самостоятельно исправить ошибки до оглашения результата работы, что стимулирует ученика к поиску, исследовательской деятельности. Ученик с помощью пошагового выполнения задания и строгого соблюдения всех этапов точно может определить место ошибки, если она есть и исправить ее. Это формирует у обучающегося представление о важности пошагового контроля своих действий и самоконтроля в целом, способствует выработке навыков самоконтроля.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В 5–6 КЛАССАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ *ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА*

Д.В. Михиенко, И.Н. Фиряго

Повышение мотивации, среда Живая математика.

В статье рассматриваются приемы повышения мотивации с помощью различных занимательных методов с использованием компьютерной среды *Живая математика*. Наглядно представлены конкретные примеры.

METHODS OF INCREASING MOTIVATION IN TEACHING OF MATHEMATICS IN 5–6 CLASSES WITH THE USE OF A COMPUTER ENVIRONMENT *LIVING MATHEMATICS*

D.V. Mikhienko, I.N. Viryago

Motivation, environment, Living mathematics.
The article considers the methods of improving motivation, through a variety of entertaining methods, with the use of a computer environment *Living mathematics*. Clearly presents specific examples.

Мотивация учения, то есть интерес к учебному предмету, является основой осуществления любой формы дифференциации обучения. При обучении математике необходимо пользоваться всеми средствами формирования интереса к предмету – и внутренними, и внешними, такими, например, как система динамической геометрии *Живая математика*.

В своей книге В.А. Гусев выделяет несколько трактовок понятия «мотивация учения». Наиболее распространенным подходом к трактовке мотивации, по его мнению, является толкование мотивации учения как совокупности мотивов учения.

Второй подход к определению мотивации учения связан с рассмотрением мотивации как побуждений.

Третий подход состоит в толковании мотивации как свойства, компонента, качества личности [1].

И еще один из подходов (по И. Герберту): «интерес» – это синоним учебной мотивации. Если рассматривать все обучение в виде цепочки: «хочу – могу – выполняю с интересом – личностно значимо каждому», то мы видим, что интерес стоит в центре этого построения. Так как же сформировать его у ребенка?

Занимательность материала.

Под занимательностью на уроке понимаем те компоненты урока (способы подачи учебного материала, специфические свойства информации и заданий, связанные с учебным материалом, а иногда и с организацией обучения), которые содержат в себе элементы необычайного, удивительного, неожиданного, комического, вызывают интерес у школьников к учебному предмету и способствуют созданию положительной эмоциональной обстановки учения [3].

Что учитывает учитель для создания занимательности на уроке?

Во-первых, всю занимательность обучения (как и мотивацию) принято делить на «внешнюю» (не связанную с содержанием урока) и «внутреннюю», причем «внутренняя» занимательность предпочтительнее «внешней» и удельный вес ее должен постепенно увеличиваться.

Во-вторых, все материалы занимательного характера обычно разбивают на три группы: материалы, занимательные по форме; материалы, занимательные по содержанию; материалы, занимательные и по форме, и по содержанию.

В-третьих, основу занимательности, используемой на уроках, должны составлять задания, непосредственно связанные с программным материалом [3].

На какие группы можно разбить материалы занимательного характера? Положим в основу классификации связь с учебным материалом и воздействие на мыслительную деятельность учащихся.

Получаем следующее разбиение:

− организационная занимательность;

− информационная занимательность;

− внеучебные задания занимательного характера;

− учебные занимательные задания [2].

Учебные задания занимательного характера ценны тем, что они наряду с привитием школьникам интереса к учению способствуют также определенному накоплению учебных знаний, умений и навыков.

Рассмотрим следующие приемы занимательности, которые существенно используют среду *Живая математика*.

1) «Исправь ошибку».

Варьируются задания, рисунки, схемы, но учащиеся знают, что необходимо увидеть знакомые фигуры, их элементы, символы, формулы. Установить логические связи между ними, выявить и изложить идею, заложенную («закодированную») в этом рисунке, графике, модели. Иногда выдвигается своя идея, не менее интересная.

Методическая ценность приема:

– активное включение в работу всех учащихся;

– свобода выбора деятельности (ученик не привязан к конкретной задаче, а выбирает факты, ему знакомые и понятные);

– обеспечивается системность знаний и умений;

– обнаруживается проблема, решение которой, возможно, связано с исследованием каких-либо фактов (вопрос для исследования ставят сами учащиеся);

– развитие математической «зоркости», формирование произвольного внимания.

На рис. 1 представлены динамические чертежи четырех углов. В соответствии с условием задания известно, что ученик верно измерил каждый из них (например, с помощью транспортира или опции «величина угла» среды *Живая математика*), но из-за невнимательности, подписывая рисунок, перепутал углы. Предлагается с помощью мышки, перемещая тексты с обозначениями величин углов, исправить ошибку.

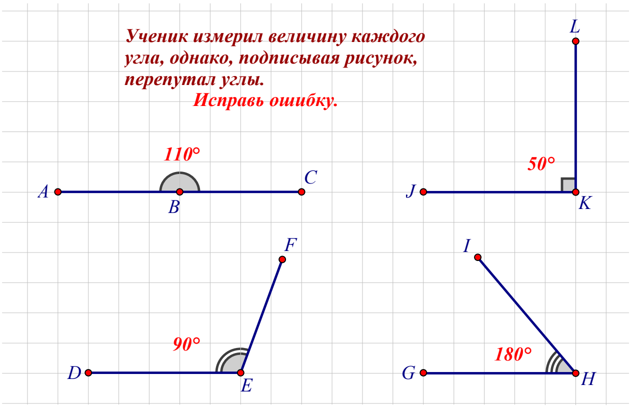


Рис. 1

В следующем задании (рис. 2) учащимся предлагается, уже не используя транспортир и измерительные опции среды *Живая математика*, а, ограничиваясь лишь перемещением фигур по рабочему полю и сравнивая их с помощью наложения, расположить углы в порядке возрастания.

2) «Прочитай геометрический рисунок».

Чтобы восстановить пример, ученик должен проанализировать ситуацию, выделить существенные моменты в ней, вспомнить правила, проявить определенную сообразительность. Проводимый анализ в свою очередь ускоряет формирование навыка и запоминание правил.

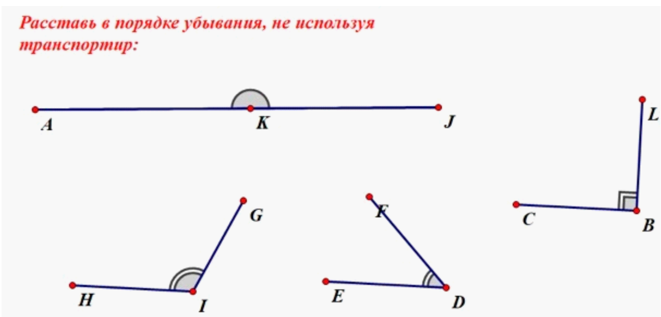


Рис. 2

В качестве примера рассмотрим задание (рис. 3), в котором учащимся предлагается восстановить координатный луч (т.е. найти начало координат и единичную точку).

Рис. 3

Хорошо известно, что ничто так не привлекает внимание и не стимулирует работу ума, как удивительное. Поэтому нами используются такие приемы, которые стимулируют внутренние ресурсы – процессы, лежащие в основе интереса.

3) «Исследовательская задача».

Использование конструктивных и динамических возможностей *Живой математики*, а также возможностей создания в этой среде собственных инструментов и компьютерной анимации позволяет учителю при обучении геометрии в школе опереться на богатый арсенал исследовательских задач, одна из которых представлена на рис. 4.

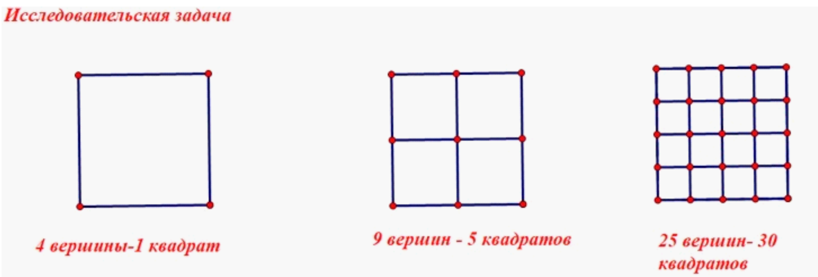


Рис. 4

На практике мы убедились, что перечисленные приемы и методы обучения способствуют формированию компонента мотивационной сферы учения – эмоций и интереса.

Учение только тогда станет для детей радостным и привлекательным, когда они сами будут учиться: проектировать, конструировать, исследовать, открывать, т.е. познавать мир в подлинном смысле этого слова. Познание через напряжение своих сил, умственных, физических, духовных. А это возможно только в процессе самостоятельной учебно-познавательной деятельности на основе современных педагогических технологий.

И какими бы знаниями мы ни обладали, какими методиками не владели, без положительной мотивации, без создания ситуации успеха на уроке, последний будет обречен на провал, пройдет мимо сознания учащихся, не оставив следа в нем.

Занимательность материала тесно связана с мотивацией его изучения, поэтому важно использовать занимательный материал на уроках. Но использовать его не бездумно, а в соответствии с программным материалом. При этом надо избегать следующих ошибок:

– бездумно переносить на урок занимательные материалы из внеучебной деятельности со школьниками;

– неоправданно много внимания уделять зрелищности и эффектности материала;

– избегать размышлений над вопросом об органичности включения того или иного занимательного материала в содержание урока;

– рассматривать только готовые занимательные материалы, не предпринимая попыток по самостоятельному их созданию.

Учебные задания занимательного характера ценны тем, что они не только прививают интерес к учению, но и способствуют также определенному накоплению учебных знаний, умений и навыков.

Библиографический список

1. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Вербум-М, Академия, 2003.
2. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под науч. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. М.: Дрофа, 2005.
3. Шуба М.Ю. Занимательные задания в обучении математике. М.: Просвещение, 1994.

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ. МОДУЛЬ «УРАВНЕНИЯ»

Т.В. Козловская

Подготовка к экзаменам, уравнения, базовый, профильный уровень, отбор корней, программа Geometr's Sketchpad.

Рассматривается подход к организации повторения решения уравнений для подготовки к ЕГЭ с использованием разноуровневых упражнений. Приводятся примеры системы заданий, способствующих осознанному решению уравнений, позволяющие учащимся справиться с решением уравнений на экзаменах. Все рисунки выполнены с использованием программы *Geometr's Sketchpad* и взяты с экрана компьютера.

PREPARATION FOR THE UNIFIED STATE EXAMINATION ON MODULE «EQUATIONS» OF MATHEMATICS

T.V. Kozlovskaya

Preparation for exams, equations, basic profile level, selection of roots, Geometr's Sketchpad.

An approach to the organization of the repetition of the solution of equations for the preparation for the unified state examination using different levels of exercises is considered. Examples of the system of tasks that contribute to conscious decision of the equations are

given, allowing students to cope with the solution of equations in examinations. All graphics are made using program *Geometr's Sketchpad* and taken from the computer screen.

Каждый учитель знает, что основная подготовка к экзаменам осуществляется на уроках. Консультации помогают обобщить и систематизировать материал, показать его применение в разных ситуациях, обнаружить внутрипредметные и метапредметные связи. Но как бы хорошо не усвоили на уроках тему учащиеся, со временем что-то забывается, поэтому необходимо материал повторять. Повторять мы предпочитаем по модулям.

Умение решать уравнения и неравенства проверяется при сдаче как базового, так и профильного экзамена по математике в 11 классе. Причем задания предусматривают не только умение решить предложенное уравнение, но и уметь составить и исследовать математическую модель. Модуль «Уравнения» обширен. Учащиеся должны показать умение решать линейные, квадратные, дробно-рациональные, простейшие иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения (задание 7 базового уровня, задание 5 профильного уровня, здесь и далее номера заданий указаны по [2]). Задания повышенного уровня сложности (задания 10, 11) также приводят к решению уравнений (включая и степенные). Задание 13 повышенной степени сложности проверяет умение решать тригонометрические, логарифмические, показательные, комбинированные уравнения и их системы, производя отбор корней из указанного промежутка или по ОДЗ (область допустимых значений). Более сложные задания 15 и 17 также часто связаны с решением уравнений. С учетом контингента учащихся классов, в которых работала автор последние годы, удавалось научить всех учащихся решению уравнения базового уровня и хотя бы 60–70 % учащихся решению задания 10. С заданием 13 планируется научить справляться примерно 40 % учащихся. Для достижения этих целей система повторения организуется регулярно, начиная с 10 класса. При повторении и обобщении материала целесообразно применять парную работу, работу в группах, хороший результат дает применение модульной технологии. На каждом уроке проводятся «ЕГЭ-минутки», связанные с повторением некоторой темы. Итак, начинаем повторять тему по видам уравнений.

10 класс. Линейные, квадратные, дробно-рациональные, тригонометрические уравнения.

11 класс. Осень. Решение уравнений через решение КИМов (КИМ – контрольно-измерительные материалы).

Февраль – март. Все уравнения задания 5. Задания 10, 11, 13. Задание 13 решаем до начала экзаменов, оно включается в консультации, в домашние работы для желающих.

Например, повторяем решение иррациональных уравнений. Запланировано повторение темы на трех уроках, включая решение простейших уравнений во время «ЕГЭ-минуток».

Урок 1.

1. Найдите корень уравнения: $\sqrt{15-2x}=3$.

2. Найдите корень уравнения: $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$.

3. Найдите корень уравнения: $\sqrt[3]{x-4}=3$.

Урок 2.

4. Решите уравнение: $\sqrt{6+5x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5. Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Урок 3.

6. Найдите корень уравнения: $\sqrt{-4-5x}=4$.

7. Решите уравнение: $\sqrt{\dfrac{1}{15-4x}}=0,2$.

8. Найдите корень уравнения: $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3}}=5$.

9. Найдите корень уравнения: $x=\sqrt{-x+2}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Сначала повторяем алгоритм решения иррационального уравнения. Учащиеся обычно помнят, что обе части уравнения нужно возвести в ту степень, которая позволит освободиться от корня. Но забывают, что это преобразование не является тождественным, могут появиться посторонние корни. Еще раз перечисляем тождественные преобразования уравнений (перенос слагаемых из одной части уравнения в другую со сменой знака слагаемого, умножение и деление обеих частей уравнения на число, не равное нулю). Вспоминаем, что при решении иррационального уравнения необходимо делать проверку или находить ОДЗ и проводить отбор корней. После небольшого обсуждения приступаем к решению уравнений. На первых двух уроках уравнения на доске решают желающие учащиеся, учитель наблюдает за остальными и подмечает тех, кто испытывает затруднения, оказывает им необходимую помощь. Иногда к слабоуспевающему учащемуся «прикрепляется» консультант, который на уроке или в дополнительное время объясняет отстающему непонятные моменты. На третьем уроке часто формируют микрогруппы, в которых учащиеся решают уравнения, на доске показывают решения те учащиеся, которые испытывали затруднения на предыдущих уроках. На этих же уроках аналогичные уравнения включаются в домашнюю работу и проверяются на следующем уроке обязательно перед всем классом. После повторения проводится диагностическая работа базового уровня (решить пять уравнений, подбираются разные). Учащиеся, не справившиеся с заданием, находятся на индивидуальном контроле. К этому времени мы уже повторили решение линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений. На спецкурсе проводим диагностическую работу по решению этих типов уравнений. Кроме заданий на непосредственное решение уравнений, полезно предложить следующие упражнения:

1) является ли число x_0 корнем уравнения:

а) $\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}, x_0=4$,

б) $\sqrt{1-x}=-\sqrt{1+x}, x_0=0$?

2) не решая уравнения, объясните, почему каждое из них не может иметь корней

а) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=-2$

б) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}=-4$

в) $\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}=-1$ [1].

Если проанализировать решаемость задания 5 с 2014 по 2016 г., то видим, как разнятся результаты. В 2014 г. верных решений было 79,3 %, в 2015 г. – 31,9 %, в 2016 г. – 62,7 %. [3]. В 2015 г. уравнение имело посторонние корни, поэтому процент верных решений резко понизился. Чтобы избежать похожей ситуации, к дробно-рациональным уравнениям, иррациональным уравнениям, логарифмическим уравнениям нужно относиться с особым вниманием, напоминая учащимся об ограниченности области допустимых значений таких уравнений. Включать время от времени эти уравнения в домашние, проверочные работы, в «ЕГЭ-минутки». Аналогичным образом повторяем решение основных типов простейших уравнений.

С заданием 13 сначала работаем на уроках в 10 классе, изучая методы решения тригонометрических уравнений. В это же время знакомимся с различными способами отбора корней. В 11 классе учащиеся, решая КИМы, снова встречаются с такими уравнениями. Изучив решение показательных, логарифмических уравнений на уроках, возвращаемся к заданию 13. На консультациях:

1) повторяем решение тригонометрических уравнений с отбором корней по указанному промежутку;

2) рассматриваем решение тригонометрических уравнений с нахождением ОДЗ и отбором корней по указанному промежутку;

3) решаем показательные и логарифмические уравнения с отбором корней по указанному промежутку;

4) решаем комбинированные уравнения с отбором корней по указанному промежутку.

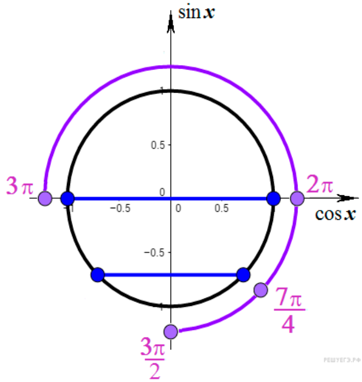
Анализ ЕГЭ по математике по тувинскому региону показал, что с каждым годом решаемость задания 13 падает и в 2016 г. составила 7,42 %, тогда как в 2014 г. она составляла 32,5 % [3]. Формирование навыков решения задания 13 начинаем с решения тригонометрических уравнений, не требующих сложных преобразований. Подбираются уравнения на использование формул приведения, формул двойного угла, тригонометрических тождеств. Опыт подсказывает, что учащиеся испытывают затруднения при решении уравнения на стадии отбора корней. Поэтому на первых порах рассматриваем промежутки с положительными углами. Примерами таких уравнений могут служить приведенные ниже уравнения 1, 2. Решая уравнения задания 13, можно использовать разные способы отбора корней.

1. а) Решите уравнение:

$$\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.



а) Имеем:

$1-2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-1=0, \qquad \sin x(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2})=0.$

Либо $\sin x=0,\ x=\pi k,$

либо $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k.$

б) На указанном промежутке лежат точки $2\pi,\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{4}.$

Ответ:

а) $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\quad x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad x=\pi k$

б) $2\pi, 3\pi, \frac{7\pi}{4}.$

2. а) Решите уравнение: $6\cos^2 x-7\cos x-5=0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;2\pi].$

Решение.

а) Сделаем замену $\cos x=y$, получим квадратное уравнение $6y^2-7y-5=0$, корнями которого являются числа $y=-\frac{1}{2}$ и $y=\frac{5}{3}$.

Уравнение $\cos x = \frac{5}{3}$ не имеет решений, а из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим корни $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;\ 2\pi]$. Решим неравенства:

$$-\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le k \le \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$k = 0$ или $k = 1$.

$$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \le k \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.$$

Соответствуют найденным значениям параметров корни $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

Приведенные ниже уравнения 3, 4 требуют отбора корней по ОДЗ уравнения. Учащиеся часто забывают находить ОДЗ и когда промежуток, к которому должны принадлежать корни уравнения, не задан явно, не производят отбора. Поэтому повторение решения простейших уравнений, несомненно, будет полезным.

3. Решите уравнение: $\dfrac{4\cos^2 x + 8\sin x - 7}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0.$

Решение. Уравнение равносильно системе:

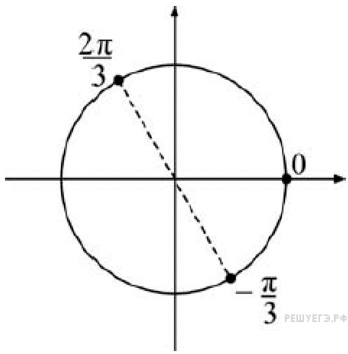
$$\begin{cases} 4\cos^2 x + 8\sin x - 7 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x = \dfrac{3}{2}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Уравнение $\sin x = \dfrac{3}{2}$ решений не имеет. Учитывая, что $\operatorname{tg} x < 0$, получаем: $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Решите уравнение: $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$.

Решение.



Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$. Поэтому множитель $\sqrt{\cos x}$ положителен. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\cos x - 1 = 0$, тогда $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Второй случай: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, тогда $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Учитывая условие $\cos x > 0$, получаем, что числа $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ не являются решениями данного уравнения.

Ответ: $2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решение показательных уравнений часто приводит к ответам, представленным в виде логарифма какого-то числа. Сравнивая такие числа, мы используем монотонность логарифмической функции.

5. а) Решите уравнение: $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $3 \cdot 9^{(x-1)} - 8 \cdot 3^{(x-1)} + 5 = 0$.

Пусть $t = 3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде: $3t^2 - 8t + 5 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = \frac{5}{3}$.

При $t = 1$ получим: $3^{x-1} = 1$ откуда $x = 1$.

При $t = \frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1} = \frac{5}{3}$ откуда $x = \log_3 5$.

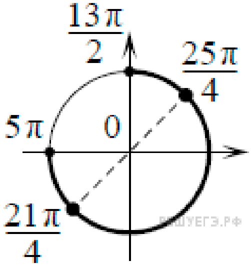
б) Корень $x = 1$ не принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1 < \log_3 5$ и $\log_3 5 < \log_3 9 = 2 < \frac{7}{3}$, корень $x = \log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) 1, $\log_3 5$; б) $\log_3 5$.

6. а) Решите уравнение: $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.



а) Преобразуем исходное уравнение (учащиеся должны понимать, что разделив обе части уравнения на выражение $3^{\sin x}$, мы не теряем корни, т.к. ни при каких значениях переменной x выражение $3^{\sin x}$ не может равняться нулю, ноль не входит в область значений показательной функции).

$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} \Leftrightarrow 5^{\cos x} = 5^{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \dfrac{13\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\dfrac{21\pi}{4}, \dfrac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, б) $\dfrac{21\pi}{4}, \dfrac{25\pi}{4}$.

Уравнения задания 13 очень разнообразны по внешнему виду, хотя решения могут быть довольно стандартными.

7. а) Решите уравнение:

$2\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 4 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Обозначим $\log_2(2\cos x)$ за t.

Получим: $2t^2 - 9t + 4 = 0, t = 4$ или $t = \dfrac{1}{2}$,

$\log_2(2\cos x) = 4$ или $\log_2(2\cos x) = \dfrac{1}{2}$, $2\cos x = 16$ или $2\cos x = \sqrt{2}$.

Первый случай невозможен.

Во втором имеем: $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$.

б) На указанном промежутке лежит точка $-\dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $-\dfrac{7\pi}{4}$.

Задания такого типа можно найти в различных источниках по подготовке к экзаменам (приведенные в статье уравнения взяты на сайте Дмитрия Гущина «Решу ЕГЭ»). Учителю важно включать разобранные на консультациях задания в проверочные, домашние работы и обязательно проверять их решение. Мы практикуем также диагностические работы по повторению в конце каждого месяца.

Библиографический список

1. Р.Д. Лукин, Т.К. Лукина, М.С. Якунина. Устные упражнения по алгебре и началам анализа. М.: Просвещение, 1989. С. 68.
2. Сайт Дмитрия Гущина «Решу ЕГЭ. Математика профильный уровень».
3. Троякова Г.А. Анализ ЕГЭ по математике по тувинскому региону. Кызыл, 2016. Вып. 9.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАНТОГРАФА КАК СРЕДСТВО ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПОДОБИЕ»

А.В. Корельская, Р.П. Овчинникова

Школьный курс геометрии, подобие, чертежный пантограф, интерактивная геометрическая среда, GeoGebra, динамическая модель, ФГОС.

В статье освещается вопрос организации деятельности учащихся по изучению темы «Подобие» на основе чертежного прибора – пантографа с использованием динамической модели, выполненной в интерактивной геометрической среде *GeoGebra*.

DYNAMIC MODEL OF PANTOGRAPH AS A MEANS OF STUDYING THE THEME «SIMILARITY»

A.V. Korelskaya, R.P. Ovchinnikova

School geometry course, similarity, pantograph, interactive geometry software, GeoGebra, dynamic model, Federal state educational standard.

The article deals with the organization of pupils' activities on studying the theme «Similarity» based on a drawing device «Pantograph» using a dynamic model executed in *GeoGebra* interactive geometry software.

Важность практической реализации полученных геометрических знаний в разных областях жизнедеятельности человека отражена в предметных результатах изучения геометрии ФГОС основного общего образования [8]. Кроме того, в основу обучения положен системно-деятельностный подход, предполагающий подготовку школьников к профессиональной деятельности. В Концепции развития математического образования в РФ [6] также подчеркивается необходимость приобретения школьниками «знаний и навыков, применяемых в повседневной жизни и профессиональной деятельности».

В диссертационном исследовании М.В. Егуповой показано, что прикладные задачи могут быть использованы на различных этапах изучения математических понятий, теорем: введение, усвоение, закрепление. Автором выделены принципы конструирования линии практических приложений математики в школе, систематизированы методические требования к прикладным задачам. Также в исследовании проведен анализ электронных образовательных ресурсов, способствующих реализации практико-ориентированного обучения математике, и сделан вывод, что ЭОР, готовых к использованию, в школе нет. М.В. Егупова ставит перед учителем задачу самостоятельного создания таких ЭОР, так как современный этап развития компьютерных технологий характеризуется наличием большого количества прикладных и инструментальных программных средств, применение которых для создания ЭОР не требует специализированной подготовки в области программирования. Одним из таких средств являются интерактивные геометрические среды.

В связи с этим нам видится новая возможность реализации прикладной направленности обучения геометрии с помощью современных средств обучения – использование динамических моделей реальных инструментов и приборов, работа которых основана на геометрических знаниях.

Рассмотрим возможность знакомства учащихся с прибором «Пантограф» при изучении темы «Подобие» в школьном курсе геометрии 8 класса.

Пантограф – это чертежный прибор, служащий для перерисовки планов и чертежей в том же или измененном масштабе. Пантограф состоит из четырех штанг *AX*, *BX*, *PY* и *PW*, соединенных на концах шарнирами (рис. 1). Штанги образуют параллелограмм *PYXW*. Длины штанг должны быть такими, чтобы точки *A*, *P* и *B* лежали на одной прямой. Скрепленные вершины позволяют штангам изменять величину угла между ними (*YPW*) при сохранении своих длин *PY* и *PW*. Конец *A* штанги *AX* фиксируется. В точку *P* прибора устанавливается обводная игла, а в точку *B* – карандаш. Обводя иглой какое-либо изображение, карандаш будет описывать такое же, но в увеличенном размере. За счет изменения длин штанг регулируется размер получаемого изображения в сравнении с исходным.

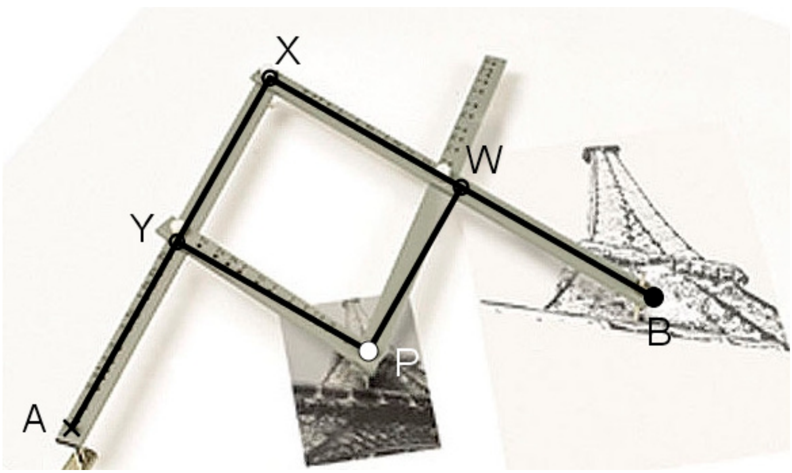


Рис. 1. Пантограф

Преимущественно прибор используется при выполнении различных художественных работ: создании узоров для выжигания или выпиливания, изготовлении панно, резных наличников и др. С помощью пантографа можно легко нарисовать схему, деталь или план местности в нужном масштабе. Прибор был изобретен в 1603 г. немецким астрономом, физиком, механиком и математиком Кристофом Шейнером [7]. Впоследствии пантограф неоднократно модифицировался. В настоящее время разработан 3D-пантограф, создающий копии с сохранением формы пространственных объектов.

Идея включения в содержание школьного курса геометрии пантографа не нова. Так, в учебниках Н.А. Глаголева «Элементарная геометрия» [2] и А.Н. Колмогорова и др. «Геометрия» [5] для 6–8 классов представлено описание прибора. Однако в данных учебниках была продемонстрирована только практическая значимость изучаемого теоретического материала, без решения задач с использованием принципов работы прибора. Мы предполагаем, что именно этот фактор послужил причиной написания В.Л. Гутенмахером статьи в журнале «Квант», содержащей практические задачи о пантографе [3].

Опишем алгоритм построения одной из динамических моделей пантографа в интерактивной геометрической среде *GeoGebra*.

1. Задаем длины штанг пантографа с помощью Ползунков a, b и c.

2. Отмечаем точки A и P. Точку A фиксируем с помощью инструмента *Закрепить объект*.

3. Строим окружность 1 с центром в точке A и радиусом $a+c$.

4. Для фиксации расстояния между точками A и P открываем свойства точки P и в строке *Определение* задаем

команду *ТочкаВнутри(Имя_окружности)*, где *Имя_окружности* – это имя окружности 1 в *GeoGebra*.

5. Строим окружность 2 с центром в точке P и радиусом, равным a.

6. Строим окружность 3 с центром в точке A и радиусом, равным c.

7. Отмечаем точку Y – пересечение окружностей 1 и 2.

8. Проводим луч AY.

9. Строим окружность 4 с центром в точке A и радиусом, равным $b + c$.

10. Отмечаем точку X – пересечение окружности 4 и луча AY.

11. Соединяем точки P и Y отрезком.

12. Через точку X проводим прямую, параллельную PY.

13. Через точку P проводим прямую, параллельную AY.

14. Отмечаем точку их пересечения – точку W.

15. Проводим луч AP.

16. Отмечаем точку пересечения луча AP и прямой XW.

17. Соединяем отрезками точки A и X, B и X, P и W. Модель пантографа готова.

Другой вид модели пантографа может быть получен путем смены ролей точек P и B, изменения мест крепления штанг (рис. 2).

Целями использования динамической модели пантографа являются:

– введение понятия «подобных треугольников» путем демонстрации прибора;

– изучения принципов его работы при решении практических задач.

На этапе введения понятия учащиеся с помощью динамической модели (рис. 2) знакомятся с работой пантографа, экспериментируют с параметрами прибора, изменяя длины штанг, высказывают гипотезы о способах применения прибора.

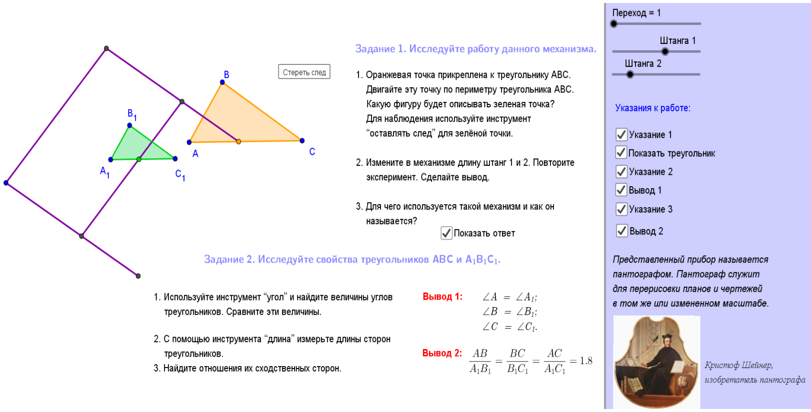


Рис. 2. Чертежный прибор «Пантограф»

Для выполнения исследования свойств получившихся фигур учащимся предлагается стереть следы и отобразить фигуру, полученную в результате работы пантографа при каких-либо значениях параметров штанг. Исследование свойств треугольников заключается в сравнении их сторон и углов. Учащиеся путем измерений и вычислений устанавливают равенство углов треугольников и пропорциональность сходственных сторон, а также могут сказать, что фигуры имеют одинаковую форму. Учитель сообщает, что такие треугольники называются подобными, и дает учащимся задание сформулировать определение понятия подобных треугольников.

Далее учащимся предлагается познакомиться с описанием прибора, примерами его использования (рис. 3) и выполнить исследовательскую работу. В ходе исследовательской работы учащиеся определяют вид четырехугольника, образованного штангами, устанавливают ключевое свойство, необходимое для правильной работы пантографа, и определяют коэффициент увеличения или уменьшения получаемой фигуры (рис. 4).

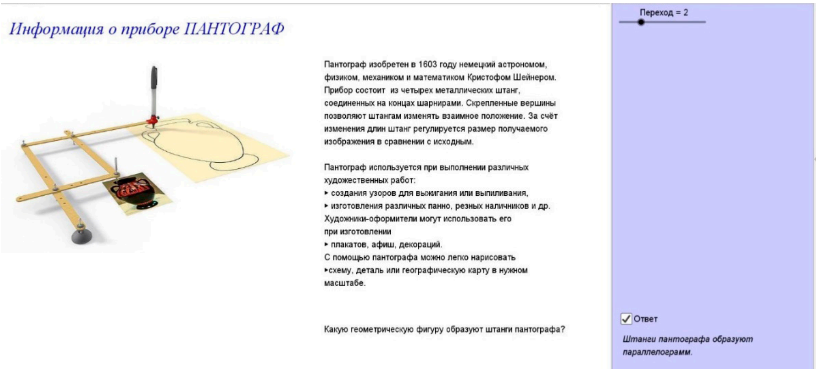


Рис. 3. Внешний вид и описание прибора

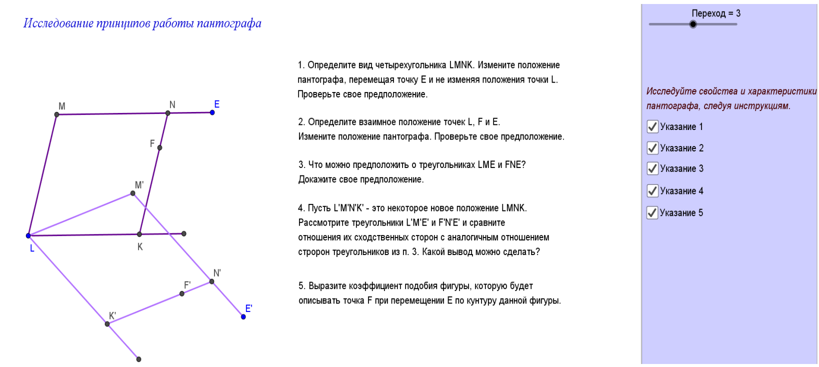


Рис. 4 . Исследование принципов работы пантографа

На этапе решения практических задач предлагаются следующие виды задач:

– исследовать работу четырех динамических моделей приборов (рис. 5), два из которых сконструированы с ошибкой, а именно: не выполняется ключевое свойство пантографа о принадлежности точек L, F и E одной прямой;

– вычислить длины штанг прибора при заданном коэффициенте увеличения / уменьшения и проверить правильность решения задачи с использованием динамической модели (рис. 6).

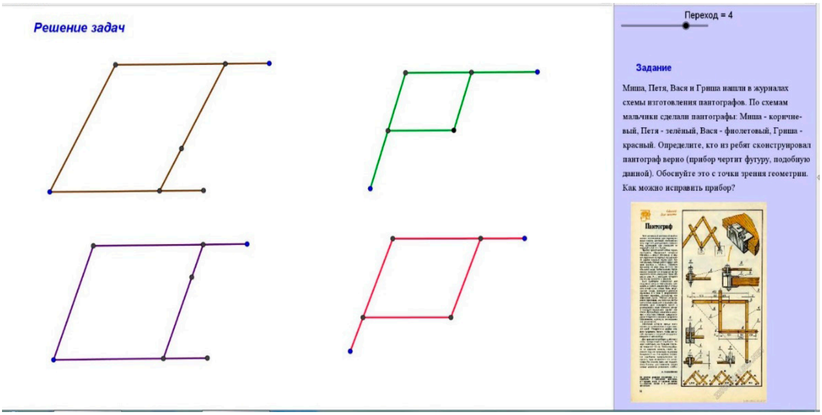


Рис. 5. Исследование работы моделей приборов

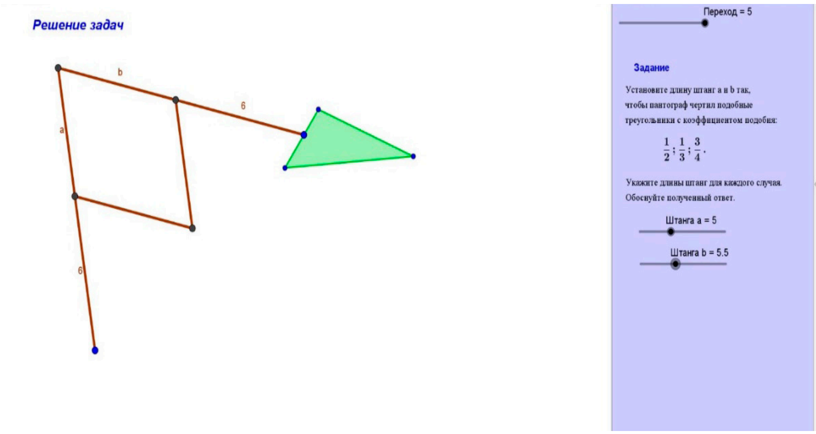


Рис. 6. Вычисление необходимых длин штанг прибора

На заключительном этапе учащимся может быть предложена разработка проекта по созданию собственной динамической модели пантографа с другой конфигурацией и обоснование принципов его работы. В качестве источника информации может быть использовано справочное пособие И.И. Артоболевского [1] и примеры апплетов пантографов, опубликованных на официальном сайте *GeoGebra* [9].

В процессе описанной выше деятельности по изучению прибора «Пантограф», исследованию готовых и созданию собственных динамических моделей приборов и инструментов учащиеся не только приобретают новые знания и навыки, применяемые в повседневной жизни и профессиональной деятельности, у них развивается мотивация к математической деятельности с использованием средств ИКТ, формируются конструкторские и исследовательские умения.

Библиографический список

1. Артоболевский И.И. Механизмы в современной технике. Справочное пособие: в 7 т. Т. 1: Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы. М.: Наука, 1979.
2. Глаголев Н.А. Элементарная геометрия, 6–8 класс. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1954. Ч. 1.
3. Гутенмахер В.Л. Пантограф // Квант. 1977. № 10.
4. Егупова М.В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе: дис. … д-ра пед. наук. 13.00.02. М., 2014.
5. Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия: учеб. пособие для 6–8 кл. ср. школы. М.: Просвещение, 1979.
6. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Министерство образования и науки РФ [Электронный ресурс]. URL: http://минобрнауки.рф/документы/3894.
7. Техническая энциклопедия. Т. 15 (26). Мартенс Л.К. (гл. ред.). М., 1931.
8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс] // Министерство образования и науки РФ. URL: http://минобрнауки.рф/документы/938.
9. Vinkler M. Pantograf 2 [Электронный ресурс]. URL: https://www.geogebra.org/m/a4xBwWJs

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ АКСИОМ В СРЕДЕ *GEOGEBRA*

Г.А. Троякова, П.А. Михалев

Методика преподавания стереометрии, аксиоматический метод, динамическая среда GeoGebra.

Акцент в данной статье сделан на том, что использование динамической математической среды *GeoGebra* и обучение школьников построению сечений призм и пирамид на основе зрительно-познавательного подхода дает возможность максимального использования потенциальных возможностей визуального мышления.

METHODOLOGICAL FEATURES OF CONSTRUCTION SECTIONS BASED ON THE AXIOMS IN THE ENVIRONMENT *GEOGEBRA*

G.A. Troiakova, P.A. Mikhalev

Method of teaching stereometry, axiomatic method, dynamic environment GeoGebra.

The emphasis in this article is based on the fact that the use of the *GeoGebra* dynamic mathematical environment and the training of schoolchildren in the construction of sections of prisms and pyramids on the basis of the visual-cognitive approach makes it possible to maximize the potentialities of visual thinking.

Актуальность данной темы заключается в расширении применения компьютерных технологий в сфере образования, в частности, с использованием динамической математической среды *GeoGebra*. Построение пространственной модели с использованием *GeoGebra* имеют большую наглядность и позволяют проследить все изменения, производимые в объектах на разных этапах решения задачи, что способствует максимальному использованию потенциальных возможностей визуального мышления. Статья является логическим продолжением работы автора [3].

Простейшие позиционные задачи на построение сечений призм и пирамид плоскостью, заданной явно или частично, условно основаны на аксиомах и следствиях из них, что изучается на первых уроках стереометрии в 10 классе. Согласно изучаемому материалу плоскость определяют: 3 точки, не лежащие на одной прямой; 2 пересекающиеся прямые; прямая и точка, не лежащая на ней; 2 параллельными прямые. Именно на этих фактах и свойствах прямых в пространстве школьник должен строить сечения пирамид и призм. Первые опыты таких построений учащимися 10 классов выявили множество проблем, связанных с изображением пространственных фигур на плоскости, часто, например, скрещивающиеся прямые имели общую точку пересечения. При первых попытках построения сечений куба наблюдались построения в виде простого соединения трех точек и изображения треугольника.

Проблему формирования навыков построения сечений многогранников, с точки зрения авторов, наиболее полно реализовать можно с использованием динамической среды *GeoGebra*. Естественно, реализация дидактического потенциала среды *GeoGebra* зависит от умения учителя разрабатывать динамические модели. Эти модели дают возможность:

– Учителю свободно, пошагово демонстрировать построение и комментировать его обоснование (рис.)

Рис. 1

– Учащимся: рассмотреть изображение с разных ракурсов, выделить базовые принципы построения пространственных фигур и их сечений, видеть возможность существования и вид этих сечений в зависимости от задания начального расположения точек M, P, K; проанализировать экспериментальную составляющую построения, реализуемую учителем или учеником; вернуться к любому шагу построения и выяснить проблемы непонимания.

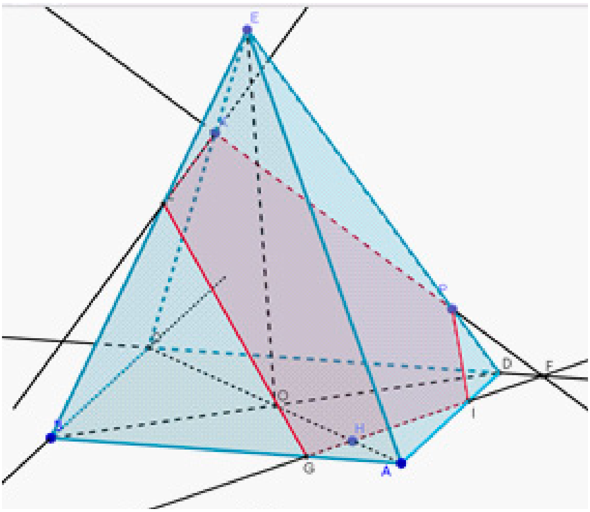


Рис. 2

Можно сказать, что *GGB* – это визуальная лаборатория, позволяющая активизировать резервы визуального мышления, активизировать работу школьника и его интерес к изучению темы. Стиль рассуждений учащихся меняется в нужном направлении, но надо иметь в виду, иногда в ущерб теоретическому обоснованию.

Учащиеся получают домашнее индивидуальное задание на построение сечений трех многогранников; куб, треугольная пирамида, правильная четырехугольная пирамида с разным расположением точек М, Р, К на ребрах, гранях, высоте и на продолжениях ребер. В разных вариантах разные сочетания расположений точек. В оформлении построения сечений предъявляются жесткие требования к обоснованности шагов построения, анализу ситуаций при изменении положения заданных точек. Как иллюстрацию к решению задач предлагается построение реальной модели из бумаги, спичек и пластилина в какой-либо фиксированной ситуации. Последнее задание дает возможность построить связь между реальными объектами пространства и их моделями.

На рис. 3 показано изображение полученного сечения куба в одной из ситуаций.

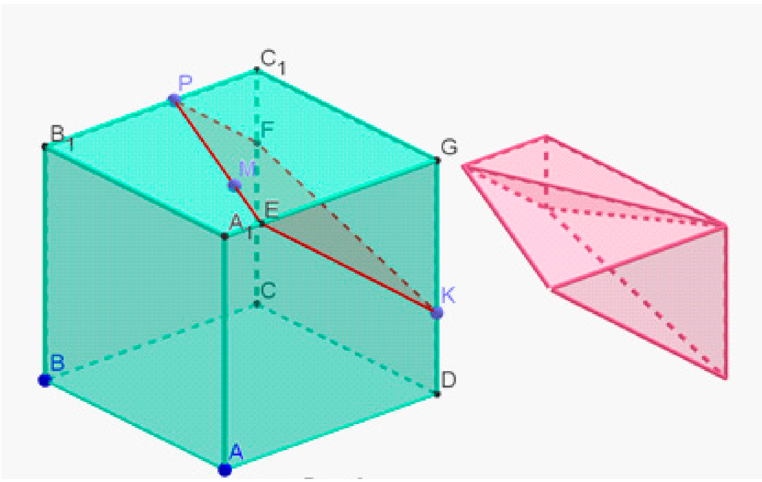


Рис. 3

Обучение на основе зрительно-познавательного подхода [2] с использованием динамической среды *GeoGebra* ведет к формированию навыков обоснованного построения сечений многогранников, способствует максимальному использованию потенциальных возможностей визуального мышления и решает традиционные дидактические задачи.

Библиографический список

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 10–11 класс: учебник. М.: Просвещение, 2014.
2. Далингер В.А. Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода // Вестн. Брян. гос. ун-та.2011. № 1. С. 297–303.
3. Троякова Г.А. Методика использования среды GEOGEBRA при построении сечений некоторых многогранников // Научные труды Тувинского государственного университета. Т. II. Кызыл: РИО ТувГУ, 2014. Вып. XII.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНКОВА Валерия Владимировна – студентка V курса КГПУ им. В.П. Астафьева, профиль «Математика и информатика»;
e-mail: lerchik_5@mail.ru

БУРНАКОВА Мария Викторовна – студентка КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: m.burnakova.cpsgr@gmail.com

БУШАЕВА Татьяна Александровна – студентка II курса магистерской образовательной программы «Информационные и суперкомпьютерные технологии в математическом образовании» КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: tbushaeva@mail.ru

ГАВРИЛОВ Владимир Константинович – кандидат физико-математических наук;
e-mail: gavrilov1009@mail.ru

ГИМАТДИНОВА Галия Нурулловна – аспирант КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МАОУ СШ № 150;
e-mail: mynameisgaliya@rambler.ru

ГОЛУБКОВА Виктория Владимировна – студентка V курса КГПУ им. В.П. Астафьева, направление Педагогическое образование, профили «Математика и информатика»;
e-mail: vikasolnce_92@bk.ru

ДЖАКЕТОВА Сауле Джаксылыковна – старший преподаватель, магистр Аркалыкского государственного педагогического института имени И. Алтынсарина (Казахстан);
e-mail: sauledzh@mail.ru

ЕЛИЗАРОВА Екатерина Юрьевна – старший преподаватель кафедры математики и математического образования НГПУ им. К. Минина;
e-mail: Elizarova-EU@yandex.ru

ЖЕРЕБЦОВА Анастасия Федоровна – студентка КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: stenka97@mail.ru

ЖУРАВЛЕВА Наталья Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе, КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: Zhuravlevanataly@mail.ru

ИРШКО Надежда Юрьевна – студентка V курса КГПУ им. В.П. Астафьева, направление Педагогическое образование, профили «Математика и информатика»;
e-mail: nirshko@mail.ru

КАЗАКОВА Елена Валерьевна – студентка IV курса ИМФИ, КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: boom12345boom@mail.ru

КАЛАЧЕВА Светлана Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания; e-mail: kalacheva_s@mail.ru

КЕЙВ Мария Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания, КГПУ им. В.П.Астафьева;
e-mail: mkejv@yandex.ru

КЛОПОТ Екатерина Евгеньевна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: k_a_t_rina@mail.ru

КОЗЛОВСКАЯ Татьяна Васильевна – учитель математики МБОУ «Хову-Аксынская СОШ»;
e-mail: tania-2609@mail.ru

КОРЕЛЬСКАЯ Александра Викторовна – студентка САФУ им. М.В. Ломоносова;
e-mail: true23-3@yandex.ru.

КУЗЬМИНА Оксана Александровна – студентка V курса КГПУ им. В.П. Астафьева, профиль «Математика и информатика»;
e-mail: roksana_03_09_95@mail.ru

ЛАРИН Сергей Васильевич – профессор, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: Larin_serg@mail.ru

ЛАРИОНЧИКОВА Анна Аркадьевна – студентка КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: larionchikovaa@ gmail.com

МАЙЕР Валерий Робертович – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: mavr49@mail.ru

МАНЧЕНКОВА Елена Олеговна – учитель математики гимназии № 15, выпускница магистратуры КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: Elena_m1609@mail.ru

МАЛЫШЕНКО Татьяна Сергеевна – студентка КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: fon.kotta.tanya@yandex.ru

МИХИЕНКО Дарья Викторовна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МБОУ СШ № 134;
e-mail: mixienko.darya@mail.ru

МИХАЛЕВ Петр Андреевич – студент IV курса физико-математического факультета Тувинского государственного университета, г. Кызыл

ОВЧИННИКОВА Раиса Петровна – старший преподаватель кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, САФУ им. М.В. Ломоносова;
e-mail: r.ovchinnikova@narfu.ru

ПАВЛОВА Мария Александровна – ассистент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, САФУ им. М.В. Ломоносова;
e-mail: m.pavlova@narfu.ru

САМОДУРОВА Валентина Анатольевна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики и информатики Балахтинской СОШ № 1;
e-mail: kozhukhovskaya93@mail.ru

САНАЛОВА Марина Сергеевна – студент I курса магистратуры, направление Педагогическое образование, направленность Инноватика в современном образовании КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель начальных классов, МАОУ СШ № 150 г. Красноярска;

СЕНАШОВ Владимир Иванович – ведущий научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН;
e-mail: sen1112home@mail.ru

СИВУХИНА Елена Александровна – студентка КГПУ им. В.П. Астафьева; sivukhina08@gmail.com, flora08@mail.ru

ТРОЯКОВА Галина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии физико-математического факультета Тувинского государственного университета, г. Кызыл;
e-mail: tga.52@mail.ru.

УСКОВА Анастасия Владимировна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: Nastya.uskova1993@gmail.ru

ФИРЯГО Ирина Николаевна – магистр КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МБОУ СШ №134; e-mail: prediv@mail.ru

ЧЕРНОВА Нина Николаевна – студентка КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: nina_chernova_1999@mail.ru

ЧИЛБАК-ООЛ Сайдыс Васильевна – аспирант КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: ya.saydis@yandex.ru

ШАБАНОВА Мария Валерьевна – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой естественнонаучного образования Московского института открытого образования;
e-mail: shabanovamv@mioo.ru

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы VI Всероссийской
научно-методической конференции
с международным участием

Красноярск, 15–16 ноября 2017 г.

Электронное издание

Редактор *А.П. Малахова*
Корректор *М.А. Исакова*
Верстка *Н.С. Хасаншина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 20.11.17.
Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 14,25