МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

Мальцева Мария Андреевна

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема Компьютерное сопровождение дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»

Направление подготовки/специальность 44.04.01. Педагогическое образование

Магистерская программа Информационные технологии в математическом образовании

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ:

Заведующий кафедрой АГиМП
д.п.н., профессор Майер В.Р.
17.06.2017
(дата, подпись)

Руководитель магистерской программы
д.п.н., профессор Майер В.Р.
17.06.2017
(дата, подпись)

Научный руководитель
к.ф.-м.н. доцент Абдулкин В.В.
16.06.2017
(дата, подпись)

Обучающийся Мальцева М.А.
16.06.2017
(дата, подпись)

Красноярск 2017

Реферат

Диссертационное исследование состоит из 142 страниц, 64 рисунков, 1 таблицы, 1 диаграммы, введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложения.

В данной работе рассматриваются возможности использования компьютерной системы Maple, GeoGebra в обучении линейной алгебры и аналитической геометрии в педагогическом вузе, выявляются дидактические условия и особенности применения компьютерной системы GeoGebra и Maple в обучении линейной алгебры и аналитической геометрии.

Объект исследования: Процесс обучения студентов направления (профиля) образовательной программы «Технология» высшей математике.

Предмет исследования: Компьютерное сопровождение дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология».

Гипотеза исследования: Использование достаточно разнообразного программного обеспечения (СКМ Maple, а также СДМ GeoGebra и «Живая математика». и т.п.) в процессе обучения, позволит повысить уровень сформированности профессиональных компетенций у будущих педагогов, а именно: способность использовать современные методы и технологии обучения; позволит повысить эффективность образовательного процесса. Кроме того, материально-техническая база ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева позволяет реализовать компьютерное сопровождение с использованием программного обеспечения, включающего в себя, в частности, СКМ Maple, а также СДМ GeoGebra и «Живая математика».

Задачи исследования:

1. Изучить роль информационных технологий в процессе обучения;
2. Исследовать разнообразие компьютерного сопровождения в процессе обучения студентов математике;

3. Выявить возможности применения компьютерного сопровождения курса математики для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология».

4. Разработке компьютерного сопровождения дисциплины «Математика» для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»

Научная новизна и теоретическая значимость исследования заключается в:

- Теоретическом обосновании внедрения информационных технологий в процессе подготовки студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы
- Разработать компьютерное сопровождение дисциплины «Математика» для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»

Практическая значимость исследования в разработке компьютерного сопровождение дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология» с использованием достаточно разнообразного программного обеспечения, включающего в себя, в частности, СКМ Maple, а также СДМ GeoGebra.

Содержание

Реферат……………………………………………………………………..2

Введение………………………………………………………………………6

Глава 1. Теоретические предпосылки внедрения информационных технологий в процессе подготовки студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»……………………………………………………………...11

1.1. Роль информационных технологий в процессе обучении............11

1.2. Обзор современных систем компьютерной алгебры и систем динамической математики……………………………………...23

Глава 2. Система компьютерного сопровождения дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»……………………………………………………………...36

2.1. Учебно-тематическое планирование дисциплины «Математика» .36

2.2. Принципы организации компьютерного сопровождения дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»……………………………………………………………...43

2.3. Компьютерное сопровождение дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»……………………………………………………………...47

Заключение…………………………………………………………………..57

Библиографический список…………………………………………….....59

Приложение А. Теоретический и практический материал к дисциплине «Математика»…………………………………………………………..…62

Введение

Актуальность исследования. В начале третьего тысячелетия настоящее мировое сообщество характеризуется рядом особенностей, к которым, прежде всего, относится информатизация общества. Информатизация общества по определению И.В. Роберт – это глобальный социальный процесс, особенность которого состоит в том, что доминирующим видом деятельности в сфере общественного производства является сбор, накопление, обработка, хранение, передача, использование, продуцирование информации, осуществляемые на основе современных средств микропроцессорной и вычислительной техники, а также разнообразных средств информационного взаимодействия и обмена.

Информатизация общества обеспечивает активное использование интеллектуального потенциала общества сконцентрированного в печатном фонде и интеграцию информационных технологий с научной и производственной деятельностью; доступ любого члена общества к источникам достоверной информации, визуализацию представляемой информации.

Информационные технологии (ИТ), как совокупность средств, способов, методов использования информации для получения определенных, заведомо ожидаемых результатов, реализуются с помощью средств вычислительной техники и отличается следующими характерными особенностями:

– реализацией возможностей современных программных средств, функционирующих на базе микропроцессорной и вычислительной техники;

– использованием специальных формализмов для представления знаний в электронной форме;

– обеспечением простоты процесса взаимодействия пользователя с компьютером [12].

Использование ИТ в обучении направлено на увеличение степени автоматизации всех информационных операций и имеет свои цели, методы и средства реализации. Кратко их содержание состоит в следующем. Целью использования информационных технологий в обучении является создание из информационного ресурса качественного информационного учебного продукта, удовлетворяющего потребностям современного педагогического образования. Методами являются методы обработки и передачи данных. Средства могут быть математическими, программными, информационными, техническими и др. При таком определении целей, методов и средств они представляют целостную систему, обеспечивающую целенаправленные создание и отображение информационного продукта (данных, идей, знаний) с наименьшими затратами и в соответствии с закономерностями образовательной системы.

Следует отметить, что федеральный государственный образовательный стандарт, задает новые требования к результатам образования, среди которых «владение опытом построения и использования компьютерно-математических моделей» [16].

Одним из важнейших направлением информатизации вузовского образования является решение прикладных научно-технических задач, среди которых задачи математического моделирования (имеется в виду его сугубо прикладной аспект) составляют видную долю. [10].

Информатизация современного педагогического образования выявила необходимость в разработке методики применения компьютерного сопровождения для студентов, обучающихся по 44.03.01. «Педагогическое образование», профиль «Технология». Компьютерные сопровождения представляют собой предметно-ориентированные пакеты программ, позволяющие пользователям получать необходимую им информацию.

Благодаря наличию компьютера можно не только быстро выполнять сложные поисковые процедуры, но и реализовать обучающие функции, связанные с формированием у пользователя умения применять полученные сведения.

Кроме того, существует ряд весьма веских причин необходимости внедрения информационных технологий в образовательный процесс при изучении физико-математических дисциплин. Эти причины, в основном, имеют внешний по отношению к физико-математическому образованию характер и вызваны глобальными изменениями в структуре общества, общественного сознания и интенсивным процессом информатизации общества. Среди этих причин [8]:

1. непрерывно и быстро растущие потоки информации, и быстрое ее устаревание;

2. сокращение учебных часов на изучение фундаментальных дисциплин с одновременным расширением списка изучаемых вопросов;

3. перенос центра тяжести учебного процесса на самостоятельную работу студентов и учащихся;

5. интеграция различных областей знаний и появление новых направлений науки и технологий;

6. увеличение числа специальностей при одновременном уменьшении числа студентов.

Таким образом, система образования должна формировать новую информационную культуру и новое информационное мировоззрение. Знакомство учащихся с ИТ вообще и специализированными системами компьютерной математики (СКМ) и графической поддержки (MathCad, MathLab, Maple, Mathematica, AutoCad и др.) в частности, является важнейшим направлением в решении задачи информатизации на занятиях дисциплины «Математика» в учебном плане подготовки студентов ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева. Одним из способов внедрения ИТ в процесс обучения, является его использование при изучении физико-математических дисциплин, а конкретно – на занятиях дисциплины «Математика», так как использование на этих занятиях информационных технологий и, особенно, систем компьютерной математики (СКМ) и графической поддержки, дает учащимся так необходимую им наглядность, нужную для выполнения каких-либо заданий. Итак, внедрение в образовательный процесс ИТ становится одним из важнейших путей повышения мотивации обучения студентов, обучающихся по направлению 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль «Технология», что делает данное исследование актуальным.

Диссертационная работа посвящена разработке конспектов занятий с компьютерным сопровождением курса математики для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология».

Основная цель работы: Разработать компьютерное сопровождение курса математики для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. "Педагогическое образование" направленность (профиль) образовательной программы "Технология"».

Объект исследования: Процесс обучения студентов направления (профиля) образовательной программы «Технология» высшей математике.

Предмет исследования: Компьютерное сопровождение дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология».

Гипотеза исследования: Использование достаточно разнообразного программного обеспечения (СКМ Maple, а также СДМ GeoGebra и «Живая математика». и т.п.) в процессе обучения, позволит повысить уровень сформированности профессиональных компетенций у будущих педагогов, а именно: способность использовать современные методы и технологии обучения; позволит повысить эффективность образовательного процесса.

Кроме того, материально-техническая база ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева позволяет реализовать компьютерное сопровождение с использованием программного обеспечения, включающего в себя, в частности, СКМ Maple, а также СДМ GeoGebra и «Живая математика».

Задачи исследования:

1. Изучить роль информационных технологий в процессе обучения ;
2. Исследовать разнообразие компьютерного сопровождения в процессе обучения студентов математике;
3. Выявить возможности применения компьютерного сопровождения курса математики для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология».
4. Разработать компьютерное сопровождение дисциплины «Математика» для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»

ГЛАВА 1. Теоретические предпосылки внедрения информационных технологий в процессе подготовки студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательная программа «Технология»

1.1. Роль информационных технологий в процессе обучения

Современное общество требует перехода к принципиально новому уровню доступности высококачественного образования. Состояние сферы образования России и тенденции развития общества требуют безотлагательного решения проблемы опережающего развития системы образования на основе информационных технологий, создания в стране единой образовательной информационной среды.

Создание информационной среды, удовлетворяющей потребности всех слоев общества в получении широкого спектра образовательных услуг, а также формирование механизмов и необходимых условий для внедрения достижений информационных технологий в повседневную образовательную и научную практику является ключевой задачей на пути перехода к информационному обществу.

Одним из приоритетных направлений процесса информатизации современного общества является информатизация образования. Этот процесс инициирует:

- совершенствование механизмов управления системой образования на основе использования автоматизированных банков данных научно-педагогической информации, информационно-методических материалов, а также коммуникационных сетей;

- совершенствование методологии и стратегии отбора содержания, методов и организационных форм обучения, воспитания, соответствующих задачам развития личности обучаемого в современных условиях информатизации общества;

- создание методических систем обучения, ориентированных на развитие интеллектуального потенциала, формирование умений самостоятельно приобретать знания, осуществлять экспериментально-исследовательскую деятельность;

- внедрение разнообразных видов самостоятельной деятельности по обработке информации;

- создание и использование компьютерных тестирующих, диагностирующих методик контроля и оценки уровня знаний обучаемых [2].

Информатизация предполагает сущностное изменение содержания, методов и организационных форм образования.

При этом должна быть решена проблема содержания образования на современном этапе, соотношение традиционных составляющих учебного процесса и новых информационных технологий, новых взаимоотношений студентов, педагогов и образовательной среды.

В последнее время произошли качественные изменения в использовании информации и информационной среды в процессе обучения. Формирование среды обучения – сложный процесс, на который влияют как социально-исторические факторы, так и атмосфера в ВУЗе и личность педагога. Процесс обучения происходит в конкретной информационной среде и связан с передачей определенных знаний, умений и схем поведения [2].

Принципиальным этапом в моделировании и конструировании информационных сред стало использование компьютера. Перед педагогом стоит основная задача: использовать компьютер как технологическое средство в организации учебной и воспитательной работы. Применение ПК дает возможность преподавателям поставить педагогический процесс на качественно новый уровень, т. к. процесс обучения носит более деятельностный и операционный характер, а методы обучения - активными. Использование информационных технологий придает обучению технологичность, при этом снижаются объем рутинной работы учителя и увеличивается эффективность его труда [6]. При методически грамотном подходе к применению информационных технологий в учебном процессе ВУЗе студенты приобретут умение квалифицированно находить информацию, анализировать полученные знания и оформлять информацию с применением компьютерных приложений. Сегодня практически каждый педагог понимает важность внедрения ИТ в педагогический процесс, видит все преимущества их использования. Применение ИТ позволяют решить такие проблемы, как усилить мотивацию обучения, повысить скорость усвоения знаний, качество обучения, активность учащихся, обеспечить контроль за преподаванием и усвоением, установить тесную обратную связь. Однако сразу возникает вопрос, как учитель, проработавший десять и более лет в школе, сразу будет применять ИТ на уроке. Откуда у него возьмутся базовые навыки работе с ПК? Эффективность компьютерных технологий зависит от того, как мы их используем, от способов и форм применения этих технологий. Как показывает практика, большинство педагогов и преподавателей чаще всего используют на своих занятиях: презентации и видеолекции, уроки с использованием интернет – ресурсов. Анализируя результат, видно, что большая часть педагогов использует лишь малую часть того, что могут дать информационные технологии [2].

Информатизация образования – процесс обеспечения сферы образования методологией и практикой разработки и оптимального использования современных средств ИТ, ориентированных на реализацию целей обучения, воспитания. Этот процесс инициирует совершенствование методологии и стратегии отбора содержания, методов и организационных форм обучения, воспитания, соответствующих задачам развития личности обучаемого в современных условиях информационного общества глобальной, массовой коммуникации; [13].

Процесс информатизации образования в России развивается по следующим четырем основным направлениям [13].

1. Оснащение образовательных учреждений современными средствами информационных технологий (ИТ) и использование их в качестве нового педагогического инструмента, позволяющего существенным образом повысить эффективность образовательного процесса. Начавшись с освоения и фрагментарного внедрения компьютеров в традиционные учебные дисциплины, средства ИТ стала развивать и предлагать педагогам новые средства и организационные формы учебной работы, которые в дальнейшем стали использоваться повсеместно и сегодня способны поддерживать практически все стадии образовательного процесса.

2. Использование современных средств ИТ, информационных телекоммуникаций и баз данных для информационной поддержки образовательного процесса, обеспечения возможности удаленного доступа педагогов и студентов к научной и учебно-методической информации, как в своей стране, так и в других странах мирового сообщества.

3. Развитие и все более широкое распространение дистанционного обучения, позволяющего существенным образом расширить масштабы и глубину использования информационно-образовательного пространства.

4. Пересмотр и радикальное изменение содержания образования на всех его уровнях, обусловленные стремительным развитием процесса информатизации общества.

Анализ перечисленных направлений развития информатизации образования показывает, что его рациональная организация в интересах дальнейшего развития образования представляет собой сложнейшую и весьма актуальную проблему.

Для решения этой проблемы необходимы скоординированное и постоянное взаимодействие специалистов образования и науки, а также эффективная поддержка этого взаимодействия со стороны государственной власти и органов местного самоуправления.

Процесс информатизации образования приводит к следующим положительным изменениям [2]:

- Перенос центра тяжести с обучения на учение.
- Педагог превращается в посредника, помогающего ученикам добывать информацию.
- Создание более тесных связей между изучаемыми предметами и окружающей действительностью.
- Возможность моделирования жизненного пространства при помощи компьютера позволяет ввести изучаемые предметы в контекст жизни студентов.
- Смена модели «образование на всю жизнь» новым подходом – «образование в течение всей жизни».
- Формирование сетевых сообществ в сфере образования, что позволяет эффективно использовать территориально распределенный человеческий потенциал.
- Получение образования независимо от места проживания и мобильности человека.
- Образование постепенно становится доступным и открытым для всех (дистанционное обучение)
- Появление домашнего образования.
- Колоссальная экономия социального времени.
- Развитие интеллекта человека, его творческого потенциала и критического мышления.

Систематическое использование персонального компьютера на уроках приводит к целому ряду важных последствий [3]:

1. Повышение уровня использования наглядности на уроке.

2. Повышение производительности труда, как педагогов, так и учащихся.

3. Установление межпредметных связей с информатикой.

4. Появление возможности организации проектной деятельности студентов по созданию учебных программ под руководством педагога.

5. Педагог, создающий, или использующий информационные технологии, вынужден обращать огромное внимание на уровень и качество подачи учебного материала, что положительным образом сказывается на уровне знаний студентов.

Кроме того, использование новых информационных технологий в обучении способно существенно углубить и расширить содержание учебного материала, а применение нетрадиционных методик обучения может оказать заметное влияние на формирование практических умений и навыков студентов в освоении того или иного учебного материала [4].

В учебном процессе использование программного обеспечения гораздо более эффективно, чем применение других педагогических технологий, так как в этом случае достигаются следующие наиболее значимые, с позиции дидактических принципов, педагогические и методические цели:

- формирование деятельностного подхода к учебному процессу;
- индивидуализация и дифференциация учебного процесса при сохранении его целостности;
- стимулирование познавательной активности обучаемых;
- осуществление самоконтроля и самокоррекции;
- контролирование тренировочных стадий учебного процесса;
- осуществление контроля с обратной связью, с диагностикой и оценкой результатов учебной деятельности;
- усиление мотивации обучения;

- внесение в учебный процесс принципиально новых познавательных средств: вычислительного эксперимента, моделирования и имитации изучаемых объектов и явлений, проведения лабораторных работ в условиях имитации в компьютерной программе реального опыта или натурного эксперимента, решения задач с помощью экспертных систем;

- возможность осуществления творческой исследовательской деятельности, связанной с переработкой и обобщением больших объёмов информации и другие [4].

Кроме того программное обеспечение учебного назначения имеет многослойный характер, поэтому в основу классификации электронных средств учебного назначения положены общепринятые способы классификации как учебных, так и электронных изданий, и программных средств. Исходя из описанных в современной литературе и общероссийских стандартах критериев, электронные средства учебного назначения следует классифицировать по таким направлениям, как [15]:

1. По дидактическим целям.
2. По форме организации занятии.
3. По методическому назначению.

В свою очередь, классификация программного обеспечения учебного назначения по дидактическим целям подразделяется на:

1. Формирование знаний.
2. Обобщение знаний.
3. Закрепление знаний.
4. Совершенствование знаний.
5. Контроль усвоения.
6. Формирование умений.
7. Сообщение сведений.

Классификация программного обеспечения учебного назначения по форме организации занятий подразделяется на:

1. Лекции.
2. Практические занятия.
3. Самоподготовка.
4. Зачеты, экзамены.
5. Работа над проектом.
6. Научно – исследовательские работы.

Классификация программного обеспечения учебного назначения по методическому назначению подразделяется на [18].:

1. Обучающие программы, которые управляют учебно–познавательной деятельностью учащегося и выполняют, как правило, в той или иной мере функции педагога.

Обучающая программа – это опосредованная материальная реализация того или иного алгоритма взаимодействия студента и педагога, которая имеет определенную структуру, зависящую, как правило, от цели. Она начинается со вступительной части, в которой педагог непосредственно обращается к ученику, указывая цель данной программы. Кроме того, во вступительной части должна быть постановка задачи, чтобы заинтересовать студента, а также краткая инструкция по выполнению программы.

Исходя из вышесказанного, обучающая программа выполняет ряд функций педагога, например:

- служит источником информации;
- организует учебный процесс;
- контролирует степень усвоения материала;
- регулирует темп изучения предмета;
- дает необходимые разъяснения;
- предупреждает ошибки и т.д.

2. Информационно–справочные программы, которые преимущественно предназначены для вывода и поиска необходимой информации.

К примеру, если учащийся при подготовке к занятиям или на занятиях может использовать персональный компьютер, подключенный через модем и телефонную линию связи к другим компьютерам. В этом случае он может получить любую необходимую информацию, имея доступ к компьютеризированному каталогу книг и периодических изданий. Таким образом, с помощью компьютера учащийся сможет осуществить доступ к любому организованному хранилищу информации, ко многим банкам данных.

3. Имитационные программы, которые предназначены для «симуляции» тех или иных объектов и явлений.

Данные программы особенно целесообразно применять, когда то или иное явление наглядно осуществить невозможно, или же в данный момент это весьма затруднительно. При использовании таких программ абстрактные понятия становятся более конкретными, наглядными, поэтому гораздо легче воспринимаются и запоминаются учащимися. Кроме того, учащиеся получают гораздо больше знаний при активном усвоении материала, который они могут оценить зрительно, чем просто запоминая лекционную, а значит пассивно полученную от педагога информацию.

4. Учебно-игровые программы, которые предназначены для проведения тех или иных учебных ситуаций в игровой форме.

По своему назначению любой игровой элемент, используемый в обучении, является мощным средством мотивации учебной деятельности. Поэтому происходящие в игре события должны иметь непосредственную связь с выполняемыми заданиями. Причем успешному выполнению заданий должен сопутствовать и положительный результат в игре, вызывающий активизацию учебной деятельности учащегося, положительные эмоции, желание добиться новых успехов, и, в конечном итоге, повышение его учебной мотивации.

Таким образом, при работе с компьютером, оборудованным специальными учебно-игровыми программами, решаются определенные воспитательные и образовательные задачи, скрытые под формой увлекательного игрового действия.

5. Демонстрационные программы, которые предназначены для наглядного представления учебного материала описательного характера [18].

При использовании подобных программ, педагог может успешно использовать компьютер в качестве наглядных пособий при объяснении нового материала. Большими возможностями в интенсификации учебного процесса обладают те демонстрационные программы, в которых используется диалоговая или интерактивная графика.

6. Контролирующие программы, которые предназначены для проверки (оценки) качества знаний. Такие программы позволяют педагогу эффективно и быстро проводить текущий и итоговый контроль знаний и умений, приобретённых учащимися в процессе профильного обучения.

Педагогам давно известно, что контроль процесса усвоения знаний учащимися (пятибалльная система, система зачетов) представляет собой одно из самых важных, и, в то же время, по характеру организации и уровню теоретической исследованности, одно из самых наименее проработанных, слабых звеньев учебного процесса. К примеру, главный недостаток существующих в настоящее время форм и методов контроля, заключается в том, что в большинстве случаев они зачастую не обеспечивают необходимой устойчивости и инвариантности процессов оценки качества усвоения учебной информации учащимися, а также необходимой адекватности этой оценки действительному уровню знаний. Кроме того, существующая в настоящий момент система оценок часто подвержена субъективному влиянию педагога.

Поэтому дальнейшее совершенствование контроля над ходом обучения должно концентрироваться преимущественно вокруг проблемы повышения достоверности процесса оценивания формируемых педагогом у учащихся знаний, умений и навыков. Эту проблему можно рассматривать в двух аспектах:

- во-первых, как увеличение степени соответствия педагогической оценки действительному уровню знаний обучаемых;
- во-вторых, как создание и реализация таких методических приемов контроля, которые обеспечили бы независимость оценок от случайных факторов и субъективных установок учителя.

7. Программы–тренажеры, которые предназначены для формирования и закрепления, усвоенных учащимися в процессе профильного обучения, знаний, умений и навыков, а также для самоподготовки и самопроверки учащихся.

При использовании этих программ предполагается, что теоретический весь необходимый учебный материал, или какой-либо его раздел учащимися уже так или иначе усвоен. Поэтому подобное программное обеспечение генерирует учебные задачи, уровень трудности которых определяется педагогом. Если обучаемый сумел найти правильное решение, ему сообщается об этом, иначе ему либо предъявляется правильный ответ, либо предоставляется возможность запросить помощь [19].

Для целей, которое ставит перед собой обучение, вышеназванные обучающие программы подходят лучше всего. Работая самостоятельно той или иной с обучающей программой, студент в индивидуальном темпе овладевает знаниями, сам выбирает индивидуальный маршрут изучения учебного материала в рамках заданной преподавателем темы. Радикальное отличие этой формы от классической самостоятельной формы работы в том, что программа является интерактивным «слепком» интеллекта и опыта ее автора [14]. Таким образом, обучающие компьютерные программы в полной мере отвечают основному принципу обучения – осуществлению индивидуального подхода к каждому участнику обучения и учет его индивидуальных особенностей.

Если рассматривать использование в процессе обучения элементов компьютерной графики, то наиболее часто они используются в таких дисциплинах, как математика, информатика, технология (обучение черчению).

В частности, компьютерная график, использующаяся в различных профильных дисциплинах, помогает решить такие задачи, как:

- в информатике – это программирование графических систем и интерфейсов,
- в математике – построение разнообразных графиков, диаграмм и функций,
- в технологии – построение разнообразных фигур, сечений, разрезов деталей, схем, чертежей, планов и т.д.

Кроме того, использование таких компьютерных программ, как MS Office, Star Office, Open Office и т.д., с их упрощенными графическими редакторами, включенными в общий пакет программ, достаточно часто используются в процессе обучения в таких дисциплинах, как математика, информатика, технология.

Таким образом, необходимость новых знаний, информационной грамотности, умения самостоятельно получать знания способствовала возникновению нового вида образования - инновационного, в котором информационные технологии призваны сыграть системообразующую, интегрирующую роль.

Создание компьютерных программ и методов их использования требует не просто переложения существующей, а разработку технологии обучения на основе концепции компьютеризации и информатизации всей системы образования.

1.2. Обзор современных систем компьютерной алгебры и систем динамической математики

Одним из приоритетных направлений развития образования в современном мире является применение компьютерных технологий. Учет этого объективного фактора требует от ВУЗов обучать и выпускать руководителей высшего, среднего и низшего звена, знакомых с компьютерными технологиями. От преподавателей ВУЗов сегодня требуется не только умение обучать с использованием классических форм преподавания, но также создавать и осваивать новые способы изучения предметов с применением компьютеров и компьютерных технологий

Компьютерная математика – это новое направление в математике, появившееся на пересечении классической математики и информатики. Оно возникло на рубеже нового столетия и связано с успехами внедрения персональных компьютеров (ПК) в практику решения математических задач [17].

За последние время в математике возникло и очень быстро развилось новое направление – так называемая компьютерная математика или символьная, представленная в настоящее время пакетами программ «Mathematica», «Maple», «Mathcad», «MATLAB» и др

Эти системы компьютерной математики (СКМ) позволяют проводить символьные (формульные) вычисления на очень серьезном математическом уровне в различных областях, как самой математики, так и ее приложений, обладают понятным интерфейсом и мощными графическими возможностями.

Под системами компьютерной математики (СКМ) будем понимать комплексные программные средства, обеспечивающие автоматизированную, технологически единую и замкнутую обработку задач математической направленности при задании их условий на специально предусмотренном языке пользователя [7].

Появление СКМ произвело переворот в фундаментальной и прикладной науке, в настоящее время такой же радикальный переворот происходит и в вузовском образовании. Возможность персональных компьютеров проводить формульные вычисления радикально меняют представление о роли ученых в научных исследованиях, а также и о целях и задачах математического образования, как высшего, так и среднего. От ученого и инженера требуется теперь не умение проводить сложные и громоздкие вычисления, а более глубокое знание предмета исследования и владение СКМ. Следует также отметить универсальную тенденцию развития прикладного программного обеспечения – от языков программирования, понятных лишь программистам,– к языкам, удобным для пользователя-специалиста в конкретной области исследования и приложений. Все это вместе взятое наряду с уникально высокими темпами развития компьютерной техники и соответствующего программного обеспечения приводит к необходимости владения основами применения СКМ к решению конкретных задач современными специалистами всех направлений – от сугубо математических до гуманитарных [9].

Систем компьютерной математики огромное количество. Признанными мировыми лидерами из числа универсальных математических систем являются: Matlab (Mathworks Ins., USA), Mathcad (MathSoft Ins.,USA), Mathematica (Wolfram Research Ins., USA), Derive (Corp. Texas Instruments Ins.,USA), Maple (Corp.MapleSoft, Canada). Сравнительно недавно появились компьютерные программы GeoGebra и Geometer’s Sketchpad («Живая математика»), ориентированные на визуализацию математики. Главным их достоинством являются возможности анимации.

Общими признаками систем этого класса считаются:

1) объединение аналитических и численных методов вычислений;

2) использование языков высокого уровня программирования;

3) визуализация результатов вычислений;

4) совместимость с операционными системами Windows и др.

По своему содержанию СКМ – это особый вид программ, реализуемых на ПК и предназначенных для решения широкого круга математических задач [17].

Структурную схему СКМ условно можно представить в виде совокупности пяти компонентов: ядро, интерфейс, библиотеки, пакеты решений, справочная система (рис. 1.). Основу системы компьютерной математики составляет представительный набор базовых функций и алгоритмов, так называемых встроенных функций, образующих ЯДРО системы. С помощью подготовленных программ осуществляются быстрые вычисления всех функций ядра. Для вычислений редких функций и процедур вне ядра создаются БИБЛИОТЕКИ. Наращивание вычислительных возможностей системы достигается также за счет ПАКЕТОВ РАСШИРЕНИЯ. Такие пакеты может писать сам пользователь на языке программирования системы компьютерной математики, что обеспечивает большую адаптацию системы к решаемым задачам. ИНТЕРФЕЙС дает пользователю возможность обращаться к ядру со своими запросами и получать результат решения на экране дисплея. СПРАВОЧНАЯ СИСТЕМА обеспечивает получение оперативных справок по вопросам работы с СКМ.

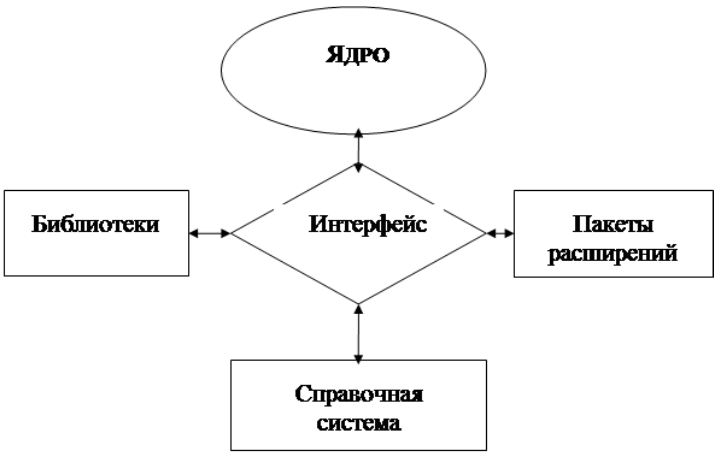
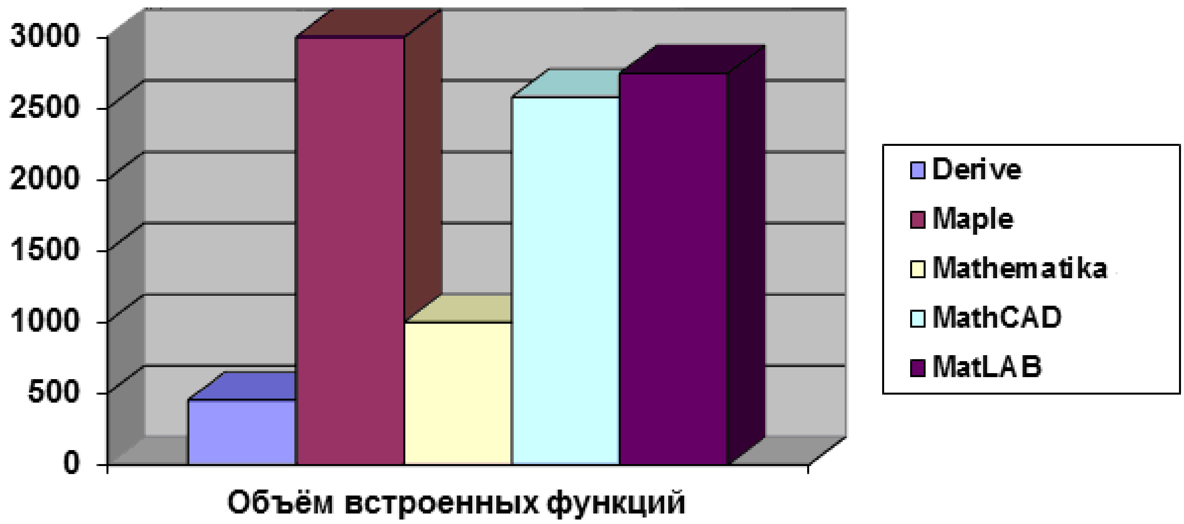


Рис. 1. Структурная схема универсальных СКМ

Количество встроенных функций в ядре системы компьютерной математики может составлять от нескольких сотен (Derive) до нескольких тысяч (Maple, Mathematica), что отображено на диаграмме 1. [17].

Диаграмма 1.



Современные универсальные СКМ во всем мире получили широкое применение, прежде всего в образовании и науке. В сфере образования применение СКМ способствует повышению фундаментальности математического образования и сближению отечественной системы образования с западом. [17].

Наиболее ярким представителем СКМ является Maple. **Maple** — программный пакет, система компьютерной алгебры (точнее, система компьютерной математики). Является продуктом компании Waterloo Maple Inc., которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. Обладает развитыми графическими средствами. Имеет собственный язык программирования, напоминающий Паскаль.

Работать с Maple можно как в режиме интерактивного диалога, так и путем составления и отладки программ на специальном Maple-языке. Основу пакета составляет специальное ядро - программа символьных преобразований. Кроме того, имеется несколько тысяч специальных функций, хранящихся в подгружаемых к ядру пакетах и библиотеках. Общая ориентированность пакета на символьные преобразования (компьютерную алгебру) конечно. не означает, что с помощью Maple нельзя решать задачи численно.

Maple умеет не только вычислять, но и обладает богатыми возможностями графического представления математических объектов и процессов.

Как у всех приложений Windows интерфейс Maple имеет ряд характерных элементов:

- строку основного меню;
- панель инструментов;
- рабочую область, содержащую один или несколько рабочих листов (worksheet);
- строку состояния; • кнопки управления окном;
- полосу прокрутки.

Рабочая область может содержать различные области (моды), отображающие различные режимы работы Maple:

- Text – текстовую моду для ввода текстовой информации; • StandardMath – стандартную математическую моду для ввода математических формул в текст;
- MapleInput – Maple моду для ввода команд в формате программирования;
- StandardMathInput – Maple–моду для ввода команд в формульном виде;

- Графическую моду для отображения графической информации (двумерной, трехмерной, динамической визуализации);
- Моду вывода результатов вычислений;
- Моду вывода сообщения об ошибках программы;
- Моду вывода предупреждений (warning);
- Моду ввода таблицы (Spreadsheet);
- Секцию (подсекцию) для структурирования рабочего листа.

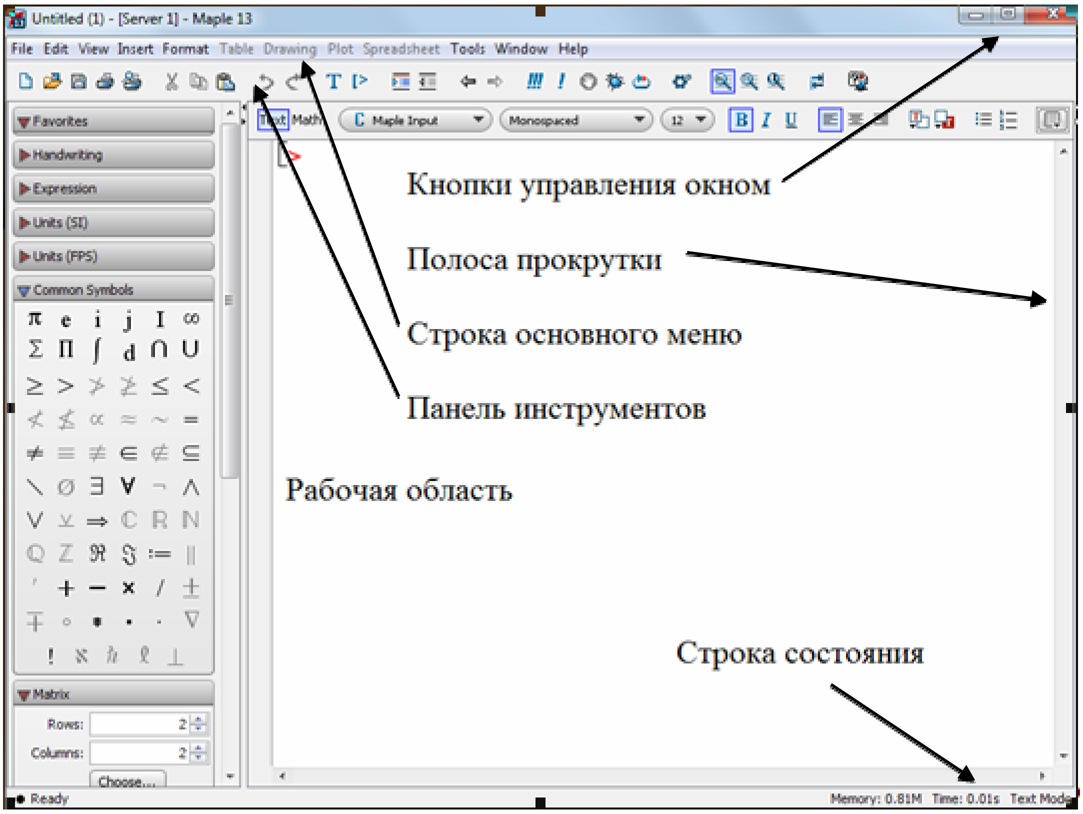


Рис. 2. Вид окна Maple

В состав СКМ Maple входит большое число библиотек, подключение которых осуществляется командой with (имя библиотеки). В любой момент пользователю доступна мощная и эффективная справочная система по среде и командам СКМ Maple. Вызвать ее можно либо по нажатию клавиши F1, либо по выбору пункта меню Help, например, Mathematics -> Linear Algebra->LinearAlgebra Package->Data Structures->Matrix Construction

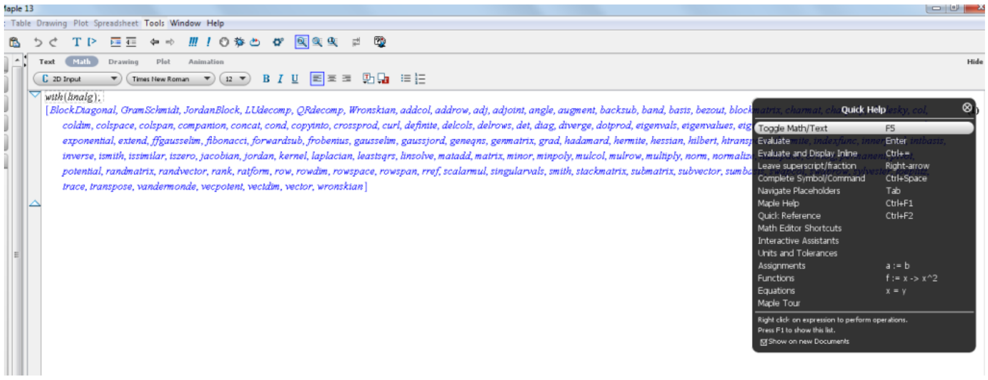


Рис. 3. Вид окна справочной системы

После загрузки и запуска системы можно начать диалог с ней, используя ее операторы и функции для создания и вычисления математических выражений. Каждое введенное выражение должно завершаться разделителем: точка с запятой (;) указывает, что результат его вычисления должен быть выведен на экран или двоеточием (:) отменяет вывод и может использоваться как знак разделителя при записи нескольких выражений в одной строке. Для окончания ввода и получения ответа необходимо нажать клавишу Enter. Комбинация клавиш Shift+Enter позволяет разорвать строку команды [9].

Ярким представителем динамической компьютерной среды является компьютерная среда GeoGebra. GeoGebra— бесплатная и свободно распространяемая (по лицензии GPL) программа, относящаяся к классу программ динамической геометрии (интерактивных геометрических систем, виртуальных лабораторий, виртуальных конструкторов)

История программ данного класса насчитывает более 20 лет. Первым проектом, реализующим идею динамической геометрии, был проект Cabri («Черновик для информатики»), работа над которым началась в 80-х гг. Участники проекта поставили перед собой задачу разработать среду, которая поддерживала бы экспериментальный подход к изучению геометрии. Примерно в то же время разрабатывалась программа TheGeometer.sSketchpad («Блокнот геометра»). Эти две программы получили наибольшее распространение в мире. Неслучайно «Блокнот геометра» был русифицирован Институтом новых технологий (Москва) и известен в нашей стране под названием «Живая математика». Из разработок, получивших распространение в России, можно также отметить программу «Математический конструктор» (разработчик 1С) и виртуальный конструктор для поддержки школьного курса стереометрии «Интерактивная стереометрия. Кабри 3D» (ИНТ, Москва).

Программы различаются по отдельным параметрам, но главным элементом во всех программах является так называемый динамический чертеж. Динамический чертеж можно определить как геометрическую фигуру, строящуюся в плоскости компьютерного экрана и который, в отличии от обычного чертежа, можно трансформировать с помощью мыши при сохранении геометрических свойств фигуры [1].

Среди программ динамической геометрии программа Geogebra занимает особое место. Эта программа не просто известна, но и пользуется среди учителей, в том числе и российских, большой популярностью, о чем свидетельствует, в частности, большое количество учебно-методических разработок на базе этой программы, постоянно пополняемые открытые коллекции динамических моделей, разрабатываемых на базе Geogebra. Сообщество пользователей программы охватывает 195 стран мира и имеет постоянно пополняемую обширную библиотеку готовых моделей на Geogebra, которыми может воспользоваться любой желающий [1].

Программа создана в 2002 году. Создатель программы — австрийский математик Marcus Hohenwarter. Официальный сайт программы http://www.geogebra.org. Поддерживает 50 языков, в т.ч. русский. Программа написана на языке Java (для установки локальной версии на компьютере пользователя должен быть установлен Java) и является кроссплатформенной (платформы Windows, Linux, Mac OS X). Последний релиз программы поддерживает технологию 3D, что дает возможность решать задачи по стереометрии. Поддерживаемые форматы экспорта данных: PNG, SVG, EMF, Pdf. Имеется встроенный язык, позволяющий выполнять построения, производить вычисления, работать с функциями. Программа напрямую (через командную строку) вводить уравнения и манипулировать координатами. Таким образом, можно легко составлять графики функций, решать уравнения и неравенства, искать производные. Динамические чертежи могут быть сохранены в формате Java-аплитов для включения в Web-страницы. Есть возможность интеграции с системой дистанционного управления учебным процессом Moodle, что позволяет встраивать Geogebra как активный элемент дистанционного курса. В отличии от других программ динамической геометрии, в Geogebra реализована идея геометрического и алгебраического представления объектов, т.е. каждый создаваемый объект существует в двух формах: в форме динамического чертежа и в аналитической форме. Интерфейс программы отличается простотой и понятностью [1].

Выделим основные направления использования Geogebra в образовательном процессе, базирующиеся на типологии динамических моделей:

1. *Поддержка экспериментальной составляющей математической деятельности.* Здесь Geogebra используется как виртуальная лаборатория, т.е. как среда для проведения разного рода математических экспериментов с помощью динамических моделей исследовательского типа, манипуляция с которыми позволяет учащимся самостоятельно открывать новые для себя математические факты. Таким образом, реализация дидактического потенциала Geogebra как виртуальной лаборатории зависит от умения преподавателя разрабатывать динамические модели исследовательского типа. В качестве возможных методических подходов и приемов к разработке исследовательских моделей можно выделить:

- *Моделирование условий, в которых раскрывается сущность исследуемого математического объекта.* Фактически, в основе данного подхода лежит экстериоризация наглядно-чувственных идеализаций «сжатие», «растягивание», «скольжение», составляющих мысленный эксперимент, позволяющая учащемуся в наглядной форме увидеть системообразующий принцип исследуемой геометрической конфигурации.
- *Кибернетический подход*— учащимся предлагается чертеж, содержащий в себе некоторую идею, связующую различные элементы чертежа, визуально не наблюдаемую и требующую «расшифровки»; перемещая одни элементы чертежа и наблюдая за изменениями, происходящими при этом с другими элементами, учащиеся должны разгадать скрытый в чертеже «механизм».
- *Численный эксперимент* — учащимся предлагается наблюдать за изменением значений числовых параметров в процессе манипуляций с элементами динамического чертежа.
- *Рассмотрение геометрических объектов в различных ракурсах* — учащимся предлагается последовательно рассмотреть стереометрический чертеж с различных точек зрения, позволяющих обнаружить базовый принцип построения фигуры или решения стереометрической задачи.
- *Определение граничных условий* существования объекта — учащимся предлагается исследовать поведение геометрических объектов на границах их существования.
- *Исследование геометрического места точек*— учащимся предлагается исследовать специфический объект — «след», т.е. визуализированную в виде последовательности точек траекторию, возникающую при движении геометрического объекта в плоскости экрана

2. *Развитие навыков построение геометрических фигур*. Здесь Geogebra используется как виртуальный инструмент, заменяющий традиционные инструменты: циркуль и линейку. Однако, в отличии от

традиционных инструментов, появляются дополнительные возможности, использование которых позволяет повысить эффективность формирования навыков построения, в частности:

- возможность самопроверки учащимся правильности своих действий; в среде динамической геометрии самопроверка осуществляется простым и естественным путем —через исследование поведения построенного объекта, т.е. правильно построенный чертеж должен «работать» правильно;
- возможность выдавать подсказки на различных этапах построения;
- возможность вернуться к любому этапу построения, используя журнал истории действий.

Использование Geogebra в качестве виртуального инструмента построения геометрических фигур с дидактической точки зрения может рассматриваться как вариант использования программы в качестве средства организации исследовательской деятельности учащихся, т.к. само действие по «собиранию» геометрической фигуры требует от учащегося операций мысленного эксперимента.

3. Создание интерактивных мультимедийный иллюстраций к изучаемому материалу. Здесь Geogebra используется как инструмент разработки электронных цифровых ресурсов, обеспечивающих важнейший дидактический принцип обучения — принцип наглядности. Как и при реализации выделенных выше направлений, использование Geogebra в качества средства обеспечения наглядности обучения связано с возможностями динамических чертежей и может рассматриваться как вариант поддержки экспериментальной составляющей математической деятельности в той мере, в какой динамизация чертежа позволяет реализовать главное содержание принципа наглядности именно так, как этот принцип понимается на современном этапе развития дидактики, т.е. как педагогический инструмент формирования умственных действий на основе моделирования изучаемого объекта, отражающего существенные его характеристики.

Таким образом программа Geogebra в образовательном процессе показывает, что может эффективно использоваться как для поддержки решения традиционных дидактических задач в целях повышения эффективности обучения, так и новых задач, связанных с экспериментальной составляющей математической деятельности. Особый интерес представляют задачи, введение которых в образовательный процесс ранее не представлялось возможным из-за отсутствия соответствующих инструментов. В частности, это задачи на развязывание и завязывание узлов и задачи покрытия плоскости одинаковыми фигурами. Привлекательность этих задач в том, что, с одной стороны, эти задачи имеют давнюю историческую традицию, связаны с серьезными математическими теориями, с другой стороны задачи хорошо проецируются в среду динамической геометрии, имеют практическую направленность и позволяют придать учебной деятельности поисковый характер, развивают пространственное воображение школьников. Например, задачи покрытия плоскости одинаковыми фигурами рассматривались еще Кеплером, а с узлами мы имеем дело во всех областях практической жизни, начиная от завязывания галстука и кончая завязыванием буксира к автомашине.

Использование таких средств как Maple, GeoGebra, «Живая Математика» и т.п. в образовательном процессе, позволяют преодолеть формализм в математике и посредством создания динамической наглядности, компенсировать недостаток развития способности студента к математическому видению. Динамическая наглядность в отличие от статической позволяет учащимся преодолеть сложившиеся стереотипы воображения, обнаружить множественность и многовариантность ситуаций, определяемых условием задачи, сделать видимой динамику реконструкции образов объекта исследования в ходе решения задачи.

ГЛАВА 2. Системы компьютерного сопровождения дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»

2.1. Учебно-тематическое планирование дисциплины «Математика»

В соответствие с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (далее ФГОС ВО) по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология» была составлена рабочая программа дисциплины «Математика»

Б1.В.02.03 «Математика» - дисциплина вариативной части. Изучение дисциплины согласно плану проходит в течение 2-х семестров - в 1-ем и 2-ом семестрах. Трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е. или 144 часа, из них 1,5 з.е. или 54 часа отводится на первый семестр – 28 на аудиторную работу, 26 часов на самостоятельную работу, и 2,5 з.е. или 90 часов отводится на второй семестр – 28 на аудиторную работу, 26 часов на самостоятельную работу и 36 часов на контроль.

Цель освоения дисциплины: формирование общего представления о задачах и целях предмета, месте и достоверности применяемых в школьном курсе алгоритмов, формирование профессиональных компетенций студентов.

Место дисциплины в реализации основных задач общей предметной подготовки. Курс «Математика» в общей математической подготовке занимает важно место, так как именно в этом курсе идет выработка основных алгоритмов действий с важными математическими структурами такими, как матрицы, определители, системы линейных уравнений, алгебраический и геометрический вектор, действия над алгебраическими и геометрическими векторами, линейная зависимость, базис системы векторов, нелинейные операции над геометрическими векторами и их применения к решению геометрических задач, прямая в плоскости и пространстве, плоскость в пространстве, комплексные числа.

Место дисциплины в обеспечении образовательных интересов личности студента, обучающегося по дисциплине. Дисциплина «Математика» формирует у студентов умение правильно рассуждать, выстраивать логические цепочки содержательных выводов, расширяет представления о понятиях школьного курса математики.

Место дисциплины в удовлетворении требований заказчиков к выпускникам университета по данной дисциплине. При обучении в ВУЗах бывшие школьники так же продолжают изучение алгебры и теории чисел в ее составе в независимости от выбранной ими специальности. В связи с этим, школьный учитель математики должен в совершенстве владеть основными алгебраическими понятиями, причем не на интуитивном уровне, а четко представлять механизмы действия тех или иных понятий и алгоритмов. Поэтому учитель иметь знания по данной дисциплине, превышающие знания школьной программы, чтобы излагать школьный материал на достаточно высоком научно-методическом уровне.

Технология процесса обучения дисциплине. При обучении данной дисциплине планируется применение технологий: специализированную систему компьютерной математики (СКМ) и графической поддержки (Maple), систему динамической математики (СДМ) GeoGebra, современное традиционное обучение.

При изучении дисциплины «Математика» основными формами обучения являются лекции и практические занятия. На лекциях систематически излагается материал, предусмотренный программой с использованием СКМ Maple, СДМ GeoGebra. На практических занятиях этот материал закрепляется в процессе опроса, решения задач, приведения примеров, доказательства утверждений, проведения сравнительного анализа со школьным курсом алгебры и геометрии.

Планируемые результаты обучения. В процессе изучения данного курса идет выработка основных алгоритмов действий с важными математическими структурами такими, как матрицы, определители, системы линейных уравнений, геометрические векторы, линии на плоскости и в пространстве. Формируется навык строгого математического доказательства. Материал этого курса в значительной мере используется в школьном курсе математики, а также в научных исследования в любой области математики и ее приложениях. Кроме того, идет формирование таких *компетенций*, как:

ОК-4 способностью к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия

ОК-5 способностью работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные различия

ОК-6 способностью к самоорганизации и самообразованию

ОПК-1 готовностью сознавать социальную значимость своей будущей профессии, обладать мотивацией к осуществлению профессиональной деятельности

ОПК-2 способностью осуществлять обучение, воспитание и развитие с учетом социальных, возрастных, психофизических и индивидуальных особенностей, в том числе особых образовательных потребностей обучающихся

ОПК-5 владением основами профессиональной этики и речевой культуры

ПК-4 способностью использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения.

ПК-6 готовностью к взаимодействию с участниками образовательного процесса

Технологическая карта обучения дисциплине

Алгебра и геометрия

(наименование)

Для обучающихся образовательной программы

бакалавров педагогического образования, 44.03.01, профиль «Технология»

(направление и уровень подготовки, шифр, профиль)

по очной форме обучения

(общая трудоемкость 4 з.е.)

Наименование разделов и тем		Всего часов (з.е.)	Аудиторных часов			Внеаудиторных часов
			всего	Лекций	лабораторныезанятия	
		144 (4з.е.)	**56**	**28**	**28**	**52**
Модуль 1. «Матрицы, определители и системы линейных алгебраических уравнений»		**38**	**20**	**10**	**10**	**18**
Раздел 1.1. Матрицы и определитель.	1. Матрицы, действия над матрицами.	8	4	2	2	4
	2. Определители 2–го и 3–го порядков.	5	2	1	1	3
	3. Определители n–го порядка.	5	2	1	1	3
	4. Нахождение обратной матрицы	4	2	1	1	2
Раздел 1.2. Системы линейных уравнений.	6. Системы линейных уравнений: основные понятия, решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.	5	2	2	1	2
	7. Матричный метод решения систем линейных уравнений.	4	2	1	1	2
	8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.	7	6	2	3	2
Модуль 2. «Линейная алгебра.»		**16**	**8**	**4**	**4**	**8**
Раздел 2.1. Линейные пространства	9. Понятие линейного пространства.	4	2	1	1	2
	10. Линейная зависимость системы векторов. Базис.	6	2	1	1	4
	11. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные системы векторов	6	4	2	2	2
Модуль 3. «Комплексные числа»		**18**	**8**	**4**	**4**	**10**
	12. Алгебраическая форма комплексного числа.	5	2	1	1	3
	13. Тригонометрическая форма комплексного числа.	6	3	1	2	3
	14. Корни из комплексного числа.	7	3	2	1	4
Модуль 4. «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»		**36**	**20**	**10**	**10**	**16**
Раздел 4.1. Элементы векторной алгебры.	15. Основные понятия.	4	2	1	1	2
	16. Вычислительные задачи векторной алгебры.	4	2	1	1	2
	17. Скалярное, векторное и смешанное	8	4	2	2	4

	произведения векторов и их применения.					
Раздел 4.2. Аналитическая геометрия.	18. Аналитическая геометрия на плоскости.	12	8	4	4	4
	19. Аналитическая геометрия в пространстве.	8	4	2	2	4

Содержание основных разделов и тем дисциплины «Математика»

Модуль1. Алгебра матриц: определение матрицы, виды матриц, действия над матрицами, обратимая матрица, обратная матрица, решение матричных уравнений, определитель матрицы, способы вычисления определителей малых порядков, универсальные способы вычисления определителя, минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы. Системы линейных уравнений: определение решения системы линейных уравнений, классификация по количеству решений, три метода решения систем линейных уравнений – метод Гаусса, метод Крамера и матричный метод.

Модуль 2 Понятие арифметического n-мерного вектора и арифметического n-мерного векторного пространства, линейные операции над арифметическими векторами, линейная комбинация векторов, линейно зависимая и линейно независимая системы векторов, базис и ранг системы векторов.

Модуль 3. Понятие комплексного числа, алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа, действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Нахождение корней из комплексного числа.

Модуль 4. Понятие геометрического вектора, линейные и нелинейные операции над векторами: сложение векторов, умножение на число, скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, применение нелинейных операций к нахождению элементов геометрических фигур и тел. Системы координат. Уравнение прямой в плоскости и пространстве, уравнение плоскости в пространстве, задачи на прямую и плоскость.

В результате обучения студенты должны:

- ***знать:*** понятие множества, матрицы, виды матриц, правила действий над матрицами, понятие определителя, правила вычисления определителя различного порядка, 3 способа решения систем линейных уравнений, понятие геометрического вектора, правила выполнения линейных и нелинейных операций над векторами, различные формы записи уравнений прямой и плоскости, понятие арифметического вектора, определение и свойства линейно зависимой системы векторов, правила нахождения базиса системы векторов, понятие комплексного числа, алгебраическую и тригонометрическую формы комплексного числа, правила выполнения действий над комплексными числами в различных формах записи.

- ***уметь:*** выполнять действия над матрицами, доказывать свойства операций над матрицами, решать матричные уравнения, вычислять определитель любым из способов, определять наиболее рациональный способ вычисления определителя, исследовать систему линейных уравнений на наличие и количество решений, решать ее тремя способами – методом Крамера, методом Гаусса и матричным методом, исследовать систему векторов на линейную зависимость, доказывать свойства линейной зависимости, находить базис системы векторов, вычислять скалярное, векторное, смешанное произведение геометрических векторов, применять эти произведения для решения геометрических задач, выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах, уметь проводить цепочки алгебраических рассуждений, находить наиболее рациональные пути решения задач.

- ***владеть навыками:*** решения матричных уравнений, вычисления определителей, решения систем линейных уравнений тремя способами, выполнения линейных и нелинейных операций над геометрическими векторами, применения их решению геометрических задач, выполнения действий над комплексными числами в разной форме записи, владеть навыками доказательства алгебраических утверждений.

Методические рекомендации по освоению дисциплины

Программа данного курса предусматривает лекционные и практические занятия, лабораторные работы, самостоятельные проверочные работы на занятиях, контрольные работы, домашние контрольные работы, коллоквиум, экзамен. Работа студента по освоению данной дисциплины оценивается согласно технологической карте рейтинга, в которой учитывается как текущая работа студента – посещение занятий, работа на занятиях, своевременность и правильность выполнения всех работ. Кроме того, предусмотрен ряд дополнительных заданий, позволяющих повысить свой рейтинг в пределах 10% от общего количества баллов - в каждом модуле предусмотрено написание рефератов, выполнение докладов по темам рефератов и по теме занятий. К экзамену допускаются студенты, набравшие за текущую работу по дисциплине в семестре не менее 60% баллов, предусмотренных технологической картой дисциплины. Положительная оценка за семестр по данной дисциплине (зачет) ставится также только в случае набора не менее 60 % общего количества баллов по дисциплине за семестр. В случае дифференцированного зачета: если студент набрал от 60% до 72% за семестр от максимального количества баллов, то в ведомость выставляется оценка – 3, если от 72% до 87% - 4, если от 87% до 100% -5.

2.2. Принципы организации компьютерного сопровождения дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»

Дидактические принципы обучения математике – это совокупность единых требований к организации процесса обучения математике, его содержанию, формам и методам [11].

Система дидактических принципов:

- принцип научности;
- принцип воспитания;
- принцип наглядности;
- принцип сознательности, активности и самостоятельности;
- принцип прочности знаний;
- принцип систематичности и последовательности;
- принцип доступности;
- принцип индивидуального подхода к учащимся.

Принцип научности обучения в математике заключается в обязательности соответствия содержания и методов преподавания уровню и требованиям математики как науки в ее современном состоянии.

Для реализации принципа научности учитель должен:

- следить за корректностью формулировок при определении математических понятий и построении математических суждений;
- приучать учащихся критически относиться к каждому суждению, не принимать за доказанное то, что не обосновано;
- требовать от учащихся четко различать определения и теоремы.

Принцип воспитания заключается в формировании у учащихся интереса к этому предмету, выработке у них стремления к новым знаниям, к их полному и прочному усвоению, формировании умения пользоваться полученными знаниями и расширять их за счет самостоятельного изучения.

Принцип наглядности вытекает из сущности процесса восприятия, осмысления и обобщения учащимися изучаемого материала. Он означает, что в обучении необходимо, следуя логике процесса усвоения знаний, на каждом этапе обучения найти его исходное начало в фактах и наблюдениях единичного или в аксиомах, научных понятиях и теориях, после чего определить закономерный переход от восприятия единичного, конкретного предмета к общему, абстрактному или, наоборот, от общего, абстрактного к единичному, конкретному.

Принцип сознательности, активности и самостоятельности заключается в целенаправленном активном восприятии изучаемых явлений, их осмыслении, творческой переработке и применении.

Принцип прочного усвоения учащимися знаний, умений и навыков обусловливается как задачами школы, так и закономерностями самого обучения. Он заключается в том, что опираться на приобретенные знания, умения и навыки на последующих этапах обучения и пользоваться ими в жизни можно лишь тогда, когда они усвоены твердо, длительное время удерживаются в памяти. В процессе обучения учащиеся не только приобретают знания, умения и навыки, но и закрепляют и совершенствуют их.

Для реализации этого принципа учитель должен:

- умело организовать повторение пройденного материала;

- осуществлять своевременный контроль знаний и умений учащихся, предупреждение и устранение пробелов в знаниях учащихся;

- обращать особое внимание на систематический характер предлагаемых учащимся задач и упражнений.

Принцип систематичности и последовательности в обучении обусловливается и логикой самих наук, изучаемых в школе, и особенностями познавательной и практической деятельности учащихся, протекающей в соответствии с закономерностями их умственного и физического развития. Этот принцип лежит в основе построения учебных программ, определяет систему работы учителя и деятельность учащихся в процессе обучения.

Принцип доступности в обучении вытекает из требований учета возрастных особенностей учащихся. Он требует, чтобы объем и содержание учебного материала были по силам учащихся, соответствовали уровню их умственного развития и имеющемуся запасу ЗУН.

Принцип дифференцированного (индивидуального) подхода к учащимся обусловливается особенностями индивидуального развития детей, типов высшей нервной деятельности, а также стремлением наилучшим образом развивать творческие силы и способности учащихся [11].

Поскольку одним из основных качеств профессиональной подготовки будущего учителя математики, согласно требованиям новых образовательных стандартов, является способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2) [16], то с позиций контекстного обучения необходимо целенаправленное и систематическое использование в процессе математической подготовки компьютерных технологий. Будущие учителя, осваивая системы компьютерной математики, приобретают опыт их применения в своей будущей профессиональной деятельности. К специальным дидактическим условиям использования систем компьютерной математики в педагогическом вузе, многие специалисты [10] в этой области, относят следующие:

- *Условие адекватности.* Использование компьютерных технологий в процессе математической подготовки студента должно быть в определенном смысле адекватным их использованию в математической науке и адекватным целям и содержанию обучения. Согласно этому условию при использовании компьютерных технологий в обучении необходимо произвести критическую оценку продуктивности их использования для достижения поставленных образовательных целей и определении соответствия между возможностями компьютерных средств и содержанием обучения.

- *Условие визуализации.* Использование компьютерных технологий в процессе обучения математическим дисциплинам в педагогическом вузе должно быть максимально ориентировано на визуальные возможности компьютера. Необходимо максимально использовать возможности систем динамической геометрии и компьютерной математики на практических и лекционных занятиях.

- *Условие использования компьютерных средств как инструментов познания.* Инструменты познания – это различные компьютерные средства, которые «поддерживают, направляют и расширяют мыслительные процессы своих пользователей» [20]. Инструменты познания должны быть простыми и универсальными, чтобы с их помощью можно было достигать широко поставленных целей образования. Другими словами, инструмент познания является активной средой, работая (обучаясь) в которой, пользователь сам наполняет эту среду специфическими объектами и их свойствами, соответствующими его предметной области (т.е. допускает построение в ней компьютерных и функциональных моделей) [5].

- *Условие профессиональной ориентации.* Использование систем компьютерной математики, в процессе предметной подготовки будущих учителей математики, должно быть профессионально ориентированным. Другими словами, в вузовском курсе необходимо моделировать ситуации, которые могут возникнуть в школе при изучении математики компьютерными средствами. Согласно данному условию, при проектировании содержания, методов и форм организации профессионального обучения будущих учителей, необходимо рассматривать вопросы использования компьютера в школьном курсе математики.

- *Условие систематичности* предполагает непрерывный и систематический характер использования компьютерных технологий в математической подготовке будущих учителей.

Эпизодическое применение компьютерных технологий не позволяет в должной мере подготовить учителя математики к их использованию в школьном курсе математики. Важно показать будущим учителям математики, что компьютерные технологии можно эффективно использовать во многих разделах школьного курса математики.

2.3. Компьютерное сопровождение дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология»

Теоретический курс: Курс лекций по высшей математике.

Курс лекций по дисциплине «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология» содержит необходимый теоретический материал по аналитической геометрии, линейной алгебре, а также решение задач по указанным разделам. Для студентов педагогического университета им. В.П.Астафьева института математики, физики и информатики специальности первого курса «Технология» очной формы обучения.

Полный курс лекция по высшей математике приводится в приложении.

Практический курс: Компьютерное сопровождение теоретической части дисциплины «Математика».

Модель 1. Визуализация матрицы с помощью команды «matrixplot» (к лекций 1).

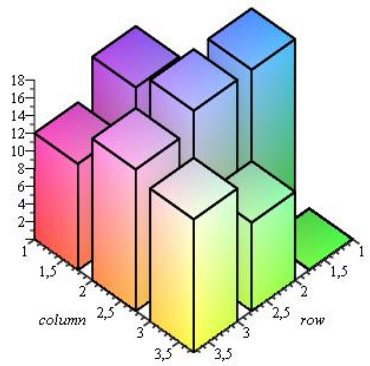
```
> with(linalg):
> AA:=matrix([[2,9,5],[8,4,5],[9,8,10]]);
```

$$AA := \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> BB:=matrix([[3,9,-5],[8,14,5],[3,8,5]]);
```

$$BB := \begin{bmatrix} 3 & 9 & -5 \\ 8 & 14 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> with(plots):
> matrixplot(AA+BB,heights = histogram, axes = frame, gap = .25);
```

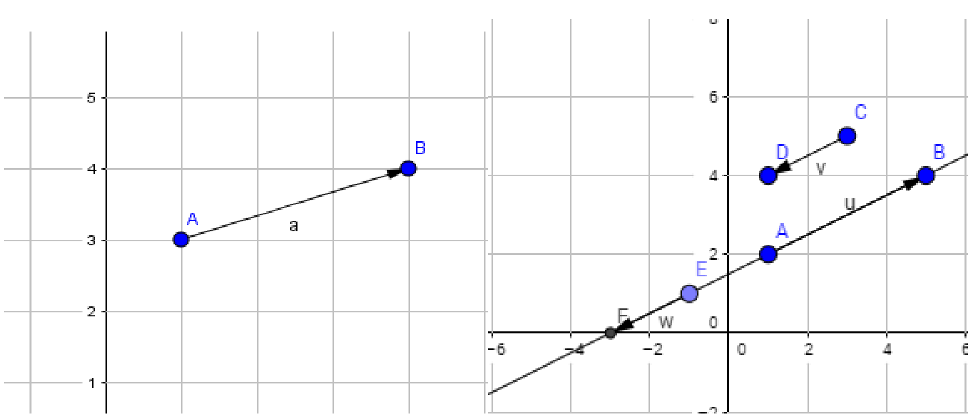


Графическое представление матрицы AA+BB

Данная модель позволяет наглядно продемонстрировать графическое представление матрицы AA+BB. Гистограмма представляет собой множество столбцов квадратного сечения, расположенных на плоскости, образованной осями строк (row), и столбцов (column) матрицы. При этом высота столбцов определяется содержимым ячеек матрицы.

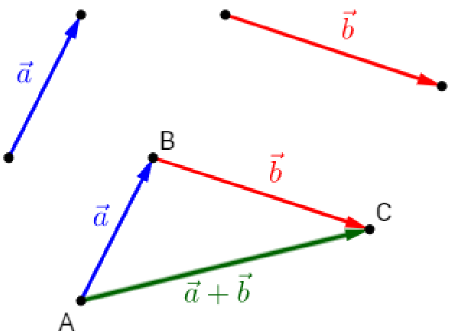
Для изображения значений матрицы AA+BB в виде гистограммы используется команда matrixplot, содержащаяся в библиотеке plots

Модель 2. Понятие вектора. Коллинеарные векторы (к лекции 5).



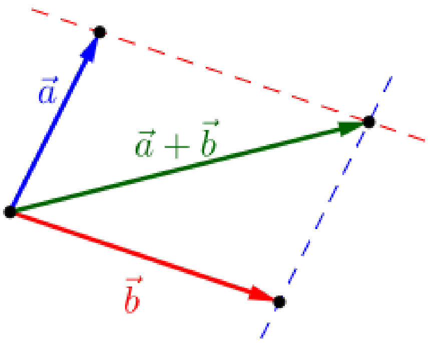
Данная модель позволяет продемонстрировать наглядно понятие вектора, коллинеарности векторов, нуль вектор, какие два вектора считаются равными и т.д.

Модель 3. Линейные операции над векторами. Сложение векторов (к лекции 5).



Правило треугольника

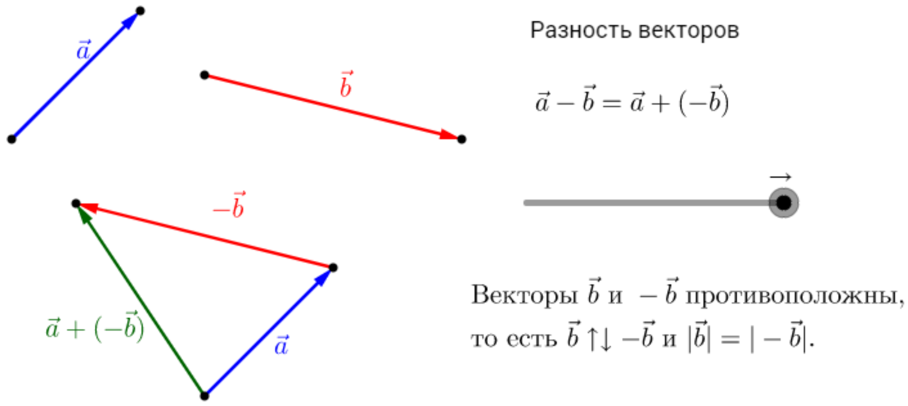
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



Правило параллелограмма

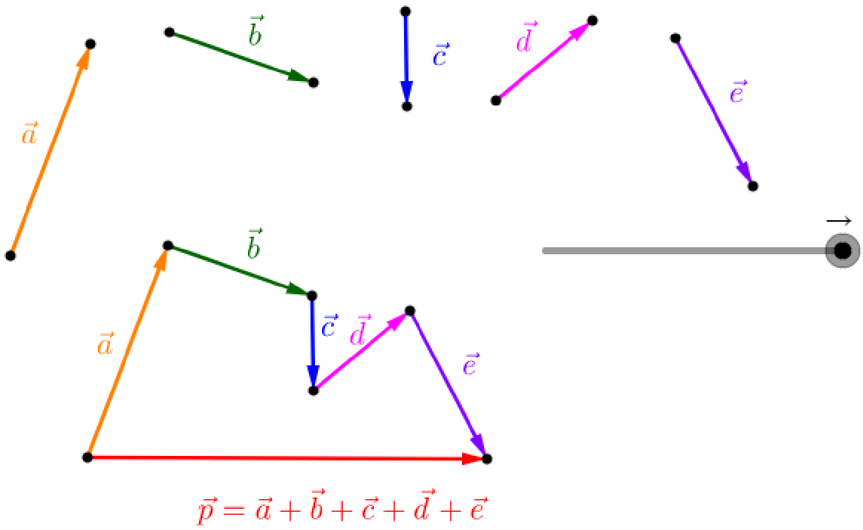
Данная модель позволяет продемонстрировать правила треугольника и параллелограмма. При этом учащиеся могут убедиться, что результат сложения не зависит от выбранного способа.

Модель 4. Разность векторов (лекция 5).



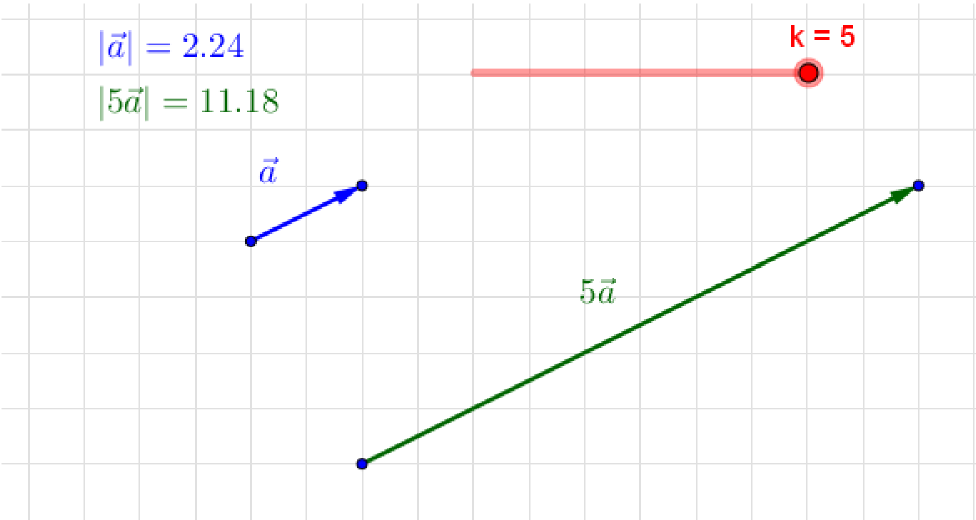
Данная модель позволяет продемонстрировать разность векторов. Учащиеся могут убедиться, что вычитание (разность) – операция, обратная сложению, сопоставляющая двум векторам их разность.

Модель 5. Правило замыкающего вектора (к лекции 5).



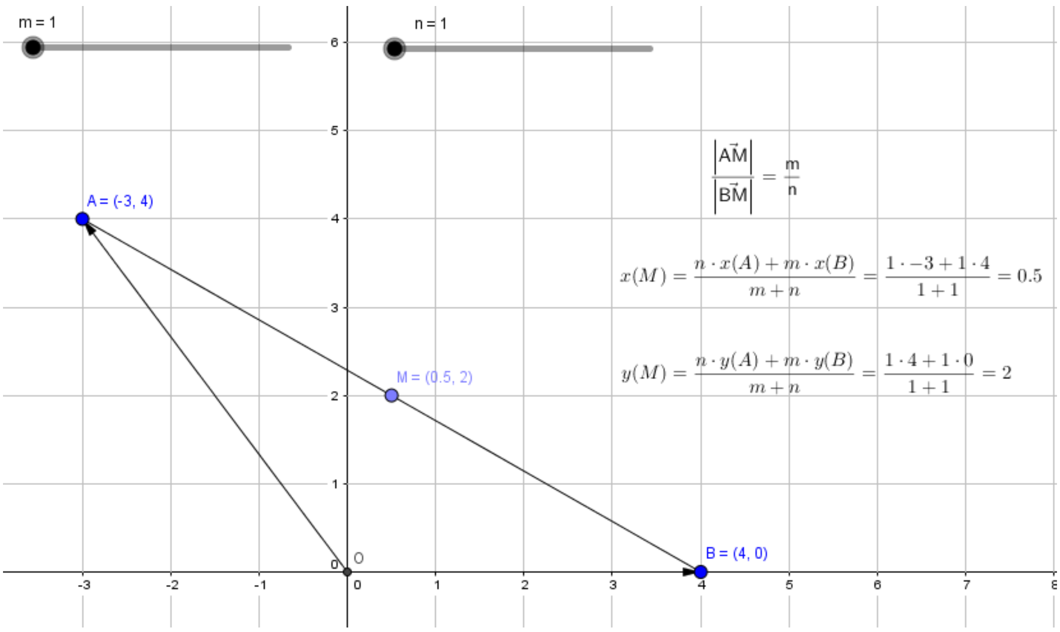
Данная модель позволяет продемонстрировать правило замыкающего вектора (правило многоугольника). Сумму нескольких векторов получаем так: складываем первый и второй вектор, затем к их сумме прибавляем третий вектор и т. д. Из закона сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются. Такой приём сложения нескольких векторов называется правилом многоугольника**.**

1. *Модель 6. Умножение вектора на число (к лекции 5).*



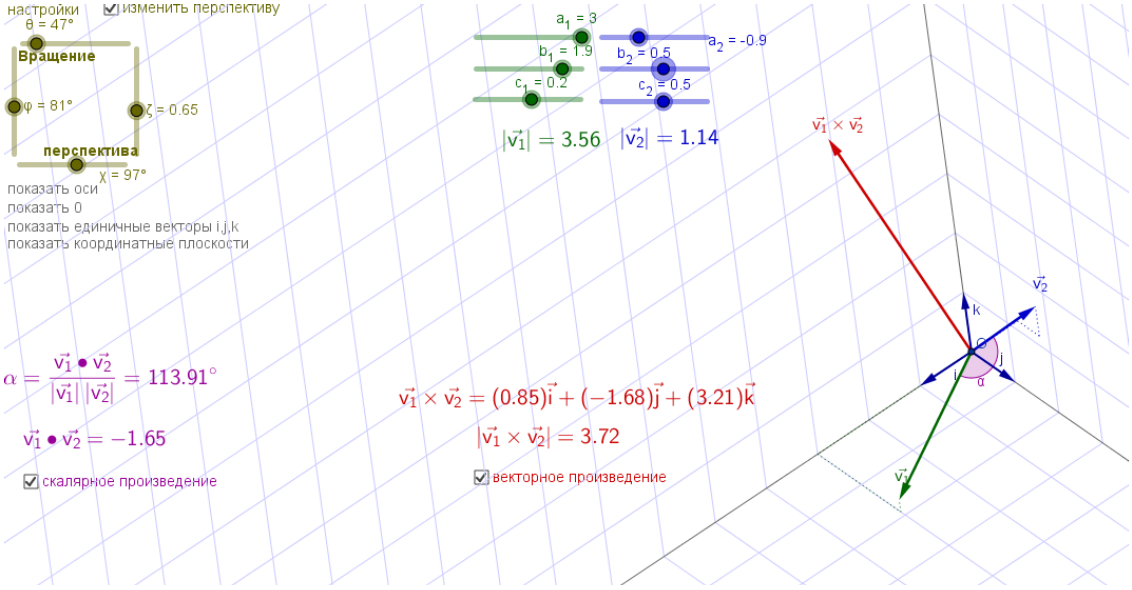
Данная модель позволяет продемонстрировать умножение вектора на число. При умножении вектора на число, данный вектор и результат коллинеарны. Если умножить вектор на число 1, получим равные векторы. Если умножить вектор на число −1, получим противоположные векторы.

Модель 7. Деление отрезка в заданном отношении (лекция 7).



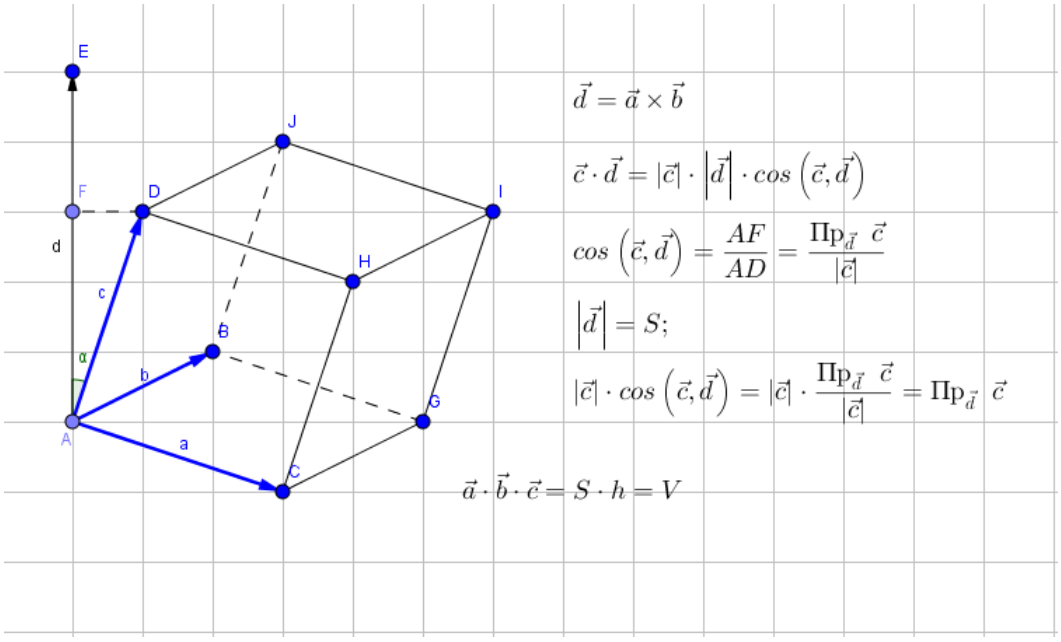
Данная модель позволяет продемонстрировать деление отрезка в заданном отношении. Где точка M на отрезке AB делит этот отрезок в отношении $\frac{m}{n}$. При этом учащиеся могут убедиться, что при m=n точка M является серединой отрезка AB. Если в равенстве одно из чисел m или n будет отрицательным, то тогда точка М будет находиться на той же прямой отрезка АВ деля его в отношении $\left|{}^{m}\!/_{n}\right|$.

Модель 8. Произведение векторов. Скалярное произведение (к лекции 9).



Данная модель позволяет продемонстрировать произведение векторов и скалярное произведение.

Модель 9. Смешанное произведение векторов (к лекции 11).

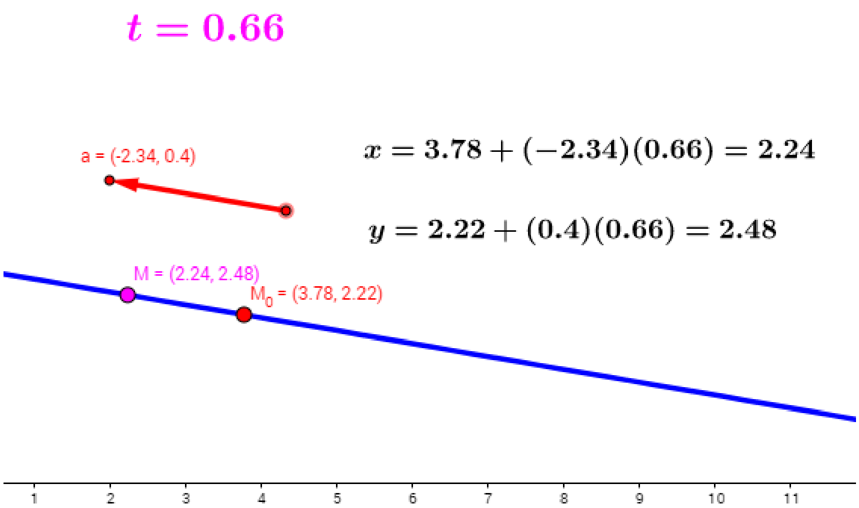


Данная модель позволяет продемонстрировать смешанного произведения векторов. Геометрический смысл смешанного произведения:

если тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ правая, то их смешанное произведение равно объему параллелепипеда построенного на этих векторах: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = V$. В случае левой тройки $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ смешанное произведение указанных векторов равно объему параллелепипеда со знаком минус: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -V$. Если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

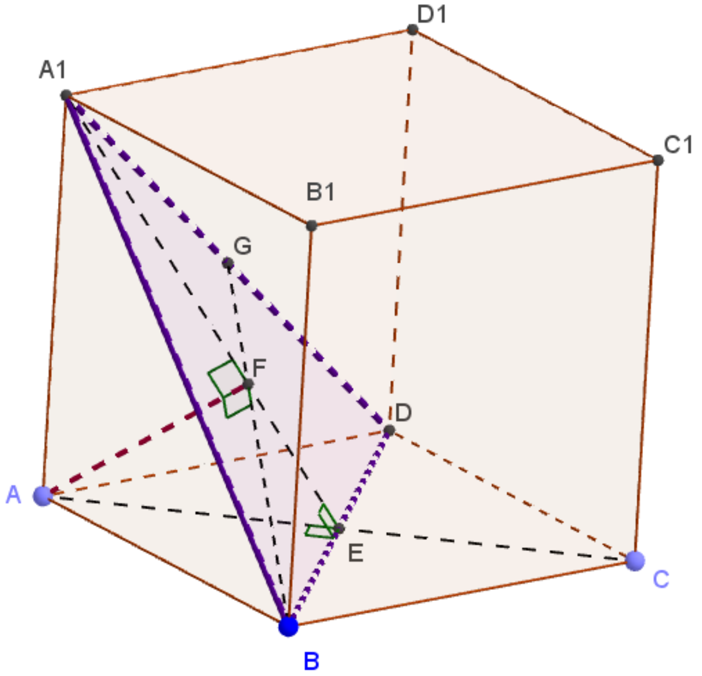
Итак, из выше сказанного можно сделать вывод, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов: V=|(a,b,c)|.

Модель 10. Параметрическое уравнение прямой на плоскости (к лекции 12).



Данная модель позволяет продемонстрировать параметрическое уравнение прямой на плоскости.

Модель 11. Расстояние от точки до плоскости (к лекции 13).



Данная модель позволяет продемонстрировать расстояние от точки до плоскости.

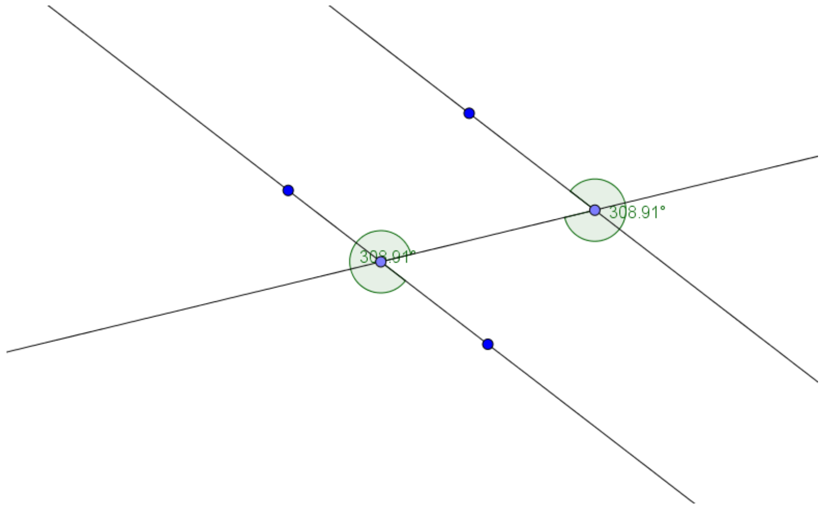
Расстояние от точки до плоскости – это расстояние от данной точки до основания перпендикуляра, проведенного из заданной точки к заданной плоскости.

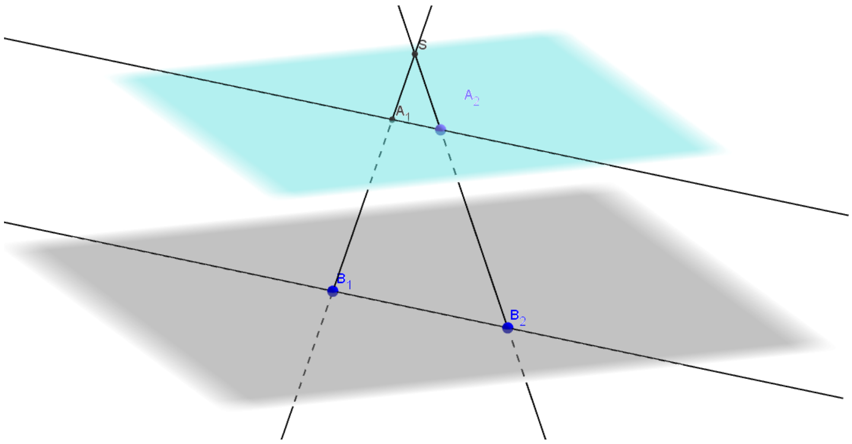
Алгоритм для нахождения расстояния от точки $A(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости A_1BD следующий:

- составляем уравнение прямой a, которая проходит через точку A и перпендикулярна к плоскости A_1BD;
- находим координаты (x_2,y_2,z_2) точки F - точки пересечения прямой a и плоскости A_1BD;
- вычисляем расстояние от точки A до плоскости A_1BD по формуле:

$$|AF|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

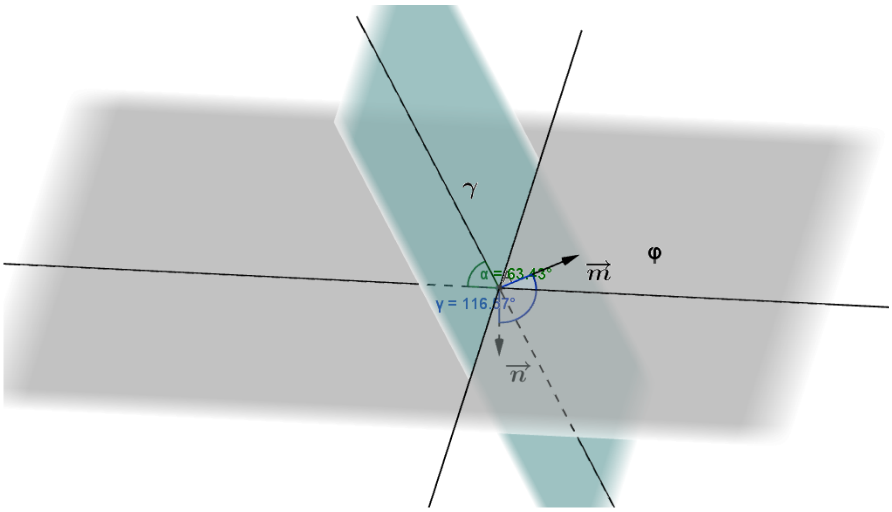
Модель 12. Признаки параллельности прямых и плоскостей (к лекции 13)





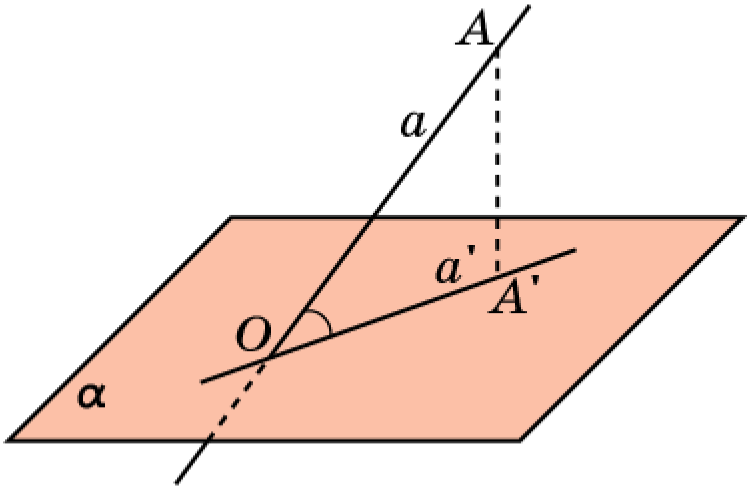
Данная модель позволяет продемонстрировать признаки параллельности прямых и плоскостей.

Модель 13. Угол между плоскостями (к лекции 13).



Данная модель позволяет продемонстрировать угол между плоскостями. Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях. Другими словами, в плоскости φмы провели прямую m, перпендикулярную c. В плоскости γ— прямую n, также перпендикулярную c. Угол между плоскостями φ и γ равен углу между прямыми m и n.

Модель 14. Угол между прямой и плоскостью (к лекции 13).



Данная модель позволяет наглядно показать угол между прямой и плоскостью. Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

Нужно опустить перпендикуляр из любой точки прямой АО на плоскость α. А потом провести прямую через точки А и О. Прямая a' называется проекцией прямой АО на плоскость α. Угол между прямой a и плоскостью α (по определению) равен углу φ между a\ и a'

Для обеспечения компьютерного сопровождения теоретической части дисциплины «Математика» для студентов по направлению подготовки 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология» были разработаны анимационные модели с использованием СКМ Maple, СДМ GeoGebra.

Предлагаемое компьютерное сопровождение будет способствовать лучшему пониманию студентами дисциплины «Математика» и повышению качества образования. Кроме того, материально-техническая база ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева позволяет реализовать компьютерное сопровождение с использованием программного обеспечения, СКМ Maple, а также СДМ GeoGebra.

Заключение

Изучив роль информационных технологий в процессе обучения можно сказать, что повышение дальнейшей эффективности образования невозможно без создания новых форм и способов обучения, которые, в свою очередь, напрямую связаны с теми возможностями, которые предоставляют информационные технологии.

Исследовав разнообразие компьютерного сопровождения в процессе обучения студентов математике, выявили, что применение компьютерного сопровождения открывает для преподавателя новые возможности в преподавании своего предмета и позволяет повысить эффективность образовательного процесса.

Выявив возможности компьютерного сопровождения курса математики для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология» можно сказать, что применение компьютерного сопровождения позволит достичь на уроках большей наглядности, повысить интерес студентов к предмету и дисциплине, ускорить процесс усвоения учащимися всех необходимых знаний, умений и навыков. Обосновано, что компьютерная система GeoGebra и СКМ Maple обладает целым рядом анимационных возможностей.

Разработано компьютерное сопровождение дисциплины «Математика» для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01. «Педагогическое образование» направленность (профиль) образовательной программы «Технология».

Таки образом, все поставленные задачи решены, цель исследования достигнута, гипотеза исследования подтверждена.

Практическая значимость проведенного исследования заключается в том, что разработанное компьютерное сопровождение дисциплины

«Математика» может быть использована преподавателями ВУЗа при изучении аналитической геометрии, линейной алгебры.

Библиографический список

1. Алферов М.Ю. Дидактические возможности и особенности свободной программы динамической геометрии GeoGebra. / Научно-методическое издание: Материалы XXIV Международной конференции «Применение инновационных технологий в образовании», 26 – 27 июня 2013г. г. Москва, г.Троицк, 2013г., с.448-451.

2. Анискин А.А. Общая характеристика информатизации образования в школе. - М: ИИО РАО, 2010 г.

3. Боголюбов В.И. Инновационные технологии в педагогике. /В.И. Боголюбов // Школьные технологии. - 2005. - №1.

4. Вайцева О.Б. Информационная компетентность учителя образовательной области «Технология»/ педагогика: 2004. № 7.17 с.

5. Джонассен Д.Х. Компьютеры как инструменты познания // Информатика и образование. - №4. – 1996. – с. 116-131.

6. Дахин А.Н. Образовательные технологии: сущность, классификация, эффективность/ А.Н. Дахин // Школьные технологии. - 2007. - №2.

7. Зайцева В. В. Методика преподавания высшей математики с применением новых информационных технологий. Елабуга, 2005. 140 с

8. Игнатьев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. – Казань. Казанский университет, 2014, – 298с.

9. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина АР. Аналитическая геометрия и линейная алгебра с применением СКМ Maple для естественно-научных направлений.. – Казань: Казанский университет, 2016, - 120 с.

10. Майер В.Р., Сёмина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики.

Монография. – Красноярск: РИО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2014, – 508с.

11. Основные дидактические принципы обучения математике. [Электронный ресурс]. URL: http://studopedia.org/2-77474.html (дата обращения 03.11.14)

12. Отраслевой стандарт Госкомвуза Российской Федерации // Информационные технологии в высшей школе: Термины и определения (Утвержден и введен в действие Приказом Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию от 12.02.96 № 260).

13. Роберт И.В., Поляков В.А. Основные направления научных исследований в области информатизации профессионального образования. – М.: «Образование и Информатика», 2004.

14. Симонович С.В., Евсеев Г.А. Практическая информатика: Учебное пособие для средней школы. Универсальный курс. - М.:АСТ-ПРЕСС КНИГА,2003. - 480 с.

15. Трайнев В.А., Трайнев И.В. Информационные, коммуникационные, педагогические технологии (обобщении и рекомендации). - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2005. - 280 с.

16. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования. Уровень высшего образования «бакалавриат». Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование, 2013

17. Филиппова Н. В. Применение систем компьютерной математики и компьютерных технологий при изучении дисциплин высшей математики как один из видов педагогических технологий // Молодой ученый. — 2009. — №7. — С. 254-259.

18. Хуторской А.В, Современная дидактика. - СПб.: Питер, 2001. - 544 с.

19. Челак Е.Н., Конопатова Н.К. Развивающая информатика. Методическое пособие. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001, - 208 с.

20. http://studopedia.org/2-77474.html

21. Derry,S.J. Flexible cognitive tools for problem solving instruction. Paper presented at the annual meeting of The American Educational Research Association, Boston, MA, 1990, April, p. 16-20.

Приложение А. Теоретический и практический материал к дисциплине «Математика»

Лекция 1.

Историческая справка

Аналити́ческая геоме́трия — раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры.

Лине́йная а́лгебра — раздел алгебры, изучающий векторы, векторные, или линейные пространства, линейные отображения и системы линейных уравнений.

Матрицы

Понятие и виды матрицы

Определение 1. *Матрицей A размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij} – элементов матрицы: где i – номер строки, в которой расположен данный элемент, j – номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сокращено матрица A записывается также в виде $A = \|a_{ij}\|$ либо $A = (a_{ij})$ В частности, когда m=1, n >1, мы имеем однострочную матрицу $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, которую называют матрицей-строкой. Если m >1, n=1, то имеем одностолбцовую матрицу, которую называют матрицей-столбцом. Матрицы одинаковой размерности называются равными, если у них равны соответствующие элементы, находящиеся в одинаковых позициях. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то A=B , если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

Определение 2. *Матрица, у которой число строк равно числу столбцов: $m=n$ называется квадратной матрицей. Число ее строк или столбцов называется порядком матрицы.*

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

есть квадратная матрица второго порядка. В квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

диагональ, проходящая из левого верхнего угла в правый нижний угол, называется главной диагональю матрицы А. Побочной диагональю той же матрицы называется другая диагональ: a_{n1}, $a_{(n-1)2}$, . . . , a_{1n} , проходящая из левого нижнего угла в правый верхний угол. Квадратная матрица $A = (a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ называется диагональной, если все элементы этой матрицы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю: $a_{ij}=0$ для всех $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если в диагональной матрице все элементы главной диагонали равны единице $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$, то эта матрица называется единичной и обозначается **E**

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

иначе говоря, $E = (\delta_{i,j})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

где $\delta_{i,j}$– так называемый символ Кронекера. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нуль-матрицей и обозначается O.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц

Рассмотрим матрицу A размерности m x n.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Этой матрице мы можем сопоставить матрицу B по следующему правилу.

Элементы каждой строки матрицы A запишем в столбец в том же порядке:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы матрице A_{mn} сопоставили матрицу B_{nm}, которую назовем **транспонированной** к матрице А и введем обозначение $B=A^T$.

Переход $A > A^T$ назовем **операцией транспонирования**.

Например, чтобы найти транспонированную матрицу из *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами строки и столбцы, сохраняя порядок:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если мы повторим операцию транспонирования, это приведет нас к исходной матрице, т.е. $(A^T)^T=A$.

Действия над матрицами

Определение 3. *Суммой двух матриц одинаковой размерности A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \rightarrow A + B = C$

Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

то суммой A+B называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

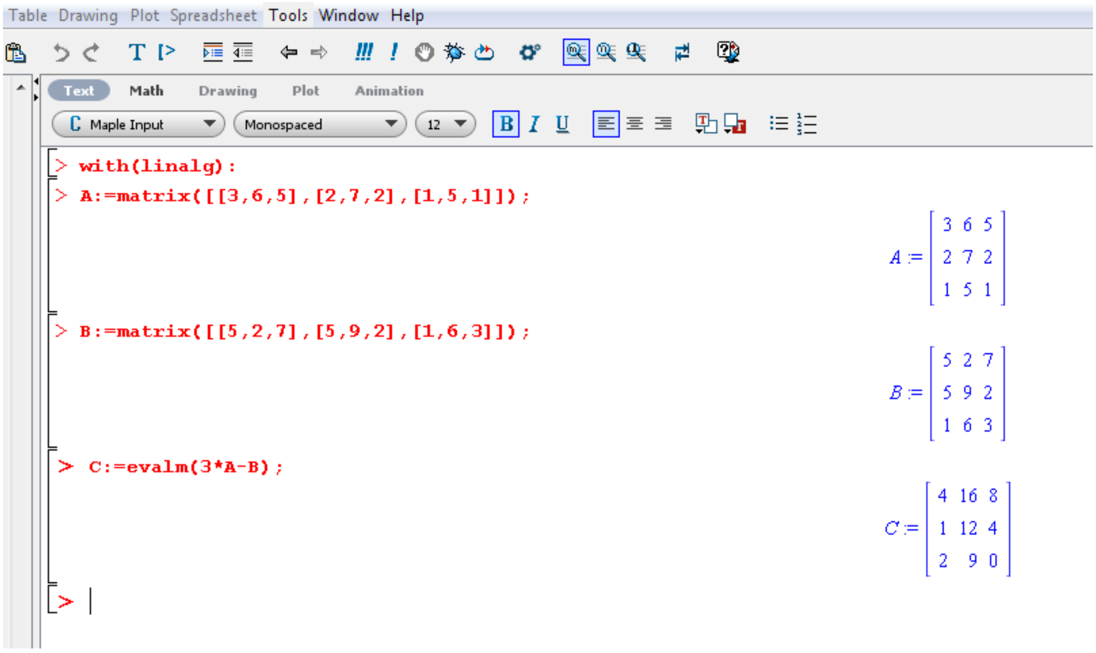
Определение 4. *Разностью двух матриц одинаковой размерности A и B называется матрица C, элементы которой равны разности элементов матриц A и B:* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \rightarrow A - B = C$

Определение 5. *Произведением матрицы A на число λ называется матрица, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A.* Отсюда следует, что при умножении матрицы на нуль получается нуль-матрица.

Пример 1. Найти матрицу 3A-B, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

На основании определения разности матриц и умножения матрицы на число имеем



Определение 6. *Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица C = AB, элементы которой составляются следующим образом:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{31}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Как видим, элемент матрицы – произведения, находящийся на пересечении i – й строки и j – го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i – й строки первой матрицы на элементы j – го столбца второй матрицы. Это правило сохраняется для умножения квадратных матриц третьего и более высокого порядка, а также для умножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы – множимого равно числу строк матрицы – множителя.

Пример 2. Вычислить произведения матриц АВ, если

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица А имеет высоту 3 и ширину 3, матрица В – высоту 3 и ширину 2. Таким образом, ширина первой матрицы совпадает с высотой второй матрицы. Следовательно, операция умножения определена, и мы получаем матрицу высотой 3 и шириной 2:

$$A=\begin{pmatrix} 4*2+1*2+5*7 & 4*5+1*1+5*4 \\ 2*2+3*2+2*7 & 2*5+3*1+2*4 \\ 0*2+6*2+1*7 & 0*5+6*1+1*4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 45 & 41 \\ 24 & 41 \\ 19 & 10 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы и эквивалентные преобразования матриц

Определение 7. *Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется ее рангом. Говорят, что матрицы A и B эквивалентны, если они имеют одинаковый ранг, и пишут: A ~ B.*

Определение 8. *Эквивалентными преобразованиями матрицы называется преобразования, не изменяющие ее ранг. Эквивалентные преобразования также обозначаются символом эквивалентности ~*

Эквивалентные преобразования сводятся к комбинации элементарных преобразований, не изменяющих ранг матрицы:

1) перестановка местами двух строк или столбцов;

2) умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на произвольное число k, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца) матрицы, умноженных на произвольное число k.

С помощью элементарных преобразований можно дать следующий *конструктивный метод нахождения ранга матрицы.* Пусть в матрице $A = (a_{ij})$; $(i, j = 1...n)$[5] имеется ненулевой элемент $a_{mn} = \alpha_1 \neq 0$. Переставляя строки и столбцы, поместим этот элемент в левом верхнем углу матрицы. Затем, вычитая из каждой строки матрицы первую строку, умноженную на соответствующий множитель, обратим в нуль все оставшиеся элементы первого столбца. Аналогичную операцию проводим и со столбцами, обращая в нуль все элементы первой строки. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

В итоге мы придем к матрице вида:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & . & & . & \\ & \alpha_2 & 0 & & . & 0 \\ . & . & . & & . & 0 \\ & & & \alpha_r & . & \\ . & . & . & . & . & \\ & & 0 & & . & 0 \end{pmatrix}$$

Число, не равных нулю и расположенных по главной диагонали блока элементов, совпадает с рангом матрицы А.

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1-1=0 & -3-(-2)=-1 & 1-2=-1 & -4-(-1)=-3 \\ 2-2\cdot 1=0 & -5-2\cdot(-2)=-1 & 3-2\cdot 2=-1 & -5-2\cdot(-1)=-3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен 2.

Практическое занятие 1.

Действия над матрицами в Maple

Определение матрицы.

Основная часть команд для решения задач линейной алгебры содержится в библиотеке linalg. Поэтому перед решением задач с матрицами и векторами следует загрузить эту библиотеку командой with(linalg).

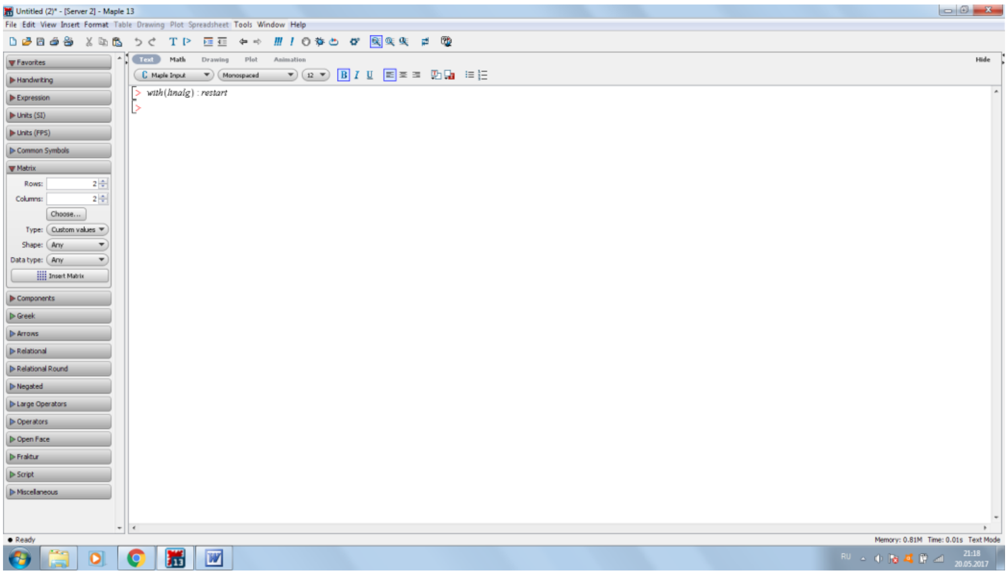
Для определения матрицы в Maple можно использовать команду matrix(n, m, [[a11,a12,…,a1n], [a21,a22,…,a2m],…, [an1,an2,…,anm]]), где n − число строк, m – число столбцов в матрице. Эти числа задавать необязательно, а достаточно перечислить элементы матрицы построчно в квадратных скобках через запятую.

Пример 1. Записать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

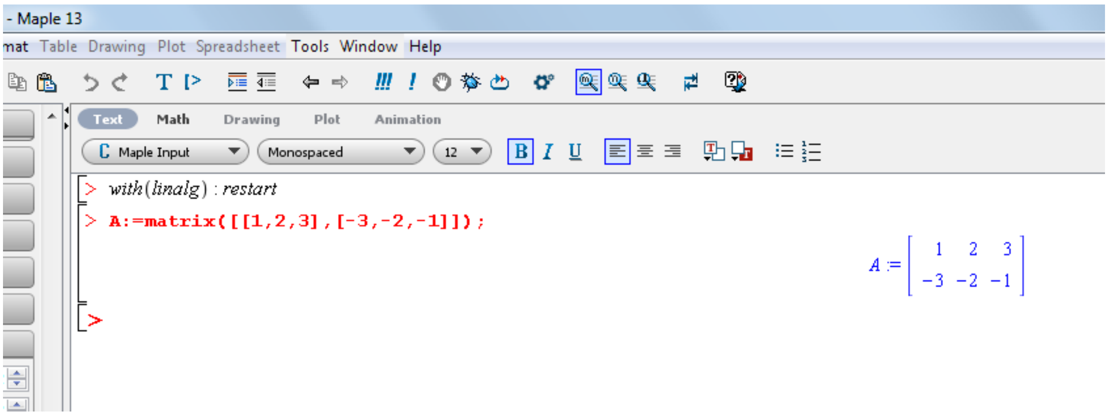
Решение:

1. Загрузите библиотеку linalg . Наберите команду >with(linalg): restart;
или > restart; with(linalg):

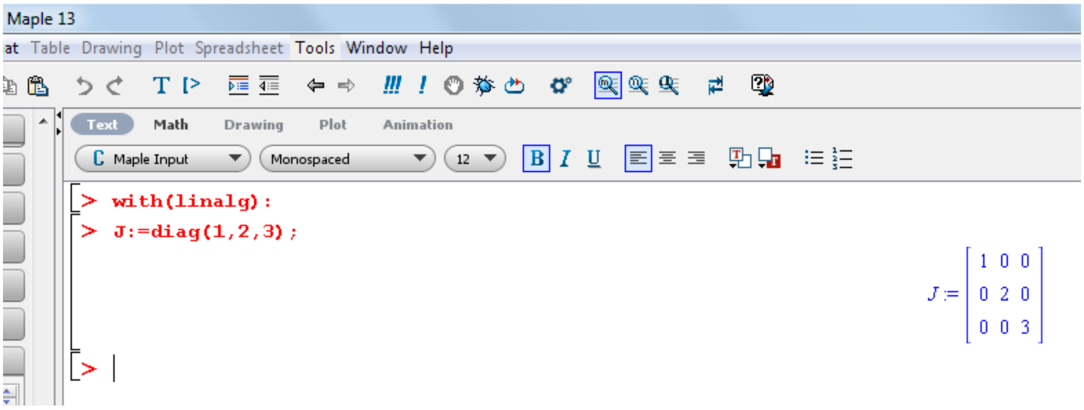


2. Запишите условие задания: >A:=matrix([[1,2,3],[-3,-2,-1]]);

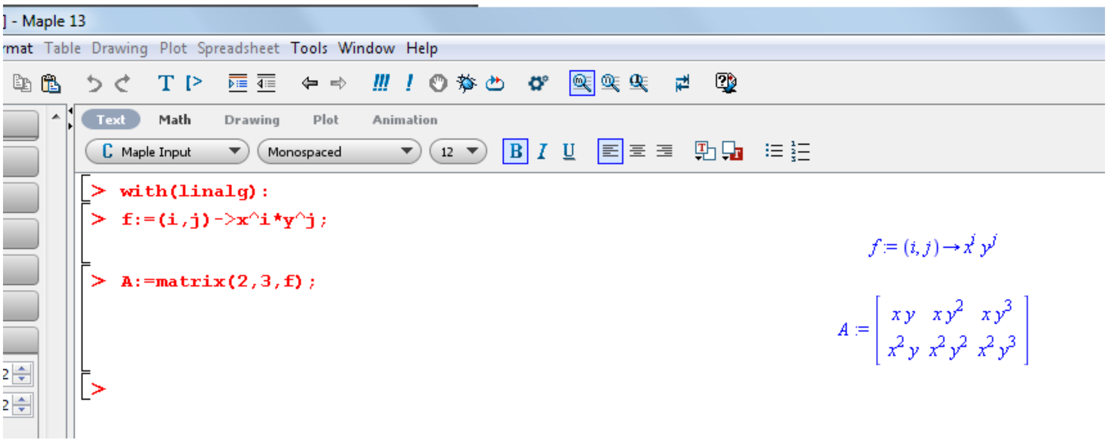
3. Нажмите Enter



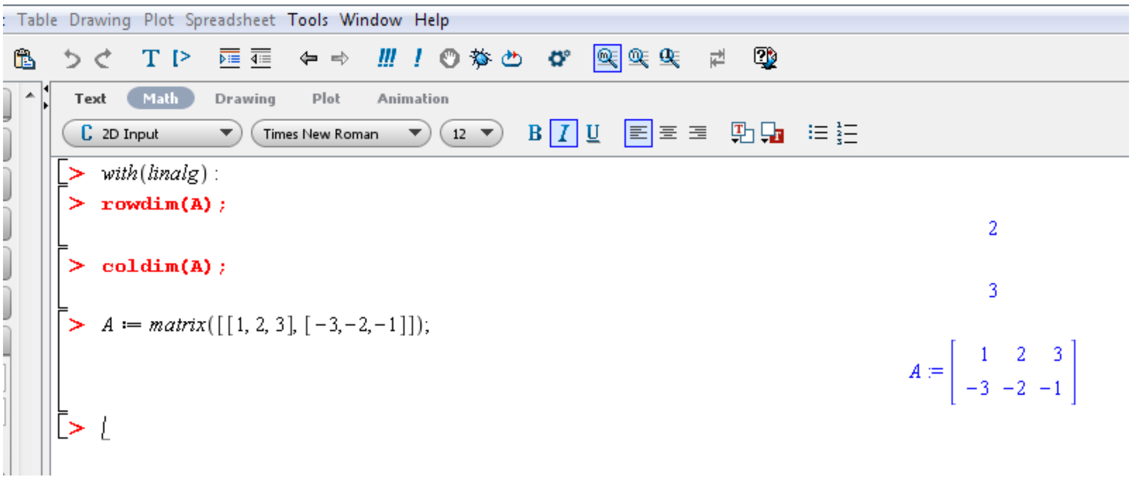
В Maple матрицы специального вида можно генерировать с помощью дополнительных команд. В частности диагональную матрицу можно получить командой diag.



Генерировать матрицу можно с помощью функции f(i, j) от переменных i, j – индексов матрицы: matrix(n, m, f), где где n - число строк, m – число столбцов.



Число строк в матрице A можно определить с помощью команды rowdim(A), а число столбцов – с помощью команды coldim(A).



Арифметические операции с матрицами

Сложение двух матриц одинаковой размерности осуществляется командами: evalm(A+B) или matadd(A,B). Произведение двух матриц может быть найдено с помощью двух команд:

1) evalm(A&*B);

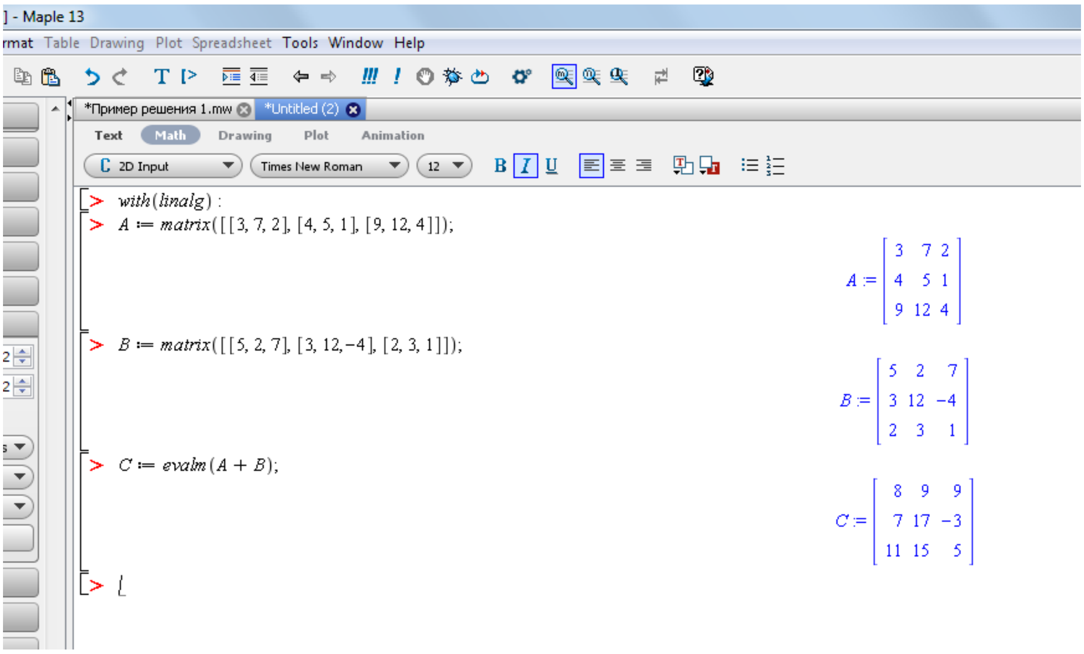
2) multiply(A,B).

Пример 2. . Найти сумму матриц A и B

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 9 & 12 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 12 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Загрузите библиотеку linalg . Наберите команду >with(linalg):
2. Наберите команду : >A:=matrix([[3,7,2],[4,5,1],[9,12,4]]);
3. Наберите команду: >B:=matrix([[5,2,7],[3,12,-4],[2,3,1]]);
4. Наберите команду: >C:=evalm(A+B);
5. Нажмите Enter



Ответ: C=(A+B)

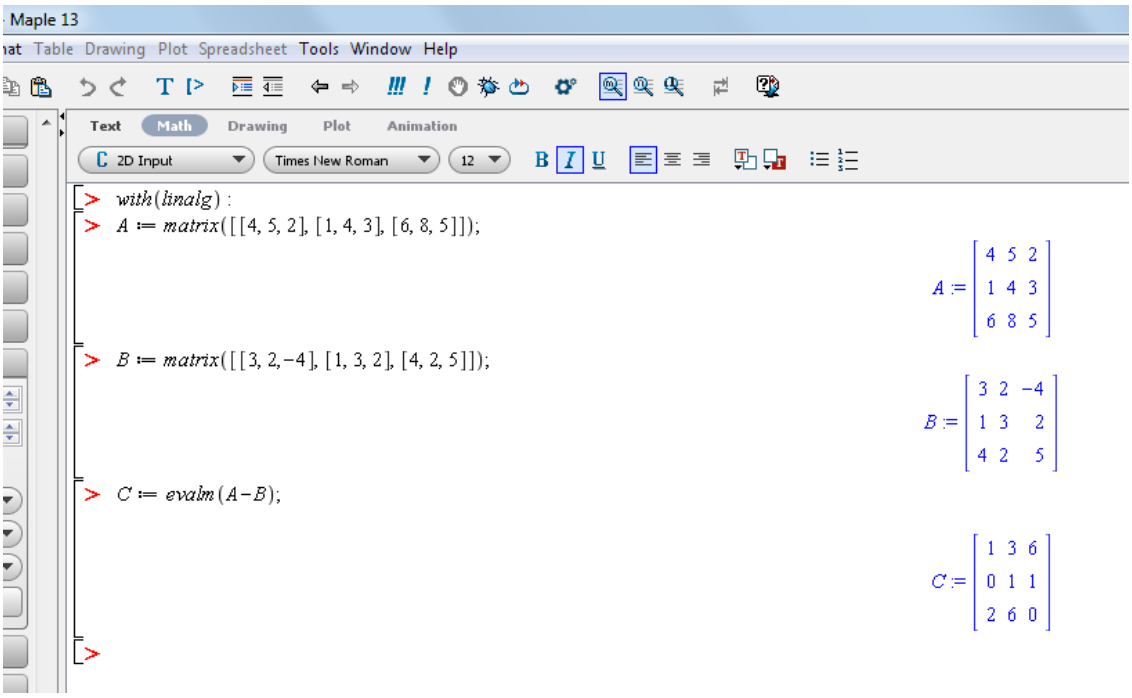
$$A+B:=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 7 & 17 & -3 \\ 11 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

Пример 3. Найдите разность матриц

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Загрузите библиотеку linalg . Наберите команду: >with(linalg):
2. Наберите команду: >A:=matrix([[4,5,2],[1,4,3],[6,8,5]]);
3. Наберите команду: >B:=matrix([[3,2,-4],[1,3,2],[4,2,5]]);
4. Наберите команду: >C:=evalm(A-B);
5. Нажмите Enter



Ответ: C=(A-B)

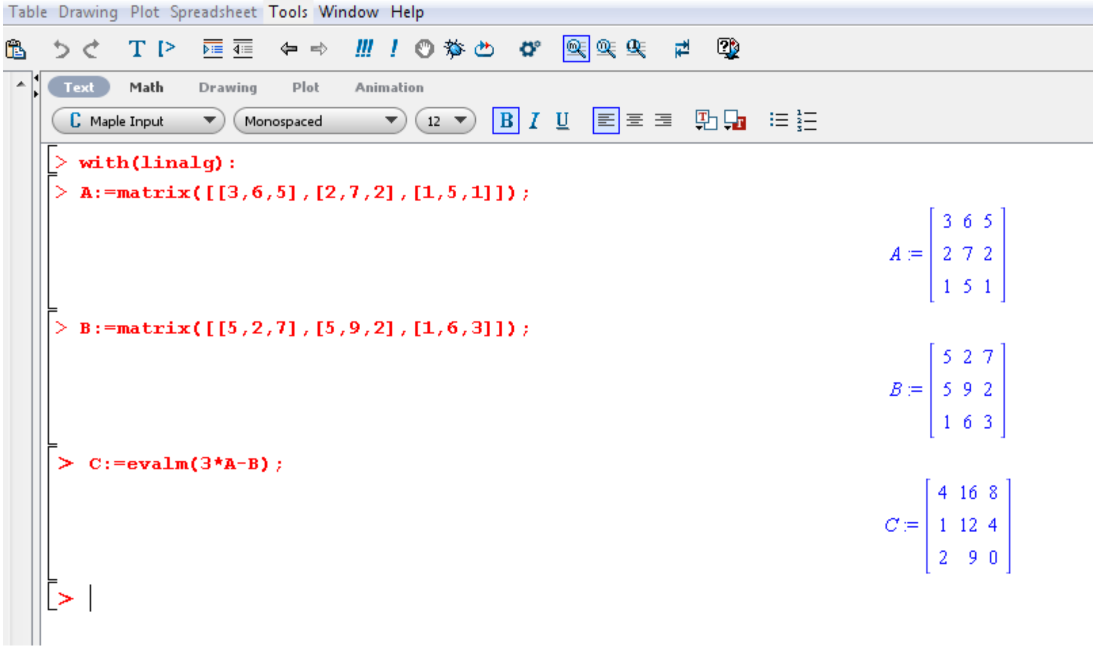
$$A\text{-}B := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример 4. Вычислить матрицу 3A-B, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Загрузите библиотеку linalg . Наберите команду: >with(linalg):
2. Наберите команду: >A:=matrix([[3,6,5],[2,7,2],[1,5,1]]);
3. Наберите команду: > B:=matrix([[5,2,7],[5,9,2],[1,6,3]]);
4. Наберите команду: > C:=evalm(3*A-B);
5. Нажмите Enter



Ответ: C=(3*A-B)

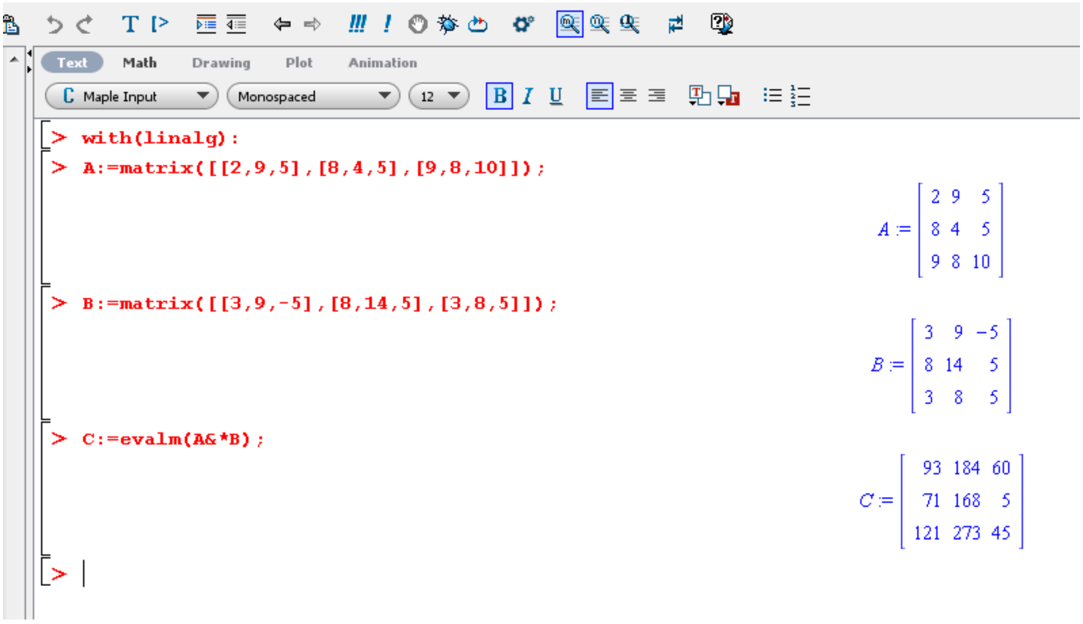
$$3*A\text{-}B := \begin{bmatrix} 4 & 16 & 8 \\ 1 & 12 & 4 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример 5. Вычислить произведения матриц AB

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -5 \\ 8 & 14 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Загрузите библиотеку linalg . Наберите команду: >with(linalg):
2. Наберите команду: >A:=matrix([[2,9,5],[8,4,5],[9,8,10]]);
3. Наберите команду: >B:=matrix([[3,9,-5],[8,14,5],[3,8,5]]);
4. Наберите команду: >C:=evalm(A&*B);
5. Нажмите Enter



Ответ: C=(A*B)

$$A * B := \begin{bmatrix} 93 & 184 & 60 \\ 71 & 168 & 5 \\ 121 & 273 & 45 \end{bmatrix}$$

Визуализация матрицы с помощью команды «matrixplot»

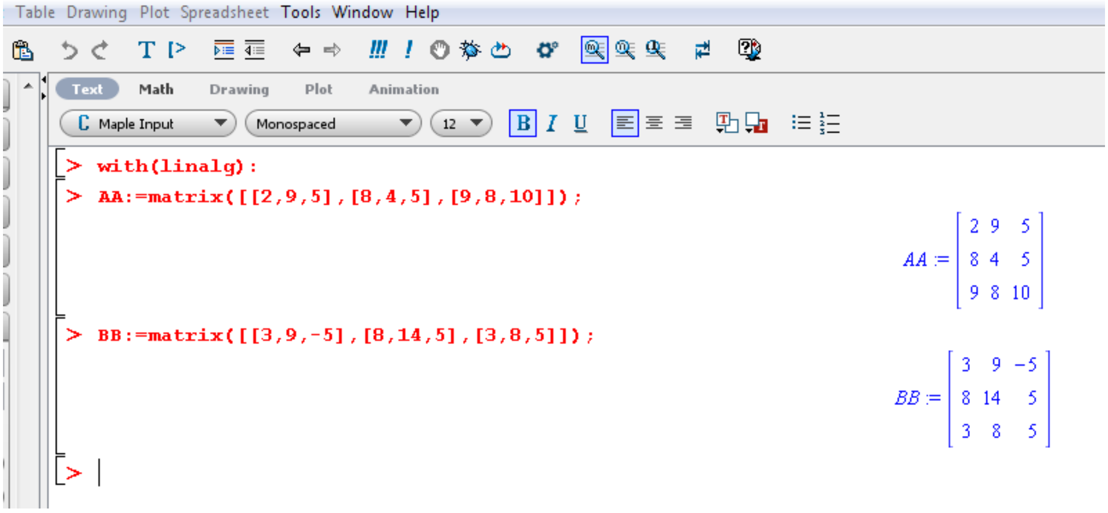
Пусть дана матрица AA и матрица BB

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -5 \\ 8 & 14 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

>with(linalg):

>AA:=matrix([[2,9,5],[8,4,5],[9,8,10]]);

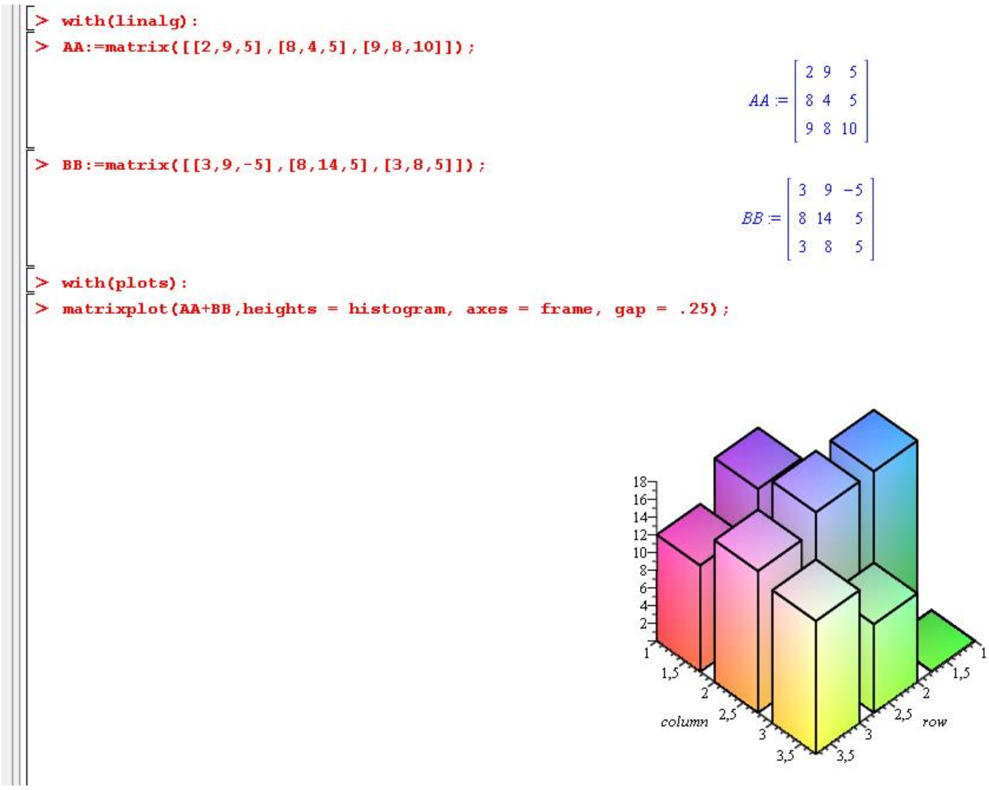
>BB:=matrix([[3,9,-5],[8,14,5],[3,8,5]]);

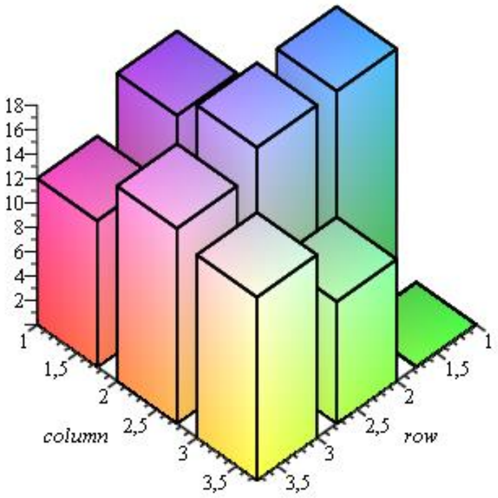


Для изображение значений матрицы AA+BB в виде трехмерного графика или гистограммы используется команда matrixplot, содержащаяся в библиотеке plots

>with(plots):

>matrixplot(AA+BB,title=Графическое представление матрицы AA+BB", heights = histogram, axes = frame, gap = .25);





Графическое представление матрицы АА+ВВ

Лекция 2.

Определители

Определение определителя

Определение 1. *Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.*

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы также обозначают |A|, Δ или

$$\det A = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a1n \\ a21 & a22 & a2n \\ an1 & an2 & ann \end{vmatrix}$$

Определение 2. *Определителем первого порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 1-го порядка следующим образом:*

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Определение 3. *Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом*

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{12}, a_{21} – побочную.

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 30-21=9$$

Определение 4. *Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Заметим, что все произведения содержат элементы из разных строк матрицы. Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства следует брать со знаком «+», какие – со знаком «–», можно использовать так называемое правило треугольника или правило Саррюса.

Разложение определителя по элементам строки или столбца

Определение 5. *Если в определителе мысленно вычеркнуть j-ый столбец и i-ю строку, то оставшийся определитель (n-1) - го порядка называется минором элемента a_{ij} и обозначается символом M_{ij} .*

Например, минор M_{12} элемента a_{12}, получается из определителя $|A|$ вычеркиванием первой строки и второго столбца

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Определение 6. *Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется число $(-1)^{i+j}M_{ij}$.*

Например, алгебраическим дополнением элемента a_{12} определителя $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

является число

$$(-1)^{1+2}=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^3(-1)+1\cdot 4+1=(-1)(-3)=3$$

Теорема 1. *Определитель матрицы А (См. определение 1) равняется сумме произведений элементов какой – либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ или $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{mj}A_{mj}$

Такое представление определителя называется его разложением по i – строке (j – столбцу). Теорему 1 можно рассматривать и как правило вычисления определителей произвольного порядка, сводя задачу о вычисления определителя n-го порядка к вычислению определителя n-1-го порядка.

Пример 2. Разложить определитель B по элементам третьего столбца

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 4 & 3 & \beta \\ 1 & 7 & \delta \end{vmatrix}$$

Разложив |B| по третьему столбцу, имеем:

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 4 & 3 & \beta \\ 1 & 7 & \delta \end{vmatrix}=\alpha(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}+\beta(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}+\delta(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=\alpha(28-3)-$$

$$-\beta(14-1)+\delta(6-4)=25\alpha-13\beta+2\delta.$$

Вычисление обратной матрицы с помощью определителя.

Определение 7. Квадратная матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы А того же порядка, если их произведение

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

где E– единичная матрица того же порядка, что и матрицы А и A^{-1}

Теорема 2. *Для того, чтобы матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля.*

Существует несколько способов нахождения обратной матрицы. Рассмотрим один из них – нахождение обратной матрицы путём вычисления алгебраических дополнений.

Пусть дана матрица А. Предположим, что detA 6≠0 Построим матрицу С следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & a_{22} & \dots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

где A_{ij}– алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе матрицы А. Очевидно, что для построения матрицы С необходимо сначала заменить элементы матрицы А соответствующими им алгебраическими дополнениями, а затем полученную матрицу транспонировать. Полученная таким образом матрица С называется присоединенной к матрице А. Чтобы получить матрицу A^{-1} , обратную для матрицы А, необходимо каждый элемент присоединённой матрицы С поделить на ΔA, т.е. матрица A^{-1} будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}C = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{m1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{m2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1m}}{\Delta} & \frac{A_{2m}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{mm}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) Вычислим определитель матрицы:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & \\ 8 & 3 & 9 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 180 + 32 + 18 - 18 - 30 - 192 = -10$$

Так как $\Delta A \neq 0$, то матрица A невырожденная, и, следовательно, существует обратная ей матрица.

2) Найдем алгебраические дополнения элементов a_{ij} в определителе матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 30, A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -20,$$

$$A_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 7, A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -29, A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 1, A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 18,$$

3) Составим присоединённую матрицу C по формуле

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & a_{22} & \dots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & -20 \\ 7 & -3 & -4 \\ -29 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

4) Разделим все элементы матрицы C на ΔA и, таким образом, найдем искомую обратную матрицу:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} \frac{30}{-10} & \frac{0}{-10} & \frac{-20}{-10} \\ \frac{7}{-10} & \frac{-3}{-10} & \frac{-4}{-10} \\ \frac{-29}{-10} & \frac{1}{-10} & \frac{18}{-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \frac{7}{-10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{29}{10} & \frac{1}{-10} & \frac{9}{-5} \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \frac{7}{-10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{29}{10} & \frac{1}{-10} & \frac{9}{-5} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) + 2 \cdot \frac{7}{-10} + 6 \cdot \frac{29}{10}, & 5 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{10} + 6 \cdot \frac{1}{-10}, & 5 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{9}{-5} \\ 1 \cdot (-3) + 4 \cdot \frac{7}{-10} + 2 \cdot \frac{29}{10}, & 1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{-10}, & 1 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{9}{-5} \\ 8 \cdot (-3) + 3 \cdot \frac{7}{-10} + 9 \cdot \frac{29}{10}, & 8 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{-10}, & 8 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{2}{5} + 9 \cdot \frac{9}{-5} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

т.е. $A*A^{-1} = E$ Можно проверить, что $A^{-1}*\ A = E$. Следовательно, обратная матрица найдена правильно.

Основные свойства определителей

Свойство 1. *Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \;\; + \;\; + \qquad - \;\; - \;\; - \\ \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 & 6 & 5 \end{vmatrix} \end{array} = (5*7*9) + (4*3*6) + (2*1*5) - (4*1*9) - (5*3*5)$$

$$- (2*7*6) = 315+72+10-36-75-84=202$$

$\det A = \det A^T$

Пример 4.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \; |A^T| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Свойство 2. *Если в определителе* n*-го порядка* k*-я строка* ak *является линейной комбинацией двух строк* bk *и* ck *с коэффициентами* α *и* β, *т.е.* $a=\alpha b+\beta c$, *то* $\Delta=\alpha\Delta 1+\beta\Delta 2$.

Замечание. *Линейное свойство, очевидно, справедливо и для случая, когда* k*-я строка является линейной комбинацией не двух, а нескольких строк.*

Свойство 3. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей их сомножителей.*

Свойство 4. *Если матрица B получается из матрицы A перестановкой двух строк, то* $\det B = -\det A$.

Свойство 5. *Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое действительное число* λ, *то сам определитель умножится на число* λ.

Свойство 6. *Если к элементам некоторой строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на некоторое действительное число* λ, *то величина определителя не изменится.*

Свойство 7. *Если опр*еделитель имеет нулевую строку, то он равен нулю.

Свойство 8. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

Свойство 9. Е*сли определитель имеет две пропорциональных строки, то он равен нулю.*

Свойство 10. *Определитель, у которого одна строка является линейной комбинацией остальных строк, равен нулю.*

Свойство 11. *Определитель вырожденной матрицы равен нулю.*

Практическое занятие 2.

Определители, миноры и алгебраические дополнения. Ранг и след матрицы

Определитель матрицы A вычисляется командой det(A). Команда minor(A,i,j) возвращает матрицу, полученную из исходной матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца. Минор M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A можно вычислить командой det(minor(A,i,j)). Ранг матрицы A вычисляется командой rank(A). След матрицы A, равный сумме ее диагональных элементов, вычисляется командой trace(A).

Пример 6. Вычислите определитель матрицы , минор, след матрицы A

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

Решение:

Загрузите библиотеку linalg . Наберите команду: >with(linalg):

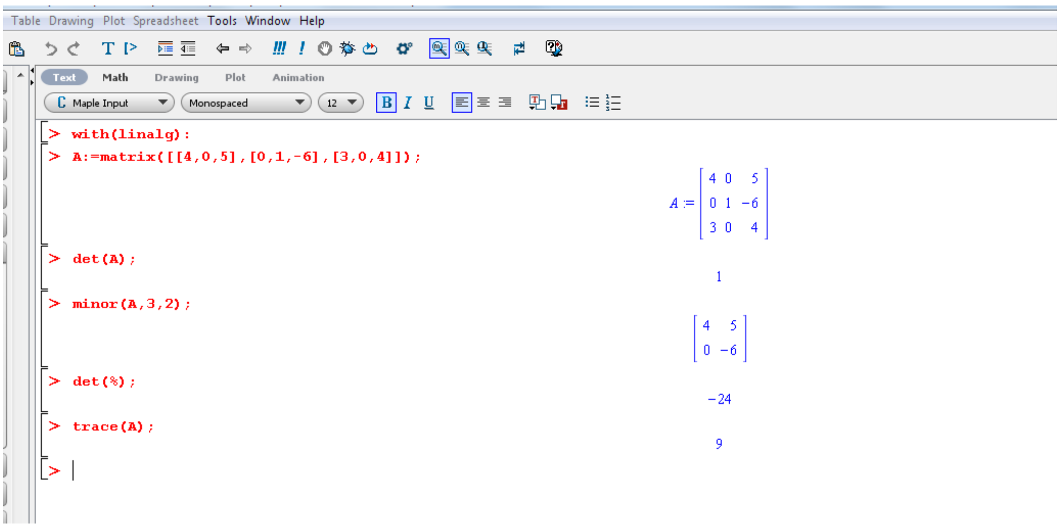
Наберите команду: > A:=matrix([[4,0,5],[0,1,-6],[3,0,4]]);

Наберите команду: > det(A);

Наберите команду: > minor(A,3,2);

Наберите команду: > det(%);

Наберите команду: > trace(A);



Ответ: det(A)= 1; minor(A,3,2)= ; det(%)= -24; trace(A)=9

Пример 7. Найти ранг матрицы

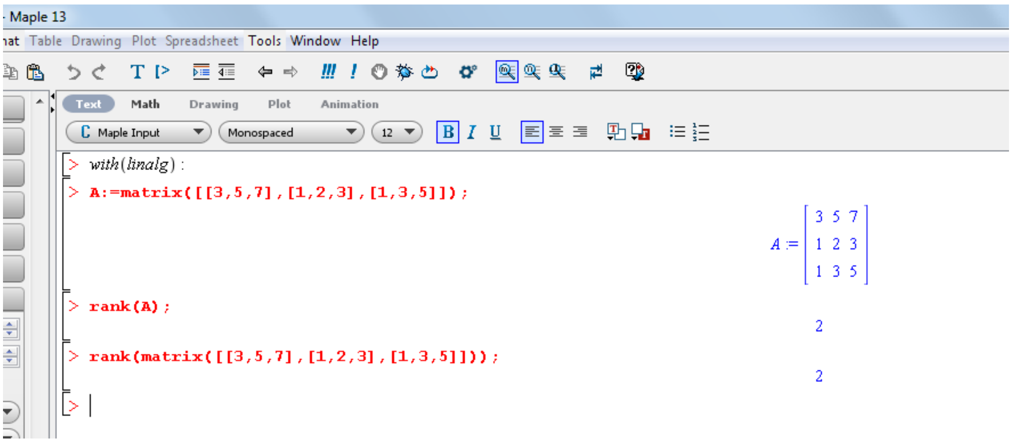
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

Загрузите библиотеку linalg . Наберите команду: >with(linalg):

Наберите команду: > A:=matrix([[3,5,7],[1,2,3],[1,3,5]]);

Наберите команду: >rank(matrix([[3,5,7],[1,2,3],[1,3,5]]); или >rank(A);



Обратная и транспонированная матрицы

Обратную матрицу A^{-1} , такую что $A^{-1}A=AA^{-1}=E$, где E – единичная матрица, можно вычислить двумя способами:

1) evalm(1/A);

2) inverse(A).

Транспонирование матрицы A – это изменение местами строк и столбцов. Полученная в результате этого матрица называется транспонированной и обозначается A'. Транспонированную матрицу A' можно вычислить командой transpose(A).

Пример 8. Найдите обратную и транспонированную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

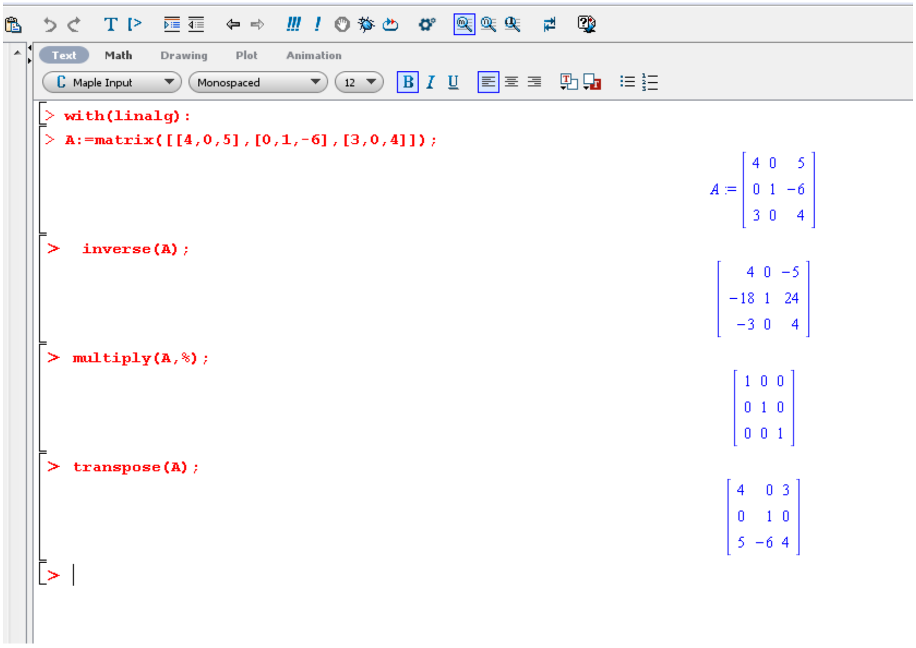
Загрузите библиотеку linalg . Наберите команду: >with(linalg):

Наберите команду: >A:=matrix([[4,0,5],[0,1,-6],[3,0,4]]);

Наберите команду: > inverse(A);

Наберите команду: > multiply(A,%);

Наберите команду: > transpose(A);



Пример 9. Найдите обратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение:

Наберите команду: > A:=linalg[matrix]([[5,2,6],[1,4,2],[8,3,9]]);

Наберите команду: > evalm(1/A):=linalg[inverse](A);

```
> A:=linalg[matrix]([[5,2,6],[1,4,2],[8,3,9]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(1/A):=linalg[inverse](A);
```

$$evalm\left(\frac{1}{A}\right) := \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{29}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

```
>
```

Лекция 3.

Системы линейных уравнений.

Основные понятия о системах линейных алгебраических уравнений

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$– неизвестные, которые необходимо определить, содержатся в этой системе только в первой степени. Заданные числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ называются коэффициентами системы, а заданные числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются свободными членами системы.

Определение 1. *Система называется однородной, если все её свободные члены равны нулю,* $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$*, иначе – неоднородной.*

Определение 2. *Решением системы уравнений называется совокупность таких n чисел* $c_1, c_2, \ldots, cn$*, что подстановка, которых вместо* x_i($x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$) *в систему обращает все её уравнения в тождества.*

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у нее нет ни одного решения. Совместная система может иметь одно или более решений. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение; если же у нее есть хотя бы два различных решения, то она называется неопределенной. Если число уравнений больше числа неизвестных, система называется переопределённой.

Матрица составленная из коэффициентов при неизвестных, называется основной матрицей данной системы линейных уравнений. Матрица, которая получается из основной матрицы добавлением столбца из свободных членов, называется расширенной матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Решение однородных и неоднородных линейных алгебраических уравнений

Теорема 1. *Совместная система линейных уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы совпадает с числом неизвестных.*

Пример 1. Совместна ли система уравнений?

$$\begin{cases} x + 2y - 4z &= 1 \\ 2x + y - 5z &= -1 \\ x - y - z &= -2 \end{cases}$$

Выпишем основную и расширенную матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

и найдем их ранги, приведя выписанную матрицу к ступенчатому виду. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отсюда видно, что ранг основной матрицы равняется рангу расширенной матрицы, т.е. $r = 2$. По теореме 1 имеем тогда, что данная система линейных уравнений совместна.

Так как число неизвестных $n = 3$ и $r < n$, то по теореме 1 имеем, что эта система уравнений неопределенная. Большое значение имеет частный случай применения теоремы Кронекера – Капелли, когда число неизвестных совпадает с числом уравнений. В этом случае применимо правило Крамера:

Теорема 2. (Правило Крамера) Если в системе n линейных уравнений с n неизвестными $\Delta \neq 0$, то система имеет решение и притом единственное. Это решение определяется формулами

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_n & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 & = & -3 \\ 5x_1 + 3x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Решение: Выписываем матрицу системы и столбец свободных членов

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, для нахождения решений можно применить правило Крамера. Находим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -18, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

Итак,

$$x_1 = \frac{-18}{-15} = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{-1}{-15} = \frac{1}{15}, x_3 = \frac{20}{-15} = -\frac{4}{3}$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{1}{15}, x_3 = -\frac{4}{3}$$

Рассмотрим теперь однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как ей всегда удовлетворяет решение **x_1=0, x_2=0,…,x_n=0,** которое называется нулевым, или тривиальным. Действительно, с точки зрения теоремы Кронекера-Капелли расширенная матрица системы отличается от основной матрицы системы лишь нулевым столбцом, добавление которого не меняет ранг матрицы, следовательно, для однородной системы всегда **rang(Ã)=A**

При решении однородных систем представляет интерес нахождение нетривиальных, т.е. ненулевых решений. В этом случае система кроме тривиального решения должна иметь еще другие решения, т.е. она должна быть неопределенной. В результате применения теоремы Кронекера-Капелли к однородной системе уравнений имеют место две теоремы.

Теорема 3. *Однородная система уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы r меньше числа неизвестных n:* **rang(A) = r < n**

Теорема 4. *Однородная система уравнений имеет единственное тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных n:* **rang(A) = r = n**

Если однородная система неопределенная, т.е. имеет множество решений, то все решения можно разделить на линейно независимые и линейно зависимые. Через совокупность линейно независимых решений можно выразить любое решение однородных уравнений.

Лекция 4.

Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

А – матрица данной системы, а В – ее расширенная матрица.

Теорема 1. (Кронекера – Капелли). Система линейных неоднородных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матрицы системы совпадают: rang(A)=rang(Ã)=r

При этом число независимых решений, k, системы равно разности числа неизвестных и ранга матрицы системы: k=n-r

Следствие 1.

1. Если Rang A = Rang B = r и r=n, т.е. число уравнений равно числу неизвестных и |A|<>0, то система будет совместной и определенной.
2. Если Rang A = Rang B = r и r<n, т.е. число уравнений меньше числа неизвестных, то система будет совместной, но неопределенной.
3. Если Rang A < Rang B, то система линейных уравнений будет несовместной.

Метод Гаусса

Как говорилось ранее, элементарные преобразования строк будут одним из основных инструментов для решения систем линейных уравнений. Обычно, для этого используется метод Гаусса, который является упрощенным методом Гаусса-Жордана для преобразования матриц.

Опишем метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.

Первая часть метода Гаусса и метода Гаусса-Жордана совпадают.

Если ранг матрицы B равен r и r < = m, то мы преобразуем расширенную матрицу системы к виду: Запишем систему, соответствующую данной расширенной матрице

$$\begin{cases} x1+a'12x2+\ldots+a'1nxn = b'1 \\ x2+ a'23x3+\ldots+a'2nxn = b'2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xr + a'rr+1xr+1 + \ldots+ a'rnxn = b'r \\ 0\ xr+1 + \ldots + 0\ xn = b'r+1 \end{cases}$$

$$0\ xr+1 + \ldots + 0\ xn = b'm$$

В этом случае, мы получаем подтверждение теоремы Кронекера-Капелли. Если хотя бы один из свободных членов b'r+1,…,b'm будет отличен от нуля, то мы получим неверное числовое тождество 0=b'k<>0 и система не будет иметь решений.

Если свободные члены b'r+1=…=b'm=0, то система совместна и последние m-r уравнений можно отбросить и тогда система (*) получается приведена к системе

$$\begin{cases} x1 = b'1 - (a'12x2+\ldots+a'1nxn) \\ x2= b'2 - (a'23x3+\ldots+a'2nxn) \end{cases}$$

$$xr = b'r - (a'rr+1xr+1 + \ldots+ a'rnxn)$$

Назовем в полученной системе неизвестные x1,…,xr – главными, а xr+1,…,xn – свободными. Мы получим общее решение полученной системы, а следовательно и исходной полагая xr+1=c1, xr+2=c2,…,xn=cn–r, где c1,…,cn-r – произвольные действительные постоянные (параметры) и последовательно находя неизвестные xr,xr-1,…,x1 начиная с последнего уравнения в направлении снизу вверх.

В случае n=r, также последовательно определяя значения неизвестных xn, xn-1,…,x1 снизу вверх, найдем лишь единственное решение системы.

Лекция 5.

Векторы и операции над ними

Понятие вектора

Определение 1. *Если для двух точек A, B указано какая из них является начальной и какая конечной, то говорят об упорядоченной паре точек (A, B) A – начальная точка, B – конечная точка.*

Определение 2. *Всякую упорядоченную пару точек называют направленным отрезком или геометрическим вектором и обозначают* $\overrightarrow{AB}$. *Вектор можно обозначить и одной малой латинской буквой –* $\vec{a}$.

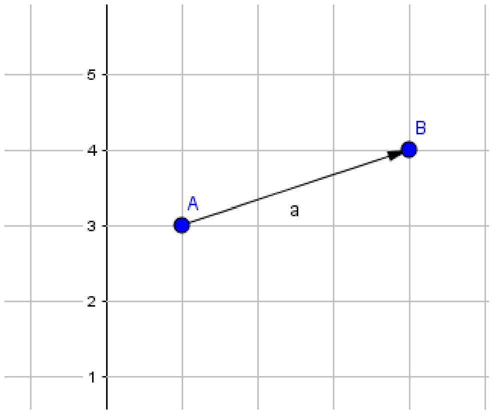


Рис. 1. Геометрический вектор

Определение 3. *Расстояние между точками A и B называют длиной вектора* $\overrightarrow{AB}$ *и для обозначения длины пользуются символом модуля (абсолютной величины):* $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, …

Определение 4. *Векторы называют коллинеарными, если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых.*

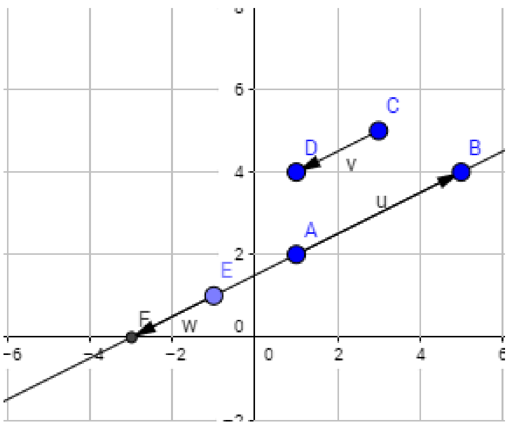


Рис. 2. Коллинеарные векторы

Определение 5. *Векторы называется нулевым (пишется* $\vec{0}$ *либо просто 0), если его начало и конец совпадают.*

Очевидно, что длина нулевого вектора равна нулю, а направление не определено (можно считать, что его направление какое угодно). Вследствие этого нулевой вектор коллинеарен с любым вектором пространства.

Определение 6. *Два вектора считаются равными, если их длины равны и они имеют одинаковые направления (сонаправлены). Пишем:* $\vec{a} = \vec{b}$ *(см. рис. 2)*

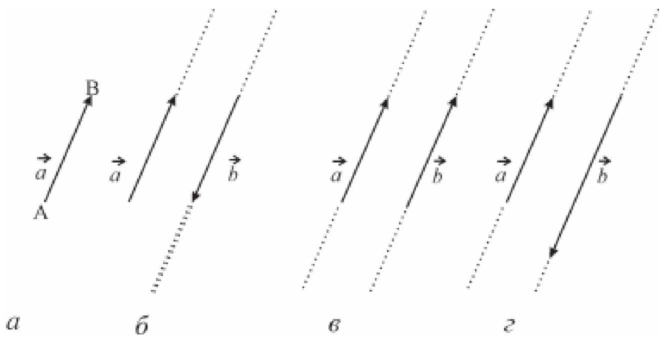


Рис. 2

Отношение равенства векторов обладает следующими свойствами:

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ (рефлексивность);
2. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (симметричность);
3. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ (транзитивность).

Зачастую, рассматривая вектора, для нас не являются существенными его начало и конец, а важны его длина и направление. В связи с этим, можно дать еще одно определение.

Определение 7. *Два вектора называются одинаково направленными (противоположно направленными), если приведенные к общему началу, они располагаются на прямой и их концы принадлежат этой прямой и лежат по одну сторону (по разные стороны) от начала.*

Пусть дан направленный отрезок. Множество всех направленных отрезков, равных данному в смысле определения 7, называется ***свободным вектором***.

Линейные операции над векторами

Определим теперь линейные операции над векторами.

2. Сложение векторов.

Определение 8. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим равные им векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (т.е. перенесем конец $\vec{a}$ и начало $\vec{b}$ в одну и ту же точку B). Тогда *вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}$ + $\vec{b}$*. Такой способ сложения векторов называется «правилом треугольника»(см. рис. 3).

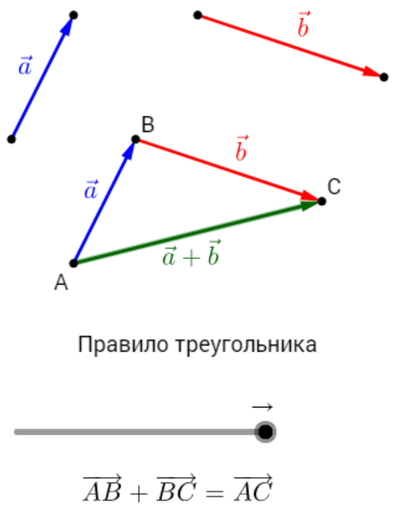


Рис. 3.

Заметим, что выбрав вместо точки B другую точку, например B_1, мы получили бы в качестве суммы вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$ равный вектору $\overrightarrow{AC}$.

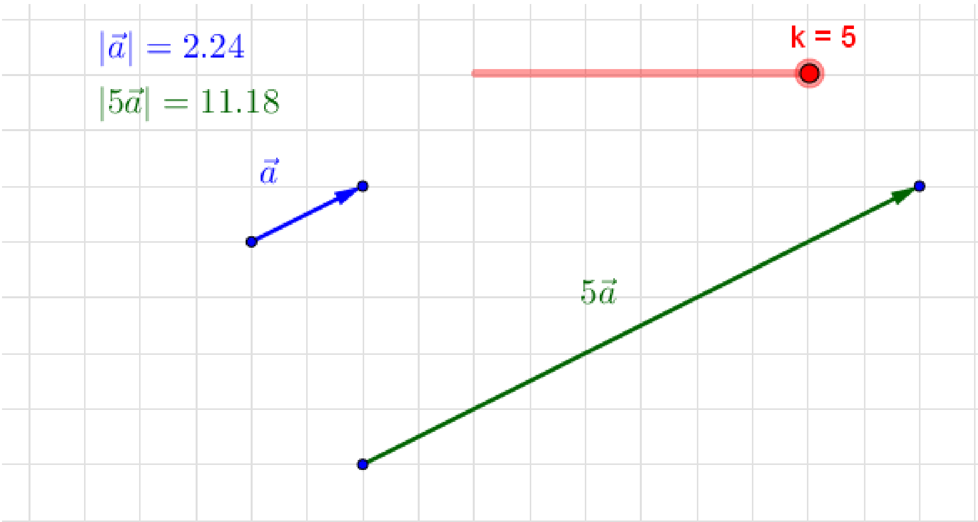
Замечание 1. *Вектор $-\vec{a}$ называется противоположным к вектору $\vec{a}$, если они имеют одинаковую длину и противоположно направлены. В сумме векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ дают нулевой вектор.*

$\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$.

Результатом выполнения операции сложения векторов является вектор

3. Умножение вектора на число.

Пусть дан вектор $\vec{a}$ и действительное число α. Результатом выполнения операции умножения вектора на число также будет являться вектор и обозначается $\alpha\vec{a}$.



Определение 9. *Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, α > 0. Выберем точку A, вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, приложенный к точке A, и такую точку C, что C лежит на прямой AB по ту же сторону от точки A, что и B и $|\overrightarrow{AC}| = \alpha|\overrightarrow{AB}|$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ и будет являться искомым вектором $\alpha\vec{a}$.*

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, **α < 0.** Тогда положим $\alpha\vec{a} = -(-\alpha\vec{a})$.

Наконец, $0\vec{a} = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$. А $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ для любого действительного числа α.

Свойства линейных операций над векторами.

Сложение векторов обладает следующими свойствами:

1. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{a} + \vec{b}$, называемый суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения)
3. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность сложения)
4. Существует единственный вектор $\vec{0}$, называемый нулевым вектором, такой что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для всех $\vec{a}$.

5. Для любого вектора $\vec{a}$ существует единственный вектор $-\vec{a}$ такой, что $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$.

Умножение вектора на число обладает следующими свойствами:

1. Для любого вектора $\vec{a}$ и любого действительного числа α существует единственный вектор $\alpha\vec{a}$.
2. $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ для любых действительных чисел α и β и всех $\vec{a}$ (дистрибутивность по отношению к сложению чисел).
3. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ для любых действительных чисел α и β и всех $\vec{a}$.
4. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого действительного числа α (дистрибутивность по отношению к сложению векторов).
5. $1\vec{a}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Определение 9. *Разностью векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется сумма вектора* $\vec{a}$ *и вектора, противоположного вектору* $\vec{b}$, *т.е.* $\vec{a} + (-\vec{b})$ *или коротко* $\vec{a} - \vec{b}$ *.(см. рис. 4)*

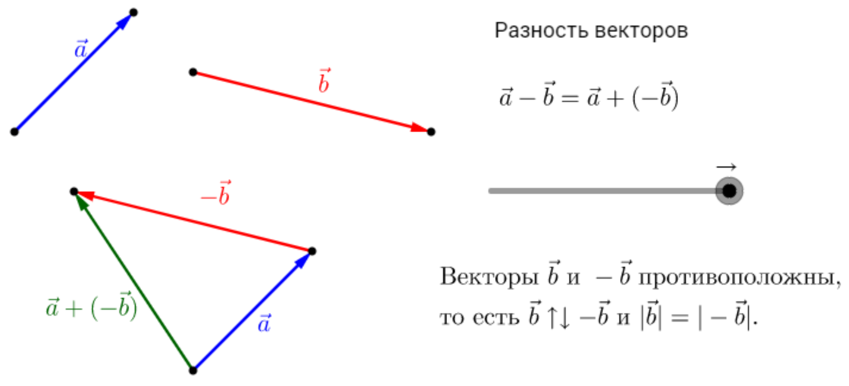


Рис. 4.

Вычитание – операция, обратная сложению, сопоставляющая двум векторам их разность.

Укажем еще один способ сложения векторов – «правило параллелограмма» (см. рис. 5).

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим равные им векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (т.е. перенесем начало $\vec{a}$ и начало $\vec{b}$ в одну и ту же точку А). Достроим данный угол до параллелограмма так, что $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, а так как $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

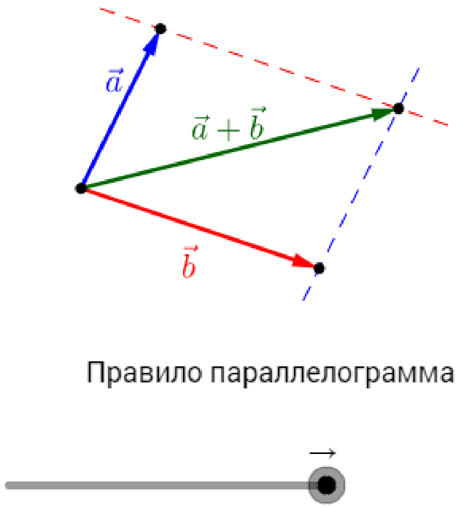


Рис. 5.

Учитывая свойство ассоциативности векторов, можно говорить о сумме трех векторов $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$, понимая под этим вектор $\vec{b} = \vec{a}_1 + (\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3$.

По индукции может быть определена и сумма любого числа векторов $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$.

При этом в силу коммутативности можно произвольно менять порядок слагаемых.

Из сказанного вытекает следующее удобное на практике правило сложения любого числа векторов («***правило замыкающего вектора***») (см. рис. 6). Для того, чтобы сложить данные n векторов, надо записать их в любом порядке $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, приложить первый вектор к какой-нибудь точке O, а каждый следующий вектор к концу предыдущего, так что $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \vec{a}_n = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$. Тогда сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$ есть замыкающий вектор $\overrightarrow{OA_n}$.

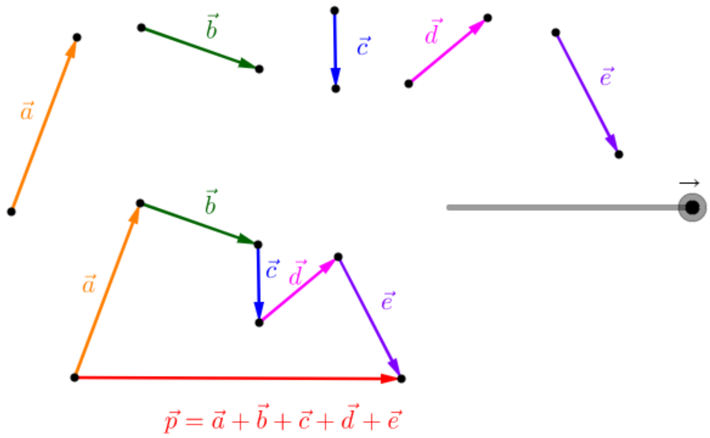


Рис. 6

Лекция 6.

Разложение векторов

Теорема 1. *Для любого вектора $\vec{b}$, коллинеарного любому вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$, существует единственное действительное число α такое, что $\vec{b} = \alpha \vec{a}$.*

Далее, если $\vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ одинаково направлены, то этим единственным числом как следует из определения умножения вектора на число, является $\alpha = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Если же вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то этим единственным числом по той же причине является число $\alpha = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Если же $\vec{b} = \vec{0}$, то этим единственным числом является α=0.

Теорема 2. *Для любого вектора $\vec{b}$, компланарного любым двум не коллинеарным векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, существуют единственные действительные числа α_1 и α_2 такие, что $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$.*

Доказательство. Если вектор $\vec{b}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{a}_1$ или $\vec{a}_2$, то утверждение теоремы 2 следует из первой теоремы о разложении.

Пусть теперь $\vec{b}$ не коллинеарен ни одному из векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Приведем векторы $\vec{b}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ к общему началу O. Проведем через точку M (конец вектора $\vec{b}$) прямые, параллельные векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Обозначим через точки E_1 и E_2 точки пересечения указанных прямых с прямыми, на которых лежат вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. (Существование точек E_1 и E_2 следует из того, что векторы $\vec{b}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ не коллинеарны друг другу.)

В силу правила параллелограмма получим $\vec{b} = \overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2}$

По первой теореме о разложении существует действительное число α_1, такое что $\overrightarrow{OE_1} = \alpha_1 \vec{a}_1$ и существует действительное число α_2, такое что $\overrightarrow{OE_2} = \alpha_2 \vec{a}_2$

Таким образом, получим

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2$$

Теорема 3. Для любого вектора $\vec{b}$ и любых трех некомпланарных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ существуют единственные действительные числа α_1, α_2 и α_3 такие, что $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$

Доказательство. Если вектор $\vec{b}$ компланарен с какими-либо двумя векторами из тройки $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, то утверждение теоремы следует из второй теоремы о разложении.

Пусть вектор $\vec{b}$ не компланарен ни с какой парой векторов из тройки $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Приведем векторы $\vec{b}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ к общему началу O и проведем через точку M (конец вектора $\vec{b}$) плоскости, параллельные плоскостям, определяемым парами векторов $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$, $\vec{a}_1$ $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_2$ $\vec{a}_3$. Точки пересечения указанных плоскостей с прямыми, на которых лежат вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ обозначим через E_1, E_2 и E_3 соответственно. Существование точек E_1, E_2 и E_3 следует из некомпланарности любой тройки векторов из $\vec{b}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

Кроме того, обозначим через M_0 точку пересечения прямой, проходящей через точку M параллельно прямой OE3 с плоскостью определяемой векторами $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

В силу правила параллелограмма, $\vec{b} = \overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OM_0}$.

Из первой теоремы о разложении следует существование действительного числа α_3 такого, что $\overrightarrow{OE_3} = \alpha_3\vec{a}_3$.

Из второй теоремы о разложении следует существование действительных чисел α_1 и α_2 таких, что $\overrightarrow{OM_0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2$.

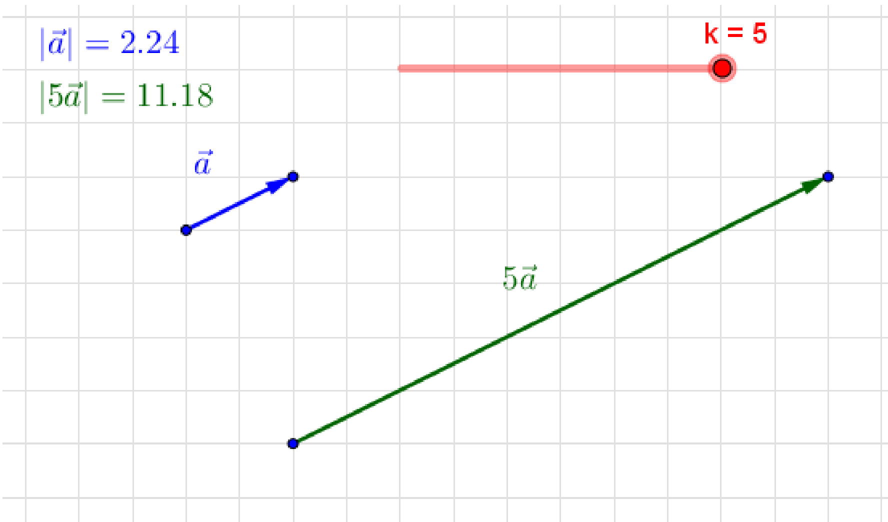
Следовательно, получаем $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$.

Линейная зависимость и независимость векторов.

Для удобства дальнейшего изложения давайте дадим следующее определение.

Определение 1. *Множество V называется линейным пространством свободных векторов, если:*

1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, принадлежащих V, определен элемент $\vec{a}$ + $\vec{b}$ также принадлежащий V, называемый суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. Для любого вектора $\vec{a}$, принадлежащего V, и любого действительного числа α, определен элемент $\alpha\vec{a}$, принадлежащий V, называемый произведение вектора $\vec{a}$ на число α;



3. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, принадлежащих V, и любого действительного числа α в множестве V выполняются свойства, сформулированные в теоремах 1 и 2 (свойства линейных операций над векторами).

Примеры множеств являющихся и не являющихся линейным пространством свободных векторов.

Подмножество множества свободных векторов V_0 («точка») – нулевой вектор;

Подмножество множества свободных векторов V_1 («прямая») – все свободные вектора, параллельные некоторой прямой;

Подмножество множества свободных векторов V_2 («плоскость») – все векторы параллельные некоторой плоскости;

Множество свободных векторов V_3 («пространство») – все векторы пространства;

Множество X – все векторы, имеющие общее начало, концы которых лежат на фиксированной прямой, не проходящей через общее начало векторов. (Данное множество не ЛПСВ, т.к. нулевой вектор ему не принадлежит).

Рассмотрим линейное пространство свободных векторов V (например, V_m, m=1,2,3).

Определение 2. *Векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *из V называются линейно независимыми в V, если для любых действительных чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *из равенства* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ *следует* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Определение 3. *Векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *из V называются линейно зависимыми в V, если существуют действительные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *не все одновременно равные нулю* $(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n| \neq 0)$ *такие, что* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Если мы введем дополнительное определение, а именно:

Определение 4. *Выражение* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$ *называется линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, *а действительные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *называются коэффициентами линейной комбинации.*

То определение линейной зависимости и независимости векторов можно сформулировать следующим образом:

Определение 2'. *Векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *из V называются линейно независимыми в V, если их линейная комбинация равна нулевому вектору только в том случае, когда все ее коэффициенты одновременно равны нулю. В противном случае, векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *из V называются линейно зависимыми в V.*

Замечание. *Если один из векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *является нулевым вектором, то такие векторы всегда линейно зависимы.*

Определение 5. *Если для векторов* $\vec{b}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *из V существуют действительные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *такие, что* $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$, *то говорят, что вектор* $\vec{b}$ *является линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *из V.*

Теорема 4 (критерий линейной зависимости). *Векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *из V линейно зависимы в V тогда и только тогда, когда один из них есть линейная комбинация остальных.*

Следствие 1. *В* V_m *(m=1,2,3) существует m линейно независимых векторов, причем любые (m+1) векторов являются линейно зависимыми в V.*

Следствие 2. *Линейно зависимыми векторами являются: в* V_1 *(на «прямой») – нулевой вектор; в* V_2 *(на «плоскости») – любые 2 коллинеарных вектора; в* V_3 *(в «пространстве») – любые 3 компланарных вектора.*

Следствие 2'. *Линейно независимыми векторами являются: в* V_1 *(на «прямой») – любой ненулевой вектор; в* V_2 *(на «плоскости») – любые 2 неколлинеарных вектора; в* V_3 *(в «пространстве») – любые 3 некомпланарных вектора.*

Лекция 7.

Базис и размерность линейного пространства свободных векторов

Координаты вектора в данном базисе

Основные определения

Определение 1. *Векторы* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *из V называются базисом в V, если* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *линейно независимы в V и любой вектор* $\vec{x}$ *из V является линейной комбинацией векторов* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *из V, т.е.* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Указанное равенство называется разложением вектора $\vec{a}$ *по базису* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Лемма. *Для любого вектора* $\vec{x}$ *из V разложение его по базису* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *из V единственно.*

Определение 2. *Числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *в разложении* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ *вектора* $\vec{x}$ *из V по базису* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *из V называют координатами вектора* $\vec{x}$ *в базисе* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *из V. Число* n *(число базисных векторов) называют размерностью V.*

Вывод. *Пусть* V_1, V_2, V_3 *– линейные пространства свободных векторов, расположенные соответственно на «заданной прямой», на «заданной плоскости», в «пространстве».* Тогда

1. Любой ненулевой вектор $\vec{e}$ из V_1 образует базис в V_1. Размерность V_1 равна 1.
2. Любые 2 неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ из V_2 образует базис в V_2. Размерность V_2 равна 2.
3. Любые 3 некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ из V_3 образует базис в V_3. Размерность V_3 равна 3.

Замечание. *Из вывода следует, что «заданная прямая» одномерна, «заданная плоскость» двумерна, «пространстве», в обычном понимании, трехмерно.*

Определение 3. *Базис* $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ *из V называется ортонормированным базисом, если векторы* $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ *попарно ортогональны (перпендикулярны) и по модулю равны единице. Если базис произвольный, то он называется косоугольным или аффинным.*

Координатная запись линейных операций над векторами.

Все рассмотрения приведем в линейном пространстве свободных векторов V_3 (для V_1, V_2 все рассуждения проводятся аналогично).

Пусть $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ базис в V_3. Тогда для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из V_3 имеем единственное разложение по базису: $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ и $\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3$.

Из свойств линейных операций над векторами имеем:

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)+(y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3)=(x_1+y_1)\vec{e}_1+(x_2+y_2)\vec{e}_2+(x_3+y_3)\vec{e}_3$$

Аналогично, для любого действительного числа α

$$\alpha\vec{x}=\alpha(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)=(\alpha x_1)\vec{e}_1+(\alpha x_2)\vec{e}_2+(\alpha x_3)\vec{e}_3$$

Итак, в силу единственности разложения по базису получаем, что при сложении любых векторов линейного пространства свободных векторов V их координаты относительно любого базиса складываются, а при умножении вектора на любое действительное число все координаты этого вектора умножаются на это число.

Пример 1.Разложить вектор $\vec{b}=(4;-15)$ по базису $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}$, где

$$\overrightarrow{a_1}=(2;0),$$
$$\overrightarrow{a_2}=(0;3).$$

Решение. Рассматриваемые векторы принадлежат двумерному пространству: базис в этом пространстве должен состоять из двух векторов. Установлено, что векторы $\overrightarrow{a_1}=(2;0)$ и $\overrightarrow{a_2}=(0;3)$ - линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Запишем разложение вектора $\vec{b}$ по этому базису: $\vec{b} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2}$. Чтобы найти значения λ_1 и λ_2, подставим в это разложение выражения векторов $\vec{b}$, $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ через координаты:

$$(4;-15) = \lambda_1(2;0) + \lambda_2(0;3).$$

Выполнив преобразования в правой части равенства, получим

$$(4;-15) = (2\lambda_1;0) + (0;3\lambda_2)$$

или

$$(4;-15) = (2\lambda_1;3\lambda_2).$$

Равенство векторов означает равенство их соответствующих координат, т.е.

$$\begin{aligned} 4 &= 2\lambda_1, \\ -15 &= 3\lambda_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= -5. \end{aligned}$$

Следовательно, разложение вектора $\vec{b}$ по базису $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ имеет вид

$$\vec{b} = 2\overrightarrow{a_1} - 5\overrightarrow{a_2}.$$

Системы координат.
Аффинная и декартовая система координат.

Определение 1. *Аффинной системой координат в V_m ($m=1,2,3$) называется совокупность m базисных векторов, приведенных к некоторой фиксированной точке O («начало координат») и самой точки O.*

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. (В пространстве V_3 первая ось называется осью абсцисс, вторая – осью ординат, и третья – осью аппликат.) Плоскости (в V_3), проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями.

Определение 2. *Декартовая прямоугольная система координат в V_m (m=1,2,3) есть совокупность ортонормированного базиса и начала координат.*

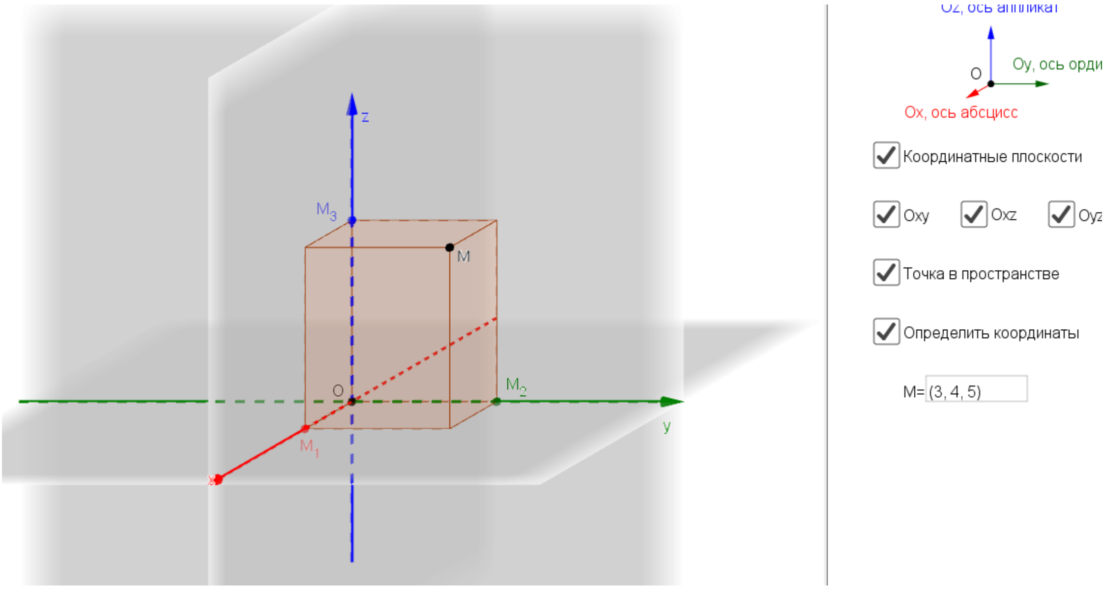


Рис. 1.Прямоугольная система координат в пространстве

Замечание. *В случае декартовой прямоугольной системы координат в V_3 базисные векторы единичной длины $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ принято обозначать буквами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (в V_2 соответственно $\vec{i}, \vec{j}$).*

Определение 3. *Аффинными (декартовыми прямоугольными) координатами точки A называют координаты вектора OA (называемого радиус-вектором) относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.*

Координаты точки обычно пишут в скобках после буквы, обозначающей точку. Например, запись A (1,2) означает, что точка имеет 1 и

2 в ранее выбранной аффинной (декартовой прямоугольной) системе координат на плоскости.

Легко видеть, что при заданной системе координат, координаты точки определены однозначно. С другой стороны, то для каждой упорядоченной точки чисел найдется одна-единственная точка, имеющая эти числа в качестве координат.

В пространстве V_3 рассмотрим две точки A и B, координаты которых относительно некоторой аффинной системы координат O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответственно равны (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Очевидно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Аффинные координаты радиус-векторов $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда, используя координатную запись сложения векторов, получаем: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Таким образом, получаем

Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Аналогичным образом это правило может быть получено и для пространств V_2 и V_1.

Деление отрезка в заданном отношении

Найдем координаты точки M на отрезке AB, которая делит этот отрезок в отношении $\frac{m}{n}$, т.е. удовлетворяет условию $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{m}{n}$, m>0, n>0.

Пусть точка A имеет координаты (x_1, y_1, z_1), точка B – (x_2, y_2, z_2), точка M- (x, y, z).

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \ y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \ z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

Эти формулы известны под названием формул деления отрезка в заданном отношении.

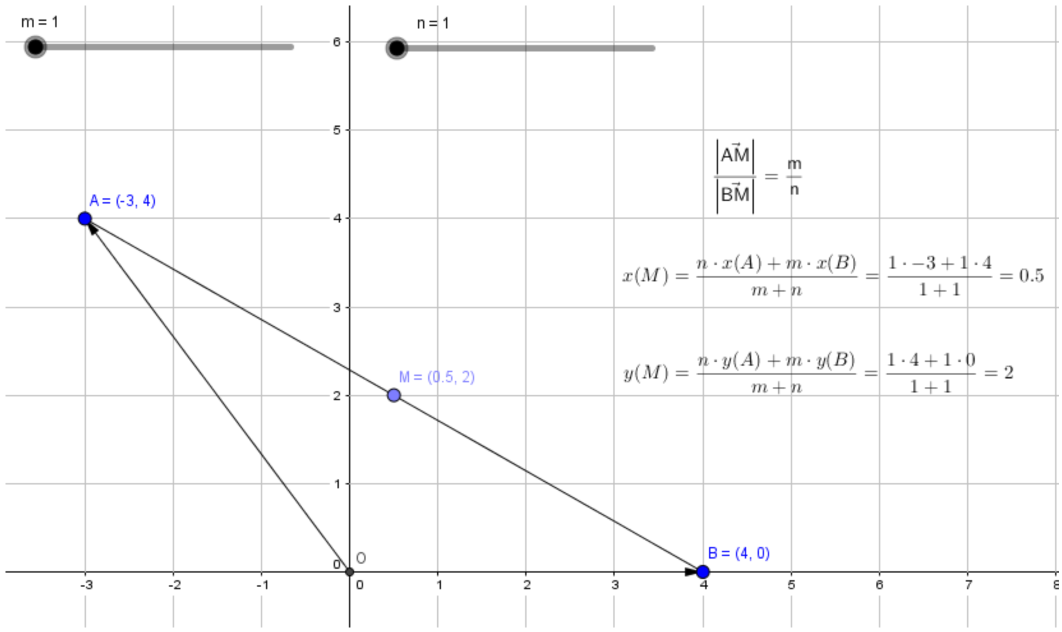


Рис. 2. Деление отрезка в заданном соотношении

При m=n точка M является серединой отрезка AB и тогда полученные формулы принимают следующий вид:

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2},\ y = \frac{y_2 + y_1}{2},\ z = \frac{z_2 + z_1}{2}$$

Если в равенстве (*) одно из чисел m или n будет отрицательным, то тогда точка M будет находиться на той же прямой вне отрезка AB деля его в отношении $\left|{}^{m}\!/_{n}\right|$. Поэтому полученные формулы служат решением более общей задачи. Именно из них можно найти координаты точки, делящей отрезок AB в заданном отношении как внешним, так и внутренним образом.

На плоскости задача решается также, только из полученных формул остаются только первые две, т.к. базис состоит из двух векторов.

Лекция 8.

Полярная система координат

Кроме декартовой прямоугольной системы координат не редко используют и другие способы определять при помощи чисел положение точки относительно некоторого геометрического образа.

Например, на плоскости часто используется полярная система координат.

Полярная система координат определена если заданы:

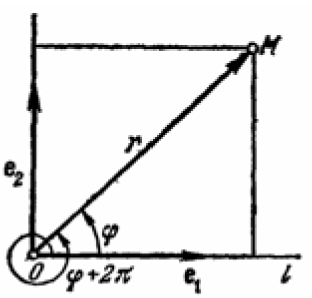
1. Масштаб (единица измерения длины)
2. Точка O («начало» или «полюс» системы координат)
3. Луч l, исходящий из полюса, называемый полярной осью.

Координаты точки M в полярной системе координат определяются двумя числами:

1. Радиусом $r = |\overrightarrow{OM}|$
2. Углом φ (полярным углом) между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемым от полярной оси против часовой стрелки.

Упорядоченная пара (r,φ) называется полярными координатами точки M (обозначается M(r,φ)).

У полюса r=0, φ – не определено.



Для того, чтобы соответствие между точками плоскости и парами чисел (r,φ) было взаимно однозначным обычно полагают, что r и φ изменяются в пределах $0<r<+\infty$, $0<=\varphi<2\pi$.

Иногда бывает целесообразным считать полярный угол определенным лишь с точностью до слагаемых вида 2πк (к – любое целое число), а r – принимающим любые действительные значения.

Очевидно, что любой полярной системе координат соответствует декартовая прямоугольная система координат. Начало такой прямоугольной декартовой системы координат совпадает с полюсом, вектор $\vec{i}$ имеет длину, соответствующую масштабу и направлен по направлению луча l, вектор $\vec{j}$ имеет ту же длину и направлен под углом π/2 к l.

Координаты x, y и r,φ какой-либо точки M связаны между собой следующим образом:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

Эти формулы позволяют получить и обратный переход.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Обобщением полярной системы координат в пространстве являются цилиндрическая и сферическая системы координат.

Цилиндрическая и сферическая система координат

Данные системы координат являются обобщение полярной системы координат в пространстве.

И для тех, и для других систем координат, фигура, относительно которой определяется положение точки, состоит из точки O, луча l, исходящего из O и вектора $\vec{n}$, равного по длине единице и перпендикулярного к l. Через точку O мы можем провести плоскость π, перпендикулярную вектору $\vec{n}$.

Пусть дана некоторая точка M. Опустим из нее перпендикуляр MM_1 на плоскость π.

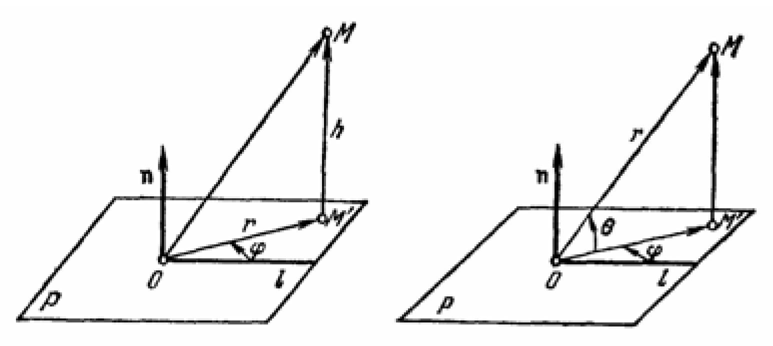
Цилиндрические координаты точки M – это три числа (r,φ,h). Числа r,φ – полярные координаты точки M_1 по отношению к полюсу O и полярной оси l, а h – координата вектора $\overrightarrow{MM_1}$ по вектору $\vec{n}$. Она определена в силу коллинеарности этих векторов.

Установим соотношения, связывающие цилиндрические координаты с прямоугольной декартовой системой координат.

Для этого совместим начало прямоугольной декартовой системы координат с полюсом. Ось абсцисс совместим с полярной осью l. Ось ординат получается из оси абсцисс поворотом на 90^0 в положительном направлении в плоскости π. Ось аппликат совпадает с осью, задаваемой вектором $\vec{n}$.

В этом случае, цилиндрические координаты точки M будут связаны с координатами в прямоугольной декартовой системе координат следующим образом:

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$
$$z=h$$



Сферические координаты точки M – три числа (r,φ,θ). Они определяются так: $r=|\overrightarrow{OM}|$. Как и для цилиндрических координат, φ – угол между полярной осью l и вектором $\overrightarrow{OM_1}$ (долгота), а θ – угол между векторами $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM}$ (широта).

Координаты произвольной точки M (r, φ, Θ) в прямоугольной декартовой системе координат будут выглядеть так:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\ ,$$

$$y = r\cos\theta\sin\varphi\ ,$$

$$z = r\sin\theta\ .$$

Преобразование координат на плоскости.

На плоскости существует не единственный базис для определения системы координат, а множество. В том числе это касается ДПСК. Выбирая каждый раз новую пару взаимно перпендикулярных векторов единичной длины, и выбирая новую точку в качестве начала координат, мы будем получать новую ДПСК.

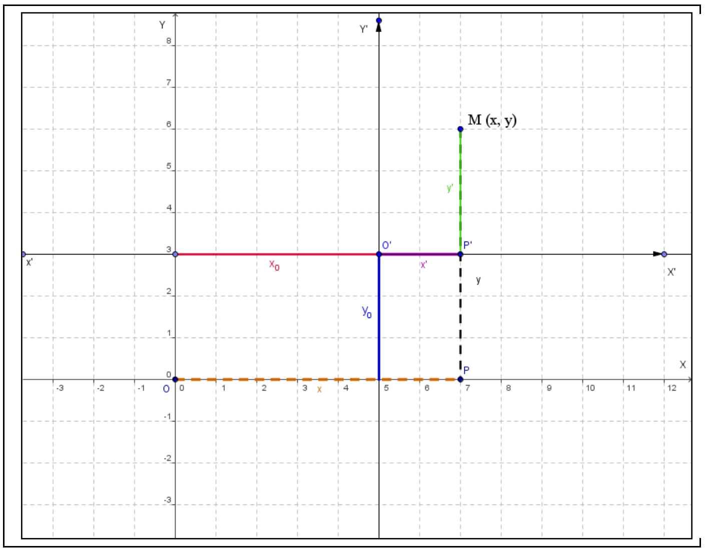
Параллельный перенос ДПСК.

Рассмотрим, как связаны между собой ДПСК при параллельном переносе.

Пусть О, x, y – исходная ДПСК, а О’,x’,y’ – новая ДПСК.

При параллельном переносе, начало координат перемещается в новую точку О’(α,β). Здесь α,β – координаты начала координат новой ДПСК относительно исходной.

Пусть М(x,y) – координаты точки М в исходной ДПСК, а М(x’,y’) – координаты точки М в новой ДПСК.



Из рисунка видно, что OM=OO’+O’M или x=x’+ α, y=y’+β.

Так можно найти координаты точки M в исходной ДПСК, если известны координаты в новой. Легко получить обратную зависимость: x'=x–α, y’=y–β

Если попробовать записать в матричной форме данные уравнения, то получим:

X=1*x’+0*y’+α*1

Y=0*x’+1*y’+β*1

1=0*x’+0*y’+1*1

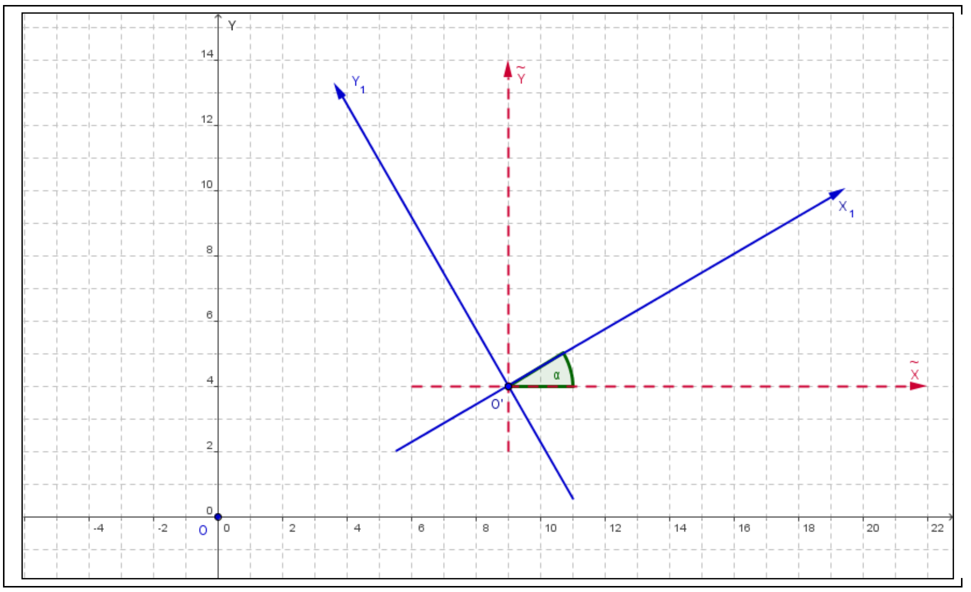
Последнее уравнение – это просто числовое равенство, чтобы нам удобнее было записать матрицу перехода. Или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь A – матрица перехода от новой ДПСК к исходной.

Поворот плоскости

Рассмотрим поворот вокруг начала координат (точки O). В этом случае исходная ДПСК O,x,y перейдет в ДПСК O, x’,y’.



Выразим базисные векторы

i'=cos i + sin j

j’=-sin i + cos j

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

или

e'=Ae

Отсюда легко получит обратное преобразование: e=A-1e’

или

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix}$$

Замечание. Если для матрицы A выполняется равенство A-1=AT, то такие матрицы называются ортогональными.

Рассмотрим теперь, что произойдет с координатами точки M. По определению, координаты точки M – это координаты радиус-вектора OM.

x'i'+y’j’=xi+yj=x(cosi’-sinj’)+y(sini’+cosj’)=i'(xcos+ysin)+j’(-xsin+ycos)

Отсюда

x'= xcos+ysin

y’=-xsin+ycos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

OM’=AOM

Наоборот:

x= x’cos-y’sin

y=x’sin+y’cos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

OM=ATOM’

Объединяя параллельный перенос и поворот получим:

x= x'cos-y'sin + α

y=x'sin+y'cos + β

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \alpha \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Лекция 9.

Произведение векторов

Кроме линейных операций над векторами мы можем также определить произведение векторов. Для двух векторов существует скалярное произведение и векторное произведение.

Скалярное произведение

Под углом между векторами мы будем понимать угол между этими векторами, приведенными к общему началу. Если угол прямой, то векторы будем считать перпендикулярными (ортогональными) друг другу и обозначать $a \perp b$. Угол измеряется от a к b.

Определение 1. *Число (a,b) определяемое формулой $(a,b)=|a||b|\cos\varphi$ называется скалярным произведение векторов a и b.*

Данное число определяется однозначно для каждой пары векторов.

Альтернативное обозначение скалярного произведения – $a \cdot b$.

Если считать, что нулевой вектор перпендикулярен любому вектору, то можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Условием ортогональности двух векторов a и b является равенство нулю их скалярного произведения (a,b) = 0.*

Свойства скалярного умножения:

1. $(a,b)= (b,a)$
2. $(a,(b+c))=(a,b)+(a,c)$
3. $\lambda(a,b)=(\lambda a,b)=(a, \lambda b)$
4. $(a,a)=|a|2$
5. $(a,a)=0 \Leftrightarrow a=0$

Скалярное произведение имеет смысл, если выбрана единица измерения длин векторов.

В частности, для ДПСК, базисные векторы i,j,k удовлетворяют равенствам:

$$(i,i)=(j,j)=(k,k)=1$$

$$(i,j)=(i,k)=(j,k)=0$$

Теорема 2. *Если базис ортонормированный, то для любых векторов $a=(x_1,y_1,z_1)$ и $b=(x_2,y_2,z_2)$ имеет место равенство $(a,b)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.*

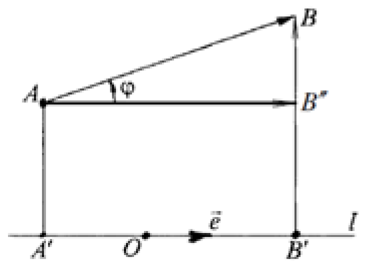
Данная теорема позволяет записать выражение длины вектора через его координаты: $(a,a)=x_2+y_2+z_2$ или $|a|$=корень$(x_2+y_2+z_2)$

А также угол между векторами: $\cos = (a,b)/|a||b|$

Расстояние между двумя точками: M_1M_2 = корень $((x_2-x_1)2+(y_2-y_1)2+(z_2-z_1)2)$.

Проекция вектора на произвольную прямую

Пусть задан вектор AB и некоторая прямая l. Опустим из точек A и B перпендикуляры на прямую и обозначим их основания A' и B'.



Определение 1. Вектор A'B' будем называть векторной проекцией вектора AB на прямую l и будем обозначать A'B'=пр l AB.

Из определения сразу следует, что проекции равных векторов на параллельные прямые равны между собой.

Зададим на прямой l ненулевой вектор e. Тогда A'B'=AB''=αe.

Подставляя полученное значение получаем:

$$\text{пр } l\ AB=((AB,e)/|e|2)e$$

Свойства векторных проекций

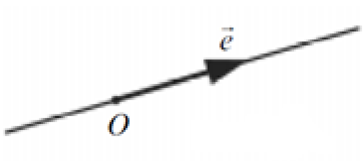
1. Длина проекции вектора a на прямую l равна произведению модуля вектора a на косинус угла φ между вектором и прямой, т.е. $|\text{пр } l\ a|=|a|\cos\varphi$.

2. Равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же прямую.
3. Проекции двух противоположных векторов на одну и ту же прямую отличаются только знаком пр l (-a)=-пр l a.
4. Проекция суммы векторов на какую-либо прямую равна сумме проекций слагаемых векторов на эту прямую.
5. Проекция произведения скаляра на вектор равна произведению этого скаляра на проекцию вектора на ту же прямую.
6. Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации их проекций.

Ориентация прямой, плоскости и пространства

На прямой выберем ненулевой вектор e, который примем в качестве базисного вектора.

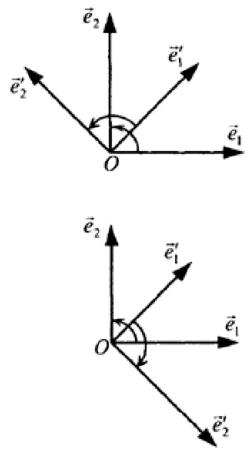
Прямую l в этом случае будем считать направленной прямой (осью). Все базисы на прямой разделятся на два класса: сонаправленные и противоположно направленные.

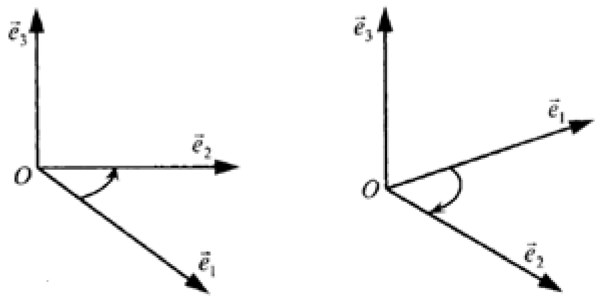


Если их двух классов выбран один, то говорят, что прямая l ориентирована. Базисы выбранного класса будем называть положительно ориентированными или положительными.

Ориентация базиса на плоскости называется положительной, если угол между базисными векторам e_1 и e_2 меньше 180 градусов.

Два базиса e_1,e_2 и $e_{1'}$,$e_{2'}$ одинаково ориентированы, если оба базиса ориентированы положительно или оба – нет. Ориентированы противоположно, если один базис ориентирован положительно, а второй – нет.





Базис в пространстве e_1,e_2,e_3 будем называть правым (правая тройка векторов), если с конца вектора e_3 угол между векторами e_1 и e_2 меньше 180 градусов. В противном случае, базис будем называть левым.

Пространство называется ориентированным, если один из классов выбран. Базисы выбранного класса называются положительно ориентированными.

Мы будем придерживаться правой ориентации пространства.

Площадь ориентированного параллелограмма, объем ориентированного параллелепипеда.

Пусть на прямой линии выбран базисный вектор. Тогда длине любого ненулевого вектора мы можем приписать знак +, если направление этого вектора совпадает с направлением базисного вектора. И знак – в противоположном случае.

Рассмотрим параллелограмм на плоскости образованный упорядоченной парой векторов e_1,e_2 приведенных к общему началу. Если векторы образуют правый базис на плоскости, то мы будем приписывать площади параллелограмма знак +, если нет, то знак –.

Рассмотрим теперь параллелепипед, построенный на упорядоченной тройке векторов e_1,e_2,e_3, приведенных к общему началу. Если ориентация векторов, образующих параллелепипед, образует правый базис, то припишем объему знак +, если нет, то знак –.

Векторное произведение векторов

Определение 1. *Векторным произведение векторов a и b называется вектор с такой, что:*

1. Его модуль численно равен площади ориентированного параллелограмма, построенного на векторах a и b.
2. Он перпендикулярен векторам a и b.
3. Вектора c, a, b образуют правую тройку.

Обозначения [a,b], a x b, [a x b]. Из геометрии $|c|=|a||b| \sin \varphi$.

Считая, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору можно сформулировать следующее утверждение.

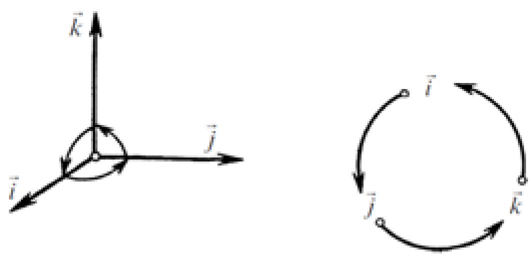
Теорема 1. *Условием коллинеарности двух векторов является равенство нулевому вектору их векторного произведения. [a,b]=0*

Замечание. *Векторное произведение вектора на самого себя всегда равно нулевому вектору [a,a]=0.*

Свойства векторного умножения.

1. [a,b]=-[b,a]
2. [a,(b+c)]=[a,b]+[a,c]
3. $[\lambda a,b]=\lambda[a,b]$

Для ДПСК [i,i]=[j,j]=[k,k]=0. Если i,j,k – правый базис ДПСК, то, учитывая, что длины базисных векторов равны единице, получим:



[i,j]=k,   [j,k]=i,   [k,i]=j

[j,i]=-k,   [i,k]=-j,   [k,j]=-i

В координатной форме: Пусть $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$

Тогда,

$[a,b]=[a1i+a2j+a3k,b1i+b2j+b3k]=a1b1[i,i]+a1b2[i,j]+a1b3[i,k]+a2b1[j,i]+a2b2[j,j]+a2b3[j,k]+a3b1[k,i]+a3b2[k,j]+a3b3[k,k]$ или $[a,b]=(a2b3-a3b2)i-(a1b3-a3b1)j+(a1b2-a2b1)k$

Через определители объединяем в один определитель.

Геометрический смысл векторного произведения следует из определения. Модуль векторного произведения численно равен площади ориентированного параллелограмма, построенного на векторах a и b.

Лекция 11.

Произведение трех векторов

Рассматривать двойное скалярное произведение

$$(a,b)c=\lambda c, \text{ где } \lambda=(a,b)$$

В результате получается вектор, коллинеарный вектору c.

Двойное векторное произведение

Определение 1. *Выражение [a,[b,c]] называется двойным векторным произведением.*

Очевидно, что в результате мы получим вектор. Причем этот вектор лежит в плоскости векторов b и c и ортогонален вектору a.

$$[a,[b,c]]=b(a,c)-c(a,b)$$

Абц=Бац-цаб

Смешанное произведение векторов

Определение 2. *Число (a,[b,c]) называется смешанным произведением трех векторов a,b,и c и обозначается (a,b,c).*

Геометрический смысл смешанного произведения.

Смешанное произведение некомпланарных векторов a,b,c равно объему ориентированного параллелепипеда построенного на этих векторах.

$V=Sh$

$S=|[b,c]|$, $h=|a|\cos\theta$, где θ – угол между a и [b,c]

Тогда $V=|[b,c]||a|\cos\theta=|(a,[b,c])|=|(a,b,c)|$.

С учетом ориентации модули можно опустить и тогда получим $V=(a,b,c)$.

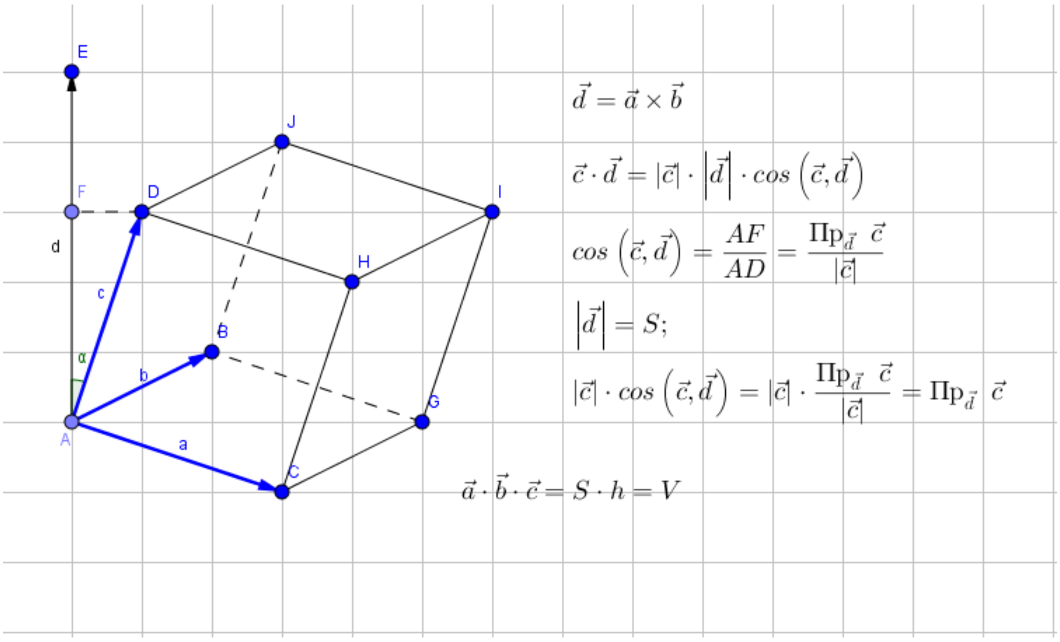


Рис. 1. Смешанное произведение векторов

Свойства смешанного произведения.

1. (a,[b,c])=([a,b],c)
2. (a,b,c)=(b,c,a)=(c,a,b)=-(b,c,a)=-(c,a,b)=-(a,c,b)
3. (λa1+μa2,b,c)=λ(a1,b,c)+μ(a2,b,c) (аналогично и для других сомножителей)

Теорема 1. *Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители компланарны.*

Координатная запись смешанного произведения.

a=(a1,a2,a3), b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)

[b,c]=(b2c3-b3c2)i–(b1c3-b3c1)j+(b1c2-b2c1)k

(a,[b,c])=a1b2c3-a1b3c2+a2b3c1-a2b1c3+a3b1c2-a3b2c1

Это определитель 3-го порядка, составленный из координат векторов a,b и c.

Условие компланарности трех векторов: равенство нулю их смешанного произведения; равенство нулю определителя.

Лекция 12.

Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия один из важнейших разделов высшей математики, решает геометрические задачи алгебраическими методами. Основные понятия аналитической геометрии - точки, прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка. Основной метод *аналитической геометрии* метод координат, в ней изучаются свойства геометрических фигур с помощью их уравнений, которые исследуются алгебраическими методами.

Определение 1. *Алгебраической поверхностью называется множество, которое в ДПСК может быть задано уравнением вида* $A_1x^k{}_1y^l{}_1z^m{}_1+\ldots+A_sx^k{}_sy^l{}_sz^m{}_s=0$, *где все показатели степени целые неотрицательные числа. Наибольшая из сумм* $k_1+l_1+m_1$, ..., $k_s+l_s+m_s$ *называется степенью уравнения, а также порядком алгебраической поверхности.*

Определение 2. *Алгебраической линией на плоскости называется множество, которое в ДПСК на плоскости может быть задано уравнением вида* $A_1x^k{}_1y^l{}_1+\ldots+A_sx^k{}_sy^l{}_s=0$, *где все показатели степени целые неотрицательные числа. Наибольшая из сумм* k_1+l_1, ..., k_s+l_s *называется степенью уравнения, а также порядком алгебраической линии.*

Прямая и плоскость

Уравнение первой степени (линейное уравнение) в пространстве имеет вид Ax+By+Cz+D=0, причем предполагается, что коэффициенты A,B и C не обращаются в нуль одновременноA2+B2+C2<>0.

На плоскости уравнение первой степени имеет вид Ax+By+C=0. Аналогично предполагается, что A2+B2<>0.

Уравнения прямой и плоскости

Прямая линия на плоскости (в пространстве) полностью определена, если на ней задана точка M_0 и задан ненулевой вектор, параллельный этой прямой).

$$M_0M=at=r-r_0 \qquad r=r_0+at$$

Параметрические уравнения прямой получим, приравняв каждое из отношений параметру t:

t – параметр, уравнение векторное параметрическое.

Параметрическое уравнение в пространстве:

$$x=x_0+a_1t$$
$$y=y_0+a_2t$$
$$z=z_0+a_3t$$

на плоскости :

$$x=x_0+a_1t$$
$$y=y_0+a_2t$$

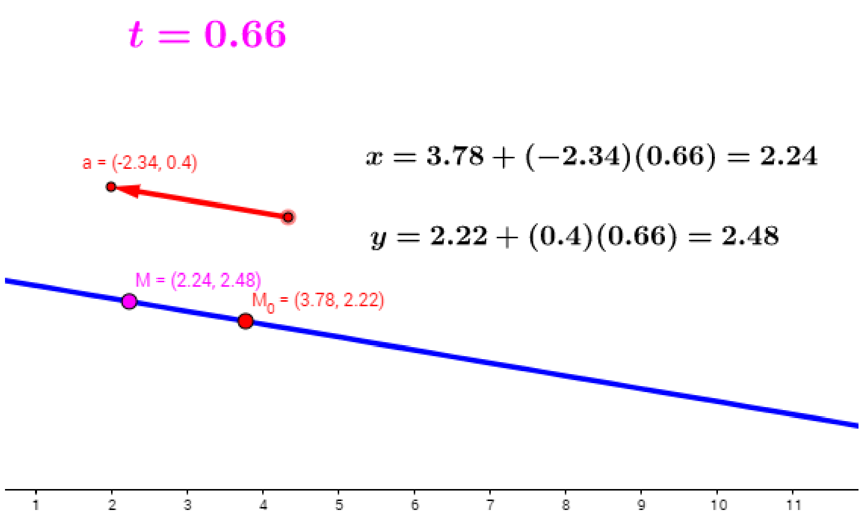


Рис. 1. Параметрическое уравнение прямой на плоскости

M_0 – точка принадлежащая плоскости, p и q – направляющие векторы плоскости.

Аналогично, векторное параметрическое уравнение плоскости:

$$up+vq=r-r_0 \qquad r=r_0+up+vq$$

Параметрическое

$$x=x0+p1u+q1v$$

$$y=y0+ p2u+q2v$$

$$z=z0+ p3u+q3v$$

Прямая на плоскости: Выразим t из обоих уравнений и приравняем

$$(x-x_0)/a_1=(y-y_0)/a_2$$

$$a_2(x-x_0)=a_1(y-y_0)$$

$$a_2x+(-a_1)y+(a_1y_0-a_2x_0)=0$$

Введя обозначения, получаем линейное уравнение.

Определение 2. *Вектор перпендикулярный прямой называется нормальным вектором прямой.*

Вектор (A, B) – нормальный вектор прямой. Легко проверить.

Если $a_1<>0$, то $y=a_2/a_1\ x + (y_0-a_2/a_1x_0)$. Или $y=kx+b$

Частные случаи.

- $A=0$ $y=y_0$ прямая параллельна оси абсцисс
- $B=0$ $x=x_0$ прямая параллельна оси ординат
- $C=0$ $y=kx$ прямая проходит через начало координат.
- $A=0$, $C=0$, $y=0$ ось абсцисс
- $B=0$, $C=0$, $x=0$ ось ординат

Прямая в пространстве: $(x-x_0)/a_1=(y-y_0)/a_2=(z-z_0)/a_3$ – *каноническое уравнение прямой в пространстве.*

Кроме того, прямая может быть задана как пересечение двух непараллельных плоскостей.

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

Плоскость в пространстве: Плоскость вполне определяется заданием ее начальной точки и ненулевым вектором, перпендикулярным плоскости. Такой вектор называется нормальным.

Вектора $r-r_0$, p, q – компланарны. Следовательно, $(r-r_0,p,q)=0=(r-r_0,[p,q])$.

Отсюда, в качестве нормального вектора можно выбрать вектор $n=[p,q]=(A,B,C)$

$(r-r_0,n)=0$ $(r,n)-(r_0,n)=0$, если обозначить $(r_0,n)=-D$, то получим

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Частные случаи

- 1=0 параллельна оси
- 2=0 параллельна координатной плоскости
- 3=0 совпадает с координатной плоскостью

Если n_1 и n_2 – нормальные векторы двух плоскостей, то если n_1 и n_2 не параллельны, то плоскости пересекаются и их пересечение образует прямую линию, направляющий вектор которой равен [n1,n2]

Задачи о прямых и плоскостях

Признаки параллельности прямых и плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2=0$$

Прямые параллельны, если их нормальные (направляющие) векторы коллинеарны. Т.е. $A_1/A_2=B_1/B_2=\lambda$. Если $C_1/C_2=\lambda$, то прямые совпадают (см. рис. 1).

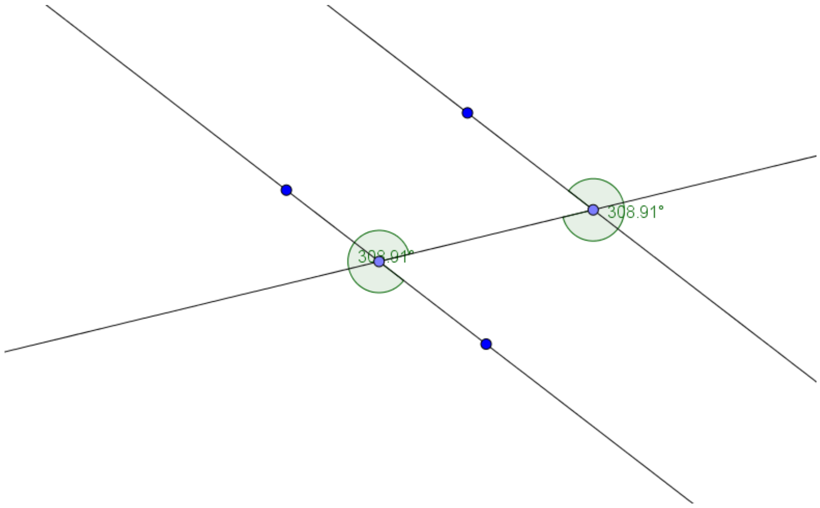


Рис. 1.

Аналогично рассматривается вопрос параллельности плоскостей (см. рис.2.).

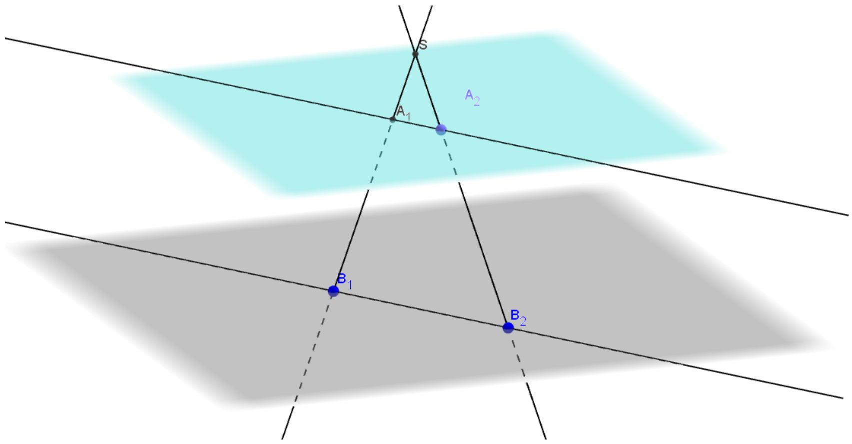


Рис. 2

С другой стороны, параллельность векторов = равенство нулю векторного произведения.

$$A_1B_2-B_1A_2=0$$

Аналогично, прямые в пространстве.

Уравнение прямой, проходящей через 2 точки

Если прямая проходит через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, такие что

$x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, то уравнение прямой можно найти, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

Даны три точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) не лежащие на одной прямой. Требуется написать уравнение плоскости, проходящей через эти три точки. Из геометрии известно, что такая плоскость существует и единственная. Так как она проходит через точку (x_1, y_1, z_1), то ее уравнение имеет вид; $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$, где A,B,C одновременно не равны нулю. Так как она проходит еще через точки (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), то должны выполняться условия:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0. \end{array}\right\}$$

Составим однородную линейную систему уравнений относительно неизвестных u, υ, ω:

$$\begin{cases} (x-x_1)u+(y-y_1)\upsilon+(z-z_1)\omega=0 \\ (x_2-x_1)u+(y_2-y_1)\upsilon+(z_2-z_1)\omega=0 \\ (x_3-x_1)u+(y_3-y_1)\upsilon+(z_3-z_1)\omega=0 \end{cases}$$

Здесь (x,y,z) есть произвольная точка, удовлетворяющая уравнению плоскости $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. В силу $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ и

$$\left.\begin{array}{l} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0. \end{array}\right\}$$

системе

$$\begin{cases}(x-x_1)u+(y-y_1)\upsilon+(z-z_1)\omega=0\\(x_2-x_1)u+(y_2-y_1)\upsilon+(z_2-z_1)\omega=0\\(x_3-x_1)u+(y_3-y_1)\upsilon+(z_3-z_1)\omega=0\end{cases}$$

удовлетворяет нетривиальный вектор N=(A,B,C), поэтому определитель этой системы равен нулю

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

Мы получили уравнение вида $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$, т. е. уравнение плоскости, в чем легко убедиться, разложив полученный определитель по элементам первой строки. При этом эта плоскость проходит через точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), что вытекает из свойств определителя.

Уравнение можно еще написать и в следующем виде:

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\x_1 & y_1 & z_1 & 1\\x_2 & y_2 & z_2 & 1\\x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

Признаки параллельности прямой и плоскости

Согласно аксиомам, если две точки прямой находятся в некоторой плоскости, то прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

1) прямая лежит (находится) в плоскости

2) прямая и плоскость имеют только одну общую точку (прямая и плоскость пересекаются)

3) прямая и плоскость не имеют общих точек

Уравнение в отрезках

В прямоугольной системе координат Oxyz в трехмерном пространстве уравнение вида x/a+y/b+z/c=1, где a, b и c – отличные от нуля действительные числа, называется уравнением плоскости в отрезках.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \text{ где } a,b,c\neq 0$$

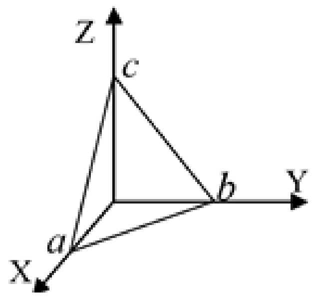


Рис. 3.

Такое название не случайно. Абсолютные величины чисел *a, b и c* равны длинам отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно, считая от начала координат. Знак чисел *a*, *b* и *c* показывает, в каком направлении (положительном или отрицательном) откладываются отрезки на координатных осях. Действительно, координаты точек (a,0,0), (0,b,0), (0,0,c) удовлетворяют уравнению плоскости в отрезках:

$$a/a+0/b+0/c=1 \leftrightarrow 1=1$$

$$0/a+b/b+0/c=1 \leftrightarrow 1=1$$

$$0/a+0/b+c/c=1 \leftrightarrow 1=1$$

Уравнение вида x/a+y/b+z/c=1 называется уравнением плоскости в отрезках.

Теорема 1. *Если плоскость задана уравнением в отрезках в ДПСК, то числа a, b, c по абсолютной величине равны длинам отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат. Знаки этих чисел зависят от того, на какой* *из полуосей (положительной или отрицательной) лежат соответствующие отрезки.* Аналогично для прямых на плоскости.

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости определяется через расстояние от точки до точки, одна из которых заданная точка, а другая – проекция заданной точки на заданную плоскость.

Пусть в трехмерном пространстве задана точка A и плоскость A_1BD.

Проведем через точку A прямую *a*, перпендикулярную к плоскости A_1BD. Обозначим точку пересечения прямой *a* и плоскости A_1BD как F. Отрезок AF называют **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость A_1BD, а точку F– **основанием перпендикуляра**.

Определение 1. *Расстояние от точки до плоскости* **–** *это расстояние от данной точки до основания перпендикуляра, проведенного из заданной точки к заданной плоскости.*

Определение 1'. Расстояние от точки до плоскости – это длина перпендикуляра, опущенного из заданной точки к заданной плоскости.

Алгоритм для нахождения расстояния от точки $A(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости A_1BD следующий:

- составляем уравнение прямой a, которая проходит через точку A и перпендикулярна к плоскости A_1BD;
- находим координаты (x_2,y_2,z_2) точки F - точки пересечения прямой a и плоскости A_1BD;
- вычисляем расстояние от точки A до плоскости A_1BD по формуле:

$$|AF|= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

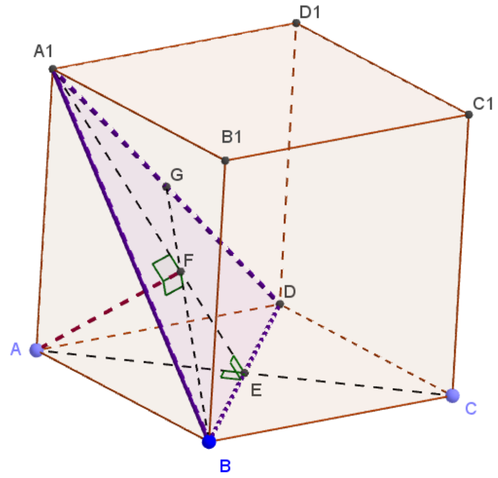


Рис. 4. Расстояние от точки до плоскости

Формула для вычисления расстояния от точки до плоскости

Если задано уравнение плоскости Ax+ By+ Cz+ D = 0, то расстояние от точки M(M_x, M_y, M_z) до плоскости можно найти, используя следующую формулу:

$$d = \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C \cdot M_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние от точки до прямой

Определение 2. *Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.*

Алгоритм для нахождения расстояния от заданной точки $M_1(x_1,y_1)$ до заданной прямой (a):

- находим общее уравнение прямой a вида $A_1x+B_1y+C_1=0$ или уравнение прямой a с угловым коэффициентом $y=k_1x+b_1$;
- получаем общее уравнение прямой b вида $A_2x+B_2y+C_2=0$ или уравнение прямой b с угловым коэффициентом вида $y=k_2x+b_2$, учитывая, что прямая b проходит через заданную точку M_1 и перпендикулярна заданной прямой a;

- определяем координаты (x_2,y_2) точки H_1 - точки пересечения прямых a и b, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=k_1x=b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$$

- вычисляем требуемое расстояние от точки M_1 до прямой a по формуле:

$$|M_1H_1|=\sqrt{(x_2-x1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Чтобы найти расстояние от точки $M_1(x_1,y_1)$ до прямой a на плоскости нужно:

- получить нормальное уравнение прямой a в виде

  $\cos\alpha x+\cos\beta y-p=0$ (если оно сразу не дано);
- вычислить значение выражения $|\cos\alpha \cdot x_1 + \cos\beta \cdot y_1 - p|$

  полученное значение является искомым расстоянием M_1 H_1 .

Расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве

Определение 3. *Расстояние между скрещивающимися прямыми – это расстояние между одной из скрещивающихся прямых и параллельной ей плоскостью, проходящей через другую прямую.*

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми a и b нужно:

- определить координаты (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2) точек M_1 и M_2 соответственно, лежащих на прямых a и b соответственно;
- получить координаты (a_x,a_y,a_z) и (b_x,b_y,b_z) направляющих векторов прямых a и b соответственно;

- найти координаты (A, B, C) нормального вектора $\vec{n}$ плоскости χ, проходящей через прямую b параллельно прямой a, из равенства $\vec{n} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$;

- записать общее уравнение плоскости χ как

$$A(x-x_2)+B(y-y_2)+C(z-z_2)=0 \text{ ;}$$

- привести полученное уравнение плоскости χ к нормальному виду cosαx+cosβy+cosyz1p=0;

- вычислить расстояние |M1H1| от точки M1(x_1,y_1,z_1) до плоскости χ по формуле |M1H1| =|cosαx1+cosβy1+cosyz1-p| - это и есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми a и b

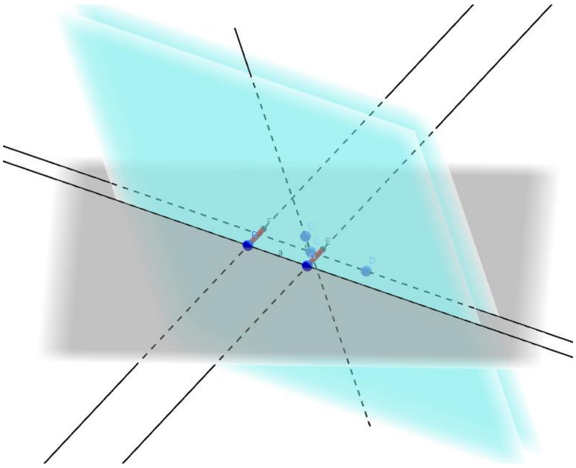


Рис. 5. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Вычисление углов

Угол между прямыми = угол между направляющими векторами

Угол между плоскостями = угол между нормальными векторами

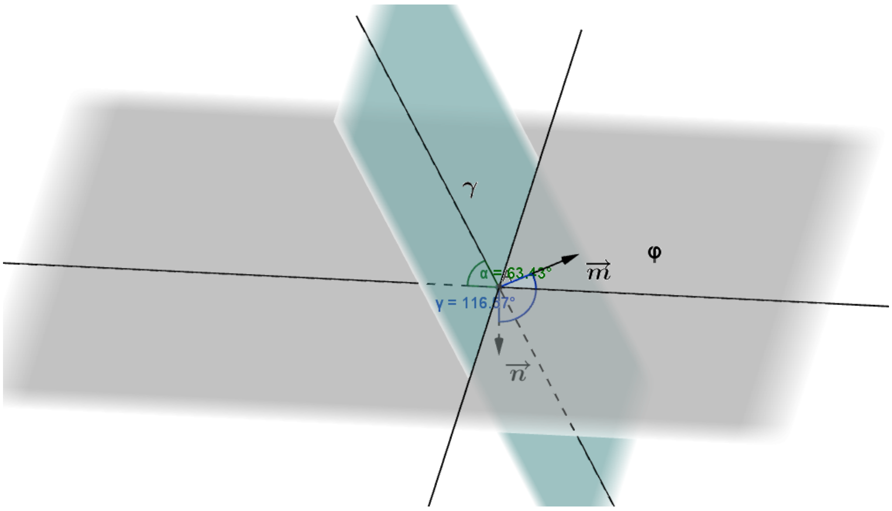


Рис. 6. Угол между плоскостями

Угол между прямой и плоскостью

Для вычисления угла между прямой и плоскостью вычисляют угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости, и по нему находят искомый угол. Если направляющий вектор прямой выбран так, что cosφ>=0 и взять 0<=φ<=90, то угол между прямой и плоскостью дополняет φ до 90.

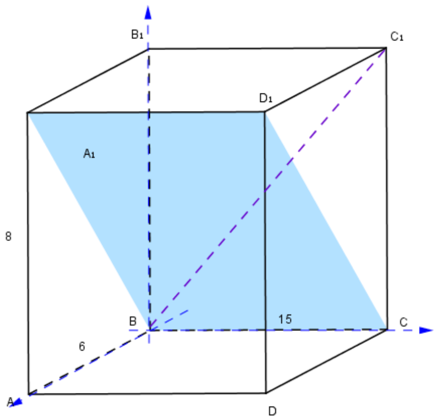


Рис. 7. Угол между прямой и плоскостью