

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования  
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. В.П. АСТАФЬЕВА»  
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики  
Выпускающая кафедра физики и методики обучения физике

Курникова Светлана Васильевна  
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема «Организация исследовательской деятельности учащихся по теме  
“Периодическое движение в связанных системах”»

Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы физика и  
информатика



ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ  
Зав. кафедрой физики и  
методики обучения физике,  
д.п.н., профессор  
В.И.Тесленко  
« 13 » июня 2017

Руководитель  
к.ф.-м.н., доцент кафедры  
физики и методики  
обучения физике  
В.А.Орлов

Дата защиты « 23 » июня 2017

Обучающийся Курникова С.В.  
« 13 » июня 2017  
Оценка отлично

Красноярск

2017

## **Оглавление**

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ГЛАВА I ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ОПИСАНИЯ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ .....	5
1. 1 Колебательные системы с двумя степенями свободы .....	5
1. 2 Примеры связанных осцилляторов .....	6
1. 3 Два связанных идентичных осциллятора .....	11
Выводы к главе I .....	18
ГЛАВА II ДВА ОСЦИЛЛЯТОРА С СУЩЕСТВЕННО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ .....	19
Выводы к главе II .....	24
ГЛАВА III ДВУХСЛОЙНЫЙ МАССИВ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НАНОДИСКОВ .....	25
3.1 Частные случаи .....	39
Выводы к главе III .....	45
ГЛАВА IV ПЕРСПЕКТИВЫ ТЕМАТИКИ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ КАК ОБЛАСТЬ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ .....	46
Выводы к главе IV .....	49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	50
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	51

## **ВВЕДЕНИЕ**

Механическая задача о периодическом движении связанных систем является источником аналогий для широкого класса проблем: от физики смешанных сред до макроэкономических проблем. Математический формализм задач универсален, что позволяет распространять методы на все области знаний.

Важность учета временного влияния взаимодействующих систем в их эволюции трудно переоценить. Поэтому чрезвычайно важно владеть знаниями в особенностях движения связанных систем и способностями донести эти знания и их значимость до учащихся.

В настоящей работе рассматриваются 2 задачи взаимодействующих систем:

- 1) Два одномерных связанных маятника с различающимися параметрами, которые можно рассматривать как учебные в частных проявлениях.
- 2) Актуальная научная задача о двухслойном массиве взаимодействующих магнитных нанодисков, как пример важной роли взаимодействия в магнетизме.

Основные цели работы:

1. Исследовать особенности коллективного движения связанных систем с различающимися параметрами.
2. Исследовать возможность включения темы о связанных колебаниях в содержание факультативных занятий по физике в профильной школе.

Решаемые задачи:

- 1) Построить кривые поглощения для системы двух упруго связанных осцилляторов с различными собственными частотами и параметрами затухания. Выяснить влияние различия этих параметров на различные свойства.

- 2) Выяснить спектр частот (дисперсионные задачи) двухслойной системы взаимодействующих ферромагнитных нанодисков. Взаимодействие носит магнитоэлектронный характер. Исследовать влияние величины межслойного взаимодействия и сочетания полярностей/хиральностей на резонансные частоты.

## ГЛАВА I ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ОПИСАНИЯ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В технике встречаются колебательные системы, которые большей частью обладающие несколькими степенями свободы. Колебания в таких системах можно возбудить различными способами, при этом форма колебаний, а также их частота будут зависеть от способа возбуждения. Колебания, которые влияют друг на друга - называются связанными. Если связь сильная, то взаимное влияние будет эффективней, а колебания и наблюдаемые при их возникновении процессы отличаются от исследованных до сих пор колебаний. Происходящие при связанных колебаниях процессы очень разнообразны. Даже при наличии нескольких степеней свободы большую роль играют те колебательные процессы, у которых одинаковый период, то есть имеющие всего одну частоту.

### 1. 1 Колебательные системы с двумя степенями свободы

Колебательная система обладает двумя степенями свободы, ее движение однозначно определяется указанием двух координат как функцией времени. Некоторые примеры систем такого вида изображены на рис. 1.

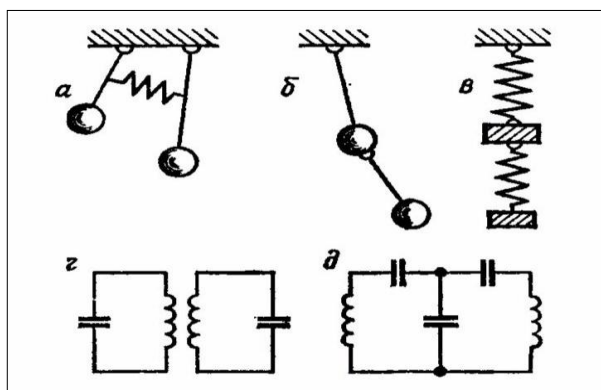


Рис. 1. Примеры осцилляторов с двумя степенями свободы.

а) связанные пружиной два плоских гравитационных маятника, которые имеют одну степень свободы каждый;

- b) два гравитационных плоских маятника, один из которых подвешен к другому;
- c) две подвешенные на пружинах вертикально колеблющиеся массы;
- d) два индуктивно связанных электрических колебательных контура;
- e) два электрических колебательных контура с емкостной связью.

## 1. 2 Примеры связанных осцилляторов

Система двух связанных осцилляторов не так сложна, как одиночный осциллятор. С помощью преобразования координат можно свести такую систему к двум не связанным между собой осциллятором. За этой теоретической простотой скрываются многие красивые и важные физические явления.

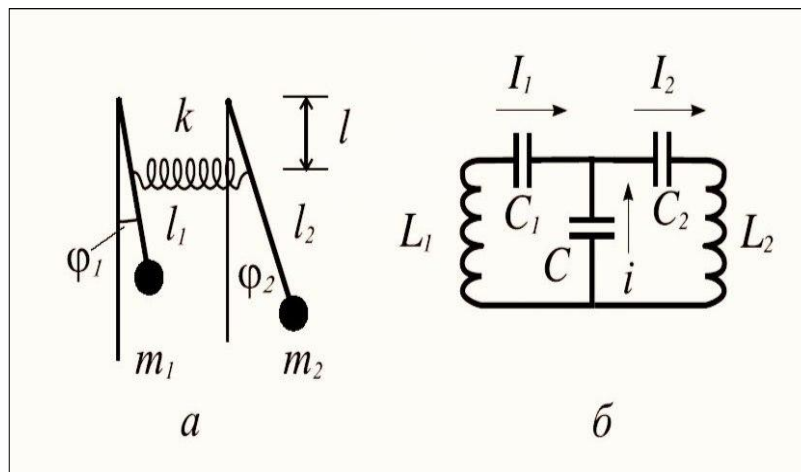


Рис.2. Система связанных маятников с силовым типом связи (а) и соответствующая система связанных колебательных контуров (б).

Связь между осцилляторами можно ввести различными способами. Рассмотрим, например, механическую систему из двух математических маятников, соединенных пружиной (рис. 2). Уравнения колебаний маятников в предположении малых углов отклонения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 g l_1 \varphi_1 + k l^2 (\varphi_2 - \varphi_1), \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 g l_2 \varphi_2 - k l^2 (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначения переменных и параметров в этих уравнениях показаны на

рис. 2а. Если бы связи не было ( $k = 0$ ), то получились бы уравнения для двух несвязанных осцилляторов с собственными частотами:

$$\omega_{01} = \sqrt{g/l_1} \text{ и } \omega_{02} = \sqrt{g/l_2}.$$

Наличие связи приводит к тому, что в первом из уравнений (1) появляется слагаемое, пропорциональное координате первого осциллятора, осцилляторы связываются.

Электрическая система, аналогичная связанным маятникам, имеет вид показанный на рис 2б. Действительно, по первому закону Кирхгофа можно записать:

$$i = I_1 - I_2 \text{ или } dq/dt = dq_1/dt - dq_2/dt,$$

где  $q_1, q_2, q$  - заряды на соответствующих конденсаторах. Тогда постоянную интегрирования считаем равной нулю, полагая, что когда колебаний нет, все конденсаторы не заряжены. Второй закон Кирхгофа, записанный для двух контуров на рис 2б, дает уравнения:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{c_1} q_1 + \frac{1}{c} q &= 0, \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{c_2} q_2 - \frac{1}{c} q &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

С точностью до преобразований, уравнения (2) совпадают с уравнениями (1). Такой способ связи осцилляторов, при котором в каждом из уравнений для несвязанных систем появляются слагаемые, пропорциональные координате второй системы, называют силовой связью, в приложении в механических системах, или емкостной связью, применительно к колебательным контурам.

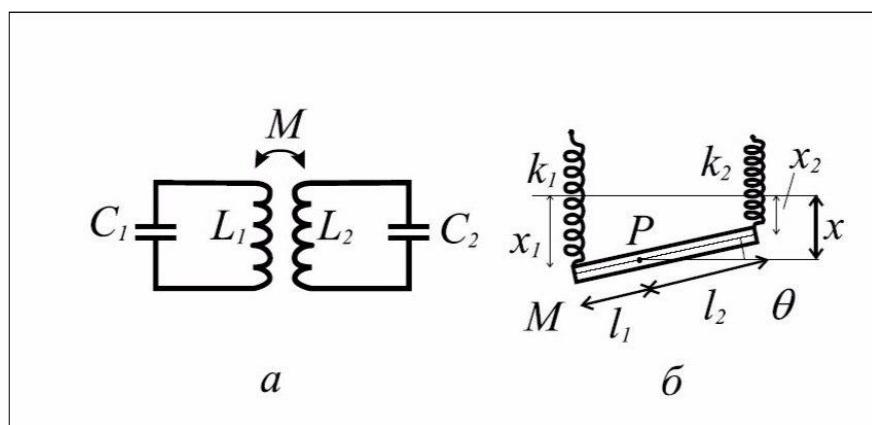


Рис. 3. Связанные колебательные контуры с индуктивным типом связи (а); соответствующая механическая система (б).

Хотя для рассмотренной механической системы введение связи, каким либо другим способом кажется искусственным, для колебательных контуров это не так. Обратимся, например, к системе, изображенной на рис 3а. Катушки индуктивностей двух колебательных контуров связаны между собой с коэффициентом взаимной индукции  $M$ . Для каждого из контуров можно записать (сразу учитываем, что  $I_1 = q_1, I_2 = q_2$ )

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + M \ddot{q}_2 &= 0, \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 + M \ddot{q}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Видно, что в этом случае связь уравнений обеспечивается присутствием слагаемых, пропорциональных второй производной по времени от координат осцилляторов. Такую связь естественно назвать индуктивной. Возникает вопрос, что является аналогом индуктивной связи в механическом случае? Рассмотрим колебания механической балки, подвешенной на двух пружинах. Причем будем считать, что балка неоднородная, так что ее центр тяжести смещен в сторону одной из пружин рис 3а. Уравнения колебаний такой системы проще всего получить, записав выражения для кинетической и потенциальной энергии системы через динамические переменные, выбранные в качестве координат осцилляторов. Например, в качестве таких переменных можно взять  $x_1$  и  $x_2$  – смещения концов балки от положения



равновесия. Тогда потенциальная энергия системы равна:

$$U = k_1 x_1^2 / 2 + k_2 x_2^2 / 2.$$

Кинетическую энергию проще выразить через смещение центра тяжести:  $\xi$  и угол ее поворота  $\theta$  вокруг оси, проходящей через центр тяжести:

$$K = M \dot{\xi}^2 / 2 + I \dot{\theta}^2 / 2$$

где  $M$  и  $I$  – масса балки и момент ее инерции относительно точки  $P$ .

Величины  $x_1, x_2, \xi, \theta$  связаны между собой соотношениями

$$x_1 = \xi - l_1 \theta,$$

$$x_2 = \xi + l_2 \theta,$$

используя которые, выразим кинетическую энергию системы через  $x_1$  и  $x_2$ :

$$K = \frac{1}{2l^2} [(Ml_2^2 + I)x_1^2 + 2(Ml_1l_2 - I)\dot{x}_1\dot{x}_2 + (Ml_1^2 + I)x_2^2],$$

где  $l = l_1 + l_2$  – общая длина балки. Уравнения движения можно получить из лагранжиана системы  $L = K - U$ , используя уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Это приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{Ml_2^2 + I}{l^2} \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \frac{Ml_1l_2 - I}{l^2} \ddot{x}_2 &= 0, \\ \frac{Ml_1^2 + I}{l^2} \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + \frac{Ml_1l_2 - I}{l^2} \ddot{x}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) имеют тот же вид, что и уравнения (3), описывающие индуктивную связь между контурами. Для механических систем подобный способ связи принято называть инерционным.

Более внимательное рассмотрение примера показывает, что различие между силовой и инерциальной (или емкостной и индуктивной) связью в значительной степени является условным. Действительно, если вместо того, чтобы выражать кинетическую энергию через переменные  $x_1$  и  $x_2$ , мы выразим потенциальную энергию через  $\xi$  и  $\theta$ , то уравнения Лагранжа приведут к системе двух связанных осцилляторов, в которых связь будет

описываться слагаемыми пропорциональными  $x_1$  и  $x_2$ , то есть характер связи будет силовым. Таким образом, одна и та же система в одних переменных выглядит как связанные осцилляторы с силовой связью, а в других с инерционной связью. Тип связи определяется выбором динамических переменных.

В общем случае кинетическая и потенциальная энергии системы двух связанных осцилляторов, выраженные через некоторые динамические переменные  $x_1$  и  $x_2$ , имеют вид:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{ij=1.2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{ij=1.2} k_{ij} x_i x_j. \quad (5)$$

$$m_{12} = m_{21}, k_{12} = k_{21}.$$

Условие положительности кинетической энергии приводит к ограничениям на коэффициенты  $m_{ij}$  следующего вида:

$$m_{11} > 0, m_{22} > 0, m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0. \quad (6)$$

Потенциальная энергия также должна быть положительной при любых отличных от нуля значениях  $x_1$  и  $x_2$ , в противном случае силы, возникающие в системе при некоторых отклонениях, будут уводить осцилляторы от положения равновесия, и гармонических колебаний в системе не возникнет. Поэтому такие же ограничения, как (6), должны подчиняться и коэффициенты  $k_{ij}$ :

$$k_{11} > 0, k_{22} > 0, k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0. \quad (7)$$

Математически соотношения (6) и (7) определяют условия положительной определенности и квадратичных форм в выражениях (5). Перейдем к новым переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , линейно связанным с  $x_1$  и  $x_2$  соотношениями:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \xi_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Выбирая определенным образом коэффициенты  $c_{ij}$  можно исключить из выражения для кинетической энергии перекрестные слагаемые, пропорциональные произведению  $\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2$ . В этом случае уравнения движения

системы переменных  $\xi_i$  будут демонстрировать связь силового (или емкостного) типа. Можно, наоборот, исключить из потенциальной энергии перекрестные слагаемые, пропорциональные  $\xi_1 \xi_2$ , получив систему с инерционной (или индуктивной) связью. Самое замечательное состоит в том, что коэффициентов  $c_{ij}$  в соотношениях (8) достаточно, чтобы исключить слагаемые, определяющие связь, одновременно и в кинетической и потенциальной энергии. Если выполнены условия (6) и (7), это приведет к двум несвязанным между собой уравнениям гармонических осцилляторов. Соответствующие динамические переменные могут не нести прямого физического смысла, как координата, какой либо точки механической системы, или напряжение, на каком либо элементе электрической схемы, однако в этих переменных уравнения будут выглядеть наиболее просто. Такие координаты называются нормальными, а соответствующие им простые гармонические колебания системы – нормальными колебаниями, или собственными модами системы.

Расчет нормальных колебаний может быть проведен чисто математическими методами, с привлечением линейной алгебры и теории квадратичных форм, однако нам важно понять, как ведет себя система связанных осцилляторов с физической точки зрения. По этой причине мы подробно рассмотрим колебания в конкретной системе, причем для наглядности выберем в качестве таковой систему связанных маятников, показанную на рис 3а.

### 1.3 Два связанных идентичных осциллятора

Пусть осцилляторы, составляющие систему одинаковы. Тогда для маятников на рис. 3а  $m_1 = m_2$ ,  $l_1 = l_2$ . Не ограничивая общности, можно положить также  $l = l_1$ . Уравнение (1) принимает вид:

$$\ddot{\varphi}_1 + w_0^2 \varphi_1 = \frac{k}{m_1} (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (9)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + w_0^2 \varphi_2 = -\frac{k}{m_2} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Здесь введено обозначение  $w_0^2 = g/l$ . Поведение связанных идентичных осцилляторов легко понять из простых соображений, связанных с симметрией системы. Предположим, что в начальный момент времени оба маятника отклонены на один и тот же угол  $\varphi_{0s}$  и имеет одинаковую угловую скорость  $\dot{\varphi}_{0s}$ . Очевидно, что движение системы будет таким, что в любой момент времени пружина останется не растянутой. Т.е. маятник будет совершать гармонические колебания с частотой  $w_1 = w_0 = \sqrt{g/l}$ , соответствующей одиночному маятнику без связи. Углы отклонения осцилляторов в зависимости от времени равны:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_{0s} \cos w_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{w_1} \sin w_1 t. \quad (10)$$

Предположим теперь, что при  $t=0$  маятники отклонены на одинаковый угол  $\varphi_{0a}$ , но в разные стороны, и их начальные угловые скорости равны по абсолютной величине  $\dot{\varphi}_{0a}$ , но имеют разные знаки. В этом случае очевидно, что средняя точка пружины в любой последующий момент времени остается не подвижной, поэтому можно заменить систему двух маятников на один, прикрепленный пружиной половинной длины к неподвижной стенке (рис. 4). Колебания будут иметь частоту:

$$w_2 = \sqrt{w_0^2 + 2k/m}$$

а их временная зависимость будет иметь вид:

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_{0a} \cos w_2 t + \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{w_2} \sin w_2 t. \quad (11)$$

Таким образом, специальным подбором начальных условий в системе можно возбудить гармонические колебания с одной из двух частот  $w_1$  или  $w_2$ . В первом случае маятники двигаются идентично друг другу, такие колебания называются симметричными, а соответствующий им тип

колебаний – симметричной модой. Во втором случае движение маятников происходит в противофазе, такой тип колебаний называется антисимметричной модой.

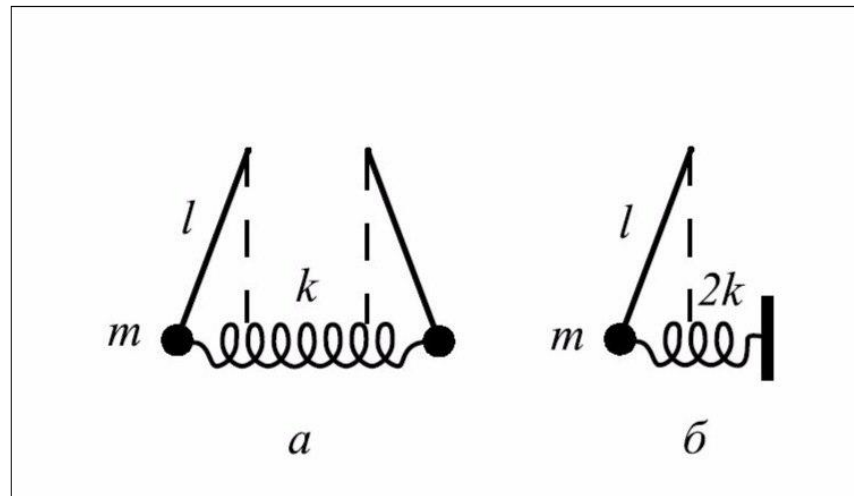


Рис. 4. Антисимметричные колебания в системе идентичных осцилляторов (а), эквивалентная система с одной степенью свободы (б).

Для того чтобы возбудить в чистом виде симметричную или антисимметричную моды, необходим специальный подбор начальных условий. При произвольных начальных условиях движение будет суперпозицией движений (10) и (11).

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_{0s} \cos w_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{w_1} \sin w_1 t + \varphi_{0a} \cos w_2 t + \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{w_2} \sin w_2 t, \\ \varphi_2(t) &= \varphi_{0s} \cos w_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{w_1} \sin w_1 t - \varphi_{0a} \cos w_2 t - \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{w_2} \sin w_2 t. \end{aligned} \quad (12)$$

Из этих соотношений следует, что в общем случае в движение каждого осциллятора вносят вклад гармонические колебания с обеими частотами – симметричной и антисимметричной мод. Никаких других частот появиться не может, так как в решениях (12) содержится четыре произвольные постоянные, ровно столько, сколько необходимо задать для полного определения движения системы с двумя степенями свободы.

Представляет интересный вопрос, каким образом решение (12) можно получить непосредственно из уравнений (9)? Для его выяснения введем новые переменные  $\xi_s$  и  $\xi_a$  соотношениями:

$$\xi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \xi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

и сложим и вычтем уравнения (9) друг из друга. Получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_s + w_0^2 \xi_s &= 0, \\ \ddot{\xi}_s + \left(w_0^2 + \frac{2k}{m}\right) \xi_a &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Эти уравнения не связаны между собой и определяют колебания соответственно симметричной и антисимметричной моды. Каждое из них является уравнением линейного осциллятора, но соответствующая координата осциллятора  $\xi_s$  или  $\xi_a$  не имеет прямого физического толкования, как переменная, описывающая движение какой-либо части системы. Напротив, в них вносят равноправный вклад углы отклонения обоих осцилляторов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , так как и в симметричном, и в антисимметричном движениях участвуют оба осциллятора. Решения уравнений (13) для величин  $\xi_s$  и  $\xi_a$  записываются обычным образом, и возврат к переменным  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  приводит к выражениям (12).

Симметричная и антисимметричная моды выступают в данном примере в качестве нормальных типов колебаний. Полная энергия системы (с учетом малости углов отклонения) имеет вид:

$$E = \frac{ml^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{ml^2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{mgl\varphi_1^2}{2} + \frac{mgl\varphi_2^2}{2} + \frac{kl^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}.$$

Принимая во внимание, что  $\xi_s^2 + \xi_a^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$  и  $\dot{\xi}_s^2 + \dot{\xi}_a^2 = \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2$ , получаем:

$$E = \frac{ml^2 \dot{\xi}_1^2}{2} + \frac{mgl \xi_1^2}{2} + \frac{ml^2 \dot{\xi}_2^2}{2} + \frac{(mgl + 2kl^2) \xi_2^2}{2}. \quad (14)$$

Вклад в энергию колебаний симметричной и антисимметричной мод независим друг от друга. Если, используя уравнение Лагранжа, записать уравнение системы, то, естественно, получатся уравнения (13).

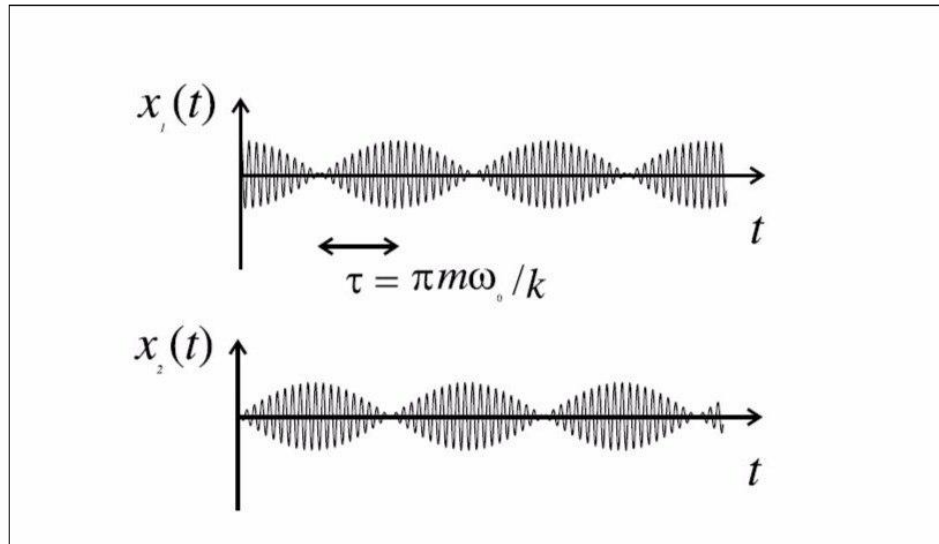


Рис. 5. Биения в системе связанных идентичных осцилляторов.

Наиболее отчетливо свойства решений (12) проявляются при специальном выборе начальных условий. Пусть один из маятников отклонили на угол  $\varphi_0$ , второй удерживают в положении равновесия, и при  $t=0$  маятники отпустили без начальной скорости. Такая ситуация соответствует следующему выбору постоянных в (12):

$$\varphi_{0s} = \varphi_{0a} = \frac{\varphi_0}{2}, \quad \dot{\varphi}_{0s} = \dot{\varphi}_{0a} = 0.$$

Колебания маятников будут происходить по закону:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos w_1 t + \cos w_2 t) = \varphi_0 \cos \frac{w_2 - w_1}{2} t \cos \frac{w_2 + w_1}{2} t, \\ \varphi_2(t) &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos w_1 t - \cos w_2 t) = \varphi_0 \sin \frac{w_2 - w_1}{2} t. \end{aligned} \quad (15)$$

Предположим, что выполняется условие  $k/m \ll w_0^2$  (приближение слабой связи). Тогда

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 &= \sqrt{w_0^2 + \frac{2k}{m}} - w_0 \approx \frac{k}{mw_0}, \\ w_2 + w_1 &= \sqrt{w_0^2 + \frac{2k}{m}} + w_0 \approx 2w_0 + \frac{k}{mw_0} \approx 2w_0. \end{aligned}$$

и решения (8.15) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &\approx \varphi_0 \cos \frac{k}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t, \\ \varphi_2(t) &\approx \varphi_0 \sin \frac{k}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.\end{aligned}\tag{16}$$

Зависимости  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  показаны на рис. 5. Колебания маятников имеют характерный вид биений. В соответствии с условием слабой связи, первые множители в обоих уравнениях в (16) меняются гораздо медленнее вторых, поэтому их, вместе с постоянной  $\varphi_0$  можно трактовать как медленное изменение амплитуды колебаний осцилляторов во времени. На начальном отрезке времени амплитуда колебаний первого маятника максимальна и меняется слабо. А амплитуда колебаний второго маятника растет почти по линейному закону, поэтому можно считать, что

$$\sin \left[ \frac{kt}{2m\omega_0} \right] \approx \frac{kt}{2m\omega_0}$$

На этой стадии весь процесс можно приближенно трактовать, как движение второго маятника под действием внешней силы, передаваемой через пружину от первого. Так как осцилляторы одинаковы, частоты колебаний каждого из них совпадают, и имеет место точный резонанс, при котором происходит сингулярный рост амплитуды. Так продолжается до тех пор, пока заметная часть энергии первого маятника не перейдет ко второму. Передача энергии сопровождается уменьшением амплитуды колебаний первого осциллятора и замедлением скорости роста амплитуды второго. Через время  $\tau = \pi m \omega_0 / k$  вся энергия переходит ко второму маятнику, амплитуда колебаний максимальная, а амплитуда колебаний второго становится равной нулю. Осцилляторы меняются местами, и начинается обратный процесс – перекачка энергии из второго осциллятора в первый.

Необходимо подчеркнуть, что движение системы в целом не является, вообще говоря, периодическим, так как частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут быть несоизмеримыми. Это приводит, в частности, к тому, что через время  $2\tau$  полной перекачки энергии от первого осциллятора ко второму и обратно не



будет, фазы колебаний обоих осцилляторов будут отличаться от их значений при  $t=0$ . Поэтому имеет смысл говорить только о периодичности процесса перекачки энергии, а не всего колебания в целом.

Выясним физический смысл приближения слабой связи. Для этого вычислим среднюю по времени энергию колебаний каждого осциллятора  $\overline{E_{1,2}}$  и среднюю по времени энергию в элементе связи (пружине). Так как маятники идентичны, то

$$\overline{E_1} = \overline{E_2} = \frac{ml^2 \overline{\dot{\varphi}_1^2}}{2} + \frac{ml^2 \overline{\varphi_1^2}}{2}.$$

Используя выражение (8.15), легко получить:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1^2} &= \frac{\varphi_0^2}{4} (\overline{\cos^2 w_1 t} + \overline{\cos^2 w_2 t} + \overline{2 \cos w_1 t \cos w_2 t}) = \frac{\varphi_0^2}{8}, \\ \overline{\dot{\varphi}_1^2} &= \frac{\varphi_0^2}{4} (w_1^2 \overline{\sin^2 w_1 t} + w_2^2 \overline{\sin^2 w_2 t} + 2w_1 w_2 \overline{\sin w_1 t \sin w_2 t}) = \\ &= \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} \frac{\varphi_0^2}{4} = \frac{\varphi_0^2}{4} \left( w_0^2 + \frac{k}{m} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\overline{E_{1,2}} = \frac{ml^2 \varphi_0^2}{4} \left( w_0^2 + \frac{k}{2m} \right).$$

Для средней по времени энергии, запасенной в пружине, имеем:

$$\overline{E_{св}} = \frac{kl^2 \overline{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}}{2} = \frac{\varphi_0^2}{4} kl^2.$$

Условие  $k/m \ll w_0^2$ , введенное как условие слабой связи, означает,

таким образом, что

$$\overline{E_{св}} \ll \overline{E_{1,2}} \quad (17)$$

то есть в приближении слабой связи средняя по времени энергия колебаний каждого из осцилляторов, которая в отдельности значительно больше средней по времени энергии, запасенной в элементе связи.

## **Выводы к главе I**

1. Для аналитического описания систем связанных осцилляторов наряду с составлением уравнения движения продуктивным является и энергетический подход.
2. Характер движения компонентов и резонансные свойства связанных систем существенно зависят от степени связи, которая описывается коэффициентом связи.

## ГЛАВА II ДВА ОСЦИЛЛЯТОРА С СУЩЕСТВЕННО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Проблема описания динамических характеристик связанных систем с существенно различающимися характеристиками встречается довольно часто и не только в механике твердого тела. Например, в области магнетизма широчайший спектр задач о взаимодействии магнитных подсистем требует формализма, аналогичного “механическому” [1-9]. Поэтому далее рассмотрим связанную систему двух одномерных осцилляторов с различными параметрами (рис.6) :  $k_1, k_2$ - жесткости,  $m_1, m_2$  – массы,  $\beta_1, \beta_2$  - коэффициенты вязкого трения. На лбе компоненты действует внешняя сила  $f_1$  и  $f_2$ . Маятники связаны квазижесткой связью с коэффициентом  $\alpha$ .

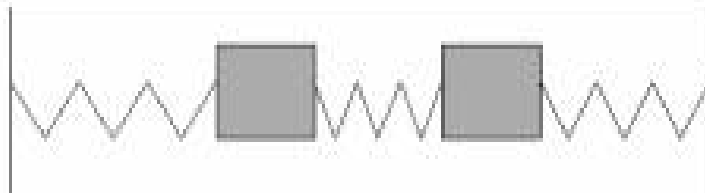


Рис. 6. Связанная система двух одномерных осциллятора.

Запишем уравнения движений для этой системы:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}_{\text{упр1}} + \vec{f}_{\text{св}}^{(1)} + \vec{f}_1 + \vec{f}_{\text{тр1}}; \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{f}_{\text{упр2}} + \vec{f}_{\text{св}}^{(2)} + \vec{f}_2 + \vec{f}_{\text{тр2}}; \end{cases} \quad (18)$$

Спроецируем эти уравнения на выбранную систему координат:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -k_1 x_1 - \alpha(x_1 - x_2) + f_1 - \beta_1 v_1; \\ m_2 a_2 = -k_2 x_2 - \alpha(x_2 - x_1) + f_2 - \beta_2 v_2; \end{cases} \quad (19)$$

Поделим обе части обоих уравнений на массу:

$$\begin{cases} a_1 + \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{\alpha}{m_1} (x_1 - x_2) + \frac{\beta_1}{m_1} v_1 = \frac{f_1}{m_1}; \\ a_2 + \frac{k_2}{m_2} x_2 + \frac{\alpha}{m_2} (x_2 - x_1) + \frac{\beta_2}{m_2} v_2 = \frac{f_2}{m_2}; \end{cases} \quad (20)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} w_{01}^2 &= \frac{k_1}{m_1}; w_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2}; 2\lambda_1 = \frac{\beta_1}{m_1}; 2\lambda_2 = \frac{\beta_2}{m_2}; \\ \alpha_1^2 &= \frac{\alpha}{m_1}; \alpha_2^2 = \frac{\alpha}{m_2}; F_1 = \frac{f_1}{m_1}; F_2 = \frac{f_2}{m_2}; \end{aligned}$$

Тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + w_{01}^2 x_1 + 2\lambda_1 \dot{x}_1 + \alpha_1^2 (x_1 - x_2) = F_1; \\ \dot{x}_2 + w_{02}^2 x_2 + 2\lambda_2 \dot{x}_2 + \alpha_2^2 (x_2 - x_1) = F_2; \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + 2\lambda_1 \dot{x}_1 + (\alpha_1^2 + w_{01}^2) x_1 - \alpha_1^2 x_2 = F_1; \\ \dot{x}_2 + 2\lambda_2 \dot{x}_2 + (\alpha_2^2 + w_{02}^2) x_2 - \alpha_2^2 x_1 = F_2; \end{cases}$$

Предположим далее, что вынужденные силы гармонические, тогда можно воспользоваться методом комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{01} e^{i\omega t}; \\ F_2 &= f_{02} e^{i\omega t}; \end{aligned} \quad (21)$$

а пробные решения представить в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_{01} e^{i(\omega t + \varphi_1)}; \\ \bar{x}_2 &= x_{02} e^{i(\omega t + \varphi_2)}; \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим выражения (21) и (22) в (20), для этого по отдельности вычислим производные:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= i\omega x_{01} e^{i(\omega t + \varphi_1)}; \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_{01} e^{i(\omega t + \varphi_1)}; \\ \dot{x}_2 &= i\omega x_{02} e^{i(\omega t + \varphi_2)}; \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_{02} e^{i(\omega t + \varphi_2)}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{cases} -\omega^2 x_{01} e^{i\varphi_1} + 2\lambda_1 i\omega x_{01} e^{i\varphi_1} + (w_{01}^2 + \alpha_1^2) x_{01} e^{i\varphi_1} - \alpha_1^2 x_{02} e^{i\varphi_2} = f_{01}; \\ -\omega^2 x_{02} e^{i\varphi_2} + 2\lambda_2 i\omega x_{02} e^{i\varphi_2} + (w_{02}^2 + \alpha_2^2) x_{02} e^{i\varphi_2} - \alpha_2^2 x_{01} e^{i\varphi_1} = f_{02}; \end{cases} \quad (24)$$

Сгруппируем уравнения (24) по амплитудам:

$$\begin{cases} x_{01} e^{i\varphi_1} [w_{01}^2 + \alpha_1^2 - \omega^2 + 2\lambda_1 i\omega] - \alpha_1^2 x_{02} e^{i\varphi_2} = f_{01}; \\ x_{02} e^{i\varphi_2} [w_{02}^2 + \alpha_2^2 - \omega^2 + 2\lambda_2 i\omega] - \alpha_2^2 x_{01} e^{i\varphi_1} = f_{02}; \end{cases} \quad (25)$$

Выразим из системы (25) амплитуду  $x_{01}$ , для этого помножим верхнее уравнение на  $[w_{02}^2 + \alpha_2^2 - \omega^2 + 2\lambda_2 i\omega]$ , а нижнее на  $\alpha_2^2$  и сложим:

$$\begin{aligned} x_{01} e^{i\varphi_1} [(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - \omega^2 + 2\lambda_1 i\omega)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - \omega^2 + 2\lambda_2 i\omega) - \alpha_2^2 x_{02} e^{i\varphi_2}] \\ = f_{01} (w_{02}^2 + \alpha_2^2 - \omega^2 + 2\lambda_2 i\omega) + f_{02} \alpha_2^2; \end{aligned}$$

Отсюда для комплексной амплитуды получим:

$$x_{01} = e^{-i\varphi_1} \frac{f_{01} (w_{02}^2 + \alpha_2^2 - \omega^2 + 2\lambda_2 i\omega) + f_{02} \alpha_2^2}{(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - \omega^2 + 2\lambda_1 i\omega)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - \omega^2 + 2\lambda_2 i\omega) - \alpha_2^2 x_{02} e^{i\varphi_2}} \quad (26)$$

Аналогично вычисляется амплитуда второго осциллятора:

$$x_{02} = e^{-i\varphi_2} \frac{f_{02}(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2 + 2\lambda_1 iw) + f_{01}\alpha_{02}^2}{(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2 + 2\lambda_1 iw)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2 + 2\lambda_2 iw) - \alpha_{01}^2 x_{02} e^{i\varphi_2}} \quad (27)$$

Проблема: как найти фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ? Для этого вернемся к системе (25) и вычислим у нее коэффициенты перед мнимыми компонентами:

$$\begin{cases} x_{01}[(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2) \sin \varphi_1 + 2\lambda_1 w \cos \varphi_1 - \alpha_1^2 x_{02}^2 \sin \varphi_1] = 0 \\ x_{02}[(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) \sin \varphi_2 + 2\lambda_2 w \cos \varphi_1 - \alpha_2^2 x_{01}^2 \sin \varphi_1] = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Вычислим далее поглощаемую мощность этой системой, то есть работу силы трения за один период:

$$A = \int_0^T [\beta v_1^2 + \beta v_2^2] 2t = -\beta w^2 \int_0^T (x_{01} x_{01}^* + x_{02} x_{02}^*) 2t = -\beta w^2 T (x_{01} x_{01}^* + x_{02} x_{02}^*); \quad (12)$$

Вычислим по отдельности каждое слагаемое из (12):

$$\begin{aligned} x_{01} x_{01}^* &= \frac{(f_{01}(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2 + 2\lambda_2 iw) + \alpha_1^2 f_{02})(f_{01}(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2 + 2\lambda_2 iw) + \alpha_1^2 f_{02})}{[(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) - \alpha_1^2 \alpha_2^2][(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) - \alpha_1^2 \alpha_2^2]} = \\ &= \frac{f_{01}^2 [(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2)^2 + 4\lambda_2^2 w^2] + 2f_{01} f_{02} \alpha_1^2 (w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) + \alpha_1^4 f_{02}^2}{[(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)^2 + 4\lambda_1^2 w^2][(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2)^2 + 4\lambda_2^2 w^2] + \alpha_1^4 \alpha_2^4 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 [2(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) + 8\lambda_1 \lambda_2 w^2]} \\ &= \frac{x_{02} x_{02}^*}{f_{02}^2 [(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)^2 + 4\lambda_1^2 w^2] + 2f_{01} f_{02} \alpha_2^2 (w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2) + \alpha_2^4 f_{01}^2} \\ &= \frac{f_{02}^2 [(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)^2 + 4\lambda_1^2 w^2][(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2)^2 + 4\lambda_2^2 w^2] + \alpha_1^4 \alpha_2^4 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 [2(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) - 4\lambda_1 \lambda_2 w^2]} \end{aligned} \quad (30)$$

Далее подставим (30) в работу (29), отсюда для мощности получим:

$$P = \beta w^2 T (x_{01} x_{01}^* + x_{02} x_{02}^*); \quad (31)$$

1. Рассмотрим случай, когда  $m_1 = m_2 \Rightarrow$  одинаковые силы  $f_1 = f_2$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 \ll w_1, w_2$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 \ll w_{01}, w_{02}$

$$x_{01} x_{01}^*$$

$$= f^2 \frac{[(w_{01}^2 + \alpha_2^2 - w^2)^2 + 4\lambda_2^2 w^2] + 2\alpha^2 (w_{01}^2 + \alpha_2^2 - w^2) + \alpha^4}{[(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)^2 + 4\lambda_1^2 w^2][(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2)^2 + 4\lambda_2^2 w^2] + \alpha^4 - \alpha^4 [2(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) + 8\lambda^2 w^2]}$$

$$x_{02} x_{02}^* = f^2 \frac{[(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2)^2 + 4\lambda_2^2 w^2] + 2\alpha^2 (w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) + \alpha^4}{[(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)^2 + 4\lambda_1^2 w^2][(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2)^2 + 4\lambda_2^2 w^2] + \alpha^4 - \alpha^4 [2(w_{01}^2 + \alpha_1^2 - w^2)(w_{02}^2 + \alpha_2^2 - w^2) + 8\lambda^2 w^2]} \quad (32)$$

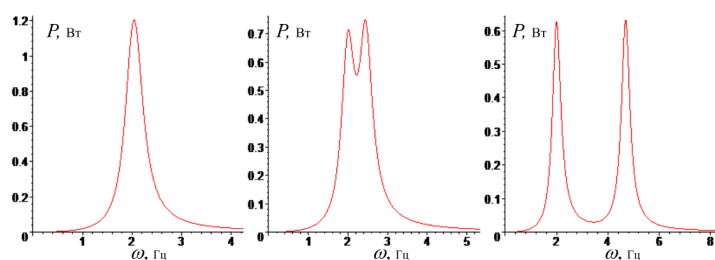


Рис. 7. Кривая поглощения для параметров:  $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ,  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = f_1$ ,  $\omega_{01} = 1$ ,  $\omega_{02} = 2\omega_{01}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$  а)  $\chi = 0$ . б)  $\chi = 2$ , в)  $\chi = 4$ . Важно заметить, что при увеличении жесткости связи вторая мода становится менее выражена и вовсе исчезает. Зеленым показан спектр поглощения для случая  $f_2 = -f_1$ .

2. Те же условия, только при усиленной связи ( $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \omega_{01}, \omega_{02}$ ,  $f_2 = 0$ .) (рис. 8)

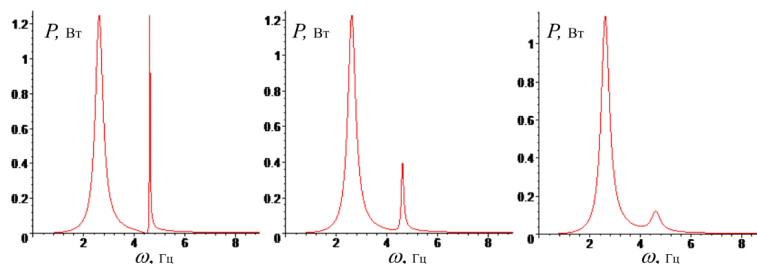


Рис. 8. Кривая поглощения для параметров:  $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ,  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 0$ ,  $\omega_{01} = 1$ ,  $\omega_{02} = \omega_{01}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.2$  а)  $\chi = 0.4$ . б)  $\chi = 2$ , в)  $\chi = 3$ . Важно заметить, что при увеличении жесткости связи наблюдается явление снятия вырождения резонансной частоты.

3. То же, что выше, но вынуждающая сила действует на оба осциллятора (зеленой кривой показан случай  $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2$ ).

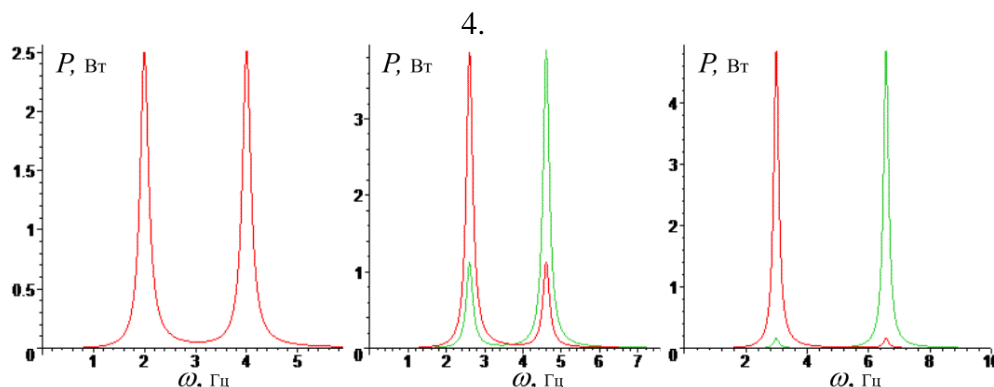


Рис. 9. Кривая поглощения для параметров:  $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ,  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 0$ ,  $\omega_{01} = 1$ ,  $\omega_{02} = 2\omega_{01}$ ,  $\chi = 2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  а)  $\lambda_2 = 0$ . б)  $\lambda_2 = 0.2\lambda_1$ , в)  $\chi = 3$ . Важно заметить, что при увеличении параметра затухания выраженность второй частоты (основное влияние второго осциллятора) уменьшается.

## **Выводы к главе II**

1. При увеличении жесткости связи наблюдается явление снятия вырождения резонансной частоты;
2. При увеличении параметра затухания выраженность второй частоты уменьшается;
3. При увеличении жесткости связи вторая мода становится менее выражена, и вовсе исчезает.



## ГЛАВА III ДВУХСЛОЙНЫЙ МАССИВ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НАНОДИСКОВ

Рассмотрим далее следующий уровень сложности взаимодействующих систем – два двумерных массива. В контексте этой задачи находятся магнитные системы из большого количества ферромагнитных наноэлементов [3-9]. Изучим далее магнитные состояния 2D-решетки, состоящей из двух слоев дипольно-взаимодействующих дисков (рис.10). Расстояние между центрами дисков  $d$ , радиус дисков  $R$ . Движение намагниченности в одном диске описывается уравнением Тилиа:

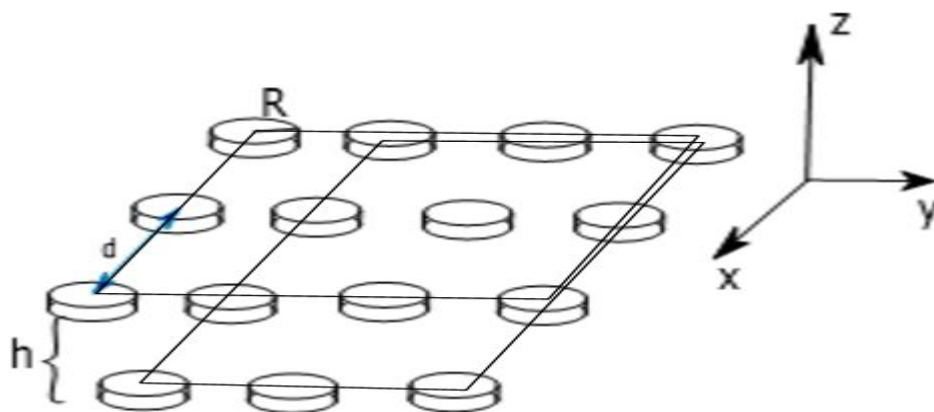


Рис.10. 2-D решетка.

$$\hat{G} \times \vec{v} + \vec{\nabla}U + \vec{f} = 0; \quad (33)$$

Здесь  $\vec{v}$  – скорость кора вихря,  $U$  – потенциальная энергия кора вихря,  $\vec{f}$  – сила взаимодействия (эффективная) намагниченностей со стороны матрицы (оставшихся дисков). Сразу заметим, что  $\vec{\nabla}U = -k\vec{r}$ .(34)

Распишем первое слагаемое из уравнения (33):

$$\hat{G} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ G_x & G_y & G_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & G \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = -\vec{i}Gv_y + \vec{j}Gv_x; \quad (35)$$

Заметим, что гир-вектор направлен вдоль  $Z$ , поэтому  $G_x = G_y = 0$ .

Тогда уравнение (33) может быть записано в виде:

$$-\vec{i}Gv_y + \vec{j}Gv_x - kr_x\vec{i} - kr_y\vec{j} + \vec{i}f_x + \vec{j}f_y = 0;$$

Или по компонентам:

$$\begin{cases} -Gv_y - kr_x + f_x = 0; \\ Gv_x - kr_y + f_y = 0; \end{cases} \quad (36)$$

Рассмотрим далее силы  $f_x$  и  $f_y$ . Природа взаимодействия этих сил следующая: в зависимости от положения кора, меняется направление эффективного дипольного момента диска. Следовательно, меняется энергия взаимодействия парного дисков. Заменяем энергию взаимодействия диска с номером  $n, t$  и диска с номером  $i, j$ .

$$W_{nmij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{M}_{nm}\vec{M}_{ij}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{r}\vec{M}_{nm})(\vec{r}\vec{M}_{ij})}{r^5} \right]; \quad (37)$$

Здесь  $\vec{M}_{nm}$  и  $\vec{M}_{ij}$  – магнитные моменты дисков, которые зависят от частоты поля, его величины, а так же от величины постоянного поля, включенного перпендикулярно плоскости пленки. В зависимости от полярности и хиральности кора, связь между координатой кора и направлением  $\vec{M}$  объясняется с помощью рисунка 10.

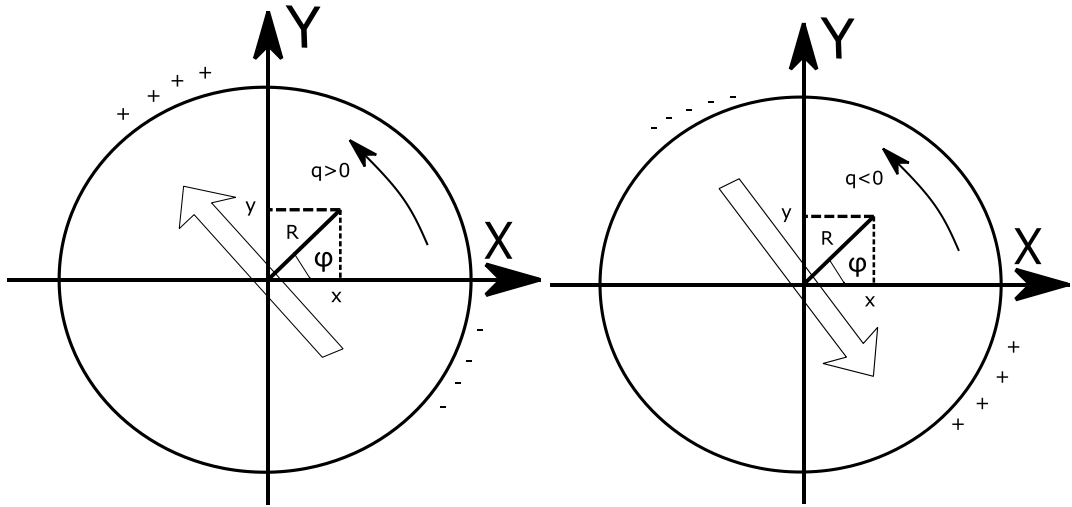


Рис. 11. Намагниченность дисков.

При смещении кора на расстояние  $R$  на боковой поверхности возникают магнитостатические заряды, что и объясняет возникновение дипольного момента. Из рисунка 11 видно, что для дипольного момента можно записать:

$$\vec{M} = -\vec{i}M_0 \sin \varphi + \vec{j}M_0 \cos \varphi = \frac{M_0}{R} (-\vec{i}y + \vec{j}x);$$

Здесь  $M_0$  – модуль дипольного момента.

В общем случае с учетом хиральности:

$$\vec{M}_{nm} = \frac{M_0}{R} q_{nm} (-\vec{i}y + \vec{j}x); \quad (38)$$

С учетом выражения (38) для дипольной энергии (37) можно записать:

$$\begin{aligned} W_{nmij} &= \frac{M_0 M_0^2}{4\pi R^2} q_{nm} q_{ij} \left[ \frac{y_{nm} y_{ij} + x_{nm} x_{ij}}{r^3} \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{((i-n)d(-y_{nm}) + (j-m)dx_{nm})[(i-n)d(-y_{ij}) + (j-m)dx_{ij}]}{r^5} \right] \quad (39) \end{aligned}$$

Если начало координат поставить на диск с номером (0,0), то выражение (39) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} W_{nmij} &= \frac{M_0}{4\pi R^2 d^3} \frac{M_0^2 q q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} [(n^2 + m^2)(y_{nm} x_{nm}) \\ &\quad - 3(n^2 y_{nm} - nm(y_{x_{nm}} + y_{nm} x) + m^2 x x_{nm})] \\ &= \frac{M_0}{4\pi R^2 d^3} \frac{M_0^2 q q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} [(-2n^2 + m^2)y_{nm} + (-2m^2 + n^2)x x_{nm} \\ &\quad + 3nm(x y_{nm} + y x_{nm})]; \quad (40) \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение  $\vec{r} = nd\vec{i} + md\vec{j}$ ;

С учетом того, что для сил справедливо выражение:  $\vec{f} = -\vec{\nabla}W$ , получим:

$$\begin{cases} f_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2 d^3} \frac{M_0^2 q q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} [(2m^2 - n^2)x_{nm} - 3nmy_{nm}]; \\ f_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2 d^3} \frac{M_0^2 q q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} [(2n^2 - m^2)y_{nm} - 3nmx_{nm}]; \end{cases} \quad (41)$$

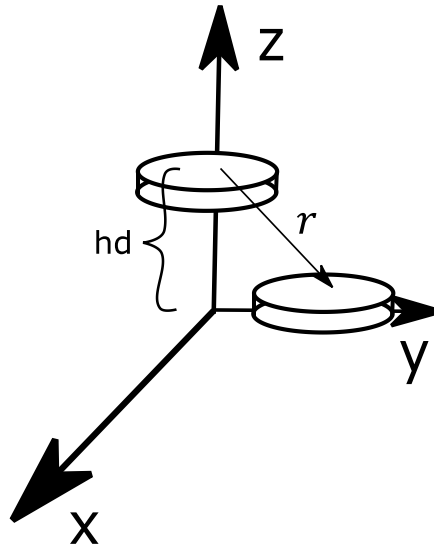


Рис. 12. Разница координат по оси Z.

Рассмотрим далее силы  $f_x$  и  $f_y$ . Природа взаимодействия этих сил следующая: в зависимости от положения кора, меняется направление эффективного дипольного момента диска. Следовательно, меняется энергия взаимодействия парного дисков. Заменяем энергию взаимодействия диска с номером  $n, m$  и диска с номером  $i, j$ .

$$W_{nmij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{M}_{nm}\vec{M}_{ij}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{r}M_{nm})(\vec{r}M_{ij})}{r^5} \right]; \quad (37)$$

Здесь  $\vec{M}_{nm}$  и  $\vec{M}_{ij}$  – магнитные моменты дисков, которые зависят от частоты поля, его величины, а так же от величины постоянного поля, включенного перпендикулярно плоскости пленки. В зависимости от полярности и хиральности кора, связь между координатой кора и направлением  $\vec{M}$  объясняется с помощью рисунка 10.

Силы из выражения (41) – силы взаимодействия между дисками внутри одной плоскости. Рассмотрим далее силу взаимодействия выделенного диска с элементами векторной плоскости. Заметим, что поверхностная анизотропия не позволит магнитному элементу иметь ненулевую компоненту вдоль оси  $Z$ . Поэтому задача по-прежнему остается двумерной. Вернемся к выражению (37) и учтем, что между дисками есть разница координат по оси  $Z$  (см. рис.12). Тогда энергия (37) примет вид:

$$W_{nmij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0^2 q q_{nm}}{R^2 d^3 (n^2 + m^2)^{5/2}} [(h^2 + m^2 - 2n^2) u y'_{nm} + (h^2 + n^2 - 2m^2) x x'_{nm} + 3n m x u'_{nm} + u x'_{nm}]; \quad (42)$$

Штрихи при координате означают принадлежность к другой плоскости.

Соответственно, для этих сил получим:

$$\begin{cases} f_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0^2 q q_{nm}}{R^2 d^3 (h^2 + n^2 + m^2)^{5/2}} [(2m^2 - n^2 - h^2) x'_{nm} - 3n m u'_{nm}]; \\ f_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0^2 q q_{nm}}{R^2 d^3 (h^2 + n^2 + m^2)^{5/2}} [(2n^2 - m^2 - h^2) u'_{nm} - 3n m x'_{nm}]; \end{cases} \quad (43)$$

С учетом (9) и (11) уравнение движения кора в выделенном элементе может быть записано так:

$$\left\{ \begin{array}{l} -Gv_y - kx + \frac{\mu_0 M_0^2 q}{4\pi R^2 d^3} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} q_{nm} \left( \frac{2m^2 - n^2}{(n^2 + m^2)^{5/2}} x_{nm} - \frac{3nm}{(n^2 + m^2)^{5/2}} y_{nm} \right) + \right. \\ \left. \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} q'_{nm} \left( \frac{2m^2 - n^2}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} x'_{nm} - \frac{3nm}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} y'_{nm} \right) \right] = 0 \\ -Gv_y - ky + \frac{\mu_0 M_0^2 q}{4\pi R^2 d^3} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} q_{nm} \left( \frac{2m^2 - n^2}{(n^2 + m^2)^{5/2}} y_{nm} - \frac{3nm}{(n^2 + m^2)^{5/2}} x_{nm} \right) + \right. \\ \left. \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} q'_{nm} \left( \frac{2m^2 - n^2}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} y'_{nm} - \frac{3nm}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} x'_{nm} \right) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (44)$$

Будем иметь решения в виде волн прецессирующих коров:

$$\begin{aligned} x_{nm} &= x_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - wq_{nm}p_{nm}t); \\ y_{nm} &= y_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - wq_{nm}p_{nm}t); \end{aligned}$$

Множитель  $qp$  при угловых скоростях движения коров определяет направление их вращений [3,5]. Тогда:

$$\begin{aligned} v_{x_{nm}} &= q_{nm}p_{nm}x_{0nm}w \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - wq_{nm}p_{nm}t); \\ v_{y_{nm}} &= -q_{nm}p_{nm}y_{0nm}w \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - wq_{nm}p_{nm}t); \end{aligned}$$

Заметим, что фаза движения коров во второй плоскости может отличаться на некоторую величину  $\varphi_0$ , поэтому:

$$\begin{aligned} x'_{nm} &= x'_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - wq'_{nm}p'_{nm}t + \varphi_0); \\ v_{x'_{nm}} &= q'_{nm}p'_{nm}x'_{0nm}w \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - wq'_{nm}p'_{nm}t + \varphi_0); \\ y'_{nm} &= y'_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - wq'_{nm}p'_{nm}t + \varphi_0); \\ v_{y'_{nm}} &= -q'_{nm}p'_{nm}y'_{0nm}w \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - wq'_{nm}p'_{nm}t + \varphi_0); \end{aligned}$$

Для простоты введем обозначение  $w_{nm} = p_{nm}q_{nm}w$ ;  $w'_{nm} = p'_{nm}q'_{nm}w$ .

Подстановка выражений (45)–(47) в уравнение движения (44) дадут следующую систему, заметим, что гир-вектор может быть представлен в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{nm} = p_{nm}q_{nm}g_0(p_{nm}); \\ \varepsilon = \frac{\mu_0 M_0^2}{4\pi R^2 d^3}; \end{array} \right. \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
& g_0 y_0 w_0 \cos(w_0 t) - \alpha x_0 \cos(w_0 t) \\
& + q_0 \mathcal{E} \left[ \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2) x_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w_{nm} t) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3nmy_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w_{nm} t) \right) \right. \\
& + \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2 \right. \\
& \left. - h^2) x'_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w'_{nm} t + \varphi_0) \right. \\
& \left. \left. - 3nmy'_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w'_{nm} t + \varphi_0) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_0 x_0 w_0 \sin(w_0 t) - \varkappa y_0 \sin(w_0 t) \\
& + q_0 \varepsilon \left[ \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2) y_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w_{nm} t) - 3nm x_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w_{nm} t) \right) \right. \\
& + \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2 - h^2) x'_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w'_{nm} t + \varphi_0) \right. \\
& \left. \left. - 3nm x'_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w'_{nm} t + \varphi_0) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g_0 y_0 \dot{w}_0 \cos(\varphi_0 - \dot{w}_0 t) - \dot{x}_0 \varkappa \cos(\varphi_0 - \dot{w}_0 t) \\
& + q_0 \varepsilon \left[ \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2) x'_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w'_{nm} t + \varphi_0) - 3nm y'_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w'_{nm} t + \varphi_0) \right) \right. \\
& \left. + \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2 - h^2) x_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w_{nm} t) - 3nm y_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w_{nm} t) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g_0 \dot{x}_0 \dot{w}_0 \sin(\varphi_0 - \dot{w}_0 t) - \dot{x}_0 \varkappa \sin(\varphi_0 - \dot{w}_0 t) \\
& + q_0 \varepsilon \left[ \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2) y'_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w'_{nm} t + \varphi_0) - 3nm x'_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w'_{nm} t + \varphi_0) \right) \right. \\
& \left. + \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2 - h^2) y_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w_{nm} t) - 3nm x_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} - w_{nm} t) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

(49)

Здесь и далее штрихи при параметрах означает их принадлежность к другому слою, чем тот, для которого записано уравнение. Далее выпишем коэффициенты при соответствующих гармониках, сгруппируем их:

$$\begin{aligned}
& (g_0 y_0 w_0 - \alpha x_0) \cos(w_0 t) \\
& + q_0 \mathcal{E} \left[ \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2) x_{0nm} \cos(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}}) (\cos w_{nm} t) - 3nmy_{0nm} \sin(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}}) \cos(w_{nm} t) \right) \right. \\
& + \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2 - h^2) x'_{0nm} \cos(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}} + \varphi_0) \cos(w'_{nm} t) \right. \\
& \left. \left. - 3nmy'_{0nm} \sin(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}} + \varphi_0) \cos(w'_{nm} t) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-g_0 y_0 w_0 + \alpha x_0) \sin(w_0 t) \tag{49} \\
& + q_0 \mathcal{E} \left[ \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2) y_{0nm} \cos(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}}) (-\sin(w_{nm} t)) + 3nm x_{0nm} \sin(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}}) (-\sin(w_{nm} t)) \right) \right. \\
& + \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2 - h^2) y'_{0nm} \cos(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}} + \varphi_0) (-\sin(w'_{nm} t)) \right. \\
& \left. \left. + 3nm x'_{0nm} \sin(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}} + \varphi_0) (-\sin(w'_{nm} t)) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (g_0 y_0 w_0 - \alpha x_0) \cos(\varphi_0 - w_0 t) + \\
& q_0 \mathcal{E} \left[ \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2) x'_{0nm} \cos(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}} - \varphi_0) \cos(w'_{nm} t) - 3nmy'_{0nm} \sin(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}} + \varphi_0) \cos(w'_{nm} t) \right) + \right. \\
& \left. \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2 - h^2) x_{0nm} \cos(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}}) (\cos w_{nm} t) - 3nmy_{0nm} \sin(\vec{k} \overrightarrow{r_{nm}}) \cos(w_{nm} t) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (\dot{g}_0 \dot{y}_0 \dot{w}_0 - \alpha \dot{y}_0) \sin(\varphi_0 - \dot{w}_0 t) \\
& + q_0 \varepsilon \left[ \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2) y'_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm} + \varphi_0) (-\sin(w'_{nm} t)) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3nm x'_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm} + \varphi_0) (-\sin(w'_{nm} t)) \right) \right. \\
& \left. + \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2 - h^2) y_{0nm} \cos(\vec{k} \vec{r}_{nm}) (-\sin(w_{nm} t)) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3nm x_{0nm} \sin(\vec{k} \vec{r}_{nm}) (-\sin(w_{nm} t)) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

Используя четность/нечетность функций можно записать (в установившемся режиме):

$$\begin{cases} \cos(w_{nm} t) = \cos(q_{nm} p_{nm} w t) = \cos(w t); \\ \sin(w_{nm} t) = \sin(q_{nm} p_{nm} w t) = q_{nm} p_{nm} \sin(w t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(w_0 t) = \cos(q_0 p_0 w t) = \cos(w t); \\ \sin(w_0 t) = \sin(q_0 p_0 w t) = q_0 p_0 \sin(w t); \end{cases} \quad (51)$$

Тогда система уравнений (50) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& g_0 y_0 q_0 p_0 w - \alpha x_0 \\
& + q_0 \varepsilon \left[ \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2) x_{0nm} \cos(k_x dn + k_y dm) - 3nm y_{0nm} \sin(k_x dn + k_y dm) \right) \right. \\
& + \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2 - h^2) x'_{0nm} \cos(k'_x dn + k'_y dm + \varphi_0) \right. \\
& \left. \left. - 3nm y'_{0nm} \sin(k'_x dn + k'_y dm + \varphi_0) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_0 x_0 q_0 p_0 w + \alpha y_0 \\
& + p_0 \varepsilon \left[ \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2) y_{0nm} (-q_{nm} p_{nm}) \cos(k_x dn + k_y dm) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3nm x_{0nm} q_{nm} p_{nm} \sin(k_x dn + k_y dm) \right) \right. \\
& + \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2 - h^2) y'_{0nm} (-q'_{nm} p'_{nm}) \cos(k'_x dn + k'_y dm + \varphi_0) \right. \\
& \left. \left. - 3nm x'_{0nm} q'_{nm} p'_{nm} \sin(k'_x dn + k'_y dm + \varphi_0) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_0 y_0 q_0 p_0 w \cos \varphi_0 - \alpha x_0 \cos \varphi_0 \\
& + q_0 \varepsilon \left[ \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2) x'_{0nm} \cos(k'_x dn + k'_y dm) \cos \varphi_0 \right. \right. \\
& \left. \left. - 3nm y_{0nm} \cos \varphi_0 \sin(k'_x dn + k'_y dm) \right) \right. \\
& \left. + \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \left( (2m^2 - n^2 - h^2) x_{0nm} \cos(k_x dn + k_y dm) - 3nm y_{0nm} \sin(k_x dn + k_y dm) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \acute{g}_0 \acute{x}_0 \acute{q}_0 \acute{p}_0 w \cos \varphi_0 + \acute{\alpha} y_0 \cos \varphi_0 + \acute{p}_0 \varepsilon \left[ \sum \sum \frac{q'_{nm}}{(n^2+m^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2) y'_{0nm} (-q'_{nm} p'_{nm}) \cos(k'_x dn + k'_y dm + \varphi_0) \cos \varphi_0 - \right. \right. \\
& \left. \left. 3nm x'_{0nm} q'_{nm} p'_{nm} \cos \varphi_0 \sin(k'_x dn + k'_y dm + \varphi_0) \right) + \sum \sum \frac{q_{nm}}{(n^2+m^2+h^2)^{5/2}} \left( (2n^2 - m^2 - h^2) y_{0nm} (-q_{nm} p_{nm}) \cos(k_x dn + \right. \right. \\
& \left. \left. k_y dm) - 3nm x_{0nm} q_{nm} p_{nm} \sin(k_x dn + k_y dm) \right) \right] = 0 \tag{52}
\end{aligned}$$

Рассмотрим далее частную ситуацию, когда меняются диски только двух сортов, причем чередуются они в каждом слое в шахматном порядке (см. рис. 13). Далее введем диск определенного свойства, для него можно записать следующее уравнение (52):

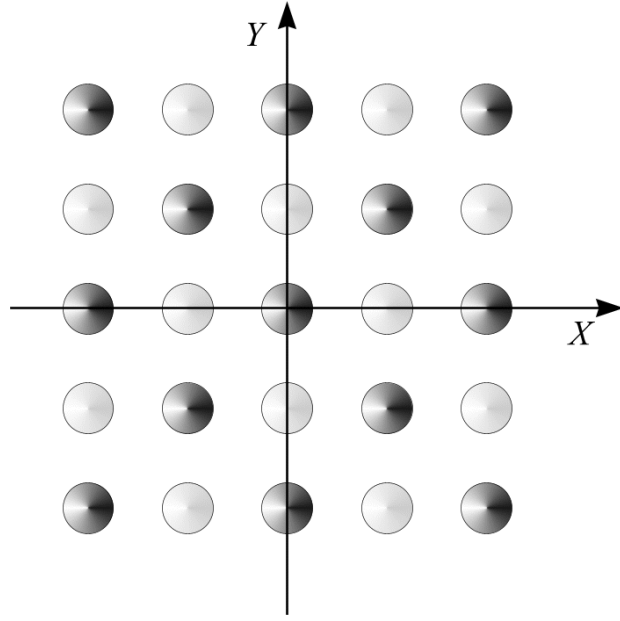


Рис. 13. Диски двух сортов, которые меняются в шахматном порядке.

$$S_{\text{ч}}^{(x)} = 4 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{2m^2 - n^2}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \cos(k_x dn) \cos(k_y dm);$$

$n + m$  – четная;  
 $n^2 + m^2 \neq 0$ ;

$$S_{\text{н}}^{(x)} = 4 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{2m^2 - n^2}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \cos(k_x dn) \cos(k_y dm);$$

$n + m$  – нечетная;  
 $n^2 + m^2 \neq 0$ ;

$$S_{\text{ч}}^{(x)} = 4 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{2m^2 - n^2}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \cos(k_x dn) \cos(k_y dm);$$

$n + m$  – четная;  
 $n^2 + m^2 \neq 0$ ;

$$S_{\text{н}}^{(x)} = 4 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{2m^2 - n^2}{(n^2 + m^2)^{5/2}} \cos(k_x dn) \cos(k_y dm);$$

$n + m$  – нечетная;  
 $n^2 + m^2 \neq 0$ ;

$$Q_{\text{ч}}^{(x)} = 4 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{2m^2 - n^2 - h^2}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \cos(k_x dn) \cos(k_y dm);$$

$n + m$  – четная;

$$Q_{\text{н}}^{(x)} = 4 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{2m^2 - n^2 - h^2}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \cos(k_x dn) \cos(k_y dm);$$

$n + m$  – нечетная;

$$Q_{\text{ч}}^{(x)} = 4 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{2m^2 - n^2 - h^2}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \cos(k_x dn) \cos(k_y dm);$$

$n + m$  – четная;

$$Q_{\text{н}}^{(x)} = 4 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{2m^2 - n^2 - h^2}{(n^2 + m^2 + h^2)^{5/2}} \cos(k_x dn) \cos(k_y dm);$$

$n + m$  – нечетная;

Тогда система уравнений принимает вид:

$$g_0 y_0 q_0 p_0 w - \alpha x_0 + x_0 \varepsilon S_{\text{ч}}^{(x)} + q_0 q_{00} x_{00} \varepsilon S_{\text{н}}^{(x)} + x_0 \cos \varphi_0 \varepsilon Q_{\text{ч}}^{(x)} + q_0 q_{00} x_{00} \cos \varphi_0 \varepsilon Q_{\text{н}}^{(x)} = 0;$$

$$-g_0 x_0 q_0 p_0 w + \alpha y_0 - y_0 \varepsilon S_{\text{ч}}^{(y)} - p_0 p_{00} y_{00} \varepsilon S_{\text{н}}^{(y)} - y_0 \cos \varphi_0 \varepsilon Q_{\text{ч}}^{(y)} - p_0 p_{00} y_{00} \cos \varphi_0 \varepsilon Q_{\text{н}}^{(y)} = 0;$$

И для соседнего диска:

$$g_{00} y_{00} q_{00} p_{00} w - \alpha x_{00} + x_{00} \varepsilon S_{\text{ч}}^{(x)} + q_0 q_{00} x_0 \varepsilon S_{\text{н}}^{(x)} + x_{00} \cos \varphi_0 \varepsilon Q_{\text{ч}}^{(x)} + q_0 q_{00} x_0 \cos \varphi_0 \varepsilon Q_{\text{н}}^{(x)} = 0; \quad (54)$$

$$-g_{00} x_{00} q_{00} p_{00} w + \alpha y_{00} - y_{00} \varepsilon S_{\text{ч}}^{(y)} - p_0 p_{00} y_0 \varepsilon S_{\text{н}}^{(y)} - y_{00} \cos \varphi_0 \varepsilon Q_{\text{ч}}^{(y)} - p_0 p_{00} y_0 \cos \varphi_0 \varepsilon Q_{\text{н}}^{(y)} = 0;$$

Для второго слоя всё тоже самой, поэтому рассмотрим только систему (54). Здесь  $x_{00}$  и  $y_{00}$  – амплитуды в диске другого сорта. Перегруппируем слагаемые по признаку амплитуд (диски одного сорта имеют одинаковые амплитуды):

$$\begin{aligned}
& g_0 y_0 q_0 p_0 w + x_0 \left( -\varepsilon + \varepsilon \left( S_{\text{ч}}^{(x)} + \cos \varphi_0 Q_{\text{ч}}^{(\dot{x})} \right) \right) \\
& \quad + q_0 q_{00} x_{00} \varepsilon \left( S_{\text{н}}^{(x)} + Q_{\text{н}}^{(\dot{x})} \cos \varphi_0 \right) = 0; \\
& g_0 y_0 q_0 p_0 w + y_0 \left( -\varepsilon + \varepsilon \left( S_{\text{ч}}^{(y)} + \cos \varphi_0 Q_{\text{ч}}^{(\dot{y})} \right) \right) + p_0 p_{00} y_{00} \varepsilon \left( S_{\text{н}}^{(y)} + \right. \\
& \quad \left. Q_{\text{н}}^{(\dot{y})} \cos \varphi_0 \right) = 0; \tag{55} \\
& g_{00} y_{00} q_{00} p_{00} w + x_{00} \left( -\varepsilon + \varepsilon \left( S_{\text{ч}}^{(x)} + \cos \varphi_0 Q_{\text{ч}}^{(\dot{x})} \right) \right) \\
& \quad + q_0 q_{00} x_0 \varepsilon \left( S_{\text{н}}^{(x)} + Q_{\text{н}}^{(\dot{x})} \cos \varphi_0 \right) = 0; \\
& g_{00} y_{00} q_{00} p_{00} w + y_{00} \left( -\varepsilon + \varepsilon \left( S_{\text{ч}}^{(y)} + \cos \varphi_0 Q_{\text{ч}}^{(\dot{y})} \right) \right) \\
& \quad + p_0 p_{00} y_0 \varepsilon \left( S_{\text{н}}^{(y)} + Q_{\text{н}}^{(\dot{y})} \cos \varphi_0 \right) = 0;
\end{aligned}$$

Или в более простом виде:

$$\begin{aligned}
& g_0 y_0 q_0 p_0 w + x_0 A_x + q_0 q_{00} x_{00} B_x = 0; \\
& g_0 y_0 q_0 p_0 w + y_0 A_y + p_0 p_{00} y_{00} B_y = 0; \tag{56} \\
& g_{00} y_{00} q_{00} p_{00} w + x_{00} A_x + q_0 q_{00} x_0 B_x = 0; \\
& g_{00} y_{00} q_{00} p_{00} w + y_0 A_y + p_0 p_{00} y_0 B_y = 0;
\end{aligned}$$

Здесь введем обозначения:

$$\begin{aligned}
A_x &= -\varepsilon + \varepsilon \left( S_{\text{ч}}^{(x)} + Q_{\text{ч}}^{(\dot{x})} \cos \varphi_0 \right); \\
A_y &= -\varepsilon + \varepsilon \left( S_{\text{ч}}^{(y)} + Q_{\text{ч}}^{(\dot{y})} \cos \varphi_0 \right); \tag{57} \\
B_x &= \varepsilon \left( S_{\text{н}}^{(x)} + Q_{\text{н}}^{(\dot{x})} \cos \varphi_0 \right); \\
B_y &= \varepsilon \left( S_{\text{н}}^{(y)} + Q_{\text{н}}^{(\dot{y})} \cos \varphi_0 \right);
\end{aligned}$$

Заметим, что штрих означает зависимость коэффициента от проекций волнового вектора соседней плоскости. Построим определитель на коэффициентах уравнений (56). Индексами 1, 2 переобозначим два соседних элемента:

$$\begin{pmatrix} A_x & g_1 w & q_1 q_2 B_x & 0 \\ g_1 w & A_y & 0 & p_1 p_2 B_y \\ q_1 q_2 B_x & 0 & A_x & g_2 w \\ 0 & p_1 p_2 B_y & g_2 w & A_y \end{pmatrix} \quad (58)$$

Здесь мы вернулись к формуле (48). Определитель должен быть приравнен к нулю:

$$\begin{aligned} & A_x(A_x A_y^2 - A_x B_y^2 - A_y g_2^2 w^2) - g_1 w(g_1 w A_x A_y + g_2 w q_1 q_2 p_1 p_2 B_x B_y - \\ & g_1 g_2^2 w^3) + q_1 q_2 B_x(q_1 q_2 B_x B_y^2 - p_1 p_2 B_y g_1 g_2 w^2 - q_1 q_2 B_x A_y^2) = A_x^2 A_y^2 - \\ & A_x^2 B_y^2 - A_x A_y g_2^2 w^2 - A_x A_y g_1^2 w^2 - g_1 g_2 w^2 q_1 q_2 p_1 p_2 B_x B_y + g_1^2 g_2^2 w^4 + B_x^2 B_y^2 - \\ & g_1 g_2 w^2 q_1 q_2 p_1 p_2 B_x B_y - B_x^2 A_y^2 = w^4 g_1^2 g_2^2 + w^2(A_x A_y(g_1^2 + g_2^2) - \\ & 2g_1 g_2 q_1 q_2 p_1 p_2 B_x B_y) + (A_x^2 - B_y^2)(A_x^2 - B_y^2) = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь мы имеем биквадратное уравнение, решением которого является выражение:

$$w^2 = \frac{1}{2a} [b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]; \quad (60)$$

где:

$$\begin{aligned} a &= g_1^2 g_2^2; \\ b &= A_x A_y (g_1^2 + g_2^2) - 2g_1 g_2 q_1 q_2 p_1 p_2 B_x B_y; \\ c &= (A_x^2 - B_y^2)(A_x^2 - B_y^2); \end{aligned} \quad (28)$$

### 3.1 Частные случаи

1. Пусть имеется только один слой ( $\cos \varphi_0 = 0$ ) и нет взаимодействия между элементами ( $\mathcal{E} = 0$ ); В этом случае из выражений (57) следует  $A_x = A_y = \mathfrak{a}$ ;  $B_x = B_y = 0$ ; Следовательно:  $a = g_1^2 g_2^2$ ;  $b = \mathfrak{a}^2(g_1^2 + g_2^2)$ ;  $c = \mathfrak{a}^4$ ;

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{1}{2g_1^2 g_2^2} \left[ \mathfrak{a}^2 (g_1^2 + g_2^2) \pm \sqrt{\mathfrak{a}^4 (g_1^2 + g_2^2)^2 - 4\mathfrak{a}^4 g_1^2 g_2^2} \right] = \\ &= \mathfrak{a}^2 \left[ \frac{g_1^2 + g_2^2}{2g_1^2 g_2^2} \pm \sqrt{\left( \frac{g_1^2 - g_2^2}{2g_1^2 g_2^2} \right)^2} \right] = \mathfrak{a}^2 \left[ \frac{g_1^2 + g_2^2}{2g_1^2 g_2^2} \pm \frac{g_1^2 - g_2^2}{2g_1^2 g_2^2} \right] = \left\{ \frac{\mathfrak{a}^2}{g_1^2}; \frac{\mathfrak{a}^2}{g_2^2} \right\}; \end{aligned} \quad (61)$$

Если внешнего поля нет, то  $g_1 = g_2$  и частота движения вихря, оказывается, многократно вырождена. Если поле есть, и полярности элементов различается, то  $g_1 = g(1 - ph)$ ;  $g_2 = g(1 + ph)$ ; мы будем иметь две частоты прецессии кора вихря от двух независимых элементов.

2. Рассмотрим случай ( $\cos \varphi_0 = 0$ ), то имеется взаимодействие ( $\varepsilon \neq 0$ ). В этом случае параметров (57) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 A_x &= -\varkappa + \varepsilon S_{\text{ч}}^{(x)}; & A_y &= -\varkappa + \varepsilon S_{\text{ч}}^{(y)}; & B_x &= \varepsilon S_{\text{н}}^{(x)}; & B_y &= \varepsilon S_{\text{н}}^{(y)}; \\
 a &= g_1^2 g_2^2; & b &= (g_1^2 + g_2^2) (\varkappa + \varepsilon S_{\text{ч}}^{(x)}) (\varkappa + \varepsilon S_{\text{ч}}^{(y)}) + \\
 & & & 2g_1 g_2 q_1 q_2 p_1 p_2 \varepsilon^2 S_{\text{н}}^{(x)} S_{\text{н}}^{(y)}; \\
 c &= \left( (\varkappa - \varepsilon S_{\text{ч}}^{(x)})^2 - \varepsilon^2 S_{\text{н}}^{(x)2} \right) \left( (\varkappa - \varepsilon S_{\text{ч}}^{(y)})^2 - \varepsilon^2 S_{\text{н}}^{(y)2} \right); \quad (62)
 \end{aligned}$$

Некоторые частные случаи соотношения между магнитными параметрами приведены на рисунках ниже.

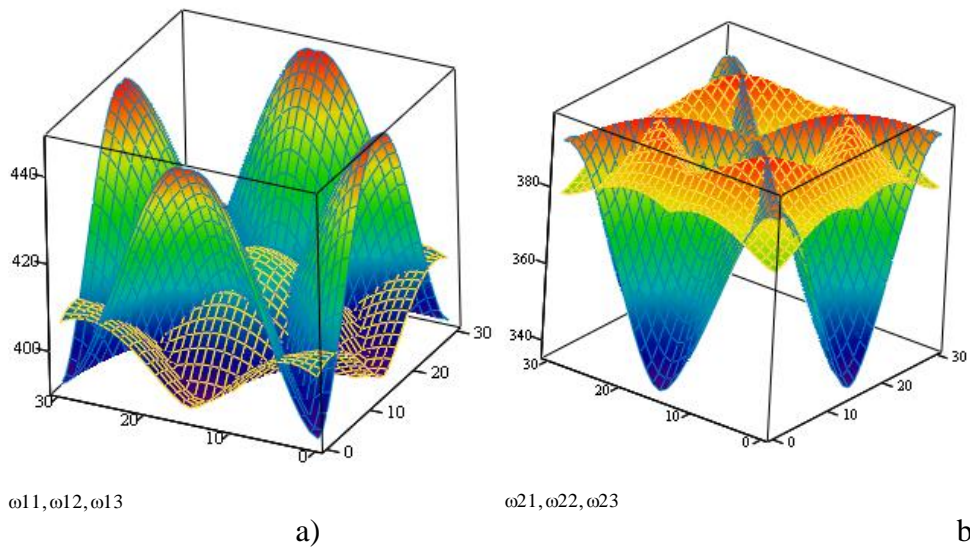


Рис. 14. а) – “первые” моды для случаев  $q_1 = q_2 = 1$ , и следующих пар полярностей: (1,1), (1,-1), (-1,-1). Рисунок б) – ”вторые” моды для тех же случаев хиральностей и полярностей. Важно заметить, что поверхности зеркальны по отношению друг к другу.



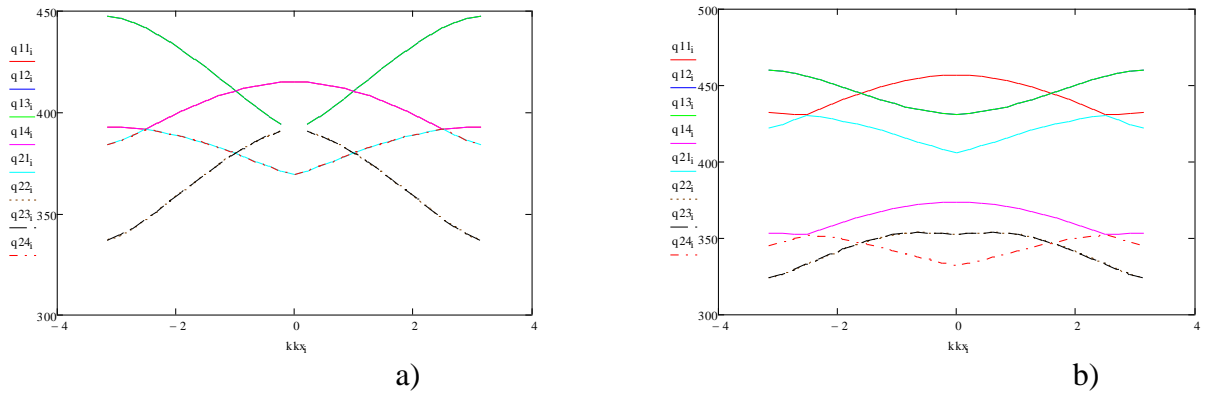


Рис.15. Дисперсионные кривые с данными рисунка 14 в сечении  $k_y = 0$ . Рисунок а) – в нулевом внешнем поле. Рисунок б) – включено перпендикулярное магнитное поле  $H = 0.1H_S$ . Очевидно, произошло снятие вырождения резонансных частот.

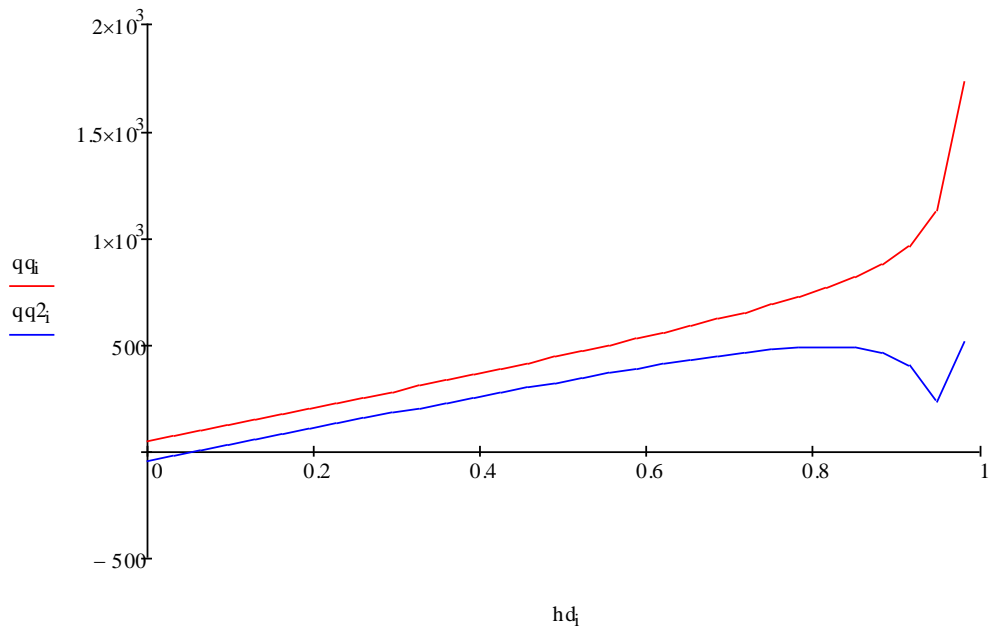


Рис. 16. Зависимость разности частот первой моды с полярностями (1,1) и второй моды с полярностями (-1,-1) от величины магнитного поля – красная кривая, и синяя кривая – разность частот первой моды с полярностями (1,1) и второй моды с полярностями (-1,-1).

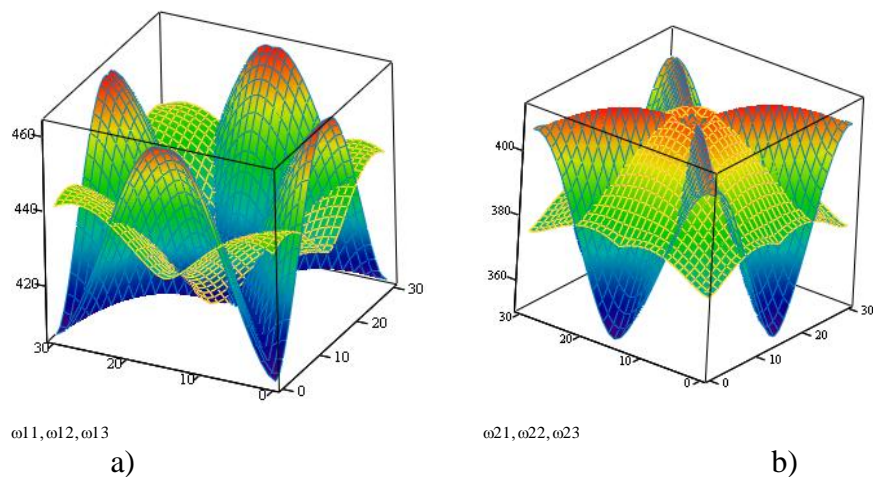


Рис. 17. а) – “первые” моды для случаев  $q_1 = q_2 = 1$ , и следующих пар полярностей: (1,1), (1,-1), (-1,-1). Рисунок б) – ”вторые” моды для тех же случаев хиральностей и полярностей.

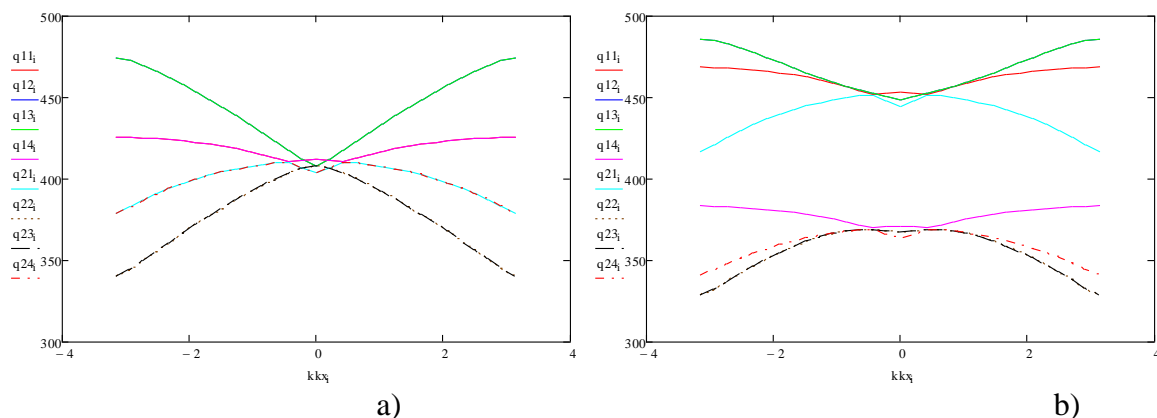


Рис.18. Дисперсионные кривые с данными рисунка 17 в сечении  $k_y = 0$  и  $k_x = k'_x$ . Рисунок а) – в нулевом внешнем поле. Рисунок б) – включено перпендикулярное магнитное поле  $H = 0.1H_c$ . Очевидно, расщепление резонансных частот более выражено, чем в случае отсутствия взаимодействия между слоями.

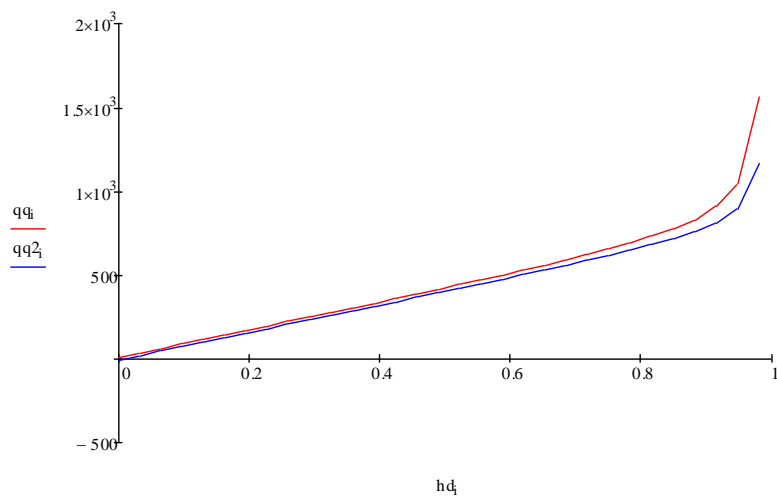
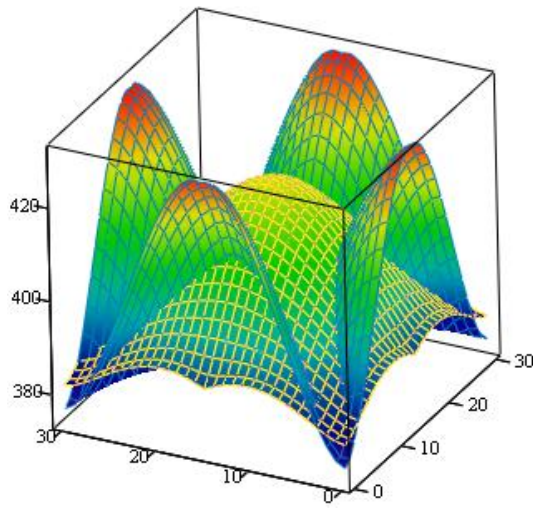
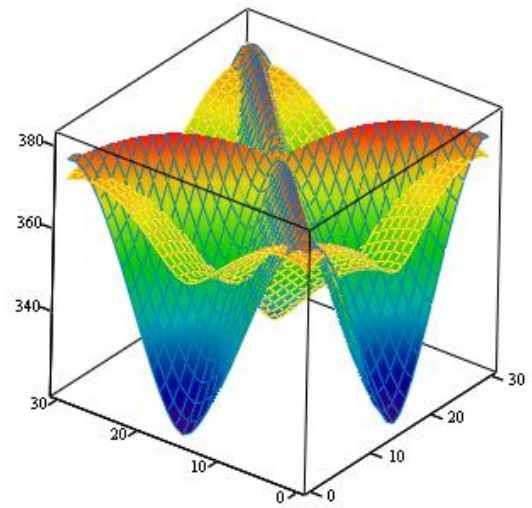


Рис. 19. Зависимость разности частот первой моды с полярностями (1,1) и второй моды с полярностями (-1,-1) от величины магнитного поля – красная кривая, и синяя кривая – разность частот первой моды с полярностями (1,1) и второй моды с полярностями (-1,-1).



$\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$

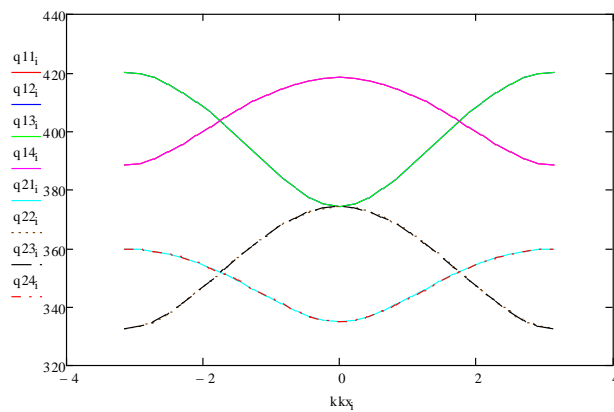
a)



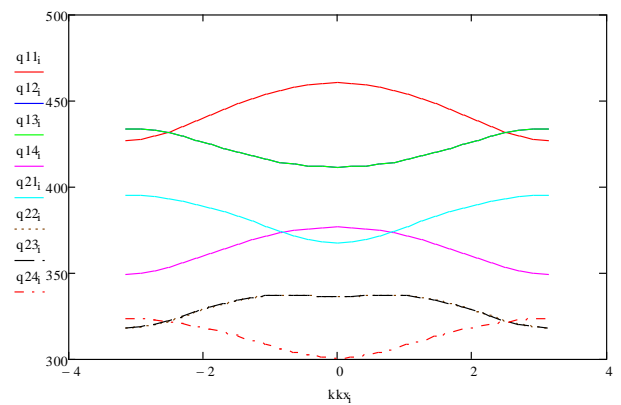
$\omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}$

b)

Рис. 20. а) – “первые” моды для случаев  $q_1 = q_2 = 1$ , и следующих пар полярностей: (1,1), (1,-1), (-1,-1). Рисунок б) – ”вторые” моды для тех же случаев хиральностей и полярностей.



a)



b)

Рис.21. Дисперсионные кривые с данными рисунка 20 в сечении  $k_y = 0$  и  $k_x = k_x'$ .

Рисунок а) – в нулевом внешнем поле. Рисунок б) – включено перпендикулярное магнитное поле  $H = 0.1H_S$ . Очевидно, расщепление резонансных частот более выражено, чем в случае отсутствия взаимодействия между слоями.

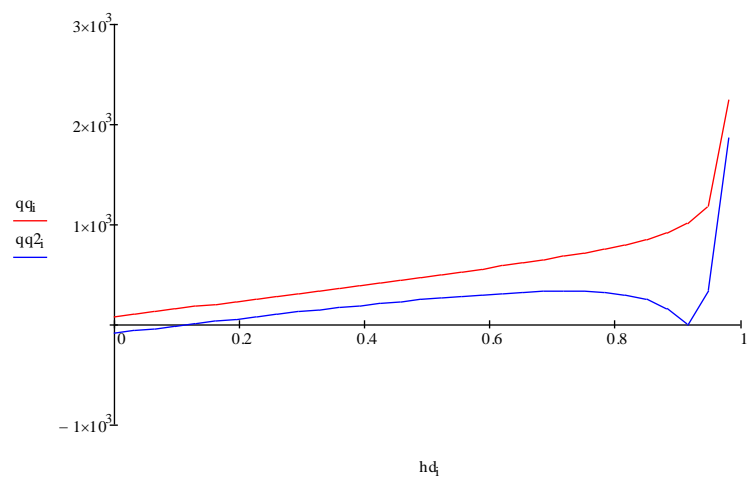


Рис. 22. Зависимость разности частот первой моды с полярностями (1,1) и второй моды с полярностями (-1,-1) от величины магнитного поля – красная кривая, и синяя кривая – разность частот первой моды с полярностями (1,1) и второй моды с полярностями (-1,-1).

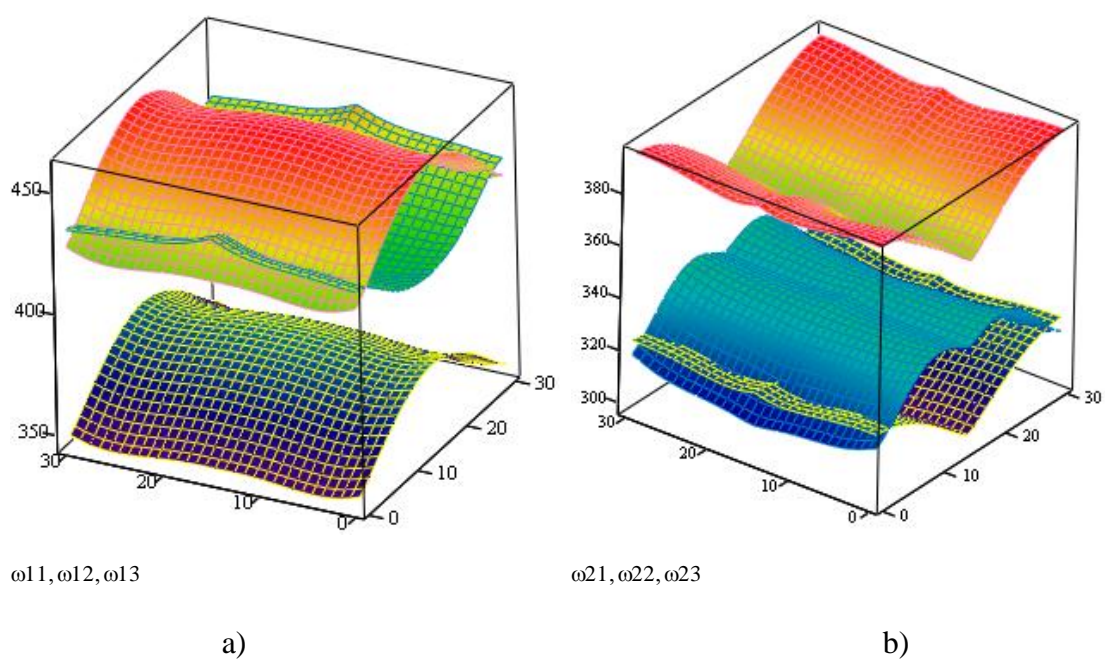


Рис. 23. а) – “первые” моды для случаев  $q_1 = q_2 = 1$ , и следующих пар полярностей: (1,1), (1,-1), (-1,-1). б) – ”вторые” моды для тех же случаев хиральностей и полярностей. Важно, колебания во втором слое незначительно корректируют частоты в законах дисперсии первого слоя.

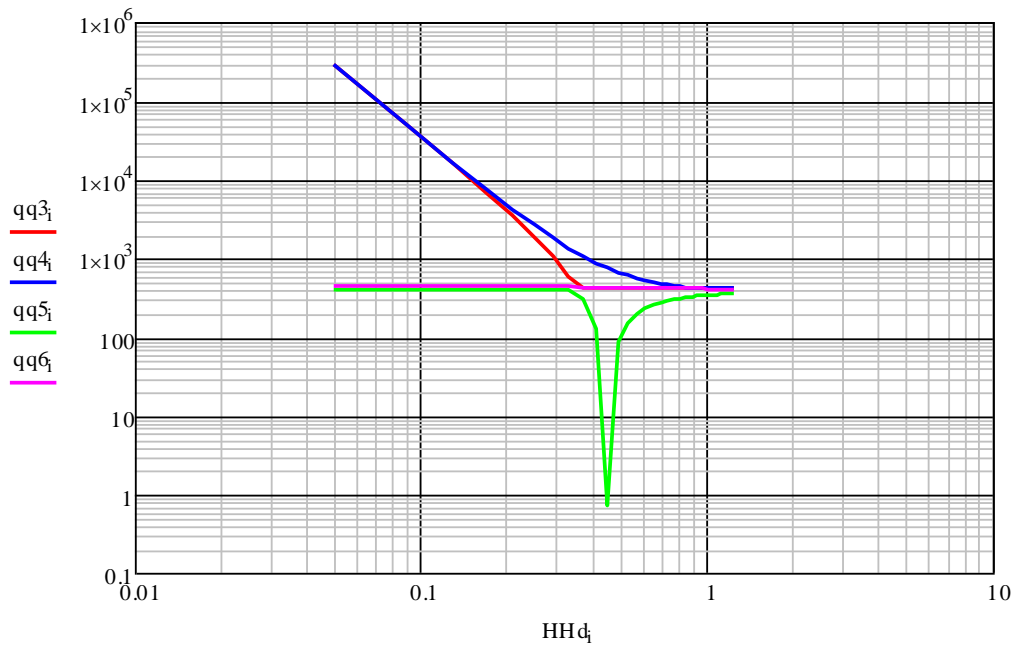


Рис. 24. Зависимость частот первой и второй мод от расстояния между слоями в логарифмическом масштабе для одинаковых полярностей, но различных параметров  $C = \pm 1$ .

### Выводы к главе III

1. При включении внешнего магнитного поля происходит снятие вырождения резонансных частот в длинноволновом пределе;
2. В двухслойной системе эффект расщепления более выражен, чем в однослойной;
3. В случае длинноволновых колебаний хотя бы по одному направлению влияние взаимодействия на частоты ослаблено.

## **ГЛАВА IV ПЕРСПЕКТИВЫ ТЕМАТИКИ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ КАК ОБЛАСТЬ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ**

Основная цель образования в настоящее время - это не передача ученикам знаний в готовом виде, а создание условий для эффективной деятельности обучающихся в процессе обучения. Это, в свою очередь, позволяет учить детей ставить цели, самостоятельно мыслить, а также выдвигать гипотезы и выбирать подходящие методы, то есть провести исследование и освоить методы исследовательской деятельности. Поэтому появляется необходимость использовать научно-исследовательскую деятельность учащихся в работе каждого учителя.

Исследовательской деятельностью является творческий процесс совместной деятельности учителя и ученика по поиску решения неизвестного, результатом которой является формирование исследовательского стиля мышления и мировоззрения в целом.

Предмет физика является одним из ведущих среди других предметов, где можно успешно применять элементы исследования. При изучении материала по предмету перед учащимися необходимо ставить познавательную задачу, которая, в свою очередь, выводит ученика за пределы существующих у него знаний. При этом в проблеме есть что-то неизвестное, требующее поиска, мыслительной деятельности, творчества. Чтобы включить познавательную деятельность учащихся и направить её на решение возникшей проблемы исследовательского характера, в ней должны быть заданы отправные данные для размышления, для творческого поиска.

Важно, чтобы исследовательская задача содержала в себе некоторый психологический элемент, заключающийся в новизне и яркости фактов, в необычности познавательной задачи с тем, чтобы возбуждать у школьников интерес и стремление к исследовательскому поиску.

Исследовательская деятельность у учащихся способствует:

1. Развитию интереса, расширению и актуализации знаний по физике;

2. Развитию интеллектуальной инициативы учащихся в процессе освоения основных и дополнительных образовательных программ;
3. Созданию предпосылок для развития научного образа мышления;
4. Освоению творческого подхода к любому виду деятельности;
5. Становлению сферы содержательного предметного общения внутри детского коллектива, между учащимся, педагогами;
6. Обучению информационным технологиям и работе со средствами коммуникации;
7. Формированию развивающей образовательной среды для ребенка;
8. Профессиональному самоопределению учащихся;
9. Получению предпрофильной подготовки;
10. Содержательной организации свободного времени учащихся.

При организации учебной деятельности обучающихся учитель должен иметь в виду, что у него имеется огромный выбор приемов и методов организации исследования у учащихся. Учитель может планировать исследования, как фрагменты уроков, так и проводить уроки-исследования, давать домашние задания исследовательского характера и организовывать систему занятий по исследованию определённой темы, в которой у учащегося есть проблемы, с текущими консультациями, промежуточным контролем и конечным результатом - защитой реферата или проекта по изученной проблеме.

Без эксперимента не возможно рациональное обучение физике; одно словесное обучение физике в основном приводит к формализму и механическому заучиванию. Мысли учителя должны быть направлены на то, чтобы учащиеся видели опыт и проделывали его сами, видели прибор в руках преподавателя и держали его в своих собственных руках.

Систематическое выполнение учащимися экспериментальных лабораторных работ способствует более эффективному восприятию материала, повышению интереса к физике, развитию любознательности, прививанию ценных практических умений и навыков. Экспериментальные

задания служат эффективным средством повышения самостоятельности и инициативы учащихся, что, в свою очередь, благоприятно сказывается на учебной деятельности в целом, а также вызывает интерес к исследовательской деятельности.

Проведение опытов и наблюдений в домашних условиях это прекрасное дополнение ко всем видам классных практических работ. Домашней исследовательской работой является простейший самостоятельный эксперимент, выполняющийся учащимися дома, вне школы, без какого-либо контроля со стороны учителя за ходом выполнения практической работы. При выполнении практического задания дома школьники выполняют всё самостоятельно, при этом занимаются творческой деятельностью, что благоприятно сказывается на их развитии.

Большие возможности для развития мышления учащихся и их творческих способностей дает специально организованная внеклассная работа. Учебные исследования, проводимые учащимися во внеурочное время, позволяют осуществить свободный поиск нужной информации; регулярные наблюдения и измерения (при наличии соответствующего оборудования и материалов) формируют умения учащихся самостоятельно работать. Выполнение комплексных заданий позволяет всесторонне изучить исследуемый объект, приводит к осознанному пониманию единства и общих закономерностей природы. Самостоятельные исследования и наблюдения побуждают учащихся мыслить масштабно, искать причинно-следственные связи в изучаемых явлениях природы, делать самостоятельные выводы и обобщения, использовать результаты исследований на практике. В организации исследовательской работы большое значение имеет отбор учебного материала для всех исследований, который должен строго соответствовать основным принципам дидактики: научности, систематичности, последовательности, доступности, наглядности, индивидуальному подходу к учащимся в условиях коллективной работы, развивающему обучению, связи теории с практикой.



В настоящее время важна не передача ученикам знаний в готовом виде, а создание условий для эффективной деятельности обучающихся в процессе обучения. Это, в свою очередь, позволяет учить детей ставить цели, самостоятельно мыслить, а также выдвигать гипотезы и выбирать подходящие методы, то есть провести исследование и освоить методы исследовательской деятельности. Поэтому появляется необходимость использовать научно-исследовательскую деятельность учащихся в работе каждого учителя.

Представленная тематика частично реализована в школе 145 в рамках Краевого проекта по развитию инженерного образования (факультатив, цикл лекций, лабораторные работы на уроках информатики по моделированию колебаний).

Анализ деятельности показал:

1. Тема “Связанные колебательные движения” актуальна и перспективна в качестве части внеурочной деятельности учителя по руководству деятельности учащихся.
2. Привлечение учащихся к исследовательской деятельности позволяет вооружить их методами познания, сформировать познавательную самостоятельность.

#### **Выводы к главе IV**

1. Деятельность по теме связанные колебательные движения актуальна и перспективна в качестве части внеурочной деятельности учителя по руководству деятельности учащихся.

2. Привлечение учащихся к исследовательской деятельности позволяет вооружить их методами познания, сформировать познавательную самостоятельность, в результате чего ученики, получая новые знания и овладевая конкретными умениями, учатся оценивать себя, осмысливать мир и себя в этом мире.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были исследованы особенности коллективного движения связанных систем с различающимися параметрами и исследована возможность включения темы о связанных колебаниях в содержание факультативных занятий по физике в профильной школе.

В работе были решены задачи взаимодействующих систем:

- 1) Два одномерных связанных маятника с различающимися параметрами, которые можно рассматривать как учебные в частных проявлениях.
- 2) Актуальная научная задача о двухслойном массиве взаимодействующих магнитных нанодисков, как пример важной роли взаимодействия в магнетизме.
- 3) Исследованы некоторые особенности коллективного движения связанных систем. В системе двух осцилляторов обнаружено явление расщепления резонансной частоты при увеличении жесткости связи даже при слабом затухании.
- 4) В магнитной двухслойной системе магнитостатически - взаимодействующих нанодисков было исследовано влияние межслойного взаимодействия на законы дисперсии.
- 5) Спектр неисследованных задач в рамках настоящей тематики может быть вынесен на исследовательскую работу с талантливыми школьниками

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Патрин К. Г., Яриков С. А., Яковчук В. Ю., Патрин Г. С., Саломатов Ю. П., Плеханов В. Г., Магнитный резонанс в пленках FeNi/Bi/FeNi, Письма в ЖТФ 2015, 41, с. 48-54.
2. Патрин Г. С., Шиян Я. Г., Патрин К. Г., Юркин Г. Ю., Синтез и магнитные свойства пленок [(Co)<sub>2</sub> soft/NiP/(Co)<sub>2</sub> hard/NiP]<sub>n</sub>, Решетневские чтения 2015, 1, с. 539-541.
3. Orlov V.A., Kim P.D., On Low-frequency Oscillations of a Bloch-point in a Nanodisk, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2013, т. 6, № 1, pp. 86–96.
4. V. S. Prokopenko, P. D. Kim, V.A. Orlov, B.V. Vasiliev, D. K. Vovk, S.E. Zatsepilin, R.Yu. Rudenko, Lorentz Microscopy of Permalloy Film Microdots, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2013, т. 6, №2, pp. 262–269.
5. Ким П.Д., Орлов В.А., Прокопенко В.С., Замай С.С., Принц В.Я., Руденко Р.Ю., Руденко Т.В., О низкочастотном резонансе магнитных вихрей в микро- и нанопятнах, ФТТ, 2015, т.57, № 1, с. 29-36.
6. Ким П.Д., Орлов В.А., Руденко Р.Ю., Прокопенко В.С., Орлова И.Н., Замай С.С., "Коллективная динамика магнитных вихрей в массиве взаимодействующих наноточек", Письма в ЖЭТФ, 2015, т.101, вып. 8, с. 620-626.
7. Ким П.Д., Прокопенко В.С., Орлов В.А., Руденко Р.Ю., Руденко Т.В., Васильев Б.В., Живаев В.П., Ким Т.А., Магнитные структуры пермалловых пленочных микропятен, Доклады Академии наук, сер. Физика, 2015, т. 463, вып. 1, с. 28-31.
8. Замай С.С., Прокопенко В.С., Замай А.С., Денисенко В.В., Ким П.Д., Орлов В.А., Замай Г.С., Иванченко Т.И., Замай Т.Н., Функционализированные аптамерами магнитные нанодиски для

нанохирургии опухолей, Сибирское медицинское обозрение, 2015. №6, с. 48-54.

9. P.D. Kim, V.A. Orlov, R.Yu. Rudenko, V.S. Prokopenko, I.N. Orlova, A.V.Kobyakov, On the resonant state of magnetization in array of interacting nanodots, JMMM 440C, 2017, pp. 170-173. (10.1016/j.jmmm.2016.12.125).
10. Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев, Линейные колебания и волны ([http://window.edu.ru/resource/890/52890/files/lin\\_study.pdf](http://window.edu.ru/resource/890/52890/files/lin_study.pdf))
11. Актуальные задачи педагогики (III): материалы междунар. заоч. науч. конф. (г. Чита, февраль 2013 г.). – Чита: Издательство Молодой ученый, 2013. – vi, 194 с.