МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт /факультет: Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

Калачева С.И.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема: **Методическая система изучения многочленов в школе и педагогическом вузе с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra**

Направление подготовки / специальность: 44.04.01 Педагогическое образование

Направленность образовательной программы: Информационные технологии в математическом образовании

Допускаю к защите:
Заведующий кафедрой
д.п.н., профессор Майер В.Р.

«___» _____2017г. __________
дата подпись

Руководитель магистерской программы
д.п.н., профессор Майер В.Р.

«___» _____2017г. __________
дата подпись

Научный руководитель
к.ф.-м.н., профессор Ларин С.В.

«___» _____2017г. __________
дата подпись

Обучающийся: Калачева С.И.

«___» _____2017г. __________
дата подпись

Красноярск, 2017

РЕФЕРАТ

Данная диссертация посвящена применению анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra к обучению школьников и студентов педагогического вуза алгебре многочленов. В работе построена методическая система, проведен анализ учебной литературы, нормативных документов, имеющегося опыта по проблеме исследования.

Объект исследования: Процесс обучения алгебре многочленов школьников и будущих учителей математики.

Предмет исследования: анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra в обучении алгебре многочленов школьников и будущих учителей математики.

Задачи исследования:

а) Обобщить и систематизировать имеющийся опыт по теме исследования.

б) Обосновать целесообразность использования компьютерных технологий в обучении математике школьников и студентов;

в) Выявить возможности применения анимационно-геометрического метода к обучению школьников и студентов - будущих учителей математики, алгебре многочленов;

в) Создать методическое обеспечение по теме «Многочлены» для школьников с использованием компьютерной среды GeoGebra;

г) Создать методическое обеспечение по теме «Многочлены» для студентов педагогических вузов с использованием компьютерной среды GeoGebra.

Методы исследования:

-анализ литературы;

-теоретический анализ и синтез;

-аналогия;

-обобщение;

-исследование.

Научная новизна дипломной работы: в применении возможностей компьютерной анимации GeoGebra к изучению многочленов.

Практическая значимость: готовая к внедрению методическая система обучения школьников и студентов педагогического вуза алгебре многочленов с использованием анимационно-геометрического метода на базе компьютерной среды GeoGebra.

Диссертации состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Диссертация содержит 113 страниц, содержит 22 рисунка, 3 таблицы, 1 приложение и 66 источников литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Перед образованием всегда стояла задача подготовки учащихся к жизни в качестве успешного члена общества. При этом образованию необходимо учитывать потребности общества. Данный уровень общественного развития характеризуется большим темпом роста технологий и компьютеризацией практически всех сфер жизнедеятельности. Это требует от современного выпускника школы, вуза умения быстро адаптироваться к изменениям, а значит, с одной стороны, уметь правильно оценивать сложившуюся ситуацию и свои возможности, планировать дальнейшие действия по самообучению, повышению своей квалификации и, с другой стороны, овладеть основами современных компьютерных технологий. Об этом же сказано в образовательных стандартах и концепции развития математического образования.

Представленные в данной работе исследования были направлены на внедрение в учебный процесс современных компьютерных технологий. Кроме требований, предъявляемых к качеству подготовки выпускника, необходимо учитывать и тот факт, что современный учебный процесс уже не мыслим без компьютерных технологий. В то время, когда практически каждый учащийся имеет доступ к персональному компьютеру и интернету, школьному учителю и преподавателю вуза невозможно ограничится лишь одним школьным учебником и меловой доской при проведении занятий. *Применение компьютеров в учебном процессе даст возможность повысить мотивацию учащихся к учебной деятельности, откроет учащимся доступ к гораздо большему объему информации, будет способствовать развитию самостоятельности в получении необходимых знаний, умений и навыков и поможет сформировать адекватную оценку своего уровня усвоения материала.*

Однако также необходимо помнить, что в стремлении использовать современные технологии нельзя их превращать в цель образовательного процесса и забывать про основные цели. Компьютерные технологии должны быть лишь средством достижения основного образовательного результата. Разумное их применение должно регулироваться используемыми методами и приемами обучения.

В связи со сказанным выше была выдвинута **гипотеза**: применение анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra в обучении школьников и студентов педагогического вуза теории многочленов повысит их мотивацию к изучению данного раздела математики, будет способствовать лучшему освоению основных алгоритмов и пониманию их места в теории многочленов и в математике в целом, а также способствовать сформированности таких компетенций, как:

- способность к самоорганизации и самообразованию;
- готовность решать исследовательские задачи;
- способность использовать современные методы и технологии обучения.

Цель исследования: разработать методическую систему обучения школьников и студентов педагогического вуза теме «Многочлены» с применением анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra .

Объект исследования: Процесс обучения алгебре многочленов школьников и будущих учителей математики.

Предмет исследования: анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra в обучении алгебре многочленов школьников и будущих учителей математики.

Задачи исследования:

а) Обобщить и систематизировать имеющийся опыт по теме исследования.

б) Обосновать целесообразность использования компьютерных технологий в обучении математике школьников и студентов;

в) Выявить возможности применения анимационно-геометрического метода к обучению школьников и студентов - будущих учителей математики, алгебре многочленов;

в) Создать методическое обеспечение по теме «Многочлены» для школьников с использованием компьютерной среды GeoGebra;

г) Создать методическое обеспечение по теме «Многочлены» для студентов педагогических вузов с использованием компьютерной среды GeoGebra.

Методы исследования:

-анализ литературы;

-теоретический анализ и синтез;

-аналогия;

-обобщение;

-исследование.

Научная новизна дипломной работы: в применении возможностей компьютерной анимации GeoGebra к изучению многочленов.

Практическая значимость: готовая к внедрению методическая система обучения школьников и студентов педагогического вуза алгебре многочленов с использованием анимационно-геометрического метода на базе компьютерной среды GeoGebra.

Глава 1. МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ИЗУЧЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ В ШКОЛЕ И ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ.

1.1. Что такое методическая система обучения.

В статье [60] анализируются различные походы к трактовке понятия «методическая система» в контексте развития современного образования и постдипломной подготовки учителя. Ключевые слова: методическая система, проектирование методической системы, современное образование, эффективное обучение

Характерной особенностью развития образования в настоящее время можно назвать системный подход ко всем сферам этой области человеческой деятельности. Так, например, новые общеобразовательные стандарты ориентируют учителя на системно-деятельностный подход в обучении. Это означает, что результаты обучения (личностные, познавательные и метапредметные) должны достигаться в комплексе, в неразрывной и взаимообусловленной связи на основе формирования универсальных учебных действий. Каждый учитель стремится создать и реализовать на практике свою методическую систему, главная цель которой обеспечить развитие участников образовательного процесса. Такая система должна учитывать социальный контекст развития общества и сферы образования с одной стороны, а с другой — обеспечивать формирование ценностного отношения учителя к непрерывному образованию и постоянному пополнению дефицита знаний, возникающего в быстро меняющемся мире.

Понятие «методическая система» (МС) рассматривалось многими исследователями, которые предлагали свое видение этой категории педагогической науки. Так, например, С. В. Казакова [33] подчеркивает, что данное понятие трактуется в науке по-разному: как концепция (М. В. Рыжаков), образовательная модель взаимосвязанных компонентов (В. М. Жучков), совокупность взаимосвязанных компонентов (С. И. Архангельский, Н. В. Кузьмина, А. М. Пышкало), сложное динамическое образование (Г. Г. Хамов), система обучения какому-либо предмету (Н. Н. Лобанова) и т. д. Интересным с нашей точки зрения является исследование Н. А. Черниковой [62], в работе которой анализируются определения, предложенные А. М. Пышкало, Г. И. Саранцевым, А. В. Могилевым, С. И. Архангельским, А. М. Новиковым и др. Различные подходы к определению понятия «МС», систематизированные в [33], приведены в табл. 1.

Таблица 1. Основные подходы к определению понятия МС [60]

№	Автор	Варианты определений (фрагменты)
Дидактический подход		
1.	Л. В. Занков [32]	Это система, в которой направляющую и регулирующую роль в организации образовательной системы выполняют дидактические принципы. Но уровень действенности дидактических принципов достаточно абстрактен, он отвлечен от реальной повседневной деятельности учителя. Только благодаря методике обучения цель системы и ее дидактические принципы реализуются в каждодневной деятельности учителя и учении школьников. Типические свойства МС связаны с дидактическими принципами и их реализацией. Важнейшие принципы: многогранность, процессуальность, системность, функциональный подход, коллизии (столкновение старого понимания вещей с новым научным взглядом на их сущность, практического опыта с его теоретическим осмыслением, которое зачастую противоречит прежним представлениям), вариантность
Модельный подход		
2.	В. М. Жучков [30]	Это информационная модель, в которой представлены и описаны все взаимосвязанные элементы и сформулированы требования к организации процесса обучения.
Функциональный подход		

3.	А. М. Пышкало [55], Н. В. Кузьмина [39], А. И. Архангельский [29] и др.	Структура, компонентами которой являются цели обучения, содержание обучения, методы обучения, формы и средства обучения. Все составляющие методической системы обучения выступают в столь тесной взаимосвязи, что всякое изменение одного из них влечет за собой изменение других составляющих и всей системы в целом
Подход, ориентированный на результат		
4.	В. Г. Крысько [40]	Это совокупность взаимосвязанных и взаимообусловленных методов, форм и средств обучения, планирования и организации, контроля, анализа, корректирования учебного процесса, направленных на повышения эффективности обучения
Деятельностный подход		
5.	В. И. Загвязинский [31]	«… любые образовательные концепции и системы требуют для своей реализации определённой системы действий. Если эта система достаточно вариативна и гибка, её чаще называют методической…», в противном случае такая система приобретает форму педагогической технологии.
Личностно-ориентированный подход		
6.	Г. И. Саранцев [58]	В центре внимания — ученик, его саморазвитие, поэтому ныне к исходным положениям, определяющим специфику методической системы обучения структуру личности, закономерности ее развития» Т. е. к элементам функциональной модели МС добавляются результаты обучения и индивидуальность учащегося
Функционально-деятельностный подход		
7.	А. М. Новиков [53]	Основан на глубоком анализе звена процесса обучения в МС и определении основных требований к характеристикам этого процесса: — представление в единстве как содержательных, так и деятельностных характеристик обучения; −отражение одновременно деятельности преподавателя и учащихся в их динамическом взаимодействии; − представление основного функционального взаимодействия преподавателя и учащихся как управления со стороны преподавателя непосредственно или

		опосредованно деятельностью учащихся
Концептуальный подход		
8.	М. В. Рыжаков [54, 56, 57, 63]	Модель МС обучения объединяет целевой, содержательный и процессуальный компоненты с учетом интеграции фундаментальных, профессионально направленных и информационных знаний и умений в различных областях профессиональной деятельности. В основе концепции — рассмотрение информационной безопасности, как нового теоретического знания, обеспечивающим разрешение противоречий, возникших на современном этапе развития образования. Методическая система обучения может быть доведена до уровня методик и методических рекомендаций и реализована при построении учебного процесса
9.	Г. Г. Хамов [61]	Сложное динамическое образование
Социальный подход		
10.	А. В. Могилев [52]	М.С. должна учитывать социальный контекст развития образования, в частности его информатизации, с соответствующей коррекцией и кардинальным переосмыслением целей, содержания, форм и методов обучения на современном уровне
Предметный подход		
11.	Е. Н. Лобанова [45]	Система обучения какому-либо предмету

Итак, из таблицы следует, что трактовка понятия МС, многообразна. Проектируя методическую систему, мы полагали, что это должна быть открытая, динамично развивающаяся система, откликающаяся на все изменения в образовании и адекватно отражающая эти изменения при подготовке учителя к работе в новых условиях. Такая система должна стать действенным инструментом формирования компетенций учителя современной школы, что в свою очередь будет способствовать достижению новых образовательных результатов. Безусловно, модель МС должна отражать все элементы реальной методической системы. Мы полагаем, что обучение только тогда эффективно, когда оно строится как методическая система.

К наиболее характерным чертам методической системы обучения можно отнести: - научно обоснованное планирование процесса обучения; - единство и взаимопроникновение теоретической и практической подготовки; - высокий уровень трудностей и быстрый темп изучения учебного материала; - максимальную активность и достаточную самостоятельность обучения; - сочетание индивидуальной и коллективной работы; - насыщенность учебного процесса техническими средствами обучения; - деятельностный подход. В завершении отметим, методическая система только тогда функционирует, когда она определяется целями, задачами и содержанием обучения, если она включает планирование, контроль, анализ и корректировку учебного процесса. Все это, безусловно, должно учитываться при построении любой МС [60].

Возьмем за основу описание методической системы, приведенное в [65]. По мнению авторов, методическая система обучения включает 5 компонентов, которые могут быть взаимосвязаны по схеме Пышкало, а могут быть и иерархично связаны по схеме Кузнецова.

- Цели;
- Содержание;
- Методы;
- Организационные формы;
- Средства обучения.

Цели обучения – это сформулированные требования к результатам обучения. Достигнутые цели – это достигнутые образовательные результаты. Сейчас цели – это требования к личностным, метапредметным и предметным обр. результатам.

Цели также представляют иерархическую систему.

Цели образования вообще – максимальное развитие каждого человека (каждой личности).

Далее переходим на виды образования: общее (начальное, основное, среднее), профессиональное (среднее профессиональное и высшее профессиональное – бакалавриат, специалитет, магистратура, послевузовское образование), дополнительное.

Цели профессиональное образования – подготовка специалистов по выбранному направлению специализации.

Цели дополнительного образования – получение образования в рамках сферы своих интересов.

Цели общего образования – всестороннее развитие личности (общее инвариантное образование, т.е. оно общее для всех, всестороннее).

Всестороннее развитие личности прописывается через структуру личности: когнитивное (познавательные обр. результаты), операциональное (метапредметные обр. результаты) и мотивационное (личностные образовательные результаты).

Типологические свойства характера у детей разного возраста разные, и разные ведущие виды деятельности. Ведущим видом деятельности у младших школьников является игровая деятельность. Для основной школы основная деятельность – общение. В старшем звене – исследовательская, познавательная деятельность.

Таким образом, цели общего образования делятся по ступеням – прописаны во ФГОС.

Цели обучения обусловлены потребностями государства, общества и личности. Раньше брали только общество. Оказалось, что потребности у государства, общества и личности совершенно разные. Например, государству нужны экономисты, а обществу – гуманные и морально устойчивые специалисты; личности – у каждой личности свои потребности образовательные. Все это соединяем и получаем три вида образовательных результатов, которые сформулированы во ФГОС.[1]

Игнорировать потребности каждого ребенка нельзя. Система образования – это сфера услуг, поэтому нужно удовлетворять потребности клиента. Здесь многое еще зависит от учителя – надо уметь заинтересовать.

Далее цели дифференцируем по предметам. Схема такая же. Сначала цели вообще. В процессе изучения дисциплины происходят изменения в когнитивном, операциональном и мотивационном планах личности. Цели выводятся из объекта, предмета науки, объекта учебной дисциплины, предмета учебной дисциплины (определяется объектом учебной дисциплины и целями и задачами общего образования). Далее – по ступеням образования.

Содержание обучения

Цели обучения – требования к образовательным результатам, которые записаны во ФГОСах. Эти требования сформулированы в деятельностной форме, т.е. это то, что ребенок должен делать. Но деятельность не бывает беспредметной. Мы оперируем словами, терминами, законами, теоремами и т.д. Поэтому нужны знания и способы деятельности. Следовательно, **содержание обучения** – это знания и способы деятельности. При этом каждая дидактическая единица (т.е. каждый урок) должен формировать новые знания и новые способы деятельности. Поэтому *содержание обучение – это не просто знания и способы деятельности, а новые знания и способы деятельности.*

Сегодня образовательный процесс выстраивается от целей обучения к содержанию. Цели – это планируемый образовательный результат; далее результат ФГОС конкретизируется; затем к каждому результату подбираются виды учебной деятельности; под виды учебной деятельности – осваиваемые понятия. Так мы определяем новые понятия, термины, знания и соответственно новые способы деятельности, что и составляет содержание обучения. Раньше было наоборот, задавался минимум содержания и от него определялись цели. Но оказалось, что если идти от содержания, то не обеспечивается гарантия достижения результатов.

Сейчас учебник – не основа для выбора содержания. Учебник – средство в поддержку образовательного процесса, предусмотренного ФГОС. Нужно сформулировать идею, на основе которой выстраивать содержание обучения.

Далее начинаем распределять дидактические единицы (группировать) так, как нужно, т.е. группировать расписанные уточненные образовательные результаты и виды деятельности по соответствующим разделам. В стандарте не устанавливается последовательность изучения материала. В нем передан только перечень требований. Последовательность будет зависеть от логики содержания курса. Главное - чтобы все требования были реализованы. ***Методы обучения*** зависят от содержания.

Метод обучения – это способ взаимодействия преподавателя и учащихся на достижение поставленной цели.

Существуют разные классификации методов обучения с точки зрения дидактики.

По Лернеру-Скаткину следледующая классификация:

1. Объяснительно-иллюстративные методы;
2. Репродуктивные;
3. Продуктивные;
4. Творческие.

Типология по Бабанскому:

1. Словесные методы (беседа, лекция, консультация, рассказ).
2. Практические работы (лабораторные работы, решение заданий, выполнение практических заданий).
3. Контроль (текущий, итоговый, первичный и т.д).

Есть еще классификация методов обучения по видам аналитической деятельности (по анализ, синтезу, обобщению, классификции и пр.).

Современные методы обучения – по включенности обучающегося в образовательный процесс. Это проблемные методы.

Когда мы говорим о различных методах обучения и о приоритетах того или иного метода обучения, мы говорим о системно-деятельностном подходе.

Системно-деятельностный подход в образовании

Существуют разные подходы к организации образовательного процесса. Известны знаниевый, личностно-ориентированный (Киманский, Зимняя и т.д.), культурологический (Бабанский, Краевский), компетентностный подходы и т.д. Деятельностный подход существует уже более 100 лет. Возник еще от Выгодского.

Системно-деятельностный подход – объединение двух подходов: деятельностного и системного. Любой объект рассматриваем как систему: делим на компоненты, определяем как они взаимосвязаны и т.д.

Структура учебной деятельности: учебная задача, учебные потребности, мотивы, выполнение учебной задачи, формирование навыков, оценивание (рефлексия).

Системно-деятельностный подход объединяет все подходы: и личностный подход (развитие личности каждого ребенка), и культурологический (как передача накопленного человечеством опыта), компетентностный подход (знания в действии, фактически это тоже деятельностный подход, но с учетом знаний).

В СДП будет меняться структура образовательного процесса. СДП (системно-деятельностный подход) лежит в основе (выступает методологической основой) построения ФГОС ОО (общего образования).

Основные этапы организации образовательного процесса на основе СДП.

1. Мотивационный;

2. Содержательный;
3. Технологический;
4. Оценочно-рефлексивный.

Главная задача организации образовательного процесса – это побудить обучающихся получать новые знания самостоятельно. Ничего не дается в готовом виде. Надо: сформулировать проблему, далее учащиеся начинают думать, как проблему решить, т.е. они должны осознать, что у них не хватает знаний, способов деятельности. Учащиеся начинают искать пути, пытается изучить, получить новые знания и способы деятельности. Это содержательный этап. Если неправильно решил (оценочно-рефлексивный этап), ищет новые решения. Так по кругу. Это - технологический этап. В результате формируются новые знания и способы деятельности. Это суть СДП. Главная задача учителя – замотивировать учащихся, сформировать потребность решения проблемы.

Организационные формы

Работа может быть фронтальная, групповая, индивидуальная.

Лекция, практика также относятся к организационным формам.

Многие исследователи расходятся в понимании, является ли самостоятельная работа методом обучения или организационной формой.

Основным типом организационной формы сегодня является урок. Но: классно-урочная система подвержена критике. Тем не менее, на сегодня пока что урок является одной из основных организационных форм. Уроки делятся по типологии.

Кроме урочных форм бывают внеурочные формы (делятся по предмету, месту нахождения, времени, по количеству индивидуальных консультаций и пр.).

Средства обучения

К средствам обучения относятся столы, стулья, учебники, задачники, энциклопедии и т.д. В нашем случае еще и добавляется персональный компьютер с выходом в интернет и установленным на нем соответствующим программным обеспечением.

1.2. Роль компьютерной анимации в обучении математике.

Любая методическая система функционирует в определенной социальной и культурной среде, которая оказывает на нее решающее воздействие, причем наиболее явным образом это воздействие направляется на цели обучения, последние в известной степени зависят от социального заказа общества.

Как показывает анализ современных требований к образованию, школе нужен учитель математики разносторонне образованный, обладающий действенными математическими знаниями, в полной мере понимающий особенности школьного курса математики, знакомый с современными образовательными технологиями и владеющий компьютерными средствами обучения.

В «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» [3] от 24.12.2013 г. среди выделенных проблем на первом месте стоит проблема мотивационного характера. Эта проблема всегда актуальна и не может иметь однозначного решения. С изменением системы ценностей на каждом витке развития общества приходится искать новое ее решение. В Концепции сказано, что «низкая учебная мотивация школьников и студентов связана с общественной недооценкой значимости математического образования, перегруженностью образовательных программ, а также оценочных и методических материалов техническими элементами и устаревшим содержанием, с отсутствием учебных программ, отвечающих потребностям обучающихся и действительному уровню их подготовки».

Эта проблема действительно актуальна, так как заинтересованность учащегося в результате обучения является залогом его включенности в образовательный процесс в качестве активного субъекта. Этого требуют и современные образовательные стандарты, которые говорят, что обучение в школе должно способствовать развитию таких умений учащихся, которые позволили бы ему стать успешным специалистом в выбранной им области.

В настоящее время интересы молодежи большей частью лежат в области компьютерных технологий. Педагогам необходимо учитывать эти интересы не только в содержании преподавания, но и при выборе методов и технологий обучения. Необходимо также учитывать возрастные особенности – учащиеся средней и старшей школы и студенты вузов находятся в таком периоде взросления, когда на первый план выходят проблемы общения со сверстниками, осознание своего статуса в ближайшем окружении. Для них важно осознание своей самостоятельности.

Для решения этой проблемы приходится отходить от обычных алгоритмов организации учебного процесса, искать нестандартные решения, позволяющие комбинировать различные методы, средства, а иногда материал различных учебных дисциплин (интеграция дисциплин). Обучение с применением компьютера позволяет переключить ученика с роли объекта обучения на роль активного субъекта. Обучающийся переходит в новую категорию потому, что по форме компьютерное обучение является индивидуальным, самостоятельным, но осуществляется по общей методике, реализованной в обучающей программе. В условиях компьютерного обучения решающая роль в определении того, когда следует прервать диалог, а когда продолжить, должна принадлежать обучающемуся. Он должен иметь возможность в любой момент «выйти» из диалога и инициировать его, обратившись к системе с вопросом.

Современные компьютерные технологии могут не только упростить работу преподавателя, но и дать определенные преимущества в сравнении с традиционными технологиями для подготовки будущего учителя математики. В связи с этим, большое значение в ходе образования придается формированию метапредметных УУД (УУД – универсальные учебные действия) учащихся. В частности особое значение отводится развитию умений, связанных с регулятивными УУД. В свою очередь, регулятивные УУД предполагают осознанное участие учащегося в учебном процессе, понимание целей обучения в общем, конкретных дисциплин и их разделов в частности, осознание своего уровня подготовки, пробелов своего образования и необходимости их заполнения, регулирование своей учебной деятельности.

Применение технических средств в учебной деятельности дает возможность педагогу разнообразить формы организации учебного процесса. Например, имея в аудитории компьютер и проектор, интерактивную доску преподаватель может демонстрировать применение математического материала в различных сферах жизни и других дисциплинах, в более яркой и наглядной форме преподносить материал, в сборе и оформлении которого могут принять участие учащиеся. Учителями давно освоены такие возможности компьютера, как проведение презентаций, организация поиска учащимися учебного материала в сети Internet, использование текстовых и графических редакторов, готовых обучающих продуктов и тренажеров. Все это дает наглядное представление о многих математических объектах, позволяет учителю демонстрировать гораздо больше различных примеров из разных областей жизни и науки, что способствует развитию мышления учащихся. А имея в распоряжении компьютерный класс, преподаватель может построить занятие с применением современного программного обеспечения, позволяющего также сочетать различные формы организации учебного процесса: тестирование, демонстрацию, поиск материала, решение задач с применением специальных программ: MathCad, MathLab, GeoGebra, Живая математика и т.д.

В обучении, как школьников, так и студентов всегда большое значение имеет эксперимент. Недаром методисты школьного и вузовского образования говорят о повышении эффективности обучения при использовании системно-деятельностного подхода. Когда учащийся принимает активное участие в приобретении знаний, «добывая» их самостоятельно, усвоение этих знаний происходит гораздо лучше, прочность их усвоения выше. Однако организовать экспериментальную работу на уроках математики не так просто, как, например, на уроках физики, химии, биологии. Все эксперименты в основном носят теоретический характер, когда с помощью уже полученных знаний и направляющей помощи учителя ученик приходит к новым знаниям. Наиболее интересен эксперимент, когда учащийся может «потрогать» исследуемый объект и самостоятельно изменяя его параметры получить новые знания об этом объекте. В этой ситуации на помощь математике приходят компьютерные технологии. Современное программное обеспечение позволяет имитировать изучаемые в курсе математики объекты с сохранением их основных свойств, т.е. позволяют моделировать многие процессы, описанные в школьных учебниках математики, показывать их в динамике, анимировать многие действия, делая их более наглядными и понятными для учащихся. Применение таких компьютерных программ дает возможность педагогу организовывать исследовательскую работу учащихся, не выходя из аудитории. Наглядная живая картинка способствует самостоятельным заключениям учащихся по решению поставленной задачи, поиску доказательства, развитию пространственного воображения, алгоритмичности и аргументированности рассуждений.

Особую ценность в развитии исследовательской самостоятельности учащихся играют возможности анимации. С помощью анимации учащийся может исследовать свойства геометрических объектов, непосредственно перемещая их механически с помощью мыши, или автоматически с помощью функции анимации, или задавая некоторые параметры объектов, меняя которые можно исследовать свойства этих объектов. Школьный учитель и преподаватель вуза может использовать эту возможность не только для более углубленного освоения материала учащимися, но и для начального получения знаний в результате исследовательской работы, проведенной учащимися с помощью компьютера. Знания, полученные самостоятельно, будут гораздо более глубокими и полными.

Освоив правила компьютерной анимации, учащийся может сам выбирать путь и темп исследования, т.е. работать в индивидуальном режиме. Это позволит каждому учащемуся реализовать свои способности и развить умения анализировать имеющуюся ситуацию, правильно планировать эксперимент, интерпретировать его результаты и обобщать, доказывать правильность сделанного заключения. Анимация в данном случае хороша своей формой – по сути это игра, которая не заставляет учащегося испытывать комплекс неполноценности от своего незнания материала, а стимулирует в игровой форме заполнить этот пробел. Но, как и всякая дидактическая игра, использование компьютерной анимации в учебных целях требует от учителя четкого планирования результата.

Изначально геометрическая направленность анимации приводит к заключению, что анимация применима только при обучении геометрии и основам математического анализа, связанного с исследованием функции. Однако и многие алгебраические понятия и действия с ними могут иметь геометрический смысл. Например, алгебраические операции с целыми числам. Понятие многочлена можно, рассмотрев как функцию, также интерпретировать, как график этой функции. А опции современных пакетов компьютерной математики таких, как Maple, GeoGebra, позволяют связывать два определения многочлена – теоретико-функциональное и формально-алгебраическое, и получать по графику формальное выражение многочлена и наоборот. Получив графики многочленов, можно уже графически интерпретировать действия над ними. Это позволит совершенно по-другому взглянуть на эти операции, на свойства этих операций и лучше понять их смысл, и, как следствие, лучше запомнить. Графическое выполнение алгебраических операций потребует от учащегося серьезной работы по моделированию этих операций, самостоятельного создания алгоритмов. Построение любых алгоритмов действий требует тщательного продумывания всех шагов, знания основных понятий, свойств, правил выполнения действий, их геометрической интерпретации, алгоритмов решения математических задач. А уже построенные алгоритмы для правильного их применения и поиска решения более сложных задач требуют математической интуиции, также основанной на знании теоретического материала. Среда GeoGebra сочетает все перечисленные возможности.

Как уже говорилось выше, перед учителем математики и преподавателем вуза (а педагогического в особенности, в силу того, что он готовит будущих учителей математики) стоит задача применения возможностей компьютерной анимации таким образом, чтобы это способствовало повышению качества учебного процесса, а не наоборот. Поэтому следует в этом случае придерживаться следующих принципов.

Принципы концепции компьютерной поддержки курса [46]:

1. принцип адекватности;
2. принцип визуализации;
3. принцип использования компьютерных средств в качестве инструмента познания;
4. принцип самостоятельности в использовании компьютерных средств;
5. принцип ориентации на школу.

В связи со сказанным возникает необходимость добавить несколько новых целей в систему целей обучения [46]:

1. содействовать формированию современного взгляда на геометрию как науку, использующую в своих исследованиях информационные технологии;

2. обеспечить студентам знания, умения и навыки, необходимые для использования информационных технологий при изучении математики;
3. обеспечить достаточный опыт использования компьютера в качестве средства познания математики;
4. воспитывать устойчивый интерес к математике;
5. подготовить студентов педагогического вуза психологически и идеологически к тому, чтобы в школьном курсе математики применять информационные технологии;
6. содействовать формированию достаточно высокого уровня не только математической, но и информационной культуры.

1.3. Содержательно-методическая линия темы многочлены в школьном курсе математики.

В примерной программе [66] в курсе алгебры 7 класса на тему «Многочлены» отводится 17 часов. В нее входит понятие многочлена, сложение, вычитание и умножение многочленов, разложение многочленов на множители. В дальнейшем в курсе математике многочлены как самостоятельная структура встречаются только в 11 классе на профильном уровне. При этом применение теории многочленов происходит на протяжении с 7-го по 11 классы. Проведем анализ включения материала по алгебре многочленов по примерной программе и школьным учебникам.

***В примерной программе курса алгебры следующие темы требуют знания многочленов*:**

Класс	***Тема с номером в плане***	***Кол-во часов***	***Краткое содержание темы***
7	1. Выражения, тождества, уравнения.	22 часа	Числовые выражения с переменными. Простейшие преобразования выражений. Уравнение, корень уравнения. Линейное уравнение с одной переменной. Решение текстовых задач методом составления уравнений. Статистические характеристики.
	3. Степень с натуральным показателем	13 часов	Степень с натуральным показателем и ее свойства. Одночлен. Функции $y = x^2$, $y = x^3$ и их графики.
	4. Многочлены	17 часов	Многочлен. Сложение, вычитание и умножение многочленов. Разложение многочленов на множители.
	5. Формулы сокращенного умножения	18 часов	Формулы $(a + b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $(a \pm b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 \pm b^3$. Применение формул сокращенного умножения в преобразованиях выражений.
8	1. Рациональные дроби	22 часа	Рациональная дробь. Основное свойство дроби, сокращение дробей. Тождественные преобразования рациональных выражений. Функция $y = k/x$ и ее график.
	3. Квадратные уравнения	21 час	Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Решение

			рациональных уравнений. Решение задач, приводящих к квадратным уравнениям и простейшим рациональным уравнениям.
	4. Неравенства	20 часов	Числовые неравенства и их свойства. Почленное сложение и умножение числовых неравенств. Погрешность и точность приближения. Линейные неравенства с одной переменной и их системы.
9	1. Свойства функций. Квадратичная функция	22 часа	Функция. Свойства функций. Квадратный трехчлен. Разложение квадратного трехчлена на множители. Функция $y = ax^2 + bx + c$, ее свойства и график. Степенная функция.
	2. Уравнения и неравенства с одной переменной	14 часов	Целые уравнения. Дробные рациональные уравнения. Неравенства второй степени с одной переменной. Метод интервалов.

Рабочими программами по предмету« Алгебра и начала анализа» в 10 – 11 классах базового уровня рассмотрение понятия многочлена не предусмотрено, материал же по данной теме профильного уровня варьируется от систематизации и небольшого расширения знаний, полученных ранее, до практически полного вузовского курса.

Рассмотрим подробно содержание материала по данной теме в некоторых школьных учебниках с целью проанализировать стиль, порядок и объем изложения материала. Так как непосредственно по многочленам весь материал содержится в учебниках 7 и 10-11 классов, то именно их и рассмотрим.

1. *Алгебра: учебник для VI-VIII классов восьмилетней школы. А.Н. Барсуков. 9-е изд. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1964* [8]

В первой главе вводится понятие алгебраического выражения, потом рассматриваются законы операций, вводятся рациональные числа. В 3-ей главе дается определение рационального алгебраического выражения как составленного из чисел, обозначенных цифрами и буквами, с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Одночленом называется алгебраическое выражение, которое содержит только действия умножения и возведения в степень, т.е. произведение числового множителя и букв, каждая из которых взята в определенной степени. Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется многочленом. После определения многочлена рассматриваются тождества и тождественные преобразования. Тождественно равными или тождественными называются выражения, имеющие одинаковые числовые значения при всех допустимых значениях входящих в них букв. Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется тождественным преобразованием этого выражения. Отдельный параграф отведен понятию коэффициента. Вводится понятие расположенного многочлена через расположение по убывающим степеням. При этом буквы в одночленах расположенного многочлена должны быть расположены по степеням главной буквы. Затем рассматривается приведение подобных как тождественное преобразование многочлена, сложение одночленов и многочленов, вычитание через прибавление противоположного многочлена. Умножение многочленов дано двумя способами – через умножение одночленов одного многочлена на одночлены другого и как умножение расположенных многочленов через умножение столбиком, демонстрируя получение коэффициентов у членов произведения. В конце главы определяется деление многочлена на одночлен. Глава 5 посвящена разложению многочленов на множители, рассматриваются способы вынесения множителя за скобки, способ группировки и с помощью формул сокращенного умножения. В главе 6 рассматриваются алгебраические дроби.

2. *Алгебра: пробный учебник для 7 кл. сред.шк. / Ш.А. Алимов, В.А. Ильин, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. 2-е изд. – М.: Просвещение, 1980* [9]

Понятие многочлена не вводится, рассматриваются квадратные уравнения, вводят его авторы как уравнение определенного вида, все преобразования рассматриваются в соответствие с этим определением – требуется строгое соблюдение формы записи. После этого авторы вводят понятие квадратного трехчлена как функцию и в дальнейшем рассматривают только функции, исследуя их свойства и графики, но, не рассматривая операции над ними. Однако в конце учебника содержится описания материала 6-го класса, в котором большое внимание уделено понятию многочлена: начинается рассмотрение с понятия числового выражения, затем вводятся понятия алгебраического выражения, алгебраической суммы и произведения алгебраических выражений, понятие одночлена вводится как произведение нескольких чисел, обозначенных цифрами или буквами, вводится понятие стандартного вида одночлена, действия над многочленами и определяется многочлен, как алгебраическая сумма одночленов, и стандартный вид многочлена. Авторами в 6-м классе предполагается введение таких операций над многочленами, как сложение, умножение, деление на одночлен, также формул сокращенного умножения и способов разложения многочлена на множители, понятия алгебраической дроби. В изложении данного материала ни разу не встретилось определение равенства многочленов.

3. *Алгебра 7: учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 1991* [13]

Все то, что в пробном учебнике 1980 года предлагалось ввести в 6 классе, вводится в 7-м. Стиль и порядок изложения сохранены согласно предыдущему изложению.

4. *Алгебра 7: учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В.* Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 3-е изд. – М.: Просвещение, 1995 [10]

Изложение по теме «Многочлены» не изменено в сравнении с предыдущими редакциями.

5. *Алгебра 7: учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 16-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2009* [11]

Изложение по теме «Многочлены» не изменено в сравнении с предыдущими редакциями.

6. *Алгебра 6-8: Материалы для ознакомления / Д.К. Фаддев М.: Просвещение, 1983* [12]

Автор начинает изложение материала с понятия алгебраического выражения, функции, тождественного равенства (как равенство функциональное), тождественных преобразований. Одночлен и многочлен определяются так же как у Алимова, делается акцент на то, что значение одночлена не изменится, если поменять местами множители, и значение многочлена не изменится, если изменить порядок его слагаемых. При определении действий над многочленами не упоминается форма записи, и, только в конце главы приводится теорема о тождестве: «Если два приведенных многочлена равны тождественно, то они составлены из одинаковых одночленов». В главе 2 приводятся различные способы разложения многочлена на множители. Глава 3 «Преобразование дробных алгебраических выражений», в ней же рассматривается деление многочлена на многочлен «уголком». Глава 9 посвящена равнениям высших степеней, в ней в первом параграфе рассматривается применение графиков к решению таких уравнений и уточняется значение корня алгебраического уравнения. В 3 параграфе вводится понятие корня многочлена, здесь автор приводит теорему Безу и следствие из нее, не называя ее этим именем.

7. *Алгебра 7: учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. - 5-е изд. – М.: Просвещение, 1997* [14]

Глава IV «Многочлены». Под многочленом понимается сумма одночленов, приводится понятие подобных членов и стандартного вида многочлена. Равенство многочленов не определяется. Вводятся операции сложения и вычитания многочленов через приведение подобных, произведение многочлена на одночлен и наоборот. Приводится правило вынесения общего множителя за скобки, умножения многочлена на многочлен на примере умножения двучлена на двучлен, разложение многочлена на множители способом группировки, определяется тождество как равенство, верное при любых значениях переменных, тождественное преобразование. Отдельно рассматриваются формулы сокращенного умножения и способ разложения многочлена множители с их помощью. В параграфе 14 вводится понятие целого выражения, что подготавливает к понятию многочлена от нескольких переменных. Рассматривается способ преобразования целого выражения в многочлен.

8. *Алгебра 7: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Фектистов. - 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2012* [15]

Изучение многочленов по сравнению с предыдущим учебником запланировано значительно раньше. Уже вторая глава отведена одночленам. Ей предшествует глава «Выражение и множество его значений», где дается понятие числового выражения и выражения с переменными. Перед определением одночлена вводится понятие степени с натуральным показателем, умножение и деление степеней, затем одночлен вводится как произведение чисел, переменных и их степеней, дается понятие стандартного вида одночлена. После вводится понятие тождества и тождественных преобразований. Глава 3 посвящена многочленам, и ее изложение повторяет изложение предыдущих изданий.

9. *Алгебра. 7 кл: В двух частях. Ч1: Учебник для общеобразовательных учреждений. / А.Г. Мордкович. - 6 изд. – М.: Мнемозина, 2003*[16]

Начинается изложение материала учебника с повторения понятий числового и алгебраического выражений. «Под числовым выражением мы понимаем всякую запись, составленную из чисел и знаков арифметических действий. По некоторым причинам часто вместо конкретных чисел употребляются буквы; тогда получается алгебраическое выражение». В дальнейшем автор описывает, какие действия с данными выражениями осуществляют.

Формирование же понятия многочлена автор начинает с понятия одночлена как алгебраического выражения, представляющего собой произведение чисел и переменных, возведенных в степени с натуральным показателем. Хотя понятие одночлена вводится через понятия степени, вся дальнейшая теория направлена на форму записи одночлена, т.е. предполагает формально-алгебраический подход. Автор вводит правила действий над одночленами, соблюдая также формально-алгебраический подход, делая акцент на форме записи результата в «стандартном» виде. Однако само понятие многочлена Мордкович А.Г. вводит как функцию, называя многочленом сумму одночленов, но, сразу же, после определения делает акцент на форме записи результата. При описании правил действия над многочленами автор так же постоянно напоминает о форме записи результата. Материал 7 класса по многочленам автор ограничивает рассмотрением способов разложения многочлена на множители. Применение этого материала Мордковия А.Г. показывает через сокращение алгебраических дробей. Само понятие алгебраической дроби автор вводит по аналогии с понятием обыкновенной дроби, как запись определенного вида, а под сокращением дроби понимает получение записи более простого вида.

10. *Алгебра. 8 кл: Учебник для общеобразовательных учреждений. / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2001* [17]

В 8 классе понятие многочлена встречается в теме «Алгебраические дроби», но строгое определение Мордкович А.Г. дает именно в курсе 8-го класса, так понимая под алгебраической дробью запись определенного вида: «Алгебраической дробью называют выражение P/Q где P и Q – многочлены». В дальнейшем Мордкович А.Г. назовет такие дроби рациональными выражениями, постоянно проводя аналогию с числовыми множествами. Изучая действия с алгебраическими дробями, школьники снова приходят к понятию многочлена и отрабатывают алгоритмы действий над многочленами.

11. *Алгебра. 9 кл: Учебник для общеобразовательных учреждений. / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2002* [18]

В курсе 9-го класса в данном учебнике понятие многочлена не фигурирует в прямом виде, однако оно является вспомогательным при описании методов решения рациональных неравенств. В 9 классе вводится строгое понятие функции и все ему сопутствующие понятия.

В старших классах базового уровня подготовки многочлены в учебниках Мордковича А.Г. не рассматриваются.

12. *Математика. Арифметика. Алгебра. Анализ данных. 7 класс: Учеб. для общеобразовательных заведений. / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева; под ред. Г.В. Дорофеева. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1998* [47]

Изучение темы многочлены предполагается авторами в четвертой четверти 7-го класса. В учебнике этой теме посвящены 7 и 8 главы. Предварительно в главе 3 «Введение в алгебру» авторы рассматривают понятие буквенного выражения и числовых подстановок, т.е. значения буквенного выражения. Здесь оговаривается правила записи буквенных выражений порядок выполнения действий при нахождении их значений, преобразования буквенных выражений. Глава 7 «Многочлены» начинается с введения понятия одночлена и стандартного вида одночлена. Многочленом называют алгебраическую сумму одночленов. Стандартным видом многочлена называют такой вид записи, в которой все одночлены стандартного вида и нет подобных одночленов. Равенство многочленов не определяется. При введении сложения и вычитания многочленов рассматривается два способа: один - приписывание и приведение подобных, второй – по разрядам столбиком. Далее вводится умножение одночлена на многочлен и умножение многочлена на многочлен. Рассматриваются формулы сокращенного умножения и их применение к решению уравнений. Стоит отметить интересные по содержанию задачи на составление уравнений. В разделе «Для тех, кому интересно» вспоминаются факты их теории делимости натуральных чисел, такие как делимость чисел, деление с остатком, разбивание множества натуральных чисел на классы по остаткам от деления на данное число. В главе 8 приводятся способы разложения многочлена на множители такие, как вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, с помощью формул сокращенного умножения и комбинирование способов. Дальше рассматривается применение этих способов к решению уравнений. В разделе «Для тех, кому интересно» авторы предлагают ученикам придумать нестандартные способы разложения на множители.

13. *Алгебра и начала анализа 10-11: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др; Под редакцией А.Н. Колмогорова. – 5-е изд. - М.: Просвещение, 1996* [19]

Материалом данного учебника многочлены не рассматриваются. В последней главе – главе 5 содержится параграф «Тождественные преобразования», где в пункте «Тождественные преобразования алгебраических выражений» вспоминаются через задачи некоторые сведения о преобразованиях многочленов. Само понятие многочлена не используется.

14. *Алгебра и начала анализа 10-11: Учебник для 10-11 классов средней школы / М.И. Башмаков. – 2-е изд. - М.: Просвещение, 1992* [20]

Также материала по многочленам не содержится. Лишь в главе VI «Уравнения и неравенства» вспоминаются основные приемы преобразования рациональных выражений. Очень хорошо систематизирован материал. В «Заключительной беседе» этой главы автор говорит о том, что рассмотренное ранее понятие тождественного равенства основывалось на понятии функции и определялось как равенство значений при одинаковых значениях аргумента. Далее автор отмечает, что есть и другая точка зрения, которая тесно связана с алгеброй. В алгебре многочлен рассматривается не как функция, а как некоторое формальное выражение, составленное из одночленов. В алгебре два многочлена равны, если после приведения подобных членов окажется, что они составлены из одинаковых одночленов, т.е. если выполняется формальное почленное равенство. Далее автор говорит о том, что если два многочлена равны формально, то они принимают одинаковые значения при всех значениях букв. Для подтверждения обратного заключения автор составляет разность рассматриваемых многочленов $F(x) = f(x) - g(x)$ и приводит теорему о тождестве в таком варианте: «Если многочлен F(x) при всяком значении x равен нулю, то этот многочлен нулевой». Иными словами, если многочлен $F(x)$ степени n имеет $n+1$ корень, то этот многочлен нулевой. Следствие: ненулевой многочлен не может иметь корней больше, чем его степень. Или, если два многочлена степени n совпадают в $n+1$ точке, то эти многочлены формально равны. В параграфе 3 «Алгебраические уравнения» «Заключительной беседы» автор приводит формулировку основной теоремы алгебры: «Всякое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень», также приводятся некоторые приемы нахождения корней многочлена с целыми коэффициентами. Автором затрагивается вопрос о существовании формул, выражающих корни многочлена через его коэффициенты с помощью радикалов. Для многочленов 2, 3 и 4 степеней такие формулы существуют, а для многочленов 5-й степени и выше таких формул не существует, что было доказано в работах Абеля и Галуа в начале XIX века.

15. *Алгебра и начала анализа 11: Учебник для 11 классов общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 6-е изд. - М.: Просвещение, 2007* [21]

Понятие многочлена не используется.

16. *Алгебра и начала анализа. 10-11 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 2-е изд. - М.: Мнемозина, 2001* [22]

Понятие многочлена не используется

17. *Математика 11 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/ А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова, П.В.*

Семенов; Под редакцией А.Г. Мордковича. – 5-е изд. стер. - М.: Мнемозина, 2010 [48]

Понятие многочлена не используется

18. *Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 частях, Ч.1: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2008* [23]

Глава 1 «Многочлены» состоит из 3 параграфов. § 1 посвящен многочленам от одной переменной. Повторяется определение многочлена, вводимое в 7 классе, как алгебраической суммы одночленов, вводится понятие стандартного вида многочлена и в дальнейшем понятие многочлена связывается с записью определенного вида. Исходя из этого понятия определяется и равенство многочленов через совпадение записей – равенство степеней и коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Определяются операции над многочленами: сложение многочленов, вычитание перемножение и возведение в степень, деление многочлена на многочлен с остатком (уголком), приводятся теорема Безу и следствие из нее, деление многочлена на двучлен по схеме Горнера. Рассматриваются такие методы разложения многочлена на множители, как вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, использование формул сокращенного умножения, разложение квадратного трехчлена через корни. Приводится теорема с доказательством о нахождении целых корней многочлена с целыми коэффициентами среди делителей свободного члена. Также формулируется теорема «Любой многочлен степени большей или равной 3 разлагается в произведение многочленов первой и второй степени». В § 2 рассматриваются многочлены от нескольких переменных. Само понятие многочлена от нескольких переменных не приводится, изложение материала начинается со способов разложения на множители: метода группировки; рассмотрение многочлена как многочлена от одной переменной из данных переменных; через тождественные преобразования; через формулы сокращенного умножения. Вводятся понятие однородного и симметрического многочленов. Применение симметрических многочленов не рассматривается. § 3 «Уравнения высших степеней». В этом параграфе собираются рассмотренные ранее методы преобразования, разложения на множители многочлена от одной переменной. Кроме того, углубляются знания о нахождении корней целочисленных многочленов. Приводится теорема с доказательством: «Если приведенное уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то этот корень обязательно является целым числом». Рассматривается графический способ решения рациональных уравнений высших степеней.

19. *Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: Учебник для 10 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011* [49]

Глава VII «Многочлены от одной переменной». «Многочленом (полиномом) от одной переменной х называется выражение вида $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$», вводятся основные понятия степени многочлена, коэффициента, канонической (стандартной) записи многочлена, старшего коэффициента, старшего члена, одночлена (монома), подобных одночленов, значения многочлена, равных многочленов (как составленных из одинаковых одночленов в канонической записи). Далее рассматриваются арифметические действия над многочленами такие, как сложение, вычитание и произведение. Во всех действиях необходимость записи результата в определенной последовательности – канонической записи. Формулируются две теоремы о делении многочлена на многочлен с остатком – теорема о существовании неполного частного и остатка и теорема об их единственности. Приводится метод деления «уголком» и метод неопределенных коэффициентов, опирающийся на правила умножения и сложения многочленов, доказываются два свойства делимости многочленов (транзитивность и делимость суммы, разности и произведения многочленов). Вводятся понятия НОД и НОК многочленов, дается алгоритм Евклида для нахождения НОД многочленов. Во втором параграфе рассматривается схема Горнера деления многочлена на двучлен и показано его применение при решении таких задач, как нахождение значения многочлена, остатка и неполного частного от деления многочлена на двучлен, разложение многочлена по степеням двучлена. Доказывается теорема Безу и следствие из нее, приведенное в виде теоремы. Отдельно рассматриваются многочлены с комплексными коэффициентами: приводится основная теорема алгебры, и как следствие из нее (с доказательством) - вывод о разложении многочлена степени n с комплексными коэффициентами на n линейных множителей, доказывается, что у многочлена с действительными коэффициентами комплексные корни попарно сопряжены, на примере многочлена третьей степени сформулирован результат о разложении многочлена с действительными коэффициентами на неприводимые множители. Сформулирована теорема о равенстве многочленов в формальном смысле, равных в функциональном смысле. Приводится обобщенная теорема Виета с выводом формул. В последнем параграфе «Алгебраические уравнения» главы приводятся с доказательством теорема о рациональных и целых корнях многочленов с целыми коэффициентами и формулы Кардано!!!!! В следующей главе, посвященной системам алгебраических уравнений, вводится понятие многочлена от нескольких переменных.

20. *Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: Учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012* [50]

Понятие многочлена не используется.

21. *Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А.*

Олейник, Т.В. Соколова. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011 [51]

Содержит задания на отработку основных понятий темы «Многочлены» такие, как найти коэффициенты многочлена, свободный член, записать в каноническом виде, найти неизвестные коэффициенты, при которых данные многочлены будут равны, разделить многочлен на многочлен используя метода неопределенных коэффициентов, «уголком», найти значение многочлена, найти неизвестные коэффициенты двух многочленов так, чтобы первый делился на второй без остатка, задания на отработку способов разложения на множители, нахождение НОД и НОК многочленов, задания на отработку схемы Горнера деления многочлена на двучлен (нахождение остатка и неполного частного, доказать делимость многочлена на двучлен, доказать делимость на квадратный трехчлен, разложить многочлен по степеням двучлена, нахождение значения многочлена. определение корня многочлена и его кратности), разложить многочлен на множители применяя теорему Безу, разложить многочлен от двух переменных на множители, решить алгебраические уравнения 3-ей степени применяя метод группировки, формулы сокращенного умножения и метод Кардано (методы в задании не указаны), найти рациональные корни многочлена.

22. *Алгебра и начала анализа. 10 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений: в 2 частях. Ч.1 / Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнецов, Е.А. Седова. – М.: Дрофа, 2003* [24]

«Учебник основан на гуманистическом тезисе личностной ориентации обучения, на воплощении этого тезиса в уровневой и профильной дифференциации. Личностная ориентация обучения позволяет определить назначение учебного предмета «Математика» в школьном образовании: «Математика и для всех, и для профессионалов». Но это не две разные математики, а одна и та же математика, по-разному представляющаяся разным ученикам, имеющим разные интересы, устремления и возможности. Математическая деятельность многогранна и позволяет проводить не только обучение математике, прививая учащимся конкретные знания и умения, но и обучение математикой, в процессе которого развиваются интеллектуальная и эмоциональная сферы человека».

Глава 2 «Многочлены» содержит 3 параграфа: «Многочлены с одной переменной», «Многочлены с несколькими переменными» и «Бином Ньютона и начала комбинаторики». В первом параграфе многочлен с одной переменной авторы определяют как сумму степеней переменной с натуральным показателем с некоторыми коэффициентами, т.е. выражение вида $f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Определяется стандартный вид многочлена, и равенство многочленов определяется через равный стандартный вид. Здесь же делается замечание о том, что равные многочлены при равных значениях переменной принимают равные значения. Сложение, перемножение многочленов не рассматривается, а делается ссылка на изученный ранее материал. После вводных понятий сразу делается переход к нахождению рациональных корней многочлена, приводятся теоремы о целых и о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами. Из задачи нахождения корней целочисленного многочлена авторы выводят необходимость применения схемы Горнера. Далее строится теория делимости многочленов по аналогии с теорией делимости во множестве натуральных чисел и приводится алгоритм деления многочлена на многочлен «уголком», определяется деление многочлена на многочлен с остатком, приводятся с доказательством теорема Безу и следствия из нее. (Следствие 1: «Многочлен делится на x-c тогда и только тогда, когда c является корнем f». Следствие 2: «Многочлен степени n имеет не более n корней». Следствие 3: «Если значения двух многочленов, степени которых не больше n, совпадают при n+1 значениях переменной, то эти многочлены равны». Все следствия доказываются). На основе этой теории показывается применение схемы Горнера к разложению многочлена, имеющему рациональный корень, на множители, нахождению неполного частного и остатка от деления многочлена на двучлен, нахождению значения многочлена при заданном значении переменной.

Во втором параграфе вводится формально-алгебраически определение многочлена с несколькими переменными, лексикографического порядка записи, степени одночлена, степени многочлена, говорится о том, что на многочлен с несколькими переменными можно смотреть на многочлен с одной переменной относительно выбранной переменной из списка данных. Вводится понятие симметрического многочлена и элементарных симметрических многочленов. В этот же параграф авторы отнесли теорему Виета для многочленов выше второй степени.

23. *Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений / С.Н. Никольский. - М.: Просвещение, 2010* [25]

Глава 14 Многочлены начинается с параграфа «Квадратный трехчлен», где автор показывает способ разложения квадратного трехчлена (определения как такового не приводится) на множители с помощью корней. Корни рассматриваются комплексные, а сам трехчлен берется с действительными коэффициентами. Затем автор переходит к многочленам n-ой степени с комплексными коэффициентами, определяя их как функцию от комплексной переменной x. Дается способ деления «уголком» многочлена на многочлен, понятие корня многочлена, теорема Безу с доказательством, но без следствия, приводится основная теорема алгебры. Многие понятия вводятся не четко, а на интуитивном уровне, например понятие тождественного равенства многочленов, кратности корня и др. Далее рассматриваются многочлены с действительными коэффициентами, приводится теорема о попарной сопряженности комплексных корней, факт о разложении многочлена с действительными коэффициентами на множители. В конце темы приводится пункт про многочлен Чебышева.

24. *Алгебра и математический анализ. 11 кл.: Учебное пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики. / Н.Я. Виленкин. – 7-е изд. - М.: Мнемозина, 2000* [26]

Глава IX «Многочлены от нескольких переменных. Системы уравнений и неравенств». В этой главе определяется многочлен от нескольких переменных как сумма одночленов и отождествляются с целыми рациональными выражениями. Вводятся понятия лексикографического порядка записи, однородного многочлена, симметрического многочлена, основного симметрического многочлена, доказывается, что любой симметрический многочлен можно представить как многочлен от основных симметрических многочленов. В дальнейшем, при рассмотрении систем уравнений и неравенств теории симметрических многочленов не применяется.

25. *Алгебра и начала анализа 10-11: учебник для 10-11 кл. сред.шк. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 2-е изд. – М.: Просвещение, 1993* [27]

Понятие многочлена не используется.

26. *Алгебра и начала анализа 10-11: учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 11-е изд. – М.: Просвещение, 2003* [28]

Понятие многочлена не используется.

27. *Учебник по алгебре «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень)». Колягин Ю.М., Сидоров И.В., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И., Мнемозина, 2010* [59]

Учебник по алгебре «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень)» включает в себя 7 основных глав:

- Глава I. Производная и ее применения
- Глава II. Интеграл
- Глава III. Комплексные числа
- Глава IV. Элементы комбинаторики
- Глава V . Знакомство с вероятностью
- Глава VI. Делимость целых чисел. Целочисленные решения уравнений
- Глава VII. Многочлены и алгебраические уравнения

Многочлены вводятся формально-алгебраически как запись определенного вида. Исходя из такого определения, вводятся все остальные понятия, правила действий. В рамках изучениям темы «Многочлены и алгебраические уравнения» авторами предлагается рассмотреть следующие вопросы: значение и корень многочлена, равенство многочленов, сложение, умножение, вычитание и деление многочленов, деление многочлена на двучлен по схеме Горнера, теорема о делении с остатком, метод деления многочлена на многочлен уголком, теорема Безу, основная теорема алгебры, теоремы о разложении многочлена на линейные множители над множеством комплексных чисел и над множеством действительных чисел, понятие алгебраического уравнения.

Подведем итоги анализа учебников и программы.

материал	***комментарии***	***класс***	***учебник***
Алгебраическое (буквенное) выражение	Определяется как выражение, состоящее из чисел и букв, соединенных операциями сложения, вычитания, умножения и деления	6	1, 2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
Одночлен	Произведение чисел и букв	6	1, 2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
		10	19,22
		11	18
Стандартный вид	Все числа перемножены и стоят в начале записи,	7	3.4,5,6,7,

одночлена	произведение одинаковых букв заменено степени такой буквы с показателем, равным количеству повторений		8, 9,12
		10	19,22
		11	18
Многочлен	Алгебраическая сумма одночленов	6	1, 2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
		10	19,22
		11	18
	Как функция	11	23
Стандартный вид многочлена	Все одночлены имеют стандартный вид, подобные члены приведены	6	2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
		10	19,22
		11	18
	Вводится понятие расположенных многочленов через расположение по убывающим степеням	6	1
	Не делается акцента на форме записи, а наоборот везде подчеркивается, что многочлен не меняется при перемене мест одночленов и множителей в одночленах.	7	7
Равенство многочленов	Через совпадение записей	11	18, 27
Тождество	Равенство, которое становится верным числовым равенством при любых допустимых значениях переменных.	6	1
		10-11	13,14
Тождественные преобразования	Замена одного выражения другим, тождественным ему.	6	1
		10-11	13,14
Сложение и вычитание многочленов	Сложение – приписывании к первому многочлену второго и приведение подобных. Вычитание - сложение первого многочлена со вторым, взятым со знаком минус.	6	1,2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
		10	19
		11	18, 27
	При сложении многочленов столбиком приведение подобных происходит сразу, так	6	1
		7	7, 12

	как при сложении многочленов столбиком подобные члены пишутся друг под другом и складываются.	10	19
		11	18, 27
Умножение одночлена на многочлен	При умножении одночлена на многочлен каждый член многочлена умножается на этот одночлен	6	1,2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
		11	18, 27
Умножение многочленов	Каждый одночлен одного многочлена умножается на каждый одночлен другого.	6	1,2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
		11	18, 27
	Через умножение расположенных многочленов	6	1
Деление многочлена на одночлен	Деление каждого одночлена на данный одночлен	6	1,2
Вынесение общего множителя		6	1,2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
Разложение многочлена на множители	Применение на примере решения рациональных и дробно-рациональных уравнений.	6	1,2
		7	3.4,5,6,7, 8, 9,12
		11	18
Значение многочлена	Приводится в стандартном виде	10	19, 22
		11	18, 23, 27
Корень многочлена	Приводится в стандартном виде	10	19, 22
		11	18, 23, 27
Теорема Безу	Формулируется сама теорема и следствия из нее. Почти во всех учебниках доказываются. Не везде теорема Безу названа своим именем.	10	19, 22
		11	18, 23, 27
Схема Горнера деления многочлена на	Приводится в стандартном виде	10	19, 22
		11	18, 23, 27

двучлен			
Деление многочлена на многочлен «уголком»	Приводится в стандартном виде	10	19, 22
		11	14, 18, 23
Теорема о делении многочлена на многочлен с остатком	Приводится в стандартном виде	10	19, 22
		11	14, 18, 23
Свойства делимости	Взяты простейших свойства: транзитивность и делимость суммы и произведения	10	19, 22
НОД и НОК многочленов	НОД находится через алгоритм Евклида	10	19
Равенство многочленов, равных функционально	Где-то делается вывод из рассмотренных ранее примеров, где-то формулируется формально и доказывается.	10	19, 22
		11	14, 18
Основная теорема алгебры	Приводится в стандартном виде	10	19
		11	14, 23, 27
Разложение многочлена на множители над множеством комплексных чисел	Как приложение основной теоремы алгебры к многочленам с комплексными коэффициентами.	10	19
		11	23, 27
Теорема Виета	Приводятся обобщенные формулы Виета с доказательством.	10	19
Разложение многочлена на множители над множеством	Доказывается, что все комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены, любой многочлен с действительными коэффициентами	10	19
		11	18, 23, 27

действительных чисел	можно разложить в произведение линейных множителей и множителей второй степени с комплексными попарно сопряженными корнями.		
Нахождение комплексных корней многочлена 3-ей и 4-ой степеней	Приводятся формулы Кардано и метод Феррари, правда отработка этих методов запланирована в маленьком объеме, и чего напрашивается вывод о том, что данных материал не гласно авторами предлагается как дополнительный.	10 10-11	19 14
Нахождение целых и дробных корней многочлена с целыми коэффициентами.	Для целочисленных многочленов доказываются такие утверждения: целые корни находятся среди делителей свободного члена; числитель дробных корней находится среди делителей свободного члена, а знаменатель среди делителей старшего коэффициента; если старший коэффициент 1, то все его рациональные корни целые. Дается метод упрощенной проверки претендентов.	10 11	19, 22 18
Многочлены от нескольких переменных	Как алгебраическая сумма одночленов, каждый из которых представляет собой произведение переменных и числового коэффициента. В некоторых учебниках многочлены от нескольких переменных вводятся раньше многочлена от одной переменной.	10 11	19, 22 18, 24
Лексикографический порядок записи	Вводится стандартно и отрабатывается вместе с понятиями степени многочлена, степени многочлена относительно какой-либо одной переменной.	10 11	22 18, 24
Симметрические многочлены	Приводится понятие основного (элементарного) симметрического многочлена, выражение симметрического многочлена через основные симметрические, но не оговаривается применение такого представления.	10 11	22 18, 24

1.4. Содержательно-методическая линия теория многочленов в курсе алгебры в педагогическом вузе.

Проведем небольшой исторический экскурс по программам алгебры в педагогическом вузе [41].

1. Министерство высшего и среднего специального образования СССР, Министерство просвещения РСФСР. Программы педагогических институтов. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1965. Автор – профессор Л.Я. Куликов. [3]

АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ

Многочлены от одного переменного над числовыми полями.

Понятие многочлена над данным числовым полем, определение действий над многочленами. Понятие и свойства делимости многочленов над данным полем. Алгоритм деления с остатком. Деление многочлена на двучлен *x-a*. Схема разложения многочлена по степеням разности *x-a*.

Наибольший общий делитель двух многочленов и алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя двух многочленов. Наибольший общий делитель нескольких многочленов. Наименьшее общее кратное многочленов.

Приводимые и неприводимые многочлены над данным числовым полем. Свойства неприводимых многочленов. Уничтожение иррациональности в знаменателе. Разложимость многочлена в произведение неприводимых множителей и единственность такого разложения.

Теорема о неприводимом кратном множителе многочлена. Схема выделения кратных множителей многочлена.

Многочлены над полем комплексных чисел

Теорема о существовании корня многочлена в поле комплексных чисел (может быть лана без доказательства). Разложимость многочлена над полем комплексных чисел в произведение линейных множителей. Зависимость между корнями и коэффициентами.

Многочлены над полем действительных и над полем рациональных чисел

Сопряженность корней многочлена с действительными коэффициентами. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на неприводимые множители над полем действительных чисел. Отделение действительных корней многочлена.

Нахождение целых и рациональных корней многочлена с рациональными коэффициентами. Сведение вопроса о приводимости многочлена над полем рациональных чисел к вопросу о приводимости над кольцом целых чисел. Существование многочленов ненулевой степени, неприводимых над полем рациональных чисел. Признаки неприводимости.

Квадратичное расширение числового поля. Условие разрешимости в квадратных радикалах уравнений третьей степени с рациональными коэффициентами. Построения циркулем и линейкой.

Симметрические многочлены

Многочлены от нескольких переменных над числовым полем, определение действий над ними. Основные свойства действий над многочленами от нескольких переменных. Элементарные симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах и следствие из нее.

2. Министерство просвещения СССР. Программы педагогических институтов. Алгебра и теория чисел. Для специалистов №2104 «Математика» и «Математика и физика». – М.: Просвещение, 1977. Авторы программы профессор Л.Я. Куликов, профессор В.Г. Лемлейн [4]

Выдержки из объяснительной записки.

В последних темах курса изучаются кольца многочленов. Изучение начинается с построения кольца многочленов от одной переменной над областью целостности и доказывается, что оно есть область целостности. Это позволяет в дальнейшем ввести кольцо многочленов от нескольких переменных над данным целостным кольцом как кратное трансцендентное расширение.

Программа предусматривает доказательство алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. Вопрос об отделении действительных корней многочлена может быть изложен в обзорном порядке.

В последней теме изучаются многочлены с рациональными коэффициентами и элементы теории полей.

Материал курса имеет непосредственное отношение к математике средней школы. Одни его разделы тесно связаны со школьной программой по математике, а другие являются основой для школьных факультативных курсов. Достаточно времени отводится на решение задач, связанных со школьным курсом.

3. Министерство образования Российской Федерации. Примерная программа дисциплины Алгебра. Рекомендована Министерством образования Российской Федерации для специальности 032100 Математика. Утверждено Руководителем Департамента образовательных программ и стандартов профессионального образования: Л.С. Гребнев, 20.12.2001 г. Составители: к.ф.-м.н., профессор МПГУ Г.А. Карасев; д.ф.-м.н., профессор МПГУ А.А. Фомин., к.ф.-м.н., доцент МПГУ Е.Е. Шершова [6]

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

IV. КОЛЬЦО ПОЛИНОМОВ НАД ПОЛЕМ

Полиномы от одной переменной с коэффициентами из данного поля (области целостности). Операции над полиномами, их свойства. Степень полинома. Теорема о делении с остатком. Теорема Безу. Схема Горнера. Теорема о наибольшем возможном числе корней полинома в поле (области целостности). Алгебраическое и функциональное равенство полиномов. Рациональные корни полиномов с целыми коэффициентами.

Формальная производная полинома. Разложение полинома по степеням двучлена x-a.

Свойства делимости в кольце полиномов над полем. Тривиальные и нетривиальные делители. Приводимые и неприводимые над данным полем полиномы. Наибольший общий делитель двух полиномов, его выражение через исходные полиномы. Алгоритм Евклида.

Теорема о разложении нормированного полинома положительной степени в произведение неприводимых нормированных множителей. Каноническое представление полинома. Отделение кратных множителей. Поле рациональных дробей. Теорема о существовании разложения правильной дроби в сумму простейших дробей над произвольным полем.

Сравнения по модулю полинома. Свойства отношения сравнимости. Классы вычетов и их свойства. Поле классов вычетов по модулю неприводимого полинома. Расширение полей. Поле классов вычетов по модулю неприводимого полинома и поле рациональных дробей как расширения основного поля. Простое расширение поля, его эквивалентность полю классов вычетов по модулю неприводимого полинома и полю рациональных дробей над данным полем. Поле комплексных чисел как простое расширение поля действительных чисел при помощи неприводимого полинома $x^2 + 1$.

XIII. ПОЛИНОМЫ

Примитивные полиномы и лемма Гаусса. Факториальность кольца полиномов над факториальным кольцом.

Полиномы от нескольких переменных над областью целостности. Симметрические полиномы, основная теорема о симметрических полиномах. Теорема Виета. Результант двух полиномов. Исключение переменной из системы двух уравнений с двумя переменными.

Применение симметрических полиномов при решении задач школьного курса.

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложение полинома над полем комплексных чисел в произведение неприводимых множителей.

Сопряженность мнимых корней полинома с действительными коэффициентами. Приводимость полинома над полем действительных чисел.

Уравнения третьей и четвертой степеней (методы решения). Неприводимость полинома над полем рациональных чисел. Критерий Эйзенштейна.

Сравнение трех программ. Представленные программы по алгебре демонстрируют все возрастающую степень абстрактности изучаемого материала. Если в первой из них предполагалось рассматривать многочлены лишь над числовыми полями, то последняя программа предусматривает построение кольца многочленов над произвольной областью целостности.

4. Действующим Федеральным Государственным образовательным стандартом высшего образования (уровень – бакалавриат, направление подготовки – 44.03.05 педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)) [2] отмечено, что набор дисциплин программы бакалавриатаорганизация определяет самостоятельно в объеме, установленном настоящим ФГОС ВО, с учетом соответствующей примерной основной образовательной программы. Поэтому при определении содержательно-методической линии раздела «Алгебра многочленов» мною использовался рабочий план дисциплины по программе бакалавриата Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки «Математика и информатика») 2016 г» [7].

«Алгебра» одна из дисциплин вариативной части, на нее отводится 11 ЗЭТ, что равно 396 часам. Дисциплина распределена на 4 семестра. В 3-ем семестре изучается раздел «Теории чисел», в 4-ом – «Алгебра многочленов», 6-м – «Линейная алгебра» и в 7-м – «Алгебраические структуры». На раздел «Алгебра многочленов» отводится 2,5 ЗЭТ, что составляет 90 часов, из которых 20 часов лекционных, 20 часов лабораторных и 50 на самостоятельную работу студентов. Рабочей программой дисциплины предусмотрено следующее содержание раздела.

Раздел «Теория многочленов»

1. Построение кольца многочленов над областью целостности. Деление многочлена на двучлен х-с. Схема Горнера. Теорема Безу. Корни многочлена, признак корня. Основные задачи, решаемые с помощью схемы Горнера. Число различных корней многочлена. Функциональное и алгебраическое равенство многочленов. Деление с остатком. Основные свойства делимости многочленов. НОД двух многочленов, его однозначность с точностью до постоянного множителя. Нахождение НОД с помощью алгоритма Евклида. Линейная форма НОД. Неприводимые над данным полем многочлены. Основные свойства неприводимых многочленов. Разложение многочлена на неприводимые множители (теорема о факторизации). НОК двух многочленов. Нахождение НОД и НОК с помощью разложения на неприводимые множители. Связь между НОД и НОК. Кратность неприводимого множителя. НОД многочлена и его производной. Алгоритм отделения кратных множителей.

2. Многочлены над полем комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Неприводимые многочлены над полем комплексных чисел. Теорема о факторизации в кольце C[x]. Формулы Виета. Многочлены над полем действительных чисел. Сопряженность мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами. Многочлены, неприводимые над полем действительных чисел. Теорема о факторизации в кольце R[x]. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Леммы Гаусса о примитивных многочленах. Критерий Эйнштейна. Нахождение рациональных корней многочленов с рациональными коэффициентами. Границы корней многочленов с действительными коэффициентами, метод Штурма. Решение уравнений 3-ей и 4-ой степеней.

3. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Лексикографическое упорядочение членов многочлена, лемма о высшем члене произведения многочленов. Симметрические многочлены. Основные свойства элементарных симметрических многочленов. Основная теорема о симметрических многочленах. Применения симметрических многочленов. Симметрические многочлены в школьной математике.

В результате обучения студенты должны:

Знать:

Формально-логическое и функциональное определения многочлена; правила выполнения сложения многочленов, умножения многочлена на число, умножения многочленов; свойства операций над многочленами; значение многочлена; корень многочлена; теорема Безу; схема Горнера; теорема о делении с остатком; алгоритм Евклида нахождения НОД многочленов; линейная форма НОД многочленов; понятие делимости многочлена на многочлен; свойства делимости многочленов; неприводимые над данным полем многочлены; свойства неприводимых многочленов; алгоритм отделения кратных множителей многочлена; теорема о факторизации; правила нахождения корней многочленов 3-ей и 4-ой степеней; теорема о целочисленных корнях многочлена с целыми коэффициентами; теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами; формулы для нахождения границ корней многочлена; метод Штурма отделения корней многочлена.

Уметь:

Читать многочлен; упорядочивать члены многочлена; выполнять действия над многочленами: сложение, умножение на число, умножение многочленов, деление многочлена на многочлен «уголком», применять к решению задач теории многочленов; делить многочлен на двучлен по схеме Горнера; применять схему Горнера к решению задач теории многочленов; находить НОД многочленов по алгоритму Евклида и его линейную форму; отделять кратные множители; находить корни многочленов 3-ей степени в поле комплексных чисел; находить корни многочленов 4-ой степени в поле комплексных чисел; находить целые и рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами; определять границы действительных корней многочлена; отделять действительные корни многочлена друг от друга по методу Штурма.

владеть навыками:

Правильной записи многочлена; выполнения действий над многочленами: сложение, умножение на число, умножение многочленов

Применения алгоритмов: деления многочлена на многочлен «уголком», деления многочлена на двучлен по схеме Горнера, алгоритма Евклида, нахождения корней многочленов 3-ей степени в поле комплексных чисел, Нахождения корней многочленов 4-ой степени в поле комплексных чисел, нахождения целых и рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами, применения метода Штурма

к решению задач теории многочленов:

нахождение значения многочлена, определения кратности корня многочлена, разложения дроби на простейшие, сокращение дробно-рационального выражения, разложения многочлена по степеням (х-с), нахождения значений производных многочлена, нахождения НОД многочленов и его линейной формы, отделения кратных множителей, нахождения границ действительных корней многочлена и отделения действительных корней многочлена друг от друга.

1.5. Методы, организационные формы и средства обучения школьников и студентов педагогического вуза алгебре многочленов с использованием компьютерной анимации.

Методы обучения

При всем многообразии оттенков понятия метода обучения авторы едины в главном: метод обучения – это особый вид познавательной деятельности, в которой участвуют и обучающие и обучаемые, комплекс взаимосвязанных способов преподавания и учения, руководящая роль в котором принадлежит педагогу. На основании этих подходов метод характеризуется, с одной стороны, как способ познания, усвоения учебного материала и учебно-познавательной деятельности учащихся, а с другой – как способ передачи этих знаний, умений и навыков и способ организации управления этой деятельностью.

Более существенны расхождения в вопросах классификации методов обучения, их разделяют:

- по источникам знаний: словесные методы, наглядные, практические (Е.Я. Голант);
- по этапам обучения: методы приобретения знаний, творческой деятельности, закрепления, проверки знаний, умений и навыков (М.А. Данилов, Б.П. Есипов);
- по характеру деятельности и степени самостоятельности и творчества: объяснительно-иллюстративные, репродуктивные, проблемного изложения, частично-поисковые, исследовательские (М.Н. Снаткин, И.Я. Лернер);
- по отношению обучающих и обучающихся к источникам передачи и приобретения знаний: словесные методы, методы работы с книгой, наблюдения, эксперимент, упражнения и практические работы (И.Т. Огородников);
- на основе сочетания метода преподавания с соответствующим методом учения: информационно-обобщающие и исполнительские, объяснительные и репродуктивные, инструктивно-практические и продуктивно-практические; объяснительно-побуждающие и частично-поисковые; побуждающие и поисковые (М.И. Махтутов).

Среди причин, стимулирующих разработку и внедрение новых методов, важную роль играют изменения, происходящие не только в целях и содержании образования, но и в его средствах. Это обстоятельство отчетливо проявилось в последние десятилетия, т.е. с появлением ЭВМ. В свою очередь, использование компьютеров в образовании потребовало разработки новых специфических методов, облегчающих достижение целей образования.

Авторами монографии «Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики» Майером В.Р.и Семиной Е.А. [46] выделяются следующие методы обучения с использованием компьютера (формулировки подкорректированы в соответствие с целями описываемой методической системы):

- метод использования компьютера как инструмента, позволяющего значительно расширить иллюстративную базу курса;
- метод использования компьютера для формирования алгоритмической культуры школьников и студентов;
- метод использования компьютера при решении вычислительных задач;
- метод использования компьютера при решении задач на визуализацию объектов;
- метод использования информационных технологий в качестве средства создания творческого, эмоционального отношения к процессу решения задач;
- метод создания и использования баз данных;
- метод использования информационных технологий в качестве средства экспериментирования и моделирования;
- метод учебных информационно-ориентированных проектов.

Все перечисленные методы дополняют традиционную методическую систему обучения, как в школе, так и в вузе согласно требованиям к современному выпускнику к овладению современными компьютерными технологиями.

Формы обучения в данной методической системе дополняются лабораторной работой в компьютерном классе. Кроме того, при предлагаемой организации учебного процесса предполагается увеличение доли самостоятельной работы учащихся по поиску необходимого материала, методов решения. Доступность компьютерной техники, интернета дает учащимся расширенные возможности для поиска материала, что позволяет не ограничиваться теми источниками, которые предлагает учитель.

Средства обучения.

В методических системах средства обучения подчиняются прежде всего целям и содержанию, соответствуют методам и формам обучения. Поэтому им обычно отводится второстепенная, вспомогательная роль. В разрабатываемой методической системе роль средств обучения значительно возрастает. С появлением компьютеров и информационных технологий стала возможной постановка таких дидактических целей, которые в более раннее время были трудно реализуемы. В связи с этим в данной методической системе предлагается использование наряду с традиционными средствами обучения, компьютерные:

- учебники и учебно-методические пособия
- компьютерные средства обучения: персональные компьютеры, интерактивная доска, проектор, соответствующее программное обеспечение (в нашем случае наличие установленной компьютерной среды GeoGebra).

ГЛАВА 2. Анимационно-геометрический метод на базе компьютерной среды GeoGebra при изучении многочленов в школе и вузе.

2.1. Анимационные возможности GeoGebra

Анимационно-геометрический метод, описанный Лариным С.В. в [42] демонстрирует возможности изложения практически всех алгебраических алгоритмов геометрическим языком. А за счет анимации эти процессы становятся «живыми». Можно с помощью этого метода оживить процесс сложения, вычитания, умножения и деления чисел, даже деление с остатком. Такой нестандартный подход к изучению алгебры позволяет посмотреть на привычные алгоритмы с другой стороны, что способствует лучшему их освоению.

Все сказанное выше в не меньшей мере относится и к студентам педагогических вузов – будущим учителям математики. Прежде, чем требовать от них применения тех или иных технологий в практической деятельности, необходимо продемонстрировать их эффективность на примере преподавания вузовских дисциплин.

Преподавание математики в педагогическом вузе для бакалавров (специалистов) математиков отличается от преподавания математики в техническом вузе большим объемом теоретического материала по отношению к практическому. Задача преподавателя математики в педагогическом вузе не просто научить студентов решать конкретные задачи, но еще и попытаться выработать у них умение и навыки проводить математические доказательства, строить логические цепочки математических рассуждений, сформировать навыки математической речи и еще достаточно много компетенций, необходимых учителю математики. В этой ситуации наиболее ценными были и остаются классические учебники, тетрадки с ручками для студентов, обычные доска и мел для преподавателя. Но и в такой ситуации можно и нужно использовать возможности компьютерной техники.

В обучении в рамках системно-деятельностного подхода большое значение имеет эксперимент. Обучающиеся не должны быть пассивными участниками образовательного процесса, введение нового материала не должно проходить как простая передача знаний от учителя ученику. Ученик должен сам приходить к нужным заключением под руководством учителя. Когда учащийся принимает активное участие в приобретении знаний, усвоение материала происходит гораздо лучше. Однако организовать экспериментальную работу на уроках математики не так просто, как, например, на уроках физики, химии, биологии. Все эксперименты в основном носят теоретический характер, когда с помощью уже полученных знаний и направляющей помощи учителя ученик приходит к новым знаниям. Наиболее интересен самостоятельно организованный и проведенный эксперимент. В этой ситуации на помощь учителю математики приходят компьютерные технологии. В частности, компьютерная среда GeoGebra для этого очень хорошо подходит.

Значение GeoGebra в обучении геометрии трудно переоценить, труднее увидеть ее значение в обучении алгебре. Однако хотелось бы использовать возможности визуализации и анимации GeoGebra применительно к процессам, которые преобладают в курсе алгебры, для того, чтобы сделать для школьников и студентов понятнее суть этих процессов и более приятным само их выполнение.

В частности система динамической математики GeoGebra позволяет создавать «живые» чертежи. Задавая основные параметры объектов, мы можем проследить изменение исследуемых характеристик.

GeoGebra позволяет реализовать следующие способы анимации:

- С помощью простого механического перетаскивания мышью и изменения размеров, взаимного расположения. С помощью этой функции учащийся может задавать нужный ему размер, компоновку, ракурс. Это необходимо в задачах на исследование свойств объектов, при проведении анализа в решении задач, при демонстрации полученного результата. Например, если построить параллелограмм строго по его определению на парах параллельных прямых, то можно изменять размеры его сторон, углов, выбирать нужный поворот, что значительно облегчает исследование этого объекта и анализ связанных с ним задач.

- С помощью кнопки «анимация». Для этого достаточно выделить «оживляемый» объект и правой кнопкой мыши его анимировать. При этом если данный объект ни к чему не привязан, то его движения будут хаотичными. Необходима зависимость анимируемых объектов от статических данных. Это может быть его привязка к месту, размеру, свойствам (выполнение построений с заданием определенных свойств объекта, например, параллельность, равенство и т.д.).
- С помощью ползунка. Этот способ незаменим для освоения алгоритмов каких-либо действий, демонстрации пошагового их выполнения. Также удобно использовать ползунок в качестве параметра для исследования возможных вариантов в заданном диапазоне значений. Например, ученик может самостоятельно исследовать траекторию «движения» графика. Если не рассматривать каждый случай «движения» графика отдельно, а задать все возможные перемещения в виде параметров, то ученик сможет самостоятельно описать все возможные случаи. Если задать график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – параметры, то ученик, меняя значения параметров с помощью «ползунков», сможет посмотреть динамику изменения графика. Скучная тема превращается в интересную исследовательскую работу, которая вполне под силу любому ученику. «Играя» с графиком, ученик изучает свойства функции, задающей этот график. Далее дело учителя направить деятельность ученика из просто игровой в исследовательскую, дополнив задание ученика конкретными задачами. Например, дать задание изменить значение параметров «ползунка» так, чтобы график занял определенное положение, а на следующем этапе,

попросить ученика записать аналитическое выражение функции, имеющей график определенного вида. Заданий подобного вида для исследовательской работы ученика можно придумать достаточно большое количество.

В зависимости от методической цели, которую ставит перед собой педагог, возможно применение любого из данных видов анимации. Механическое перетаскивание объектов можно применять для проверки небольшого диапазона изменений, для отработки основных определений (в случае правильного построения при движении не должны нарушаться свойства объекта). Использование автоматической анимации дает возможность проводить исследование совершенно новых понятий и объектов. При задании ползунка можно проверить насколько хорошо учащийся знает исследуемый объект и понял поставленную задачу. Только предварительно исследовав некоторые свойства объекта, учащийся сможет правильно задать параметры ползунка.

Способность объектов в GeoGebra «оставлять след» облегчает решение задач на поиск геометрического места точек. А возможность анимации построенных объектов позволяет охватить весь спектр возможностей, которые без применения визуальной анимированной картинки учащийся мог бы упустить. Эта возможность ценна не только в освоении геометрии, но и в освоении алгебры.

Чтобы занятие «GeoGebra» не превращалось просто в игру, учитель может продумать задания таким образом, которые бы требовали применения ранее полученных знаний. Например, с тем же параллелограммом можно поставить задачу описания его свойств, предупредив о построении параллелограмма строго по его определению. Если ученик пренебрег этими требованиями, это сразу будет видно при перемещении объекта, а значит, описать правильно свойства параллелограмма не получится. Работа в GeoGebra также требует от учащегося точного знания основных понятий и свойств и не освобождает от обычной работы их по запоминанию и закреплению.

2.2. Анимационно-геометрический метод на базе GeoGebra в обучении школьников алгебре многочленов.

Как отмечалось в пункте 1.2, применение компьютерных технологий дает педагогу неоспоримые преимущества в обучении. Однако применение любой технологии должно соответствовать главной цели. Как бы ни были привлекательны возможности анимации, предлагаемые компьютерными программами, необходимо в первую очередь думать о целесообразности их использования в учебном процессе. Попробуем пересмотреть описанные в пунктах 1.3. и.1.4. программы изучения многочленов в школе, а в параграфе 2.3 и в вузе, с точки зрения применения анимационных возможностей GeoGebra для повышения эффективности обучения.

В школьном курсе математики изучение многочленов в 7 классе преследует цель научить школьников преобразовывать рациональные выражения и решать рациональные уравнения, неравенства и их системы. Здесь на первый план выходят тождественные преобразования выражений. С этой целью из теории многочленов следует вынести на отработку в 7-м классе форму записи многочлена, стандартный вид многочлена. Именно в 7 классе очень хорошо начать работу в GeoGebra. Конечно, с самой программой они могут познакомиться и задолго до 7 класса, даже учащиеся начальной школы смогут освоить самые простые функции GeoGebra и научиться их применять. Серьезное освоение данной программы для изучения математики целесообразно начать именно с 7 класса. Для этого существует несколько причин: в 7 классе начинается изучение геометрии, а GeoGebra большей частью оперирует именно геометрическими объектами. В курсе алгебры до 7 класса изучаемый материал больше требует «ручной» отработки - выработки вычислительных навыков, умения оперировать с рациональными числами. В тоже время содержание геометрического и алгебраического материала в 7 классе позволяет использовать GeoGebra для решения задач, направленных большей частью на освоение возможностей самой GeoGebra. Это же относится к теории многочленов.

В 7 классе учащиеся должны хорошо освоить такие понятия, как одночлен, многочлен, степень одночлена, степень многочлена, старший член многочлена, стандартный вид одночлена, многочлена, сложение многочленов, умножение многочлена на число и умножение многочленов. Для успешного понимания данных понятий и закрепления умений необходимо дополнительно освоение следующих знаний и умений:

- сложение, вычитание, умножение натуральных чисел;
- сложение рациональных чисел;
- вычитание рациональных чисел;
- умножение рациональных чисел;
- понятие алгебраического выражения;
- действия с алгебраическими выражениями;
- приведение подобных в алгебраическом выражении;
- значение алгебраического выражения.

Отработка перечисленных умений и закрепление новых понятий и действий может происходить с помощью среды GeoGebra. Освоение основных функций GeoGebra не займет у учащихся много времени. Кроме того, это может стать темой интегрированного урока математики с информатикой. Первоначальное освоение возможностей анимации GeoGebra возможно производить на уроках информатики. Закрепления умений выполнения анимации в GeoGebra возможно и на уроках алгебры при решении задач, направленных на освоение таких понятий и умений, как: геометрический смысл алгебраических операций над числами, линейная функция, квадратичная функция, рациональная функция, значение одночлена, значение многочлена, линейное уравнение, рациональное уравнение, приложение этих умений к физическим задачам. При решении задач такого типа с использованием GeoGebra освоение понятий и правил принимает игровую форму. Учащиеся сами смогут выводить правила. Помощь учителя в данном случае будет заключаться в создании шаблонов, так как ученикам на первом этапе знакомства с новым понятием сложно понять, что именно от него требуется. Имея перед глазами готовый шаблон, учащийся без предварительной теории в состоянии самостоятельно сформулировать свойства исследуемого объекта, правила действий над ним.

В учебном пособии Ларина С.В. «Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики» [42] очень подробно, языком доступным даже ученику, описаны правила геометрического моделирования операций над действительными числами. Приведем пример предлагаемого Лариным С.В. **геометрического сложения действительных чисел**

Чтобы к действительному числу a прибавить действительное число b, нужно на оси ординат отметить точки $A(0,a)$ и $B(0,b)$, построить направленные отрезки (векторы) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, а затем к вектору $\overrightarrow{OA}$ присоединить вектор $\overrightarrow{OB}$. Получим вектор $\overrightarrow{OC}$, который называется суммой векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. При этом пишут: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$. Если получаем точку $C(0,c)$, то $a+b=c$.

Построение (рис. 1).

1) На оси ординат отмечаем точки $A(0,a)$ и $B(0,b)$.

2) Строим вспомогательную прямую для сложения: отмечаем на оси абсцисс точку M, отличную от начала координат, и проводим через нее вертикальную прямую.

3) Проектируем точку B на прямую для сложения: проводим прямую через точку B параллельно оси абсцисс и отмечаем точку N пересечения построенной прямой с прямой для сложения.

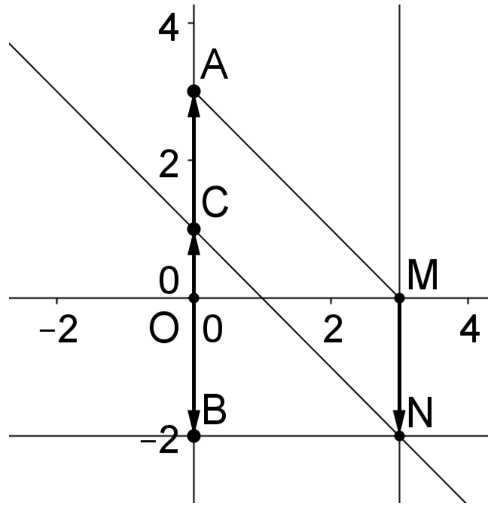


Рис. 1

4) Соединяем (отрезком) точки A и M.

5) Через точку N проводим прямую параллельно построенному отрезку AM и отмечаем точку C пересечения построенной прямой с осью ординат. Построение закончено. Ордината точки C равна $a+b$. Передвигая точки A и B по оси ординат, в точке C всегда будем иметь сумму.

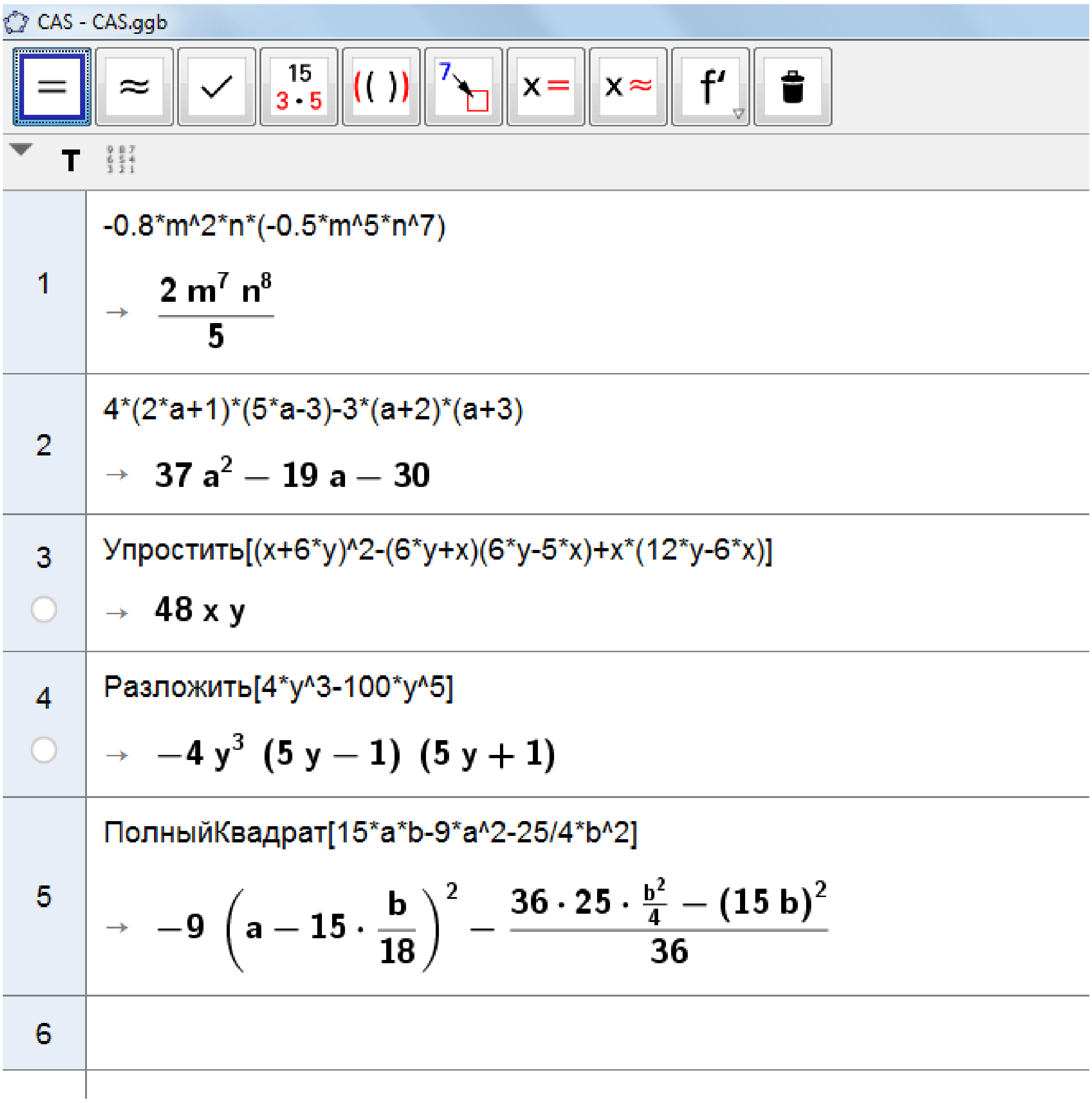
Для наглядности строим соответствующие векторы. «Пристраивание» к вектору $\overrightarrow{OA}$ вектора $\overrightarrow{OB}$ можно представить как перемещение вектора $\overrightarrow{OB}$ параллельно себе до положения $\overrightarrow{MN}$, а затем «по горке» MA перемещаем его на ось ординат. В результате начало вектора $\overrightarrow{OB}$ совмещается с концом вектора $\overrightarrow{OA}$, а результирующий вектор $\overrightarrow{OC}$ имеет своим началом начало вектора $\overrightarrow{OA}$, а концом – конец перемещенного вектора $\overrightarrow{OB}$.

Заметим, что построенная анимационная модель позволяет демонстрировать свойство нуля: $a+0=0+a=a$ для любого действительного числа a.

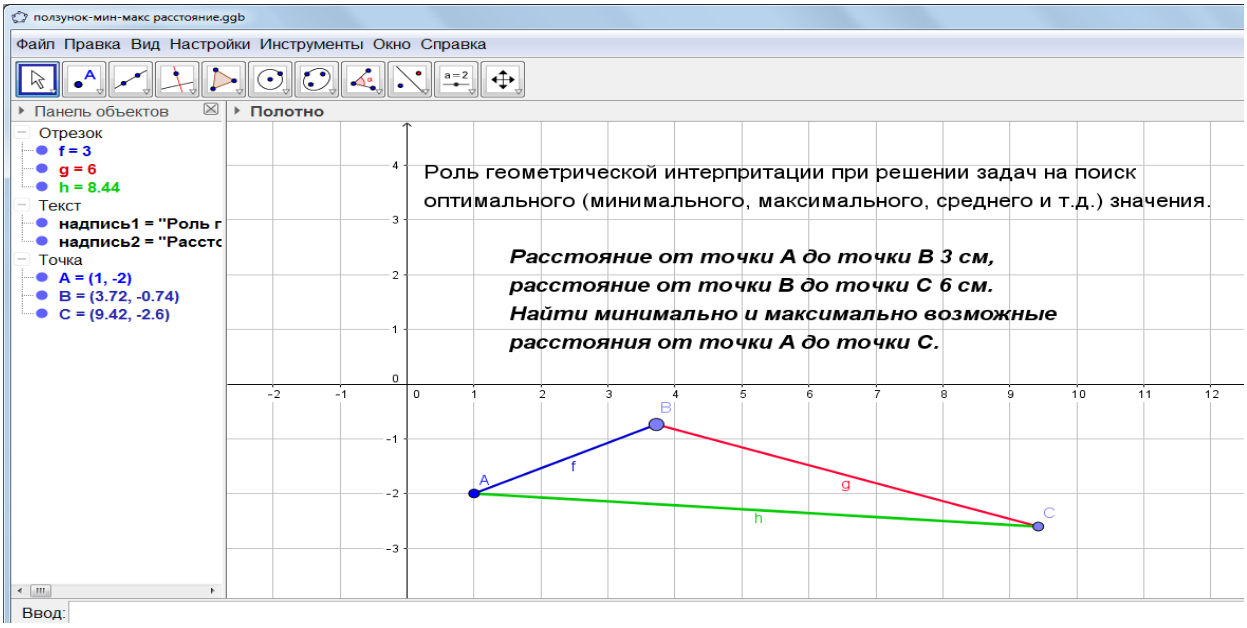
Учащемуся достаточно знать понятие геометрического вектора и правила действий над геометрическими векторами, чтобы освоить смысл такого моделирование. Но и не зная векторов, ученик сможет освоить приведенные алгоритмы и выполнять алгебраические операции над действительными числа. Суть данного моделирования заключена в построении некоего «прибора», который меняет параметры входных данных простым перемещением по плоскости и выдает результат в виде геометрического объекта. Учащиеся визуально видят все происходящие изменения и могут вывести свойства операций, опираясь на свое чувственное восприятие происходящего. Это способствует развитию образного мышления. Увиденная «живая» алгебра гораздо лучше запоминается, потому что при этом задействуется не только визуальное восприятие, но и тактильное, и чувственное.

Приведем примеры решения задач из перечисленных выше, решаемых в теории многочленов с помощью анимации GeoGebra, доступной учащемуся 7-го класса.

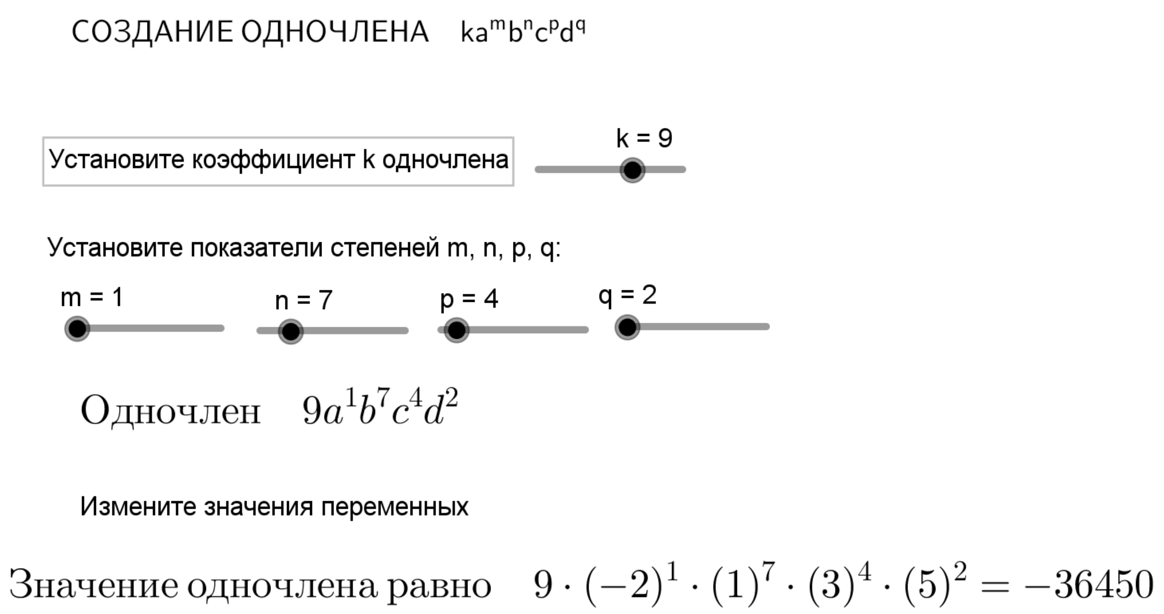
Пример 1. *Отработка действий в GeoGebra с алгебраическими выражениями таких, как стандартная запись, приведение подобных, упрощение, разложение на множители.*



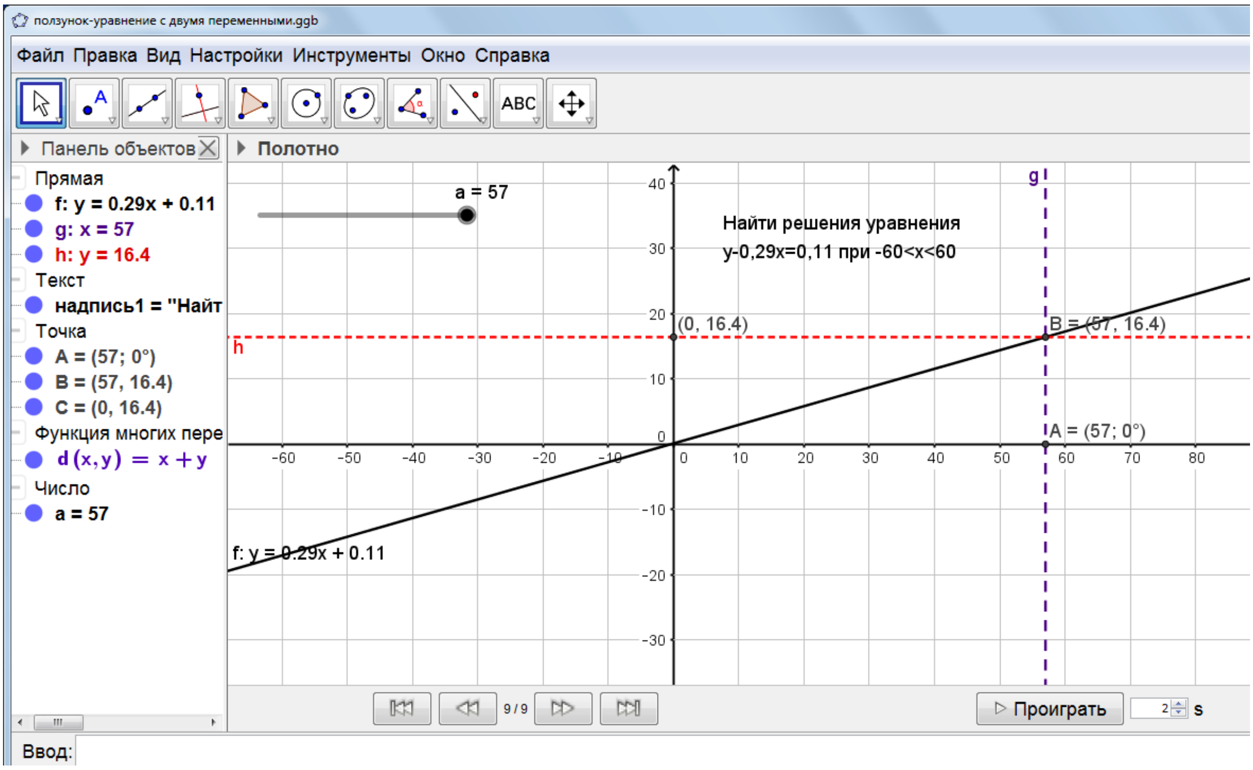
Пример 2. *Для начальной выработки навыков работы с анимацией можно учащимся предложить задачи такого типа, где требуется самостоятельно вывести какие-либо свойства объекта. Например, задачи на нахождение минимального и максимального возможных значений.*



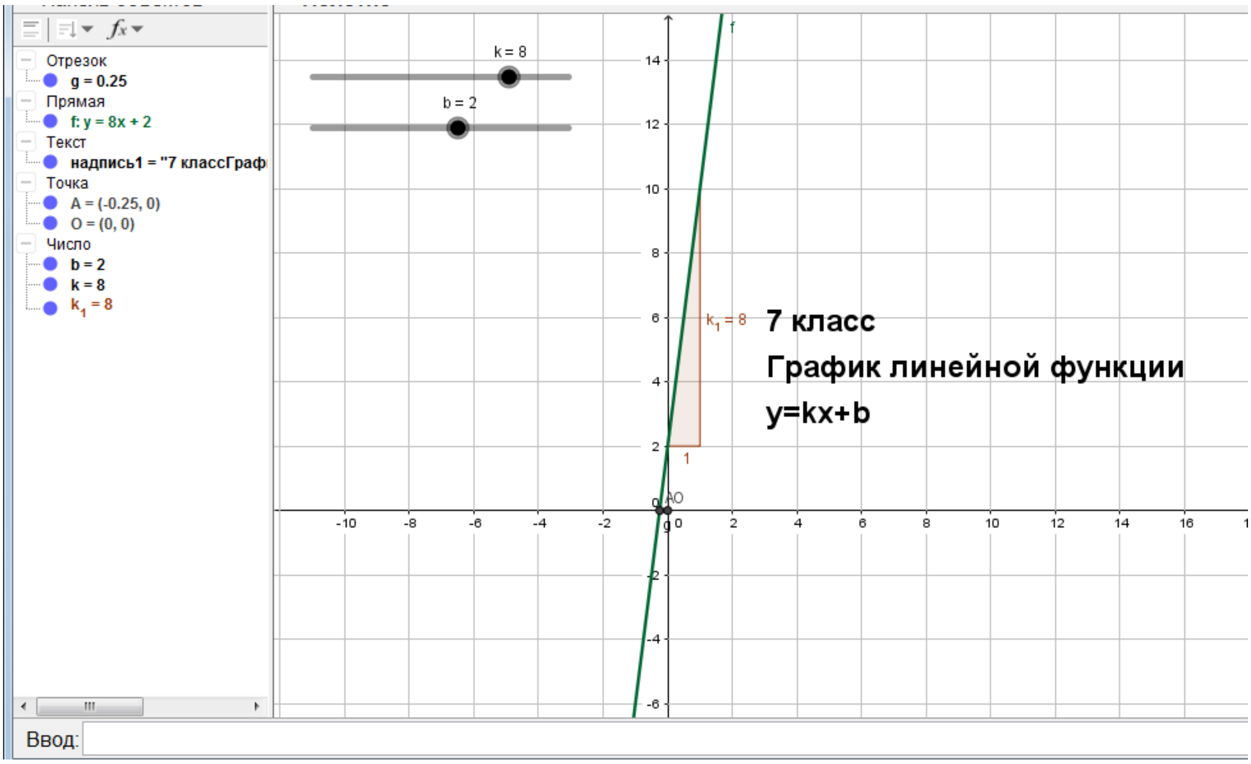
Пример3. *Закрепление понятия одночлена и значения одночлена.* С помощью ползунков учащиеся меняют степени переменных в записи одночлена, подставляя вместо переменных числовые значения, и находят значения полученных одночленов.



Пример 4. *С помощью ползунка учащиеся могут находить решение уравнения с двумя неизвестными.* Школьники визуально могут убедиться, что их бесконечно много даже, если значения одной из переменных ограничить в заданном диапазоне. Записав в функциональной строке уравнение, получим график определяющей ее функции. Передвигая прямую, перпендикулярную оси OX в заданном интервале, в пересечении с графиком функции будем получать точки, координаты которых и будут решением данного уравнения. Здесь у учеников вырабатывается понимание, что такое уравнение с двумя переменными, значение функции, решение уравнения, решение уравнения с двумя переменными. Ответ учащиеся могут смотреть как непосредственно на чертеже, так на панели объектов слева от чертежа.



Пример 5. *Исследование графика функции.* На примере самый простой случай – линейная функция. Работая в GeoGebra учащиеся выводят правила расположения графика в зависимости от значений коэффициента и свободного члена.



При решении алгебраических задач в GeoGebra с использованием геометрической интерпретации действий, анализ решения нередко осуществляется через поиск геометрического места точек. В этом случае значительно облегчает задачу возможность геометрических объектов в GeoGebra оставлять след при движении оставлять.

Анализ учебников алгебры 8-9 классов показал, что изучение нового материала теории многочленов в этот период не происходит. Значит можно этот период с учениками решать задания на отработку навыков работы с анимацией в GeoGebra. Подходящих задач для этого в курсе алгебры достаточно. Это и задачи на моделирование какого-нибудь физического, химического процесса, и задачи на исследование свойств функций, на выполнение действий над алгебраическими выражениями.

Материал теории многочленов программы профильного уровня 10-11 классов содержит большую часть материала вузовского раздела теории многочленов в курсе алгебры. Вводятся и отрабатываются те же понятия, те же алгоритмы, но содержится меньше доказательств используемых фактов, или они доказываются в несколько упрощенном варианте. Значит, отработка основных умений и алгоритмов может идти тем же путем, что и в педагогическом вузе. Рассмотрим возможности применения анимации к этому материалу в следующем параграфе.

В **приложении** к данной работе содержится разработка С.В. Ларина по применению GeoGebra к отработке основных действий с целыми числами и многочленами, таких как деление с остатком, схема Горнера, алгоритм Евклида. В данной разработке показаны пошагово все построения и применение анимационно-геометрического метода к выполнению перечисленных действий.

2.3. Анимационно-геометрический метод на базе GeoGebra в обучении студентов педагогического вуза.

В нашем вузе на математическом профиле студенты один семестр изучают алгебру многочленов. Как известно, данный курс содержит много трудоемких вычислений, которые в определенном количестве и на определенном этапе освоения необходимо выполнять вручную. Это способствует лучшему усвоению промежуточных операций и свойств, но не способствует повышению интереса студентов к изучению данного курса.

Основу раздела алгебры многочленов составляют:

– теория делимости многочленов (теорема Безу, теорема о делении с остатком, схема Горнера, алгоритм Евклида нахождения НОД);
– неприводимость многочленов над различными числовыми полями, представление многочленов в виде произведения неприводимых многочленов;
– нахождение корней многочленов над различными числовыми полями;
– многочлены от нескольких переменных.

Применение GeoGebra при обучении алгебре студентов педагогического вуза будет способствовать формированию следующих профессиональных компетенций будущих учителей математики: способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2); способность использовать возможности образовательной среды для достижения метапредметных и предметных результатов обучения (ПК-4); готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11).

Для формирования вышеотмеченных компетенций от учащегося требуется всестороннее понимание места и значимости изучаемого материала. Поэтому студент, изучая тот или иной раздел курса, должен четко представлять себе ответ на вопрос «для чего это нужно». Если есть визуальная картинка, да еще и присутствует эффект анимации – у учащегося автоматически этот вопрос отпадает. Описанный Лариным С.В. [42] анимационно-геометрический метод дает возможность проиллюстрировать анимированными картинками практически все алгоритмы вузовского курса.

В своей работе Ларин С.В. демонстрирует, что в компьютерной среде GeoGebra можно геометрическим языком показать сложение и умножение чисел, многочленов, построение графиков многочленов. Основываясь на этом возможно также проводить в геометрическом виде деление многочлена на двучлен, а значит решать целый ряд задач с применением схемы Горнера в среде GeoGebra [36], [43,44].

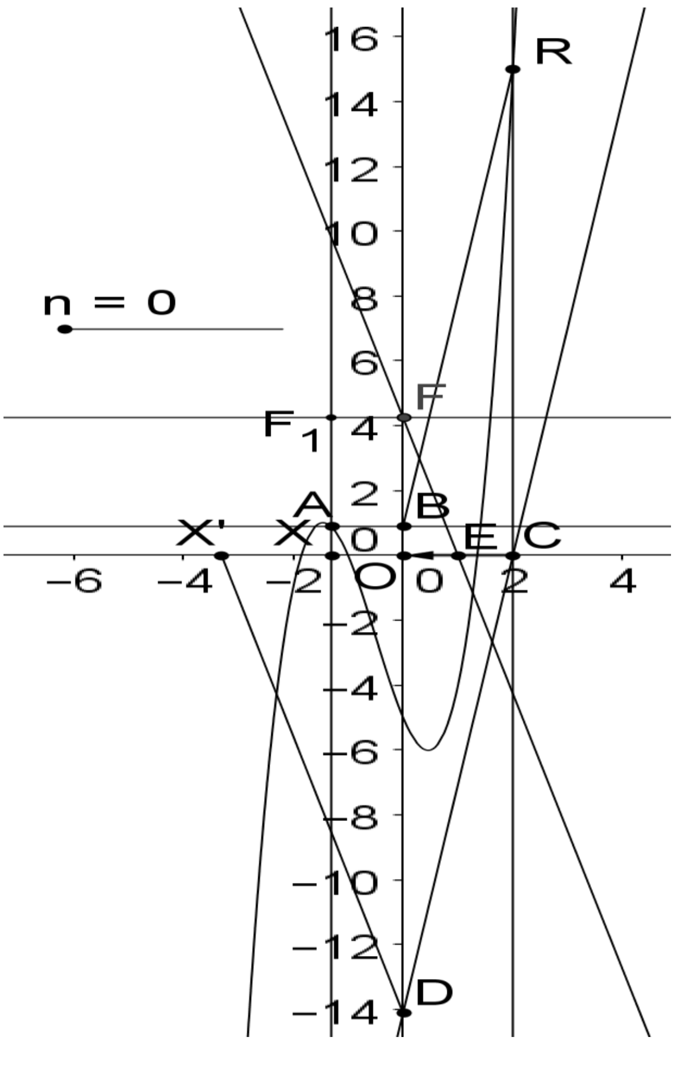
Некоторые действия сами не сложны в выполнении, легко усваиваются, но используются при решении множества других задач. Таким, например, является схема Горнера деления многочлена на двучлен. Сама процедура достаточно быстро усваивается студентами, а выполнение ее сводится к монотонным однотипным вычислениям. С помощью схемы Горнера студенты решают такие задачи, как:

1. разделить данный многочлен $f(x)$ с остатком на двучлен $x-c$,

2. разложить данный многочлен $f(x)$ по степеням $x-c$.
3. найти остаток от деления данного многочлена $f(x)$ на $x-c$.
4. выяснить, является ли данное число c корнем многочлена $f(x)$ и если да, то найти кратность этого корня.
5. найти значение многочлена $f(c)$.
6. найти значение многочлена $f(c)$, где значение переменной имеет специальный вид типа $c=1{,}9$, либо $c=2{,}1$.
7. найти значение многочлена $f(x)$ и всех его производных при $x=c$.

Решение этих задач сводится к решению двух основных задач: разделить с остатком данный многочлен $f(x)$ на двучлен $x-c$, и разложить данный многочлен по степеням этого двучлена. Эту процедуру нетрудно выполнить с помощью компьютера, если реализовать с помощью программных средств или каких-либо существующих оболочек описанный Горнером алгоритм, но в этом случае роль компьютера сведется к роли калькулятора и приведет снова к скучному выполнению однотипных действий. Более того, при таком подходе студенты очень скоро забудут саму схему Горнера – т.е. получим больше минусов, чем плюсов. Сергеем Васильевичем на основе описанного им анимационно-геометрического метода создан так называемый «прибор» деления многочлена на двучлен по схеме Горнера. Разделить с остатком данный многочлен $f(x)$ на двучлен $x-c$ значит найти неполное частное $q(x)$ и число r такие, что $f(x)=(x-c)\cdot q(x)+r$. Отсюда видим, что $r=f(c)$ – ордината точки пересечения вертикали, проведенной через точку $C=(c,0)$, с графиком данного многочлена. График многочлена $q(x)=\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ вычертит точка $F_1=(x,q(x))$, которую легко построить циркулем и линейкой. Зная же график многочлена $q(x)$, можно найти этот многочлен.

Кроме визуализации нахождения неполного частного и остатка от деления многочлена на двучлен и замены вычислительной процедуры механическим перемещением точки большое значение имеет сам процесс построения «прибора» деления многочлена на двучлен по схеме Горнера. На первом этапе строится прибор нахождения многочлена по его графику. В GeoGebra изначально не заложена эта процедура, т.е., если график функции получен в результате действий над другими функциями, выполненными в GeoGebra, то мы не увидим его аналитического выражения. Сергей Васильевич предлагает построить «прибор» нахождения такого выражения по графику. Для его построения студенту придется освоить геометрическое сложение и умножение действительных чисел, а значит вспомнить некоторые факты из школьной геометрии, чего раньше не делалось при изучении данного курса, посмотреть на коэффициенты многочлена с непривычной точки зрения, да и сам многочлен в данном случае рассматривается как некоторая рекурсивно-заданная функция. С таких позиций многочлены в курсе высшей алгебры в нашем вузе точно не рассматривались раньше.



В качестве ***примера*** построим прибор, который выполнит деление с остатком многочлена $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$ на $x - 2$.

Построение прибора.

1) Строим вспомогательные точки $O = (0,0)$, $E = (1,0)$, ключевую точку $C = (2,0)$ и на оси абсцисс отмечаем «текущую» точку X. Проводим вертикали через точки C и X.

2) Строим целочисленный ползунок для параметра $n = 0,1,2,3,4$ и устанавливаем значение $n = 0$.

3) Строкой ввода строим график многочлена $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$. Отмечаем точку R пересечения графика с вертикалью, проходящей через точку $C = (2,0)$. В нашем случае $R = (0,15)$. Следовательно, при делении данного многочлена на двучлен $x - 2$ получаем остаток $r = 15$. Искомое неполное частное запишем в виде $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$.

4) Отмечаем точку A пересечения графика многочлена $f(x)$ с вертикалью, проходящей через точку X, и проектируем ее на ось ординат, получаем точку B. Строим вектор $\overrightarrow{CO}$ и сдвигаем точку X на этот вектор. Получаем точку $X' = (x - c,0) = (x - 2,0)$.

5) Строим точку $F_1 = (0, f_1(x))$, где $f_1(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = b_2x^2 + b_1x + b_0$ (рис. 1). Видим, что $b_0 = f_1(0)$.

6) Присваиваем точке F_1 условие видимости $n = 1$, стираем (делаем невидимыми) объекты, которые не нужны для дальнейших построений, и устанавливаем на ползунке $n = 1$.

7) Аналогично строятся точки $F_2 = (x, f_2(x))$ и $F_3 = (x, f_3(x))$, где $f_2(x) = \dfrac{f_1(x) - f_1(0)}{x} = b_2x + b_1$ и $f_3(x) = \dfrac{f_2(x) - f_2(0)}{x} = b_2$. Точкам F_2 и F_3 присваиваем условие видимости соответственно $n = 2$ и $n = 3$. Видим, что $b_1 = f_2(0)$, $b_2 = f_3(0)$. При анимации точки X каждая из точек F_1, F_2, F_3 вычертит график. На оси ординат ставим точки B_0, B_1, B_2 и передвигаем их в точки пересечения соответствующего графика с осью ординат. Тогда $B_0 = (0, b_0)$, $B_1 = (0, b_1)$, $B_2 = (0, b_2)$. Условия видимости этих точек соответственно $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

8) Вводим числа $r = y(R)$, $b_0 = y(B_0)$ $b_1 = y(B_1)$, $b_2 = y(B_2)$ и делаем надпись: «Ответ: $f(x) = (x - c) \cdot (b_2x^2 + b_1x + b_0) + r$». При записи равенства

параметры c, b_2, b_1, b_0, r берем в «Объектах». Условие видимости надписи $n = 4$.

Этапы использования прибора можно проследить на рисунках 2-6.

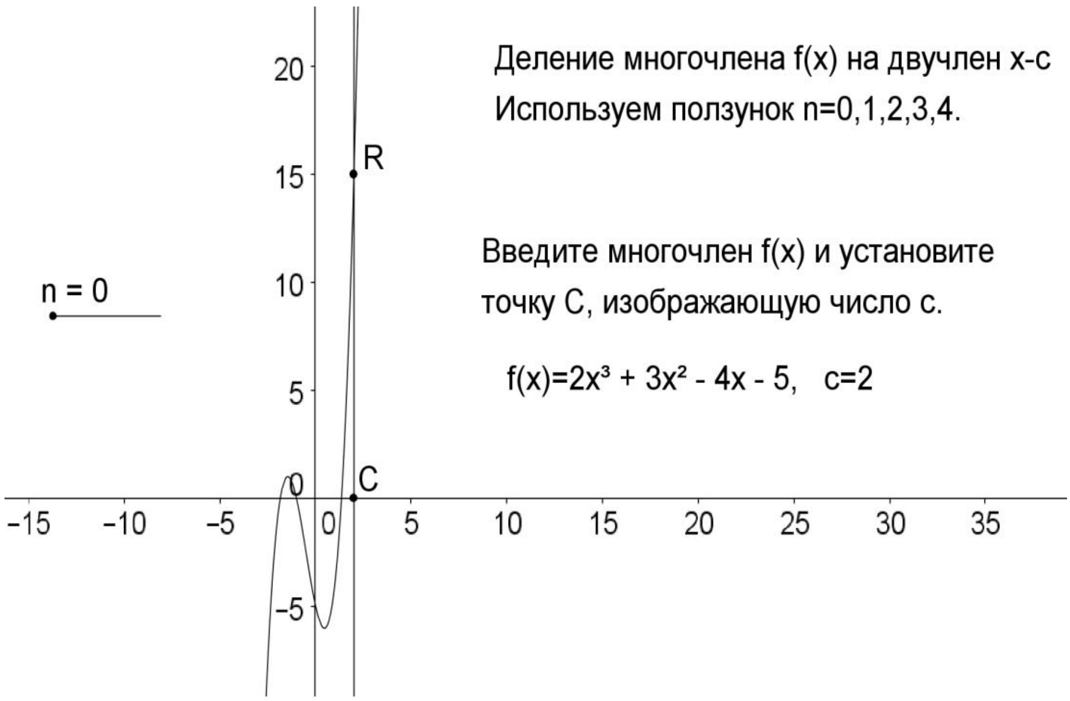


Рис. 2

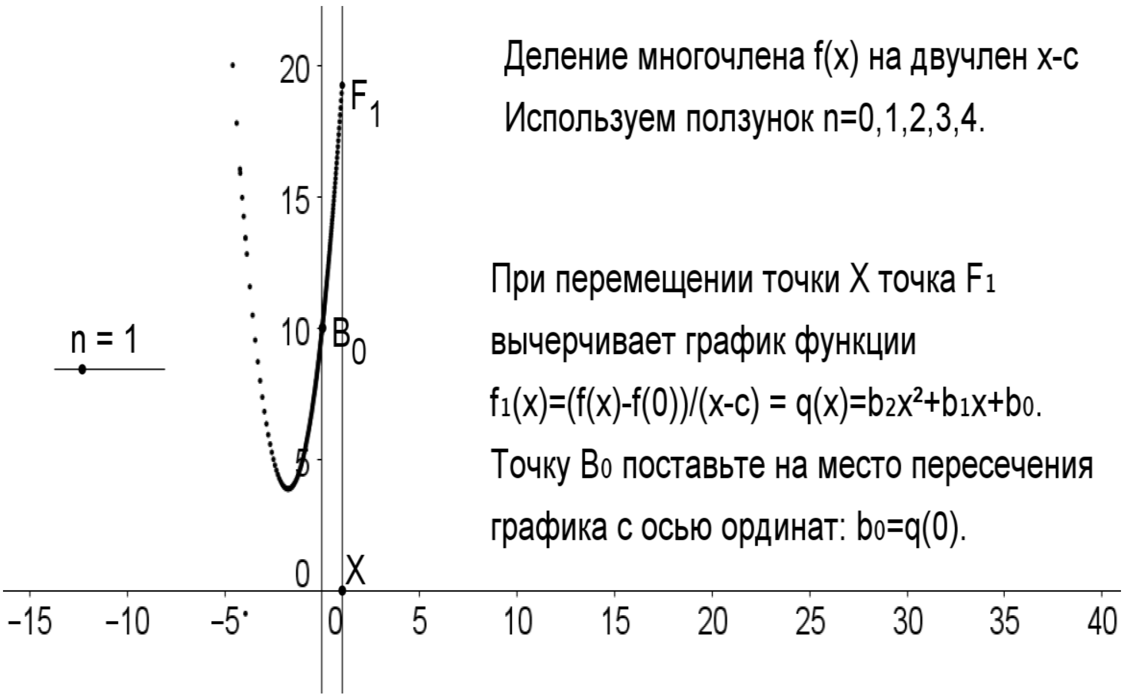
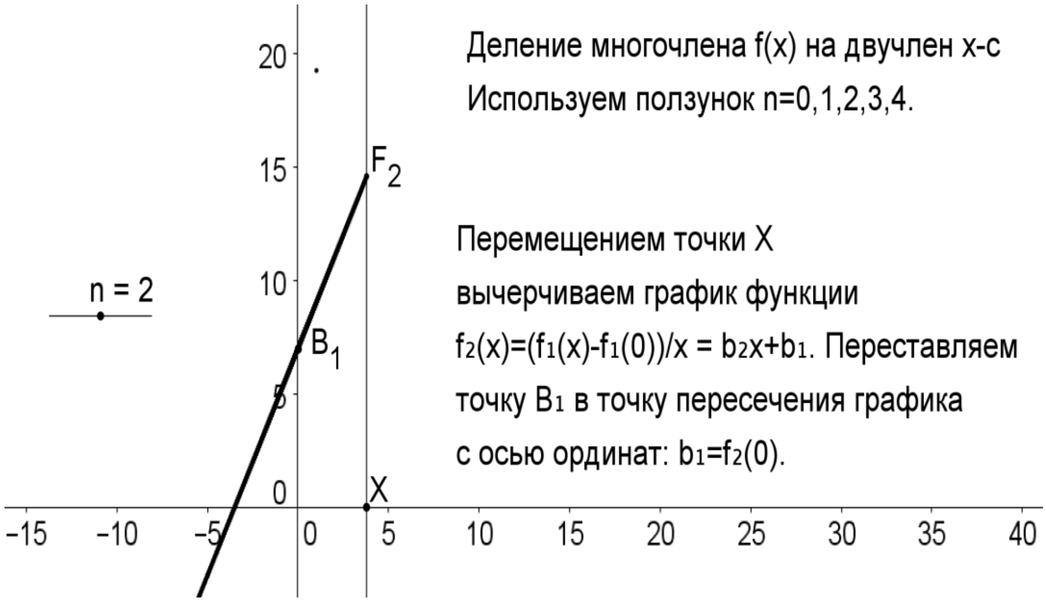
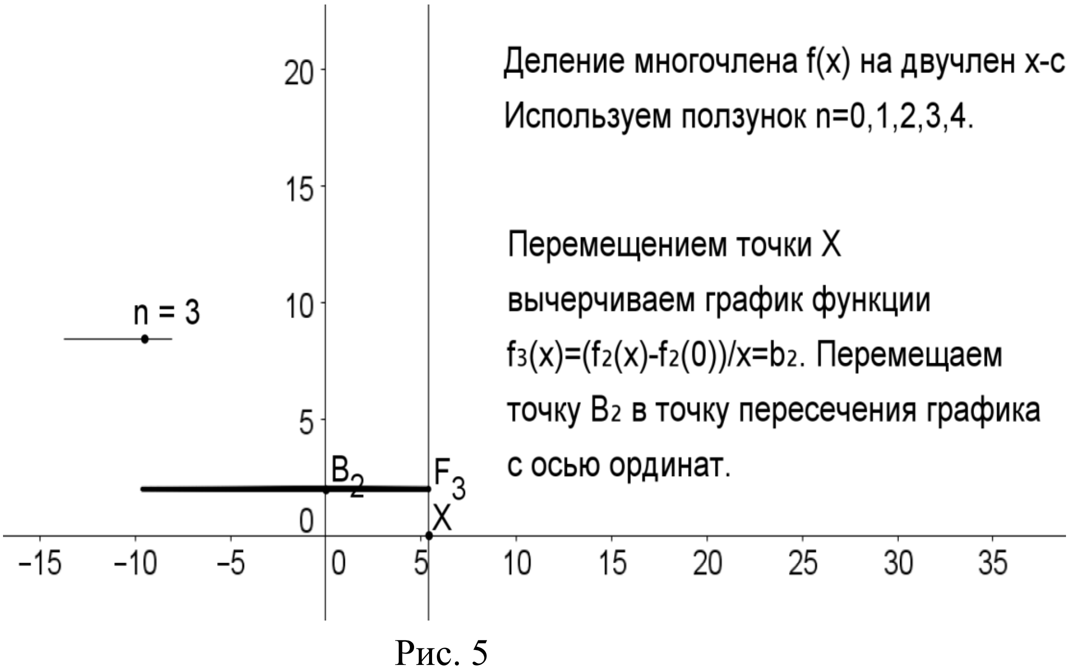


Рис. 3



Деление многочлена f(x) на двучлен x-c
Используем ползунок n=0,1,2,3,4.
Перемещением точки X
вычерчиваем график функции
f2(x)=(f1(x)-f1(0))/x = b2x+b1. Переставляем
точку B1 в точку пересечения графика
с осью ординат: b1=f2(0).
n = 2
F2
B1
X

Рис. 4



Деление многочлена f(x) на двучлен x-c
Используем ползунок n=0,1,2,3,4.
Перемещением точки X
вычерчиваем график функции
f3(x)=(f2(x)-f2(0))/x=b2. Перемещаем
точку B2 в точку пересечения графика
с осью ординат.
n = 3
B2
F3
X

Рис. 5

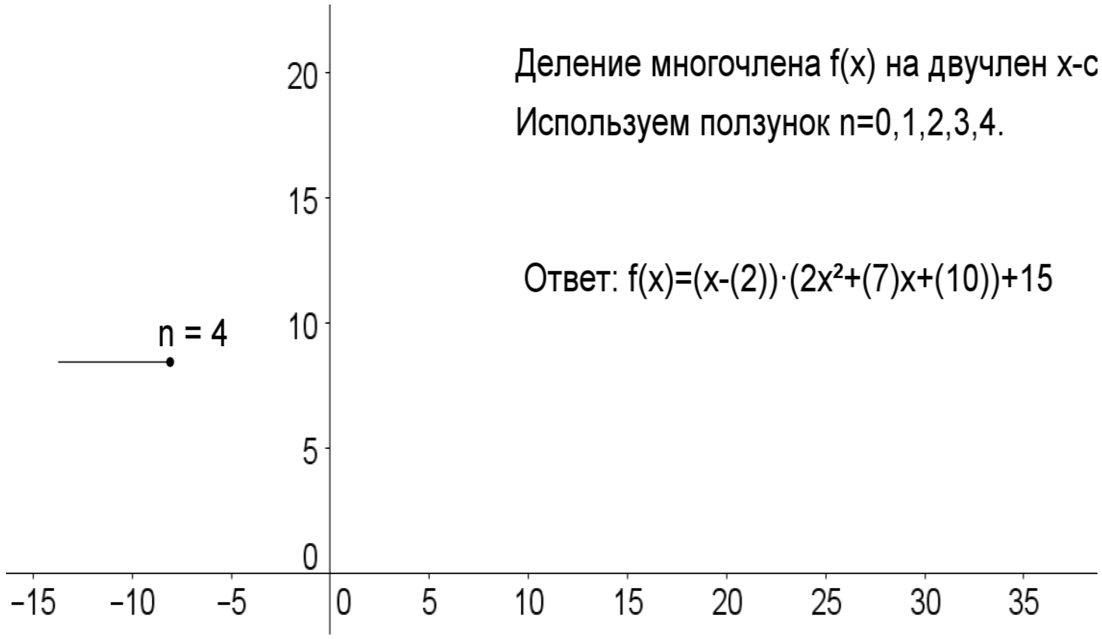


Рис. 6

Если схема Горнера представляет собой вычислительный алгоритм и вычисления могут представлять значительные трудности, то при решении задачи анимационно-геометрическим методом мы на каждом шаге алгоритма лишь должны включить анимацию точки X, дождаться вычерчивания графика и переместить заранее заготовленную на оси ординат точку на место пересечения графика с осью ординат. Трудность может возникнуть при постановке точки в нужное место. Но для увеличения точности можно воспользоваться изменением масштаба (колесиком мышки) и изменением параметров анимации (шаг и скорость). Таким образом, анимационно-геометрический аналог схемы Горнера представляет собой цепочку механических действий, что значительно проще алгоритма вычислений.

Те же приемы плюс построенный ранее «прибор» применяются для построения «прибора» деления многочлена на двучлен.

Такой подход, несомненно, повысит интерес студентов к изучению курса алгебры многочленов и позволит глубже понять суть изучаемого материала.

Продолжение начатого при освоении схемы Горнера деления многочлена на двучлен – алгоритм Евклида нахождения НОД многочленов и линейной формы НОД. Сам алгоритм знаком студентам еще со школы, с помощью него они находили НОД чисел. Принцип его заключается в следующем: на первом этапе многочлен, имеющий наименьшую степень из данных (или любой из данных, если их степени равны) делится на второй с остатком; затем на каждом следующем шаге предыдущий делитель делится на остаток. Процесс продолжается до тех пор, пока на каком-то этапе произойдет деление нацело. Последний ненулевой остаток в данной цепочке делений и есть НОД данных многочленов. При построении аналога этого процесса в GeoGebra необходимо учитывать следующие моменты:

– при делении многочлена на многочлен с остатком нужно помнить, что остатком может быть либо 0, либо многочлен степени меньшей, чем делитель;
– после каждого деления сравнивать остаток с нулем – если он отличен от нуля, продолжаем алгоритм дальше, если остаток равен нулю, то процесс останавливается;
– для нахождения линейной формы НОД остается только собрать все неполные частные.

На первом этапе выполнения деления многочлена на многочлен для многих студентов «камнем преткновения» становится нахождение остатка. Например, при делении числа на число с остатком также имеет значение размер остатка. Можно разделить 13 на 5 разными способами: $13 = 5 \cdot 10 - 37$, $13 = 5 \cdot (-2) + 23$, $13 = 5 \cdot 2 + 3$, однако, верным делением с остатком, согласно известной теореме, будет последнее.

Один из вариантов выполнения деления с остатком при помощи GeoGebra – это подбор неполного частного. В этом случае учащемуся нужно хорошо знать формулировку теоремы о делении с остатком, дальше процесс автоматизируется с помощью «ползунка», выполняющего роль неполного частного $q(x)$. Диапазон «ползунка» задается в зависимости от делимого a, остаток $r(x)$ вычисляется по значению неполного частного, а затем перемещением «ползунка» подбирается значение $q(x)$, такое, чтобы $r(x) = 0$ или $\deg r(x) < \deg b(x)$, где $b(x)$ – делитель. Рисунок 7 изображает этот процесс в GeoGebra.

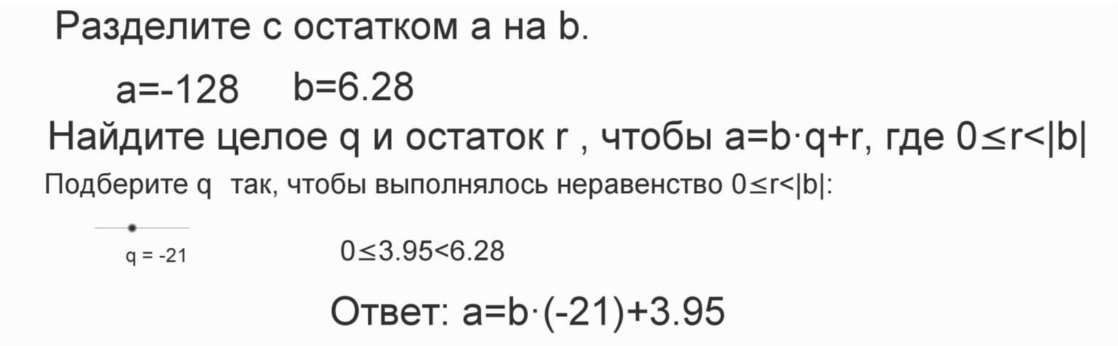


рис. 7

Сам алгоритм может выглядеть следующим образом (рисунки 8-15 , в силу того, что вычисления производятся во множестве действительных чисел, но на экране очень громоздкие записи, в работе привожу их частично, иллюстрируя лишь сам процесс):

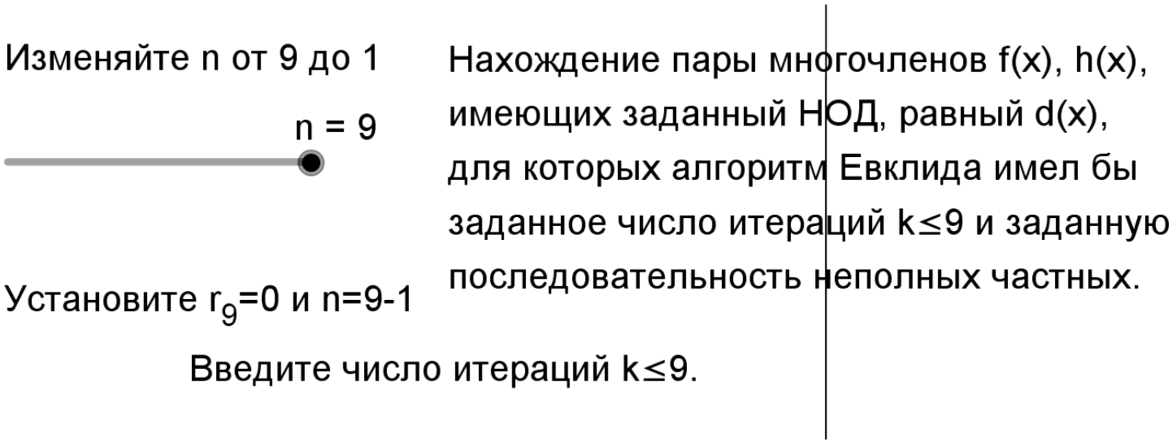


рис. 8

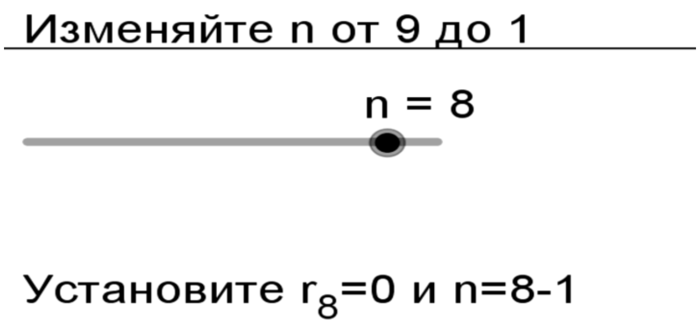


рис. 9

Изменяйте n от 9 до 1

n = 7

Установите r_7=0 и n=7-1

рис.10

Изменяйте n от 9 до 1

n = 5

Установите r_5=0 и n=5-1

рис.11

Изменяйте n от 9 до 1

n = 4

Введите задуманный многочлен d(x),
равный НОД искомых многочленов f(x), h(x).
Введите неполное частное q_4(x) и остаток
r_4(x)=0. Установите n=4-1

рис.12

Изменяйте n от 9 до 1

n = 3

Введите задуманное неполное частное $q_3(x)$
и остаток $r_3(x)=d(x)$.
Установите n=3-1

рис.13

Изменяйте n от 9 до 1

n = 2

Введите задуманное неполное частное $q_2(x)$.
Установите n=2-1.

рис.14

Изменяйте n от 9 до 1

n = 1

Введите задуманное неполное частное $q_1(x)$.
Искомые многочлены:
$f(x)=2x^6 + 80047 / 1500\ x^5 + 30894049 / 50000\ x^4$ -
$h(x)=6x^4 + 60223 / 500\ x^3 + 224659319 / 250000\ x^2$
Для повторного использования файла
закройте его, не сохраняя.

рис.15

На приведенных рисунках показано нахождение неполного частного и остатка при помощи передвижения ползунка, но этот процесс также можно реализовать с помощью построения графиков и выполнения деления в геометрическом виде, как это описано в [36] и [44].

Второй вариант деления чисел с остатком использует анимационно-геометрический метод [44] – каждый шаг описанного выше алгоритма иллюстрируется с применением геометрического деления чисел. Решение задачи деления чисел с остатком с применением описанных выше способов в GeoGebra со школьниками, с самостоятельным написанием алгоритмов в GeoGebra будет способствовать лучшему усвоению механизма деления, теоремы о делении с остатком.

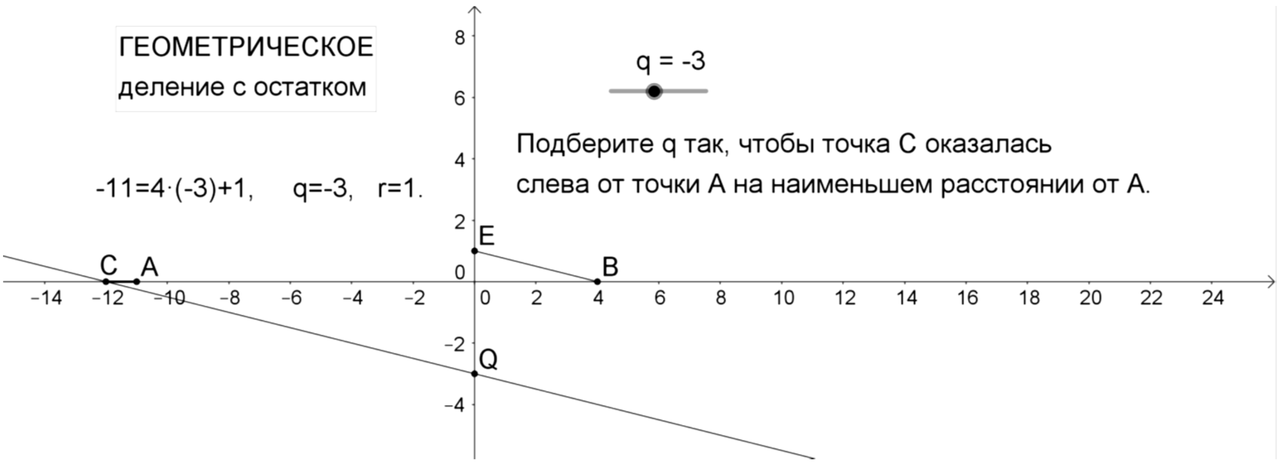


рис.16

Стоит отметить, что если перед этим при освоении схемы Горнера использовался анимационно-геометрический метод, и выполнялись все шаги геометрически, и студентами достаточно хорошо освоены процессы сложения, умножения и деления многочленов в геометрической форме, то выполнять построение всех шагов при нахождении НОД, считаю не целесообразным. Это займет много времени и не несет методического смысла.

Освоив со студентами алгоритм деления многочлена на многочлен с остатком можно переходить к нахождению НОД многочленов и линейной формы НОД в GeoGebra. Далее в GeoGebra можно решать ряд задач, связанных с нахождением НОД многочленов, таких как, нахождение НОК многочленов, отделение кратных множителей многочлена.

Таким образом, полученный анимационно-геометрический аналог алгоритма Евклида, также как и описанный в [43] аналог схемы Горнера дает возможность сочетать классический подход в обучении студентов этим разделам алгебры многочленов с применением компьютерной среды GeoGebra. Наиболее эффективно на наш взгляд проводить занятия с применением GeoGebra уже после освоения алгоритма традиционным путем, тогда при применении анимационно-геометрического метода будет происходить более глубокое понимание сути алгоритма и его закрепление. Это позволит использовать описанные аналоги схемы Горнера и алгоритма Евклида не только для решения задач с применением этих алгоритмов, но и для самостоятельного получения студентами их аналогов в GeoGebra.

Также как и для школьников для студентов педагогического вуза при освоении анимационно-геометрического метода полезно будет использовать приложение к данной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование позволило убедиться в несомненной пользе применения компьютерной анимации не только при обучении теории многочленов. Анимационно-геометрический метод позволяет связать вместе целый ряд математических дисциплин и разделов, что способствует лучшему усвоению материала из разных областей знаний, видению их значимости, возможности применения и развитию математической грамотности.

Грамотное применение компьютерных технологий способствует развитию у обучающихся не только предметных умений и навыков, но способностей, необходимых для дальнейшего самообразования.

В ходе работы было изучен имеющийся опыт по внедрению компьютерных технологий в учебный процесс, программное содержание школьного и вузовского курсов на предмет включения материала по теории многочленов, описаны варианты использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra на различных этапах обучения школьников и студентов педагогического вуза теории многочленов и применяемые при этом методы и технологии.

Таким образом, все поставленные задачи были решены, цель исследования достигнута.

В ходе исследования выдвинутая гипотеза нашла подтверждение в анализе результатов имеющегося опыта педагогов и в ходе собственного эксперимента в рамках профильного исследования и проведения занятий со школьниками физико-математических классов школы №22 г. Красноярска и Лицея №1 г. Сосновоборска на базе КГПУ им. В.П. Астафьева. По результатам исследования были опубликованы 7 работ в материалах конференций [34-38], [43, 44].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный стандарт основного общего образования (5-9кл) [электронный ресурс]. http://xn--80abucjiibhv9a.xn--p1ai/%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D1%83%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8B/938
2. Федеральный Государственный образовательный стандарт высшего образования. Уровень высшего образования - бакалавриат. Направление подготовки - 44.03.05 Педагогическое образование, 9.02.2016 г.
3. Концепции развития математического образования в Российской Федерации от 24.12.2013 г.
4. Министерство просвещения СССР. Программы педагогических институтов. Алгебра и теория чисел. Для специалистов №2104 «Математика» и «Математика и физика». – М.: Просвещение, 1977. Авторы программы профессор Л.Я. Куликов, профессор В.Г. Лемлейн
5. Министерство высшего и среднего специального образования СССР, Министерство просвещения РСФСР. Программы педагогических институтов. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1965. Автор – профессор Л.Я. Куликов.
6. Министерство образования Российской Федерации. Примерная программа дисциплины Алгебра. Рекомендована Министерством образования Российской Федерации для специальности 032100 Математика. Утверждено Руководителем Департамента образовательных программ и стандартов профессионального образования: Л.С. Гребнев, 20.12.2001 г. Составители: к.ф.-м.н., профессор МПГУ Г.А. Карасев; д.ф.-м.н., профессор МПГУ А.А. Фомин., к.ф.-м.н., доцент МПГУ Е.Е. Шершова

7. рабочим планом дисциплины по программе бакалавриата Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки «Математика и информатика») 2016 г»
8. Алгебра: учебник для VI-VIII классов восьмилетней школы/ А.Н. Барсуков. 9-е изд. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1964
9. Алгебра: пробный учебник для 7 кл. сред.шк. / Ш.А. Алимов, В.А. Ильин, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. 2-е изд. – М.: Просвещение, 1980
10. Алгебра 7: учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 3-е изд. – М.: Просвещение, 1995
11. Алгебра 7: учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 16-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2009
12. Алгебра 6-8: Материалы для ознакомления / Д.К. Фаддев М.: Просвещение, 1983
13. Алгебра 7: учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 1991
14. Алгебра 7: учебник для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. - 5-е изд. – М.: Просвещение, 1997
15. Алгебра 7: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Фектистов. - 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2012
16. Алгебра. 7 кл: В двух частях. Ч1: Учебник для общеобразовательных учреждений. / А.Г. Мордкович. - 6 изд. – М.: Мнемозина, 2003

17. Алгебра. 8 кл: Учебник для общеобразовательных учреждений. / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2001
18. Алгебра. 9 кл: Учебник для общеобразовательных учреждений. / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2002
19. Алгебра и начала анализа 10-11: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др; Под редакцией А.Н. Колмогорова. – 5-е изд. - М.: Просвещение, 1996
20. Алгебра и начала анализа 10-11: Учебник для 10-11 классов средней школы / М.И. Башмаков. – 2-е изд. - М.: Просвещение, 1992
21. Алгебра и начала анализа 11: Учебник для 11 классов общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 6-е изд. - М.: Просвещение, 2007
22. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 2-е изд. - М.: Мнемозина, 2001
23. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 частях, Ч.1: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2008
24. Алгебра и начала анализа. 10 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений: в 2 частях. Ч.1 / Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнецов, Е.А. Седова. – М.: Дрофа, 2003
25. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений / С.Н. Никольский. - М.: Просвещение, 2010
26. Алгебра и математический анализ. 11 кл.: Учебное пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики. / Н.Я. Виленкин. – 7-е изд. - М.: Мнемозина, 2000

27. Алгебра и начала анализа 10-11: учебник для 10-11 кл. сред.шк. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 2-е изд. – М.: Просвещение, 1993
28. Алгебра и начала анализа 10-11: учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 11-е изд. – М.: Просвещение, 2003
29. Архангельский С. И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. М.: Высшая школа, 1980. 367 с.
30. Жучков В. М. Теоретические основы концепции модернизации предметной области «Технология» для педагогических вузов: монография [текст]/ В. М. Жучков — СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена -2001. — 246 с.
31. Загвязинский В. И. Теория обучения: Современная интерпретация [текст]/ В. И. Загвязинский. — М.: Академия-2001. — 192 с. [С. 95]
32. Занков Л. В. Избранные педагогические труды. — 3-е изд., дополн. [текст] / Л. В. Занков — М.: Дом педагогики-1999- 608 с [С.47–52]
33. Казакова С. В. Реализация системного подхода к формированию аудиальной культуры учащихся начальной школы [текст]/ С. В. Казакова.//Педагогическое образование в России.-2012- № 1- С.1–7
34. Калачева С.И. Значение компьютерных технологий в подготовке учителя математики. // Сборник материалов I Международной научно-практической конференции «Современные образовательные технологии в мировом учебно-воспитательном пространстве», Новосибирск 06.11. 2015, С. 22-25
35. Калачева С.И. Применение компьютерных технологий в обучении теории многочленов в педагогическом вузе // Сборник статей Международной научно-практической конференции «Цифровое общество в контексте развития личности», Екатеринбург 10.05.2016, С.78-81

36. Калачева С.И. Применение среды GeoGebra в обучении студентов делению многочленов с остатком //Сборник статей Международной научно-практической конференции «III Международные научные чтения (И.И. Ползунова)», Москва 19.10.2016, С.77-80
37. Калачева С.И. Роль интеграции дисциплин при обучении студентов - будущих учителей математики // Материалы III Международной научно-практической конференции «Развитие образования, педагогики и психологии в современном мире», Воронеж 11.12.2016, С.108-111
38. Калачева С.И. Опыт интеграции дисциплин при углубленном обучении школьников физико-технической направленности // Сборник статей Международной научно-практической конференции «Проблемы современных интеграционных процессов и пути их решения», Омск 13.12.2016, С. 249-252
39. Кузьмина Н. В. Понятие «педагогической системы» и критерии её оценки // Методы системного педагогического исследования / под ред. Н. В. Кузьминой. М.: Народное образование, 2002. С. 11.
40. Крысько В. Г. Психология и педагогика: Схемы и комментарии /. В. Г. Крысько — М.: Владос-Пресс-2001. — 368 с. [С. 322]
41. Ларин С.В. Методические вопросы алгебры многочленов: монография / С.В. Ларин; Краснояр. гос. пед. ун-т.им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2008
42. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. – Ростов-на-Дону, «Легион», 2015.
43. Ларин С.В., Калачева С.И. Анимационно-геометрический аналог схемы Горнера// Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании», Красноярск, 2015 г.

44. Ларин С.В., Калачева С.И. Анимационное моделирование вычислительных алгоритмов для многочленов в среде GeoGebra // Материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании», Красноярск, 16-17.11.2016 г.
45. Лобанова, Е. Н. Педагогические основы методической системы Н. Ф. Бунакова [текст]/: автореф. дис. на соиск. Учен. Степ. Канд. пед. наук: (13.00.01) /Е.Н Лобанова- Моск. Гос. Пед. ун-т. М.-2002. - 22 с.
46. Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики: монография; Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2014
47. Математика. Арифметика. Алгебра. Анализ данных. 7 класс: Учеб. для общеобразовательных заведений. / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева; под ред. Г.В. Дорофеева. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1998
48. Математика 11 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/ А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова, П.В. Семенов; Под редакцией А.Г. Мордковича. – 5-е изд. стер. - М.: Мнемозина, 2010
49. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: Учебник для 10 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011
50. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: Учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012

51. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011
52. Могилев А. В. Развитие методической системы подготовки по информатике в педагогическом вузе в условиях информатизации образования/ Автореф. дис. д.п.н. /А. В. Могилев Воронеж: ВГПУ-1999. 39 с. [С. 3]
53. Новиков А. М. Профессиональное образование в России. Перспективы развития/ А. М. Новиков-М.: ИЦП НПО РАО-1997- 254 с.
54. О разработке концептуальных основ федерального компонента государственных стандартов общего образования второго поколения [Текст]: русский язык как государственный язык Российской Федерации (пример стандарта) / М. В. Рыжаков, А. А. Кузнецов // Стандарты и мониторинг в образовании. N3.С. 3–7. 2005 г.
55. Пышкало А. М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе: Авторский доклад по монографии «Методика обучения элементам геометрии в начальных классах», представленной на соискание степени д.п.н.. М.: Академия пед. наук СССР, 1975. 60 с.
56. Рыжаков М. В. Теоретические основы разработки государственного стандарта общего среднего образования / дис. на соискание степени д.п.н./ М. В. Рыжаков-13.00.01. М., 1999–371 с.
57. Рыжаков М. В. Кузнецов А.А О разработке концептуальных основ федерального компонента государственных стандартов общего образования второго поколения / М. В. Рыжаков, А. А. Кузнецов // Стандарты и мониторинг в образовании. — 2005. — N2. — С. 7–12.
58. Саранцев Г. И. Методология и методика обучения математике / Г. И. Саранцев.-Саранск-2001–144 с. [С. 10]

59. Учебник по алгебре «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень)». Колягин Ю.М., Сидоров И.В., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И., Мнемозина, 2010
60. Фещенко Т. С. К вопросу о понятии «методическая система» // Молодой ученый. — 2013. — №7. — С. 432-435.
61. Хамов Г. Г. Методическая система обучения алгебре и теории чисел в педагогическом вузе с точки зрения профессионально-педагогического подхода]/ Г. Г. Хамов –СПб.: Издательство РГПУ им. А. И. Герцена-1993. — 141 с.
62. Черникова Н. А. Система форм организации обучения в контексте методической системы обучения математике / Н. А. Черникова Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета» Выпуск 2006 ? www.omsk.edu. URL: http://www.omsk.edu/volume/2006/methodics/ [дата обращения ноябрь 2012]
63. Общая методология, концептуальные основы, функции и структура государственных образовательных стандартов второго поколения: Сб. научных трудов / Л. Н. Боголюбов, А. А. Журин, Т. В. Иванова, М. В. Рыжаков, И. А. Сасова; Под ред. М. В. Рыжакова. — М.: ГНУ ИСМО РАО, 2005. — 128 с. [Электронный ресурс] http://window.edu.ru/resource/619/67619/files/ Сборник
64. 1.19. URL: Библиотека авторефератов и диссертаций по педагогике http://nauka-pedagogika.com/pedagogika-13–00–02/dissertaciya-metodicheskaya-sistema-formirovaniya-ekologicheskoy-kultury-uchaschihsya-obscheobrazovatelnoy-shkoly#ixzz2FaetLtK0
65. http://methodiks.ucoz.ru/index/metodicheskaja_sistema_obuchenija/0-6
66. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 8 апреля 2015 г. № 1/15) . http://минобрнауки.рф/

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ И МНОГОЧЛНОВ В СРЕДЕ GEOGEBRA

1. Анимационное деление с остатком целых чисел

Разделить с остатком целое число a на целое число $b \neq 0$ это значит, найти неполное частное q и остаток r такие, что $a = b \cdot q + r$ и $0 \leq r < |b|$.

В среде GeoGebra деление с остатком можно выполнить командой « $Деление[a,b]$». В результате компьютер выдает список из двух многочленов: неполного частного q и остатка r. Чтобы «заглянуть на кухню» решения задачи деления с остатком, понять суть решения задачи, создадим дидактический материал для сопровождения объяснения этого материала, При этом мы рассмотрим два способа решения задачи о делении с остатком для чисел: анимационно-алгебраическим методом и анимационно-геометрическим методом. Первый ближе к практике применения, зато второй можно использовать при доказательстве теоремы о делении с остатком.

1. Деление с остатком анимационно-алгебраическим методом.

Вводим конкретные целые числа a и $b \neq 0$, строим целочисленный ползунок для параметра q, вводим числа $b_1 = abs(b)$, $c = bq$, $r = a - c$ и делаем надписи: $0 \leq r < b_1$ и $a = b \cdot q + r$. В надписях буквы берем из «Объектов». Задаем условие видимости второй надписи: $0 \leq r < b_1$ Изменяем на ползунке значения q, пока не добьемся верности неравенства $0 \leq r < b_1$. В это время на экране появляется ответ (рис. 1, изображение взято с компьютерного экрана).

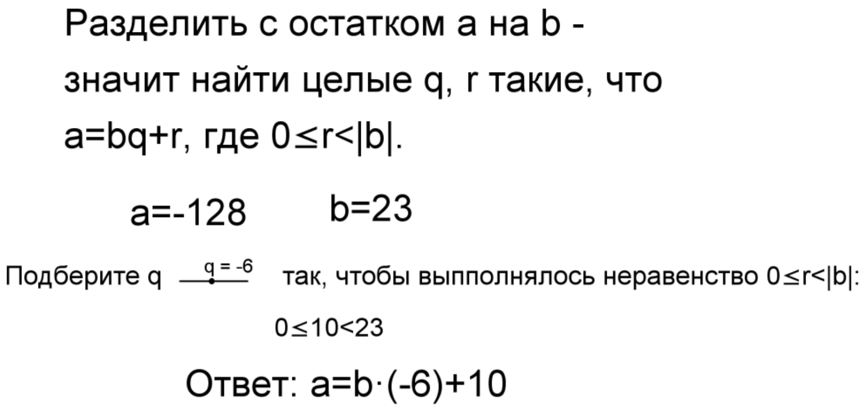


Рис. 1

При вводе новых чисел a и b снова перемещаем точку q на ползунке, добиваясь выполнения неравенства, и получаем новый ответ.

Деление с остатком является составной частью алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. Читателю предлагается, используя анимационный рисунок 9, найти $НОД(3977{,}901)$.

2. Деление с остатком анимационно-геометрическим методом (рис. 16 *a*-*d*).

Построение.

1) На оси абсцисс строим точки A и B, изображающие данные числа соответственно a и $b \neq 0$, вводим $a = x(A)$, $b = x(B)$ (абсциссы точек).

2) Строим ползунок для отслеживания неполного частного q.

3) Строим точку $E = (0{,}1)$ и выполняем геометрическое умножение: соединяем отрезком точки B и E, а затем через точку $Q = (0, q)$ проводим прямую параллельно построенному отрезку. Отмечаем точку C пересечения построенной прямой с осью абсцисс – эта точка изображает произведение bq. Изменяя значение q на ползунке, добиваемся, чтобы точка C, оставаясь

левее точки A, как можно ближе подошла к ней. Рисунки 2 a-d демонстрируют деление с остатком чисел $a = \pm 11$ на числа $b = \pm 4$.

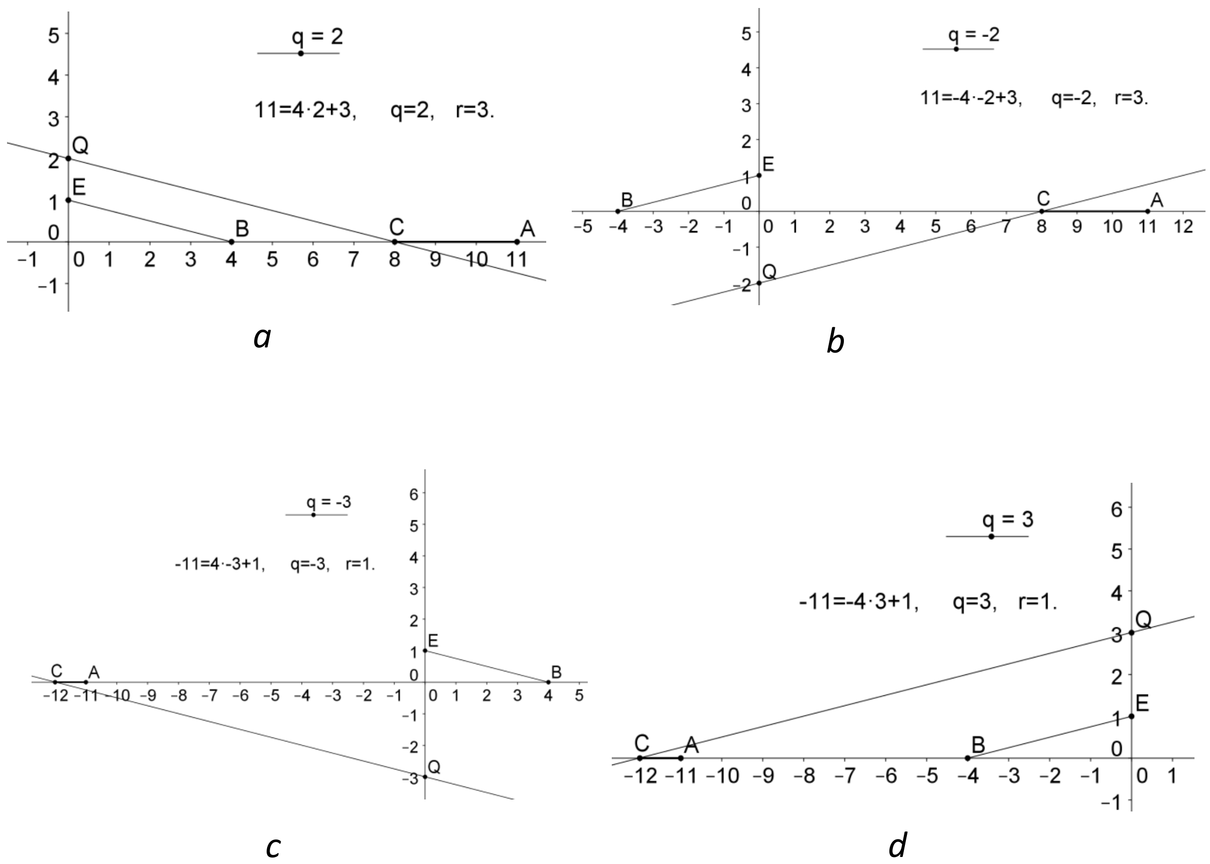


Рис. 2

Заметим, что алгебраическое решение по существу повторяет «ручное» решение задачи. Геометрическое решение геометрически наглядно и следует доказательству общей теоремы о делении с остатком. Его можно демонстрировать во время доказательства теоремы.

2. Нахождение линейной формы НОД двух чисел

Продолжением задачи о нахождении наибольшего общего ($НОД(a,b)$) является нахождение линейной формы НОД. Напомним, что алгоритм Евклида нахождения НОД состоит в следующем.

1) Начало алгоритма. Целое число a делим с остатком на целое число $b \neq 0$.

2) Шаг алгоритма. Делитель делим на остаток.

Если $a \vdots b$, то $НОД(a,b) = b$. Если же a не делится на b, то последний отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида равен $НОД(a,b)$.

Выпишем пошагово алгоритм Евклида:

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \qquad 0 \le r_1 < |b|;$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2, \qquad 0 \le r_2 < r_1;$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, \qquad 0 \le r_3 < r_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n, \quad 0 \le r_n < r_{n-1};$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}, \qquad r_{n+1} = 0.$$

Поскольку остатки строго убывают, а целые неотрицательные числа бесконечно убывать не могут, то алгоритм Евклида конечен. Пусть $d = r_n$ – последний отличный от нуля остаток. Рассматривая последовательность равенств алгоритма Евклида снизу вверх, убеждаемся, что $d = r_n$ является общим делителем чисел a и b, а рассматривая равенства сверху вниз, устанавливаем, что d делится на любой общий делитель чисел a и b. Следовательно, $d = НОД(a,b)$.

Выражая последовательно остатки через a и b, получаем $r_i = a \cdot u_i + b \cdot v_i$, $i = 1,\ldots,n$, где рекуррентные последовательности (u_i) и (v_i) задаются следующим образом:

1) Начальные условия: $u_1 = 1$, $u_2 = -q_2$; $v_1 = -q_1$, $v_2 = 1 + q_1 q_2$;

2) Рекуррентные соотношения: $u_{i+2} = u_i + u_{i+1} \cdot q_{i+2}$, $v_{i+2} = v_i + v_{i+1} \cdot q_{i+2}$.

На n-ом шаге получаем равенство $d = r_n = a \cdot u_n + b \cdot v_n$, которое называется линейной формой наибольшего общего делителя (НОД). Все сказанное легко переносится на многочлены.

На живом рисунке 3 реализовано вычисление рекуррентных последовательностей (u_i), (v_i), в результате чего находится линейная форма НОД.

Сначала с помощью «живого» рисунка 9 для $a = 243$ и $b = 53$ найдены неполные частные: $q_1 = 4$, $q_2 = 1$, $q_3 = 1$, $q_4 = 2$, $q_5 = 2$. Затем переходим к «живому» рисунку 11 и выполняем предписания. В нашем случае $n = 5$.

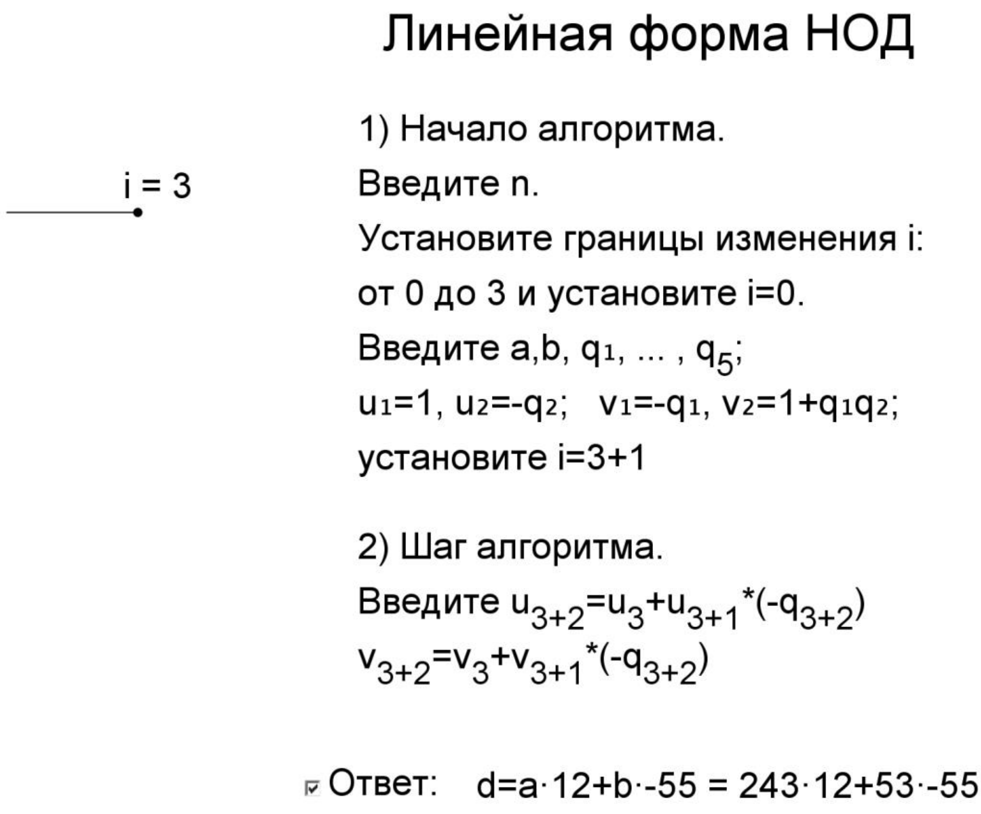


Рис. 3

3. Алгоритм «Схема Горнера»

Схема Горнера представляет собой алгоритм, позволяющий данный многочлен $f(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$ разделить с остатком на двучлен $h(x)=x-c$ при заданном c. В результате получаем неполное частное $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1 x+b_0$ и остаток $r(x)=r$ такие, что $f(x)=(x-c)\cdot q(x)+r$.

С помощью схемы Горнера студенты решают такие задачи, как:

1. разделить данный многочлен $f(x)$ с остатком на двучлен $x-c$,
2. разложить данный многочлен $f(x)$ по степеням $x-c$.
3. найти остаток от деления данного многочлена $f(x)$ на $x-c$.
4. выяснить, является ли данное число c корнем многочлена $f(x)$ и если да, то найти кратность этого корня.
5. найти значение многочлена $f(c)$.
6. найти значение многочлена $f(c)$, где значение переменной имеет специальный вид типа $c=1{,}9$, либо $c=2{,}1$.
7. найти значение многочлена $f(x)$ и всех его производных при $x=c$.

Решение этих задач сводится к решению двух основных задач: разделить с остатком данный многочлен $f(x)$ на двучлен $x-c$, и разложить данный многочлен по степеням этого двучлена. Эту процедуру нетрудно выполнить с помощью компьютера одной командой. Но в этом случае мы не достигаем поставленной учебной цели: не добиваемся знания алгоритма «схема Горненра» и его уверенного выполнения. Студент должен, что называется, «набить руку» в выполнении алгоритма. В этой связи злободневным является создание «хороших» примеров с заранее расставленными «ловушками» (например, с нулевыми коэффициентами, что приводит к типичной ошибке игнорирования этих коэффициентов). Нами создан анимационный рисунок, который решает задачу придумывания нужных примеров (рис. 4)

Изготовление многочлена f(x),
который при делении на (x-c)
давал бы задуманное неполное частное
q(x) и задуманный остаток r.

Введите коэффициенты задуманного неполного частного
$q(x)=q_6x^6+q_5x^5+q_4x^4+q_3x^3+q_2x^2+q_1x+q_0$,
введите коэффициент c и задуманный остаток r.

Искомый многочлен
$$f(x) = 0x^7 + (0)x^6 + (0)x^5 + (2)x^4 + (-7)x^3 + (6)x^2 + (5)x + (-5)$$

Результат деления с остатком:
$$f(x) = (x - (2))(0x^6 + (0)x^5 + (0)x^4 + (2)x^3 + (-3)x^2 + (0)x + (5)) + (5)$$

Рис. 4

Анимационный рисунок 4 позволяет найти многочлен $f(x)$, который при делении на $x-c$ при задуманном c давал бы задуманное неполное частное $q(x)$, задуманный остаток r.

Для отработки правильности заполнения схемы Горнера нами создан тренировочный анимационный рисунок. Ниже он представлен двумя слайдами: рис. 5 (при значении ползунка $n=1$) и рис. 6 (при значении ползунка $n=2$).

СХЕМА ГОРНЕРА
для деления многочлена
$f(x)=a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
на двучлен (x-c)

	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
c	q_6	q_5	q_4	q_3	q_2	q_1	q_0	r

Введите коэффициенты данного многочлена f(x) и число c

Для заполнения схемы Горнера введите формулы
нахождения коэффициентов неполного частного
$q(x)=q_6x^6+q_5x^5+q_4x^4+q_3x^3+q_2x^2+q_1x+q_0$ и остатка r.

Установите n=2. n = 1

100

Рис. 5

СХЕМА ГОРНЕРА

для деления многочлена

$f(x) = 0x^7 + (0)x^6 + (0)x^5 + (2)x^4 + (-7)x^3 + (6)x^2 + (5)x + (-5)$

на двучлен $(x - 2)$

	0	0	0	2	-7	6	5	-5
2	0	0	0	2	-3	0	5	5

Результат деления с остатком:

$f(x) = (x - (2))(0x^6 + (0)x^5 + (0)x^4 + (2)x^3 + (-3)x^2 + (0)x + (5)) + (5)$

Для решения новой задачи
установите n=1

n = 2

Рис. 6

При $n=1$ студенту предлагается ввести данный многочлен $f(x)$ (либо из задачника, либо придумать), ввести число c и правильно ввести формулы заполнения схемы Горнера. При установке на ползунке $n=2$ появляется заполненная схема Горнера.

Ответ можно проверить, введя результат деления – в ответе должен получится данный многочлен $f(x)$.

Схема Горнера используется для разложения данного многочлена $f(x)$ по степеням двучлена $x-c$, то есть представления многочлена в виде $f(x)=c_n(x-c)^n+\ldots+c_1(x-c)+c_0$. Как известно, задача решается с использованием схемы Горнера.

Вместе с тем, можно предложить геометрический метод решения этой задачи (рис. 7). Он использует преобразования графиков функций.

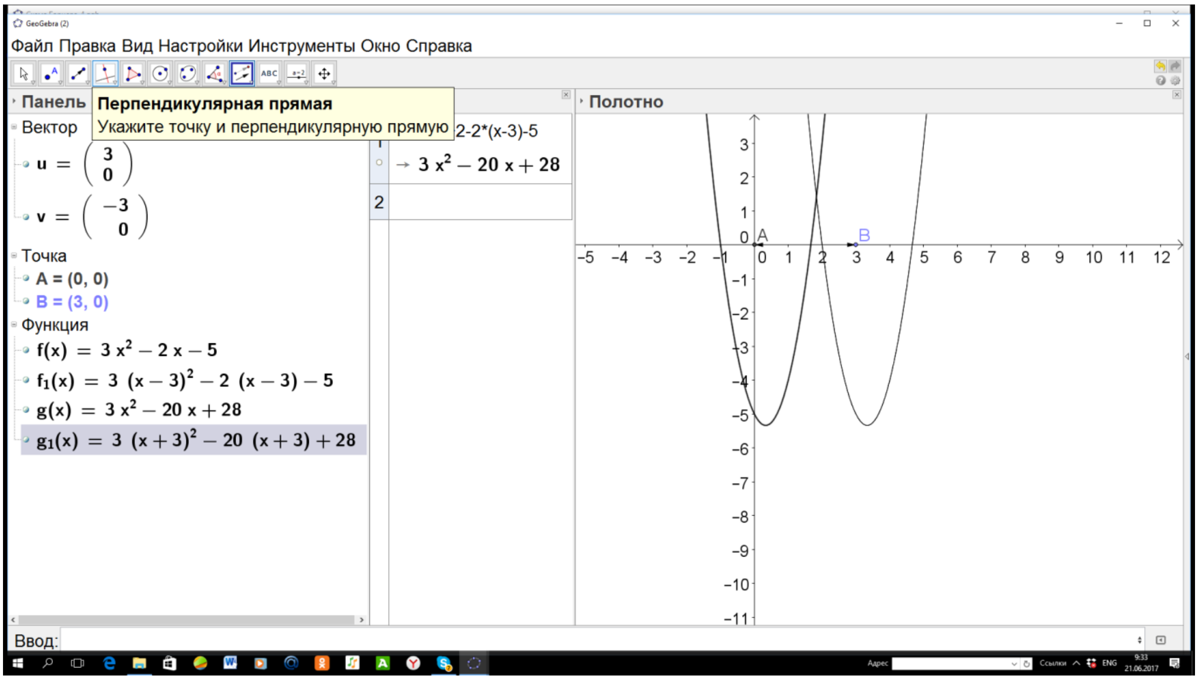


Рис. 7

Задача. Разложить многочлен $f(x)=3x^2-2x-5$ по степеням двучлена $x+3$.

Решение в среде GeoGebra. 1) Строим график данной функции $f(x)=3x^2-2x-5$.

2) Строим вектор $u=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

3) Осуществляем параллельный перенос графика функции $f(x)$ на вектор u и получаем график функции $f_1(x)=3(x-3)^2-2(x-3)-5$.

4) Обращаемся к CAS (под кнопкой «Вид») и преобразуем $3(x-3)^2-2(x-3)-5$ в многочлен, расположенный по убыванию переменной x. Получаем стандартную форму многочлена $f_1(x)$ в виде $3x^2-20x+28$.

5) Строим график многочлена $g(x)=3x^2-20x+28$.

6) Строим вектор $v=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ (противоположный вектору u).

7) Выполняем параллельный перенос графика функции $g(x)$ на вектор v. Получаем график данной функции $g_1(x)=f(x)$. Одновременно на Панели объектов получаем искомое разложение многочлена $f(x)$ по степеням $x+3$: $g_1(x)=3(x+3)^2-20(x+3)+28$.

Из этого наглядного решения подмечаем следующее короткое алгебраическое решение, которое можно выполнить в CAS. По данному многочлену $f(x)=3x^2-2x-5$ записываем многочлен $f_1(x)=3(x-3)^2-2(x-3)-5$ и, обращаясь к CAS, выполняем преобразование этого многочлена к стандартному виду (команда 4). По стандартному виду $g(x)=3x^2-20x+28$ пишем ответ: $g_1(x)=3(x+3)^2-20(x+3)+28$.

4. Алгоритм Евклида для многочленов

Как и для чисел, алгоритм Евклида для многочленов предназначен для нахождения НОД данных многочленов $f(x)$ и $h(x)\neq 0$. Он заключается в следующей последовательности делений с остатком:

1) Начало алгоритма: многочлен $f(x)$ делим с остатком на многочлен $h(x)$.

2) Шаг алгоритма: делитель делим на остаток.

Последний отличный от нуля остаток в этом алгоритме и есть НОД($f(x)$, $h(x)$).

Выпишем шаги алгоритма, они называются итерациями:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = h(x)\cdot q_1(x) + r_1(x),\\
&h(x) = r_1(x)\cdot q_2(x) + r_2(x),\\
&r_1(x) = r_2(x)\cdot q_2(x) + r_3(x).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&r_{n-1}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x) + \underbrace{r_{n+1}(x)}_{0},
\end{aligned}
$$

где остаток $r_{n+1}(x) = 0$. Число n при этом называется числом итераций.

С методической точки зрения представляет интерес задача о нахождении пары многочленов, имеющих наперед заданный НОД и алгоритм Евклида, состоящий из заданного количества итераций с заданной последовательностью неполных частных. Рассмотрение равенств алгоритма Евклида снизу вверх подсказывает решение этой задачи. При $r_{n+1}(x) = 0$ из последнего равенства находим $r_{n-1}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x) + 0 = d(x)\cdot q_{n+1}(x)$ при выбранных $d(x) = НОД(f(x), h(x))$ и неполном частном $q_{n+1}(x)$, затем из предпоследнего равенства находим $r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)\cdot q_n(x) + r_n(x)$ при выбранном $q_n(x)$, и так далее. Добравшись до первого равенства, получим многочлены $f(x)$ и $h(x)$.

Нами создан анимационный файл для решения поставленной задачи с числом итераций не более 9. Вместе с тем, «дополнительными построениями» максимальное число итераций n можно сделать как угодно большим. В качестве теста созданного анимационного файла на рисунке 8 представлен пример с числом итераций $k = 5$. В соответствии с этим условием, предписания предлагают пользователю «обнулить» начальные остатки до $n=3$ (рис. 8,*a*). При $n=3$ (рис. 8,*в*) вводим задуманное $d(x)=x-2$ и остаток $r_3(x)=0$. При $n=2$ и $n=1$, выполняя предписания, вводим неполные частные $q_2(x)=3x^2-2x+1$ (рис. 8,*c*), $q_1(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ (рис. 8,*d*) и получаем искомые многочлены $f(x)$ и $h(x)$.

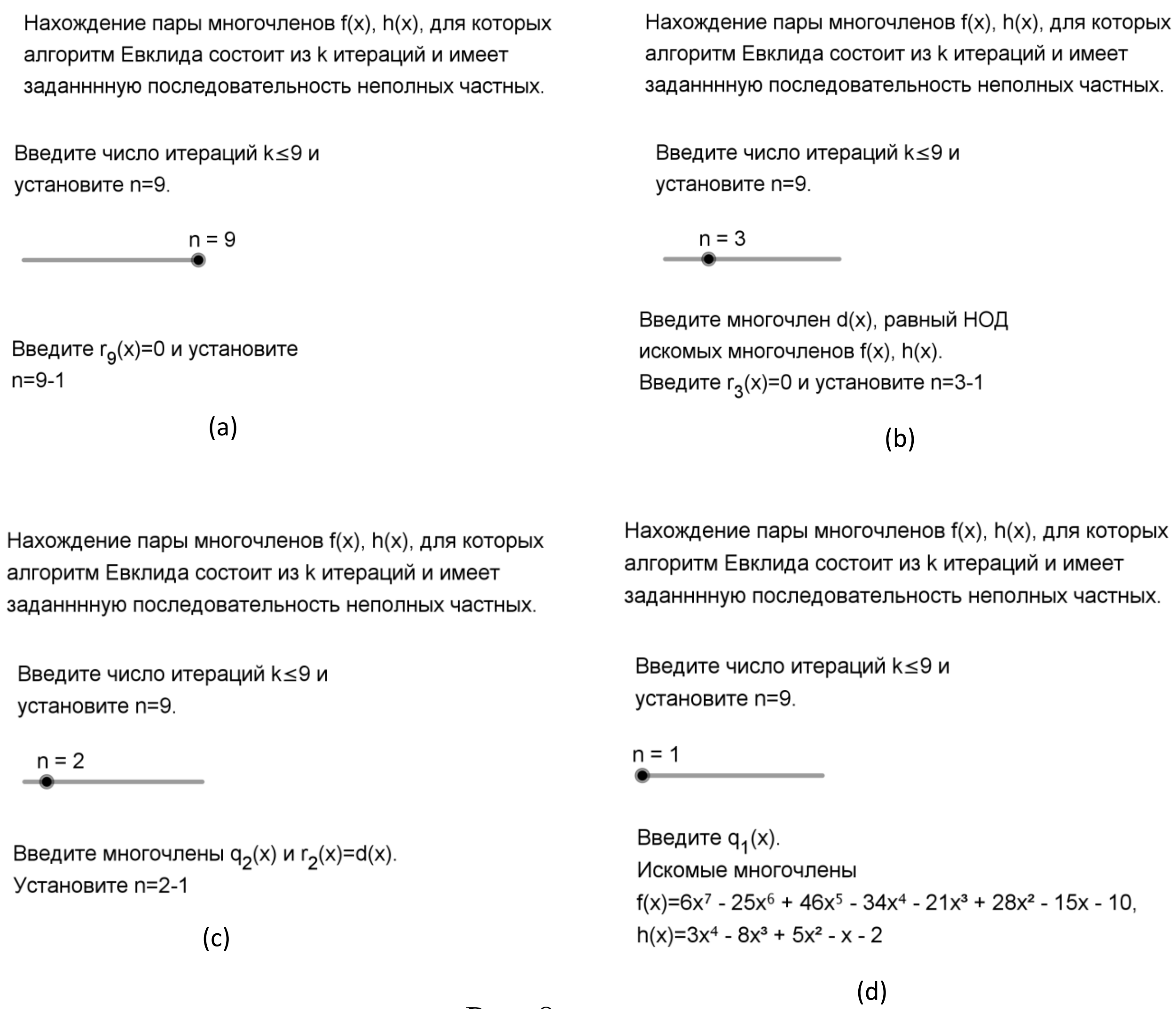


Рис. 8

Прежде, чем перейти к созданию анимационного файла для нахождения линейной формы НОД двух многочленов, воспользуемся предыдущим анимационным файлом (рис. 9) и найдем пару многочленов, для которых $d(x)=1$ и все неполные частные равны x. Вводим $k=9$ и для каждого значения n выполняем предписания. В итоге получаем многочлены $f(x)=x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x$, $h(x)=x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1$. Для этих многочленов алгоритм Евклида имеет 9 итераций.

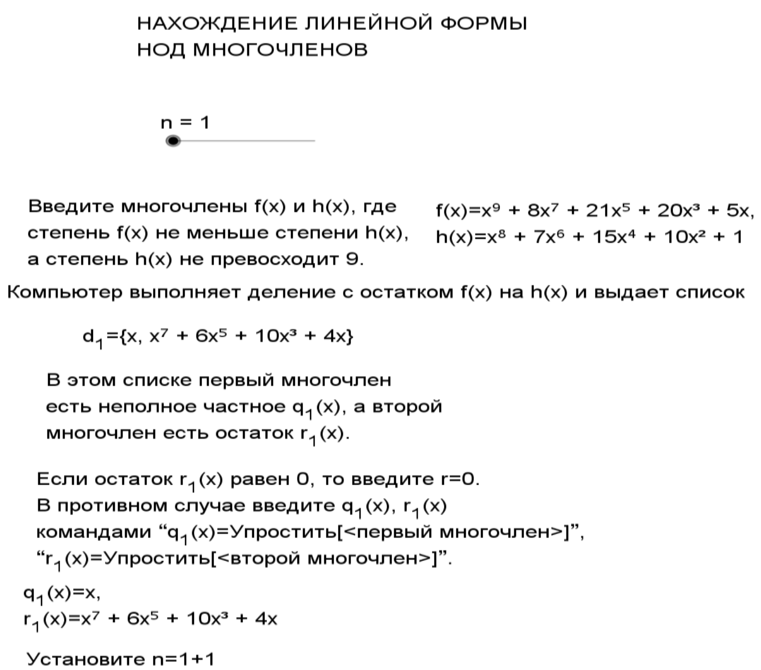


Рис. 9

Теперь переходим к созданию анимационного файла для нахождения линейной формы НОД данных многочленов $f(x)$ и $h(x)$ (рис. 10-12). Сначала строим ползунок для числа итераций n, изменяющийся от 1 до 9, и устанавливаем $n=1$. Анимационный файл создаем для случаев, когда число итераций не превосходит 9, а значит степень нового делителя $h(x)$ не должна превосходить 9. Путем дополнительных построений эту границу можно отодвинуть как угодно далеко в пределах возможностей данного компьютера.

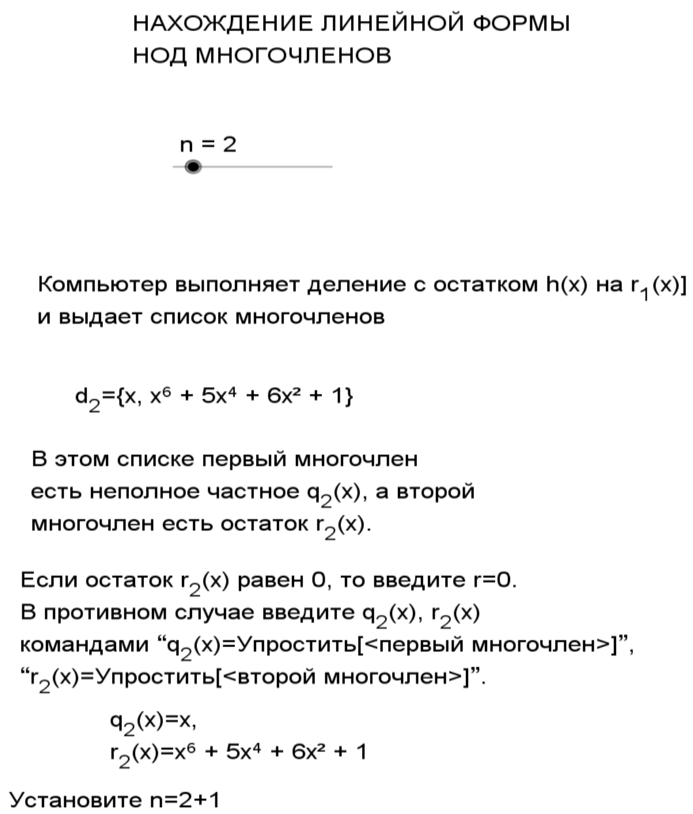


Рис. 10

Вводим сигнальное число $r=1$, которое будет неизменным, пока остатки отличны от нуля. Когда получим нулевой остаток, пользователю будет предложено ввести $r=0$. Вводим данные многочлены $f(x)$ и $h(x)$. Командой «$d_1 = Деление[f(x),h(x)]$» задаем деление с остатком первого многочлена на второй. В результате компьютер выдает список из двух многочленов: неполного частного $q_1(x)$ и остатка $r_1(x)$, которые выводим на экран с соответствующей надписью. В нашем случае $q_1(x)=x$ и остаток $r_1(x)=x^7+6x^5+10x^3+4x$. Поскольку остаток отличен от нуля, то пользователю предлагается ввести (строкой ввода) многочлены $q_1(x)$, $r_1(x)$, и установить на ползунке $n=2$. Кроме того, вводим многочлены $u_1(x)=1$ и $v_1(x)=-q_1(x)$, не выводя их на экран. Вводим проверочный многочлен $p_1(x)=\textit{Упростить}[f(x)\cdot u_1(x)+h(x)\cdot v_1(x)-r_1(x)]$. Понятно, что он должен быть нулевым, и если это не так, то произошла ошибка.

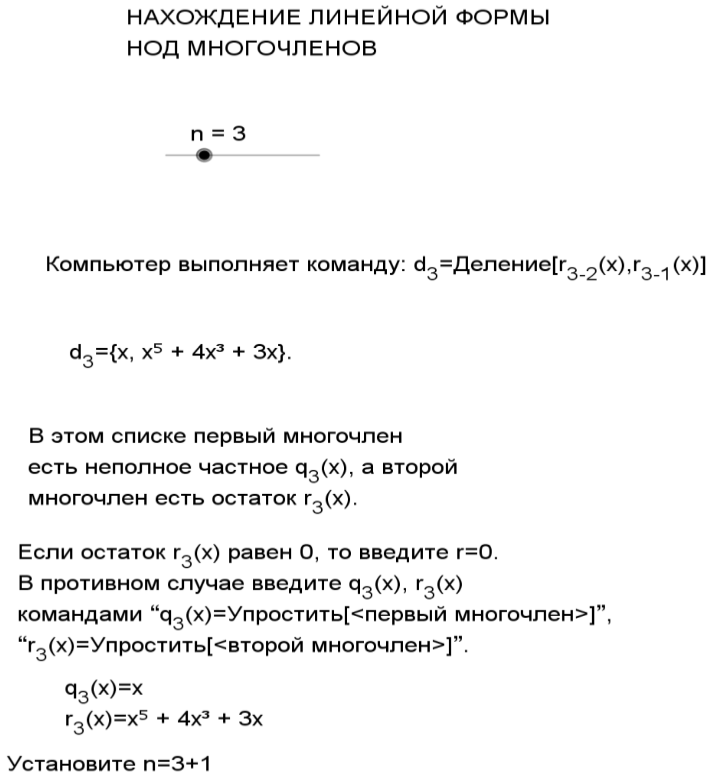


Рис. 11

При $n=2$ «история повторяется»: командой «$d_2=\textit{Деление}[h(x),r_1(x)]$» задаем деление с остатком многочлена $h(x)$ на остаток $r_1(x)$, в результате чего появляется список из двух многочленов: неполного частного $q_2(x)=x$ и остатка $r_2(x)=x^6+5x^4+6x^2+1$, которые пользователю предлагается ввести в компьютер, поскольку остаток $r_2(x)\neq 0$. Кроме того, вводим многочлены $u_2(x)=-q_2(x)$ и $v_2(x)=1+q_1(x)\cdot q_2(x)$, не выводя их на экран. Вводим проверочный многочлен $p_2(x)=\textit{Упростить}[f(x)\cdot u_2(x)+h(x)\cdot v_2(x)-r_2(x)]$.

Понятно, что он должен быть нулевым, и если это не так, то произошла ошибка. И так далее.

При $n = 3, 4, \dots, 8$ действия аналогичны.

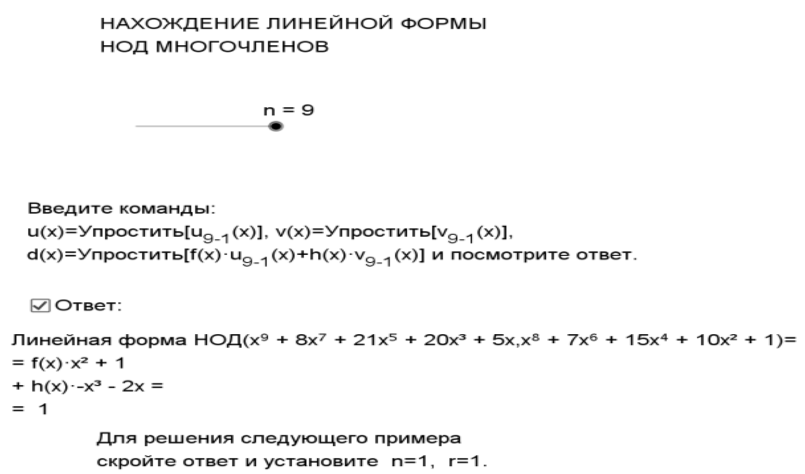


Рис. 12

При $n = 9$ получаем остаток, равный нулю, поэтому пользователю предлагается ввести сигнальное число $r = 0$. Для записи ответа пользователю предлагается ввести многочлены командами: «$u(x) = \textit{Упростить}[u_8(x)]$», «$v(x) = \textit{Упростить}[v_8(x)]$», «$d(x) = \textit{Упростить}[f(x) \cdot u_8(x) + h(x) \cdot v_8(x)]$». Строим кнопку «Ответ» и делаем надпись; «Линейная форма $(f, h) = f(x) \cdot u + h(x) \cdot v$», где f, h, u, v берем в Объектах.

На рисунке 22(a,b,c,d) представлен тест созданного анимационного файла для многочленов $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$, $h(x) = \sqrt{3}x^3 - 2x + 3$. Устанавливаем на ползунке $n = 1$ и вводим данные многочлены. Внимательно читая текст и выполняя предписания, пользователь должен для каждого значения n, если остаток отличен от нуля, то ввести в компьютер строкой ввода неполное частное и остаток. Добравшись до нулевого остатка, согласно предписания, следует ввести сигнальное число $r=0$. Появляется предписание, согласно которому для написания ответа следует ввести многочлены $u(x)$, $v(x)$ и $d(x)$ соответствующими командами. Открывая ответ, видим искомую линейную форму НОД данных многочленов.

Рис. 13

Как видим, действия пользователя определяются предписаниями, которые делают эти действия осознанными. Они сводятся к вводу через строку ввода появляющихся на экране неполных частных и остатков.

В качестве примера использования файла для нахождения линейной формы НОД многочленов решим задачу.

Задача. *Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби* $\dfrac{2\sqrt[5]{9}-\sqrt[5]{3}+1}{3\sqrt[5]{81}+2\sqrt[5]{27}-\sqrt[3]{3}+5}$.

Решение. Пусть $\alpha=\sqrt[5]{3}$, тогда $\alpha^5=3$, следовательно, α является корнем многочлена $f(x)=x^5-3$. Знаменатель данной дроби есть $h(\alpha)$, где $h(x)=3x^4+2x^3-x+5$. Используя файл для нахождения линейной формы НОД, находим линейную форму НОД данных многочленов:

$$f(x)\cdot(942678x^3-258681x^2-145475x-115322)/627264+$$

$$+h(x)\cdot(-314226x^4+295711x^3-148649x^2+32798x+600415)/627264=$$

$$=3348041/627264.$$

Подставляя сюда $\alpha=\sqrt[5]{3}$ и учитывая, что $f(\alpha)=0$, получаем равенство

$$h(x)\cdot(-314226x^4+295711x^3-148649x^2+32798x+600415)/627264=$$
$$=3348041/627264.$$

Умножая числитель и знаменатель данной дроби на одно и то же выражение, получаем, что наша дробь равна

$$\frac{(2\sqrt[5]{9}-\sqrt[5]{3}+1)(-314226\sqrt[5]{81}+295711\sqrt[5]{27}-148649\sqrt[5]{9}+32798\sqrt[5]{3}+600415)}{3348041}$$

Задача решена.

С методической точки зрения в представленном решении хорошо просматривается математическая идея, в том числе и в компьютерной части решения, при этом устраняются вычислительные трудности.

Упражнения

9. С помощью живых рисунков 15 или 16 разделите с остатком числа ± 28 на числа ± 23 и числа ± 23 на числа ± 28, пользуясь живыми рисунками 9 и 10.

10. С помощью живого рисунка 17 найдите пару многочленов, для которых НОД был бы равен придуманному многочлену, алгоритм Евклида имел бы заданное число итераций (не превосходящее 9), с заданной последовательностью неполных частных.

11. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}+1}{3\sqrt[4]{8}+2\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2}+5}$, 2) $\dfrac{2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}+1}{3\sqrt[5]{16}+2\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{2}+5}$, 3) $\dfrac{2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt{3}\sqrt[5]{16}+2\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{2}+5}$.