МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им.В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: алгебры, геометрии и методики их преподавания

ТИЛИЧЕЕВ МИХАИЛ СЕРГЕЕВИЧ

Магистерская диссертация

Тема: МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ БАКАЛАВРИАТА – БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ GEOGEBRA

Направление подготовки: 44.04.01 Педагогическое образование

Магистерская программа: Информационные технологии в математическом образовании

Допускаю к защите:
Заведующий кафедрой
д.п.н., профессор Майер В.Р.
«17» 06 2017г. ______________
дата подпись

Руководитель магистерской программы
д.п.н., профессор Майер В.Р.
«17» 06 2017г. ______________
дата подпись

Научный руководитель
д.п.н., профессор Майер В.Р.
«17» 06 2017г. ______________
дата подпись

Обучающийся: Тиличеев М.С.
«17» 06 2017г. ______________
дата подпись

Красноярск, 2017

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация содержит 103 страницы, 61 рисунок, 3 таблицы, 23 источника и 2 приложения.

Ключевые слова: геометрия, будущие учителя математики, бакалавриат, GeoGebra, СДГ, система динамической геометрии, преобразования плоскости, движения плоскости, гомотетия, аффинные преобразования, искажения, родство, подобия плоскости.

Тема исследовательской работы: методика обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием системы динамической геометрии GeoGebra.

Объектом исследования является процесс обучения студентов – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды GeoGebra.

Предмет исследования – методика обучения геометрическим преобразованиям студентов бакалавриата – будущих учителей математики на базе GeoGebra.

Гипотеза данного исследования состоит в том, что использование систем динамической геометрии способствует повышению качества решения геометрических задач, и в частности, способствует развитию пространственного мышления.

Проблемой исследования является организация процесса обучения решению задач на построение, анализ и исследование объектов при преобразовании плоскости с использованием систем динамической геометрии, при котором, учащиеся смогут активно развивать своё пространственное мышление при решении задач.

Цель исследования: теоретически обосновать, разработать и экспериментально проверить методику обучения студентов бакалавриата –

будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды GeoGebra.

Методами исследования являются:

1) анализ различной учебной, педагогической, учебно-методической, психологической, психолого-педагогической литературы, посвящённой развитию пространственного мышления студентов;
2) анкетирование;
3) наблюдение и анализ учебной деятельности студентов педагогических вузов, при изучении преобразований плоскости.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и приложения. Данная структура работы обусловлена задачами, определёнными во введении данной работы.

Во введении выделена проблематика работы, описаны цели, задачи работы, определены актуальность, объект и предмет исследования, и выделены основные задачи работы.

В первой главе говорится о теоретические аспекты методики обучения студентов геометрическим преобразованиям с использованием среды GeoGebra. Рассмотрены вопросы, связанные с историей математического образования. Описаны основные возможности системы динамической геометрии GeoGebra при построении геометрических преобразований. Описана общая структура методики обучения геометрическим преобразованиям с использованием СДГ GeoGebra. Аргументирован выбор тем модуля «Геометрические преобразования» и описаны требования, предъявляемые ФГОС ВО к обучению студентов.

Вторая глава посвящена практической реализации курса «Геометрические преобразования». Описаны этапы компьютерной визуализации для движения, подобия, аффинных преобразований, инверсии плоскости.

В заключении описаны выводы по данной работе.

В результате выполнения магистерской диссертации была разработана методика преподавания курса «Геометрические преобразования» с использованием системы компьютерной геометрии GeoGebra для студентов бакалавриата педагогических вузов.

В рамках исследовательской работы также была создана информационная система, которая позволяет хранить и обрабатывать информацию, полученную от студентов курса. Кроме того, в системе предусмотрено прохождение адаптивного теста.

Таким образом данная работа имеет высокую практическую значимость.

The theme of the research work is: the method of teaching students - future mathematics teachers to geometric transformations using the dynamic geometry system GeoGebra.

The object of the study is the process of teaching students - future mathematics teachers to geometric transformations using the GeoGebra environment.

The subject of the study is the method of teaching geometric transformations of bachelor students - future mathematics teachers based on GeoGebra.

The hypothesis of this study is that the use of dynamic geometry systems contributes to improving the quality of the solution of geometric problems, and, promotes the development of spatial thinking.

The problem of the study is the organization of the learning process for solving problems on the construction, analysis and exploration of objects in the transformation of the plane using dynamic geometry systems, in which students can actively develop their spatial thinking in solving problems.

The purpose of the study was to theoretically substantiate, develop and experimentally test the methodology of studying bachelor students - future mathematics teachers - with geometric transformations using the GeoGebra environment.

Methods of research are:

1) analysis of various educational, pedagogical, methodological, psychological, psycho-pedagogical literature, dedicated to the development of spatial thinking of students;

2) questioning;

3) observation and analysis of educational activities of students of pedagogical universities, when studying the transformation of the plane.

Graduation qualification work consists of an introduction, two chapters, conclusion and annex. This structure of work is determined by the tasks defined in the introduction of this paper.

In the introduction of the work we write about problems, the goals and tasks, also the object and the subject of research are determined, and the main tasks of the work are identified.

The first chapter talks about the theoretical aspects of the methodology for teaching students to geometric transformations using the GeoGebra environment. Questions related to the history of mathematical education are considered. The key features in the construction of geometric transformations of the dynamic geometry system GeoGebra are described. Also we described the general structure of the teaching methodology for geometric transformations using DGS GeoGebra.

The second chapter is devoted to the practical implementation of the course "Geometric transformations". The stages of computer visualization for motion, similarity, affine transformations, and plane inversion are described.

In conclusion, we described the main goals which was achieved in the work.

As a result of the master's thesis, the method of teaching the course "Geometric transformations" was developed using the GeoGebra computer geometry system for students of pedagogical universities.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет российское образование претерпевает сильные изменения, которые связанны с развитием идеи инновационного развития, которая основана на компетентностной парадигмы образования. Это в свою очередь позволяет создавать особые условия для формирования конкурентоспособного специалиста, который способен вести не только репродуктивную деятельность на своих занятиях, передавая полученные ранее знания в рамках своих профессиональных компетенций, но готовым к самообразованию, расширению своих компетенций и созданию новых форм обучения.

Одним из основных аспектов такого развития будущего студента является его способность к самостоятельной познавательной деятельности. Что подтверждается и требованиями нового федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО) [1].

В рамках школьного курса планиметрии, обычно, в теме преобразования плоскости, рассматривают движения и подобия (гомотетию). Эти преобразования плоскости являются линейными преобразованиями, основная идея которых заключается в том, что прямые переходят в прямые, это означает, что в декартовой системе координат такие преобразования можно задать линейными уравнениями. Но несмотря на это нелинейные преобразования тоже полезно рассмотреть в школьном курсе, в рамках элективных или факультативных занятий. Особенно это полезно при подготовке учащихся школ к олимпиадам по геометрии. Таким образом изучению аффинных преобразований и инверсии тоже стоит уделить особое внимание при подготовке будущих учителей математики.

Для студентов-бакалавров будущих учителей математики и информатики (направления 44.03.05 «Педагогическое образование») самообразование должно быть основой развития их профессиональной компетентности. Ведь информационные технологии для учителя сейчас являются необходимостью, в соответствии с ФГОС среднего общего образования [2]. А критический срок жизни большинства информационных технологий составляет всего 3 года. Это говорит о том, что выпускник высшего учебного заведения уже по окончанию обучения должен начать самообразовываться и обновлять свои знания.

Одним из основных направлений в использовании информационных технологий на уроках математики является использование различных математических пакетов и систем. Каждое из таких приложений направлено для решения определённых задач, но знание хотя бы одного из них обязательно для современного учителя. В рамках данной работы будет рассмотрено использование ситемы динамической геометрии (СДГ) при обучении студентов будущих учителей математики.

Актуальность использования, а соответственно и изучения для студентов будущих учителей, СДГ обусловлена не только переходом школ на ФГОС нового поколения, но и профессиональным стандартом педагога, где указано значительно число позиций, которые связаны с ИКТ компетенциями учителя [3].

Одна из основных идей развития математики и математического образования, высказанных великим педагогом и ученым Ф. Клейном в 1872 году в его Эрлангенской программе, является применение в математике и ее обучении геометрических преобразований. Геометрическое преобразование, движение, подобие, аффинное преобразование и инверсия и в настоящее время являются одними из важнейших понятий в математической подготовке студентов педвузов. Появившиеся в последние два десятилетия системы динамической геометрии предоставляют дополнительные возможности для эффективного обучения как самим геометрическим преобразованиям, так и их применению при решении задач. В связи с этим разработка методики обучения будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием системы динамической геометрии GeoGebra представляется актуальным.

Объектом исследования является процесс обучения студентов – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды GeoGebra.

Предмет исследования – методика обучения геометрическим преобразованиям студентов бакалавриата – будущих учителей математики на базе GeoGebra.

Гипотеза данного исследования состоит в том, что использование систем динамической геометрии способствует повышению качества решения геометрических задач, и, в частности, способствует развитию пространственного мышления.

Проблемой исследования является организация процесса обучения решению задач на построение и доказательство с использованием систем динамической геометрии, при котором, учащиеся смогут активно развивать своё пространственное мышление.

Цель исследования: теоретически обосновать, разработать и экспериментально проверить методику обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды GeoGebra.

Для достижения цели исследования, мы выделили следующие задачи:

- проанализировать темы модуля «Геометрические преобразования» курса геометрии для студентов бакалавриата, направление подготовки Педагогическое образование, профили Математика и информатика, с точки зрения эффективности использования при их обучении среды GeoGebra;
- изучить методические возможности среды GeoGebra как виртуальной лаборатории, позволяющей эффективно использовать эти возможности

при обучении студентов педагогических вузов геометрическим преобразованиям;

- разработать методику обучения геометрическим преобразованиям студентов педагогического вуза на базе GeoGebra;
- провести педагогический эксперимент по апробации разработанной методики в реальном учебном процессе и оценить ее эффективность.

Методами исследования являются:

4) анализ различной учебной, педагогической, учебно-методической, психологической, психолого-педагогической литературы, посвящённой развитию пространственного мышления студентов;
5) анкетирование;
6) наблюдение и анализ учебной деятельности студентов педагогических вузов, при изучении преобразований плоскости.

Практическая значимость данной работы заключается в создании информационного портала, посвящённого преобразованиям плоскости, который можно использовать при обучении будущих учителей математики.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ GEOGEBRA

1.1 Краткий исторический обзор изучения геометрических преобразований в общеобразовательной и высшей школах

Для создания методики обучения студентов геометрическим преобразованиям с использованием среды GeoGebra стоит начать с рассмотрения исторических сведений о преподавании геометрических преобразований в общеобразовательной и высшей школах.

Школьное геометрическое образование. Геометрические знания на Руси берут своё начало от раннего средневековья, но только к середине XVIII века геометрия начала оформляться как самостоятельный учебный предмет. Во второй половине XVIII века в России стали открываться гимназии и училища, что способствовало более активному распространению геометрических знаний.

Однако, большинство российских детей практически не получали никакого образования. В конце XIX и начале XX веков на государственном уровне был принят ряд постановлений, направленных на улучшение математической и, в частности, геометрической подготовки учащихся.

Впервые в 1920 г. была предложена первая примерная программа по геометрии, в которой предлагалось широкое привлечение движения, подчёркивалась важность черчения. Но школа того времени по ряду объективных причин не могла дать необходимых геометрических знаний. Буквально через два года эта программа прекратила своё существование, и в школе началось многолетнее проведение различных педагогических экспериментов, что отрицательно сказалось на математической подготовке учащихся.

В 1933 году школа снова вернулась к предметной системе обучения, перешла на новые учебные планы и программы. Однако программа по геометрии, как и в 1920 году, была достаточно сложной, особенно в старших классах. И уже в 1921 году в 10-м классе вместо аналитической геометрии был введён повторительный курс математики. Однако, через два года, школа вернулась к традиционному, учебному геометрическому материалу и проработала более двадцати лет.

В конце 50-х годов, после принятия закона об укреплении связи школы с жизнью, опять произошёл переход на новые программы. Центральное место в программе по планиметрии заняли геометрические преобразования. Но попытка поднять на современный уровень геометрическую подготовку с помощью идеи геометрических преобразований не дала положительных результатов. Вскоре геометрические преобразования были исключены из программы.

В конце 60-х годов была создана комиссия и в нашей стране, её математическую секцию возглавил А.Н. Колмогоров. Результатом работы секции явился переход школы на новые программы по математике. Геометрические преобразования вернулись в программу курса геометрии. Подход к включению этого понятия теперь был более продуманным и методически обоснованным. Преобразования плоскости и пространства помещались авторами в центр курса, и большинство понятий геометрии увязывалось с ними. Однако, через некоторое время, школа вновь была вынуждена перейти к программам традиционного школьного курса геометрии.

К началу 70-х годов в Российской федерации завершился переход к всеобщему среднему образованию. Но итоги оказались для предметов естественно-математического цикла не очень утешительными. Учащиеся, которые были интеллектуально не готовы освоить программы курсов 9-го и 10-го класса, в первую очередь алгебры и геометрии, были вынуждены продолжать обучение. Чтобы эта категория учеников могла получить среднее образование, школа была вынуждена снизить уровень требований по геометрии ко всем выпускникам, что повлекло снижение уровня их геометрической подготовки.

Возникла потребность в изменении содержания школьного курса геометрии. Однако вместо того, чтобы сделать программы более доступными и понятными, комиссия по математическому образованию при Министерстве просвещения поступила с точностью до наоборот. Появился учебник, А.Н. Колмогорова, концептуальной основой которого была взята идея геометрического преобразования, но её реализация оказалась не совсем удачной. Через некоторое время на смену этому учебнику пришли другие: А.В. Погорелова, Л.С. Атанасяна и др. Вместе с тем ситуация с преподаванием геометрии по-прежнему обстоит неблагополучно.

Одной из множества причин снижения интереса к геометрии - это переход к единому государственному экзамену. В результате учителя математики стали меньше уделять внимания этому предмету. Вместо уроков геометрии стали проводиться уроки алгебры.

Причиной снижения геометрической подготовки учащихся послужила также недостаточно продуманная методика применения в школьном курсе геометрии информационных технологий обучения.

Если рассматривать традиционную систему геометрической подготовки будущих учителей математики, то стоит отметить тот факт, что в нашей стране сама система геометрической подготовки учителей математики имеет достаточного богатую историю, но складывалась модель математического образования скорее стихийно, нежели систематически. Постепенно выделялись недостатки математического образования и тогда начинали совершенствовать цели, содержание, формы, методы и средства.

В педагогических институтах, в зависимости от временного промежутка, либо велись отдельные геометрические дисциплины, либо читался единый курс геометрии. В 60-х годах геометрическая компонента математической подготовки будущих учителей математики реализовывалась за счёт таких курсов, как: «Основания геометрии», «Проективная геометрия», «Аналитическая геометрия» и «Элементарная математика и практикум по решению школьных задач». На изучение этих тем отводилось около 400 аудиторных часов.

Во второй половине 70-х годов эти геометрические курсы решили объединить в единый курс по геометрии для педагогических институтов «Элементарная геометрия и практикум по решению школьных задач». Но через некоторое время его переименовали в «Практикум по решению задач» и сделали чисто практическим курсом. При этом было уменьшено общее количество часов – до 320 часов.

В 80-х годах произошло новое изменение, высшая педагогическая школа вслед за средней школой подняла на более высокий уровень строгость и абстрактность изложения всех математических дисциплин. Это повлекло за собой снижение уровня геометрической подготовки многих студентов – учителей математики.

Кажется, что большинство авторов учебников по геометрии для педагогических вузов [4, 5, 6] просто соревнуются друг с другом по уровню абстрактности изложения материала в своих учебных пособиях. Это привело к тому, что студентам стало практически невозможно самостоятельно изучить материал по геометрии по этим учебникам. В свою очередь, для поддержания достаточного уровня геометрической подготовки будущих учителей математики на кафедрах геометрии в большинстве педагогических вузов начали издавать собственные учебно-методических пособия, методические разработки и рекомендации, относящиеся к основным разделам курса геометрии. Большое значение стали уделять вопросам, непосредственно связанным с методикой преподавания математических дисциплин.

Программа курса геометрии в педагогических вузах 1977 года начиналась с аналитической геометрии, после чего, опираясь на векторный и координатный методы, изучались остальные геометрические разделы. Это было связано в первую очередь с преподаванием геометрии в других высших учебных заведениях, не связанных с педагогикой. Здесь стоит отметить, что все разделы, изучаемые по такому курсу, не имеют прямого выхода на школу. Как результат такого обучения получилось, что выпускники педвузов оказывались не подготовленными к преподаванию школьного курса геометрии.

При разрабатываемой нами методики стоит выделить несколько принципов, необходимых для качественной подготовки студентов будущих учителей математики к использованию современных информационных технологий [7].

Принцип адекватности: использование информационных технологий должны быть адекватно использованию в геометрической науке.

Принцип визуализации: использование информационных технологий должно быть максимально ориентировано на визуальные возможности компьютера.

Принцип использования информационных технологий в качестве инструмента познания: предпочтение необходимо отдавать тем средствам информационных технологий, которые можно использовать как инструмент познания.

Принцип самостоятельности в использовании компьютерных средств: стоит уделить особое внимание тому, чтобы студенты (будущие учителя математики) самостоятельно разрабатывали необходимые программные средства.

Принцип ориентации на школу: обязательно нужно рассматривать вопросы, связанные с использованием информационных технологий в школе.

Принцип систематичности использования информационных технологий: использование информационных технологий должно носить систематический, непрерывный характер, то есть использоваться на всех этапах и во всех темах.

1.2 Система динамической геометрии GeoGebra и ее методические возможности как средства обучения геометрическим преобразованиям

Программная среда динамической геометрии является мощным инструментом математического обучения. СДГ предлагает уникальные возможности для обучения посредством эксперимента, творческого решения проблемы и самостоятельной разработки. В контексте крупномасштабного проекта International GeoGebra Institute, который занимается исследованием в области преподавания геометрии, также большое значение уделено и геометрическим преобразованиям.

GeoGebra – это бесплатное приложение, которое можно использовать для изучения математики. Она легко позволяет связать визуальную геометрию с алгебраическими представлениями объектов – отсюда и гибридное название программы Geo от геометрии (geometry) и Gebra от алгебры (algebra). Программное обеспечение легко загружается, но также может быть использовано в Web-версии приложения. Чтобы начать работу с программой, достаточно зайти на домашнюю страницу GeoGebra http://www.geogebra.org/cms/ и скачать необходимо приложение [8].

На время написания данной работы есть версии для Android, iOS, MacOS, Windows, Linux, расширение для Google Chrom и Web-версия. Последняя доступная версия (6.0.363.0) вышла 3.06.2017 и претерпела значительные изменения по сравнению с 5 версией программы.

Рассмотрим интерфейс 6 версией программы и уделим особое внимание возможностям преобразования плоскости.

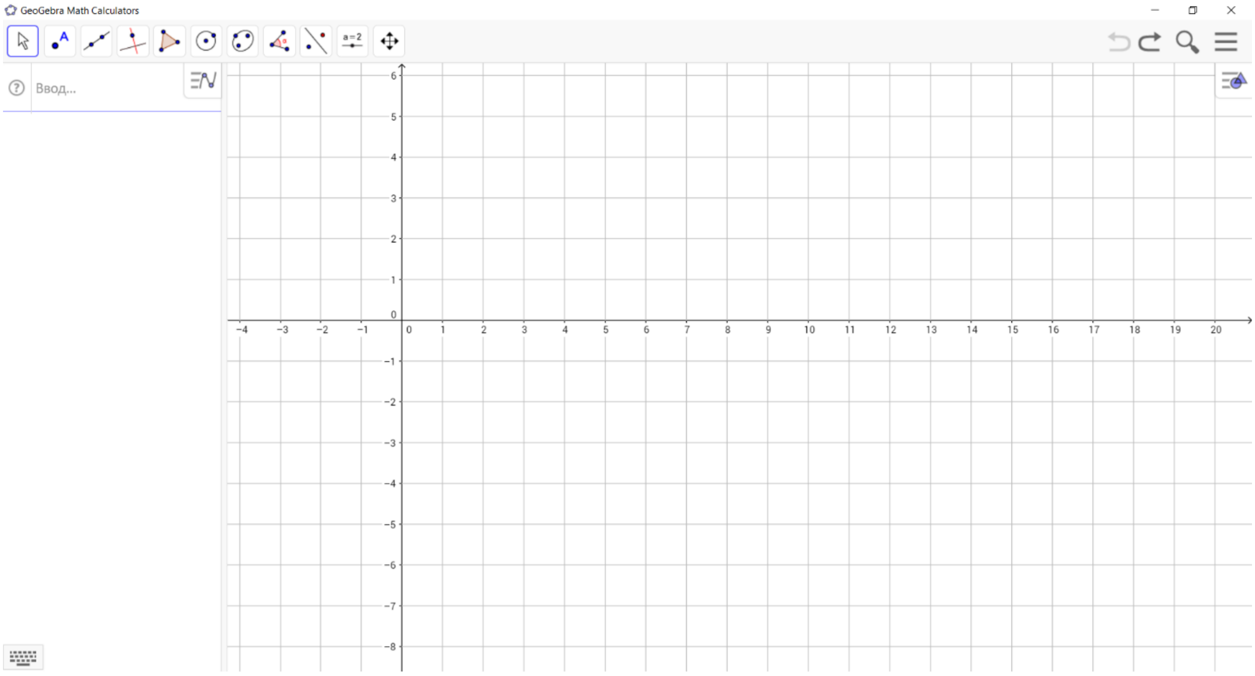


Рисунок 1.1 – Внешний вид программы

В правой верхней части (Рисунок 1.1) расположена панель инструментов. Она служит для быстрого доступа к основным инструментам программы. Некоторые из этих элементов мы опишем ниже.

При выборе любого из инструментов в нижней части экрана, по середине, появится окно с информацией по выбранному инструменту, а под выбранным инструментом откроется список доступных инструментов из данного блока (Рисунок 1.2).

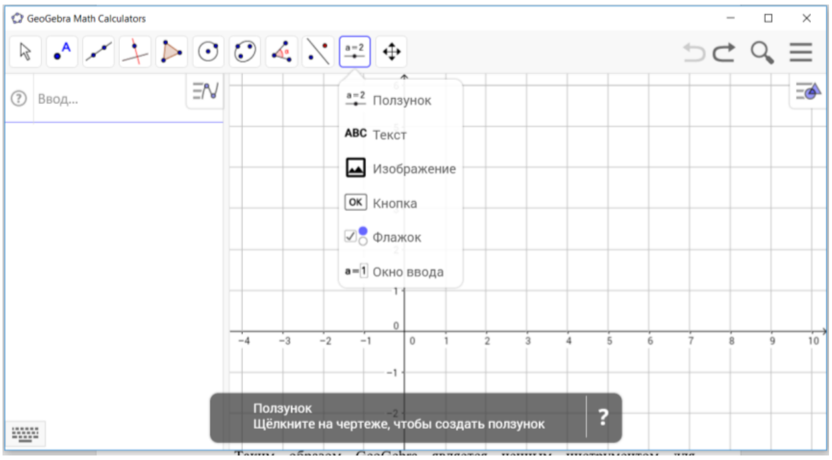


Рисунок 1.2 – Выбор инструмента

В левой верхней части (Рисунок 1.1) расположены кнопки отмены/повтора действия, изменения масштаба и главное меню. Одним из изменений в интерфейсе 6 версии, по сравнению с предыдущими версиями стало то, что главное меню «спрятали» в отдельную кнопку, в виде трёх полосок. Это сделано в первую очередь для того, чтобы создать единый интерфейс программы для компьютерной и мобильной версии.

В правой части экрана расположена область алгебры, которая тоже претерпела значительные изменения.

По умолчанию в верхней части области алгебры расположена строка ввода (в предыдущих версиях она была в нижней части всего окна GeoGebra). При добавлении объектов строка ввода опускается вниз (Рисунок 1.3).

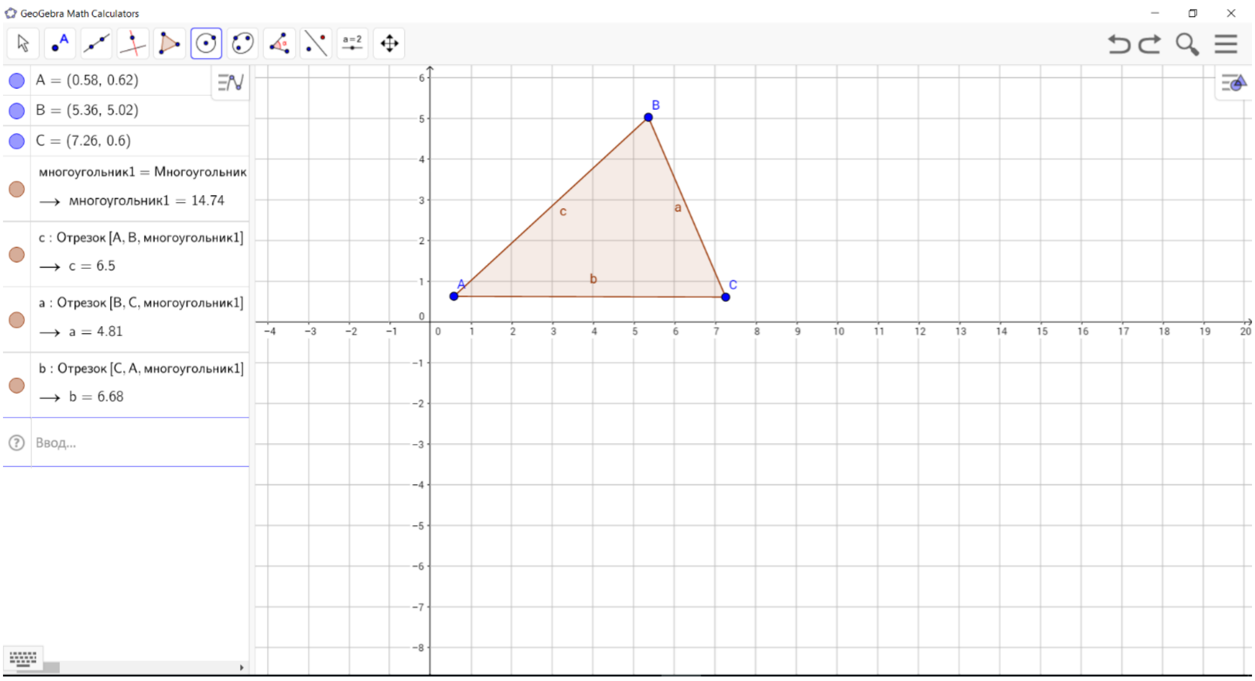


Рисунок 1.3 – Добавление объектов

В нижней части области алгебры расположена иконка клавиатуры, при нажатии на которую откроется виртуальная клавиатура. В данной клавиатуре доступны специальные символы, вычисления модуля, корня, степени, а также стандартные арифметические операции.

В верхней части окна алгебры расположена кнопка «Панель настройки стиля». При нажатии на эту кнопку откроется небольшое меню (Рисунок 1.4).

Рисунок 1.4 – Панель настройки стиля для области алгебры

В отображаемом меню располагается четыре кнопки, каждая из которых отвечает за внешнее оформление области алгебры.

Первая кнопка позволяет изменить тип сортировки, вторая кнопка позволяет изменить отображения объектов (наименование, координаты, формулы), третья кнопка открывает дополнительные настройки, чётвёртая кнопка открывает дополнительные области для работы (CAS, Полотно 3D и т.д.).

В правой части окна программы (Рисунок 1.1) расположено «Полотно» или область геометрии. В данной области отображаются все объекты, которые будут добавлены в чертёж. В верхней правой части данного окна также расположена кнопка «Панель настройки стиля».

Рассмотрим более подробно раздел «Преобразования» на панели инструментов (Рисунок 1.5).

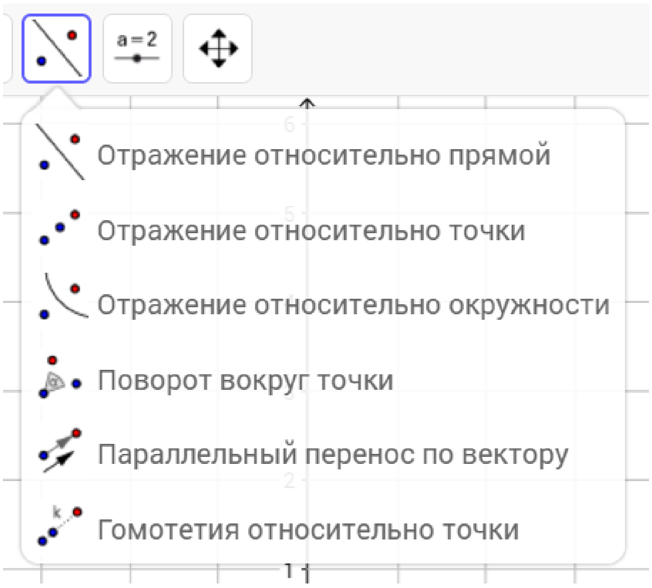


Рисунок 1.5 – Раздел «Преобразования»

Отображение относительно прямой:

Для использования данного инструмента необходима выбрать объект, образ которого мы будем строить и прямую. При этом прямая не обязательно должна быть задана явно, достаточно указать отрезок или сторону другой фигуры.

Пример работы данного инструмента представлен на рисунке ниже.

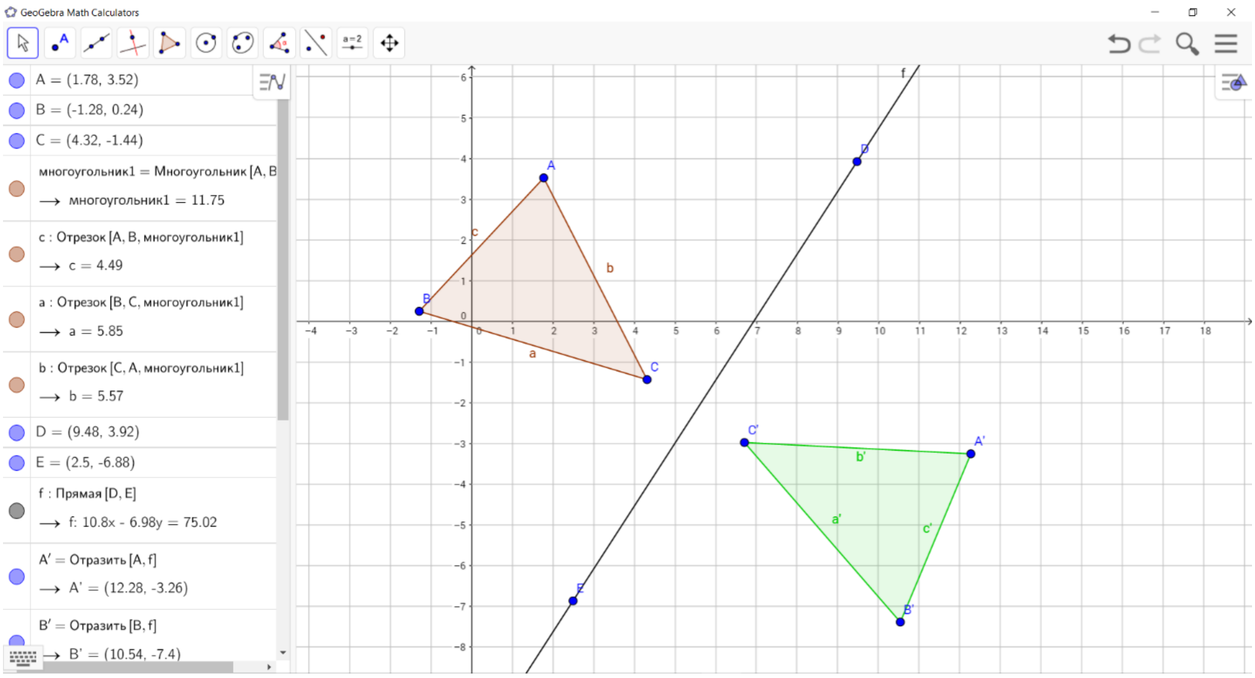


Рисунок 1.6 – Отображение относительно прямой

На рисунке выше красный треугольник ABC, это искомый треугольник, а зелёный A'B'C' это образ искомого треугольника относительно прямой f.

Отражение относительно точки:

Для использования данного инструмента необходимо указать объект и центр отражения.

В качестве центра отражения может выступать любая точка на плоскости.

На рисунке ниже продемонстрирован пример работы инструмента «Отражение относительно точки».

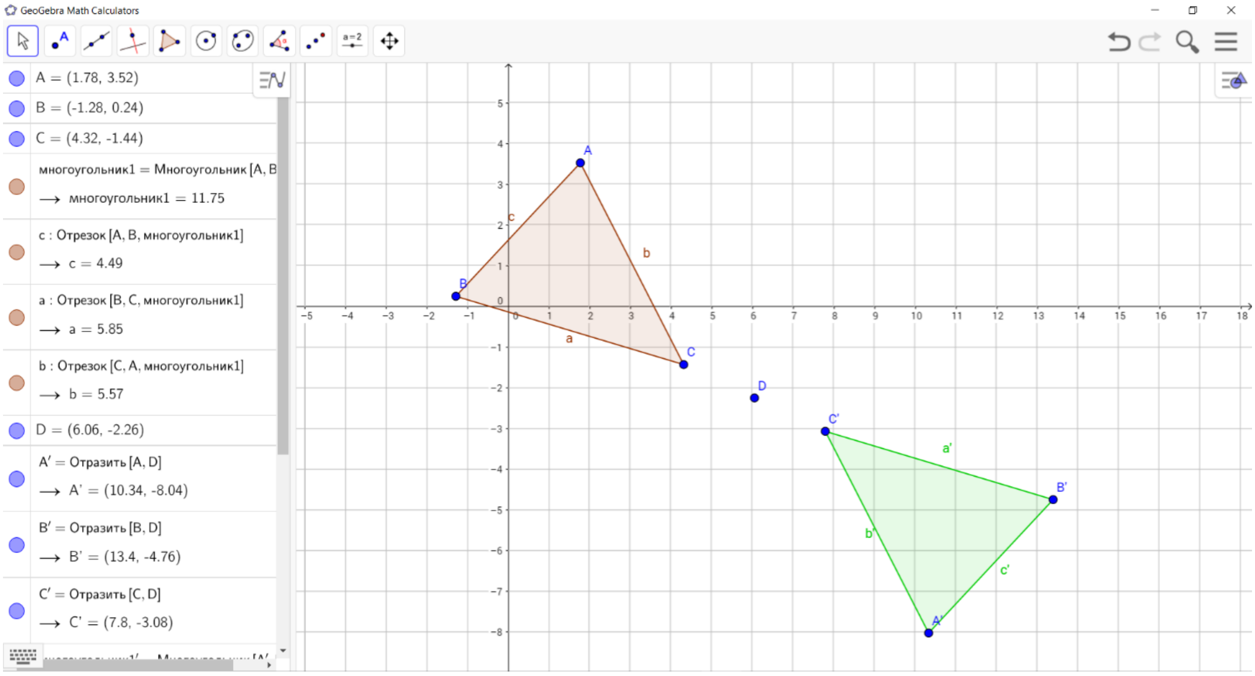


Рисунок 1.7 – Отражение относительно точки

На рисунке выше красный треугольник ABC, это искомый треугольник, а зелёный A'B'C' это образ искомого треугольника относительно токи D.

Отражение относительно окружности:

Для использования данного инструмента необходимо указать объект и окружность.

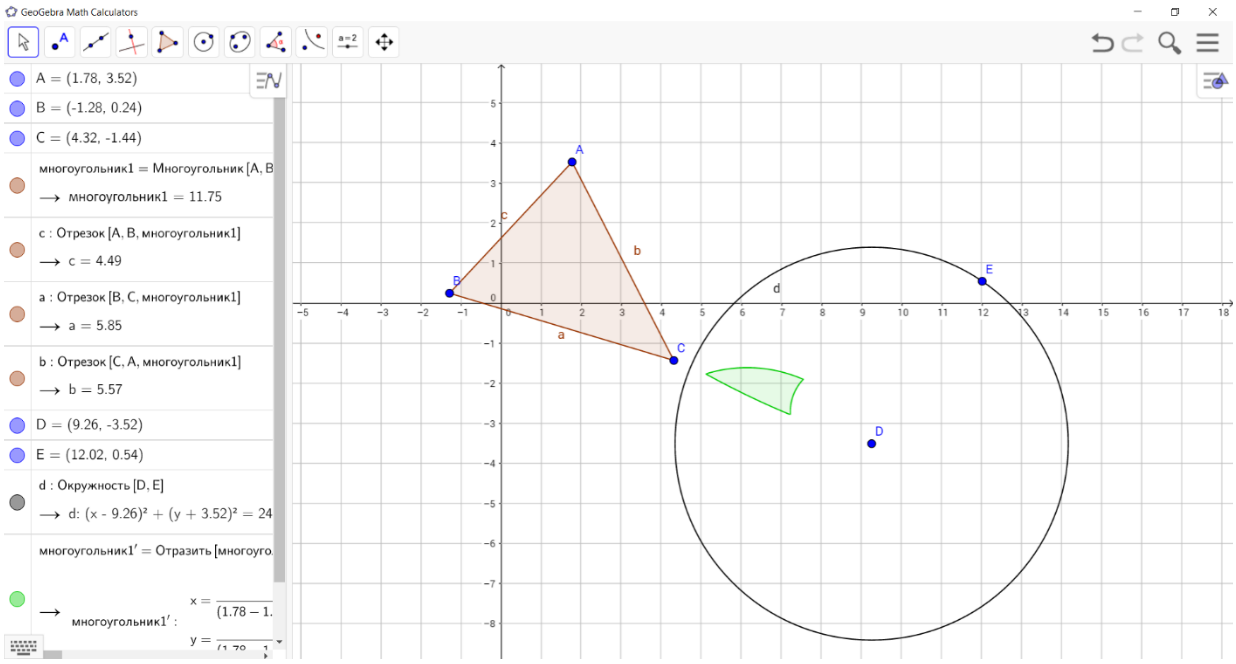


Рисунок 1.8 – Отображение относительно окружности

На рисунке выше красный треугольник ABC, это искомый треугольник, а зелёная фигура внутри окружности с центром в точке D это образ искомого треугольника относительно окружности с центром в точке D и радиуса DE.

Поворот вокруг точки:

Для использования данного инструмента необходимо указать объект, центр поворота и ввести угол поворота.

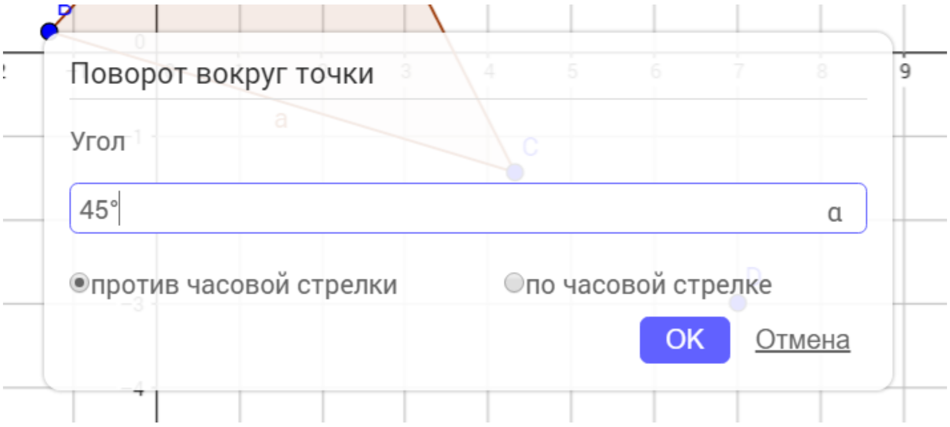


Рисунок 1.9 – Угол поворота для инструмента «Поворот вокруг точки»

После ввода значения и выбора направления поворота мы получим следующее изображение:

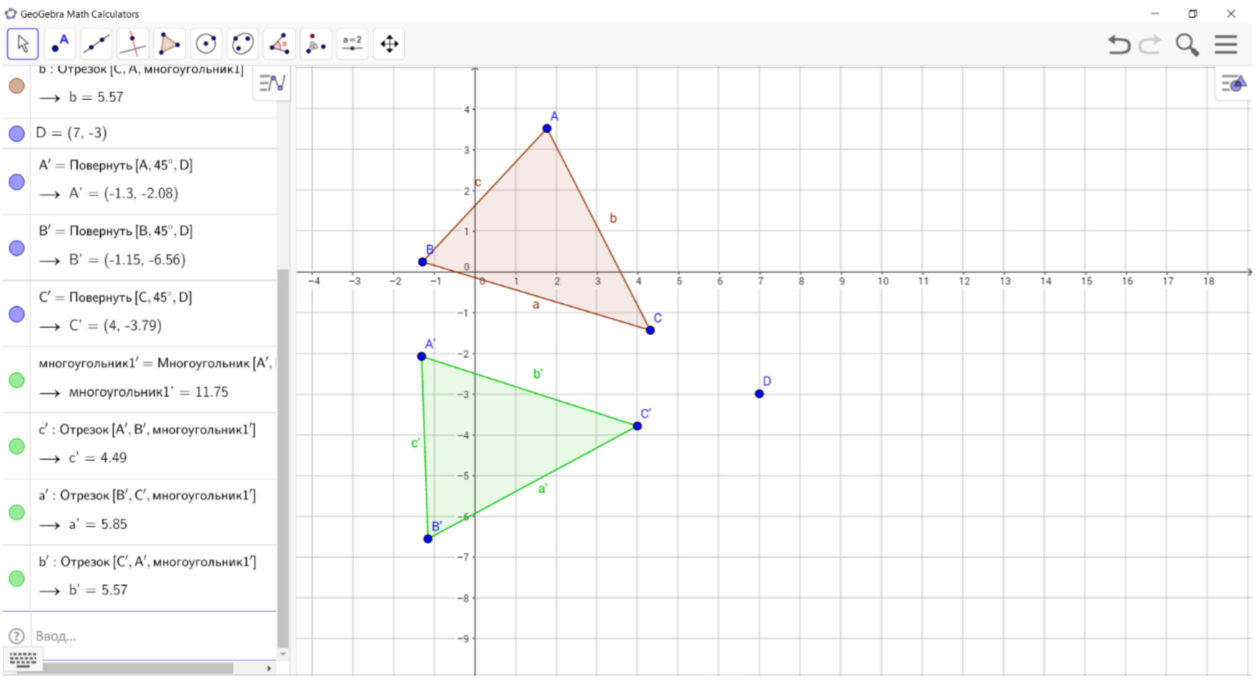


Рисунок 1.10 – Поворот вокруг точки

Параллельный перенос по вектору:

Для использования данного инструмента необходимо указать объект и вектор переноса. При этом в качестве вектора переноса можно указать две точки.

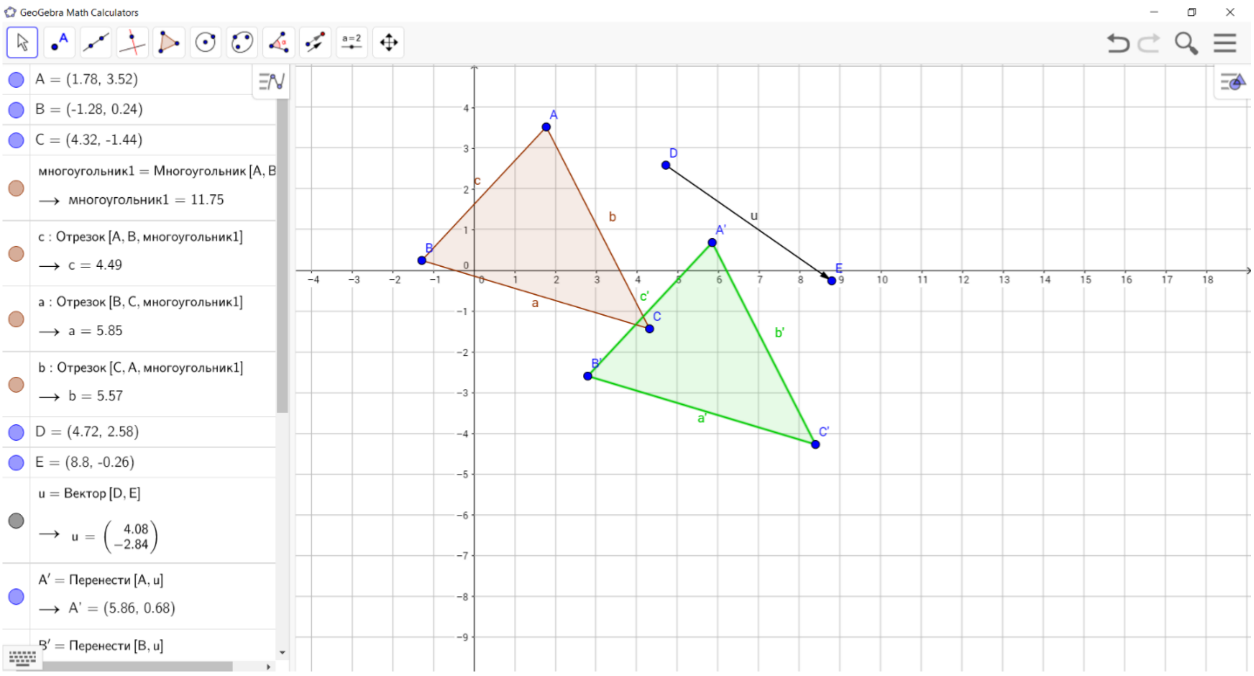


Рисунок 1.11 – Параллельный перенос по вектору

На рисунке выше красный треугольник ABC, это искомый треугольник, а зелёный треугольник — это образ искомого треугольника при переносе на вектор DE.

Гомотетия относительно точки:

Для использования данного инструмента необходимо указать искомый объект, центр гомотетии и ввести коэффициент гомотетии.

При этом коэффициент гомотетии задаётся через специальную форму.

Рисунок 1.12 – Ввод коэффициента гомотетии

При этом стоит учитывать, что в качестве коэффициента можно использовать не только числа, но и переменные, которые можно просто указать в строке ввода коэффициента. Это позволит создавать динамические чертежи.

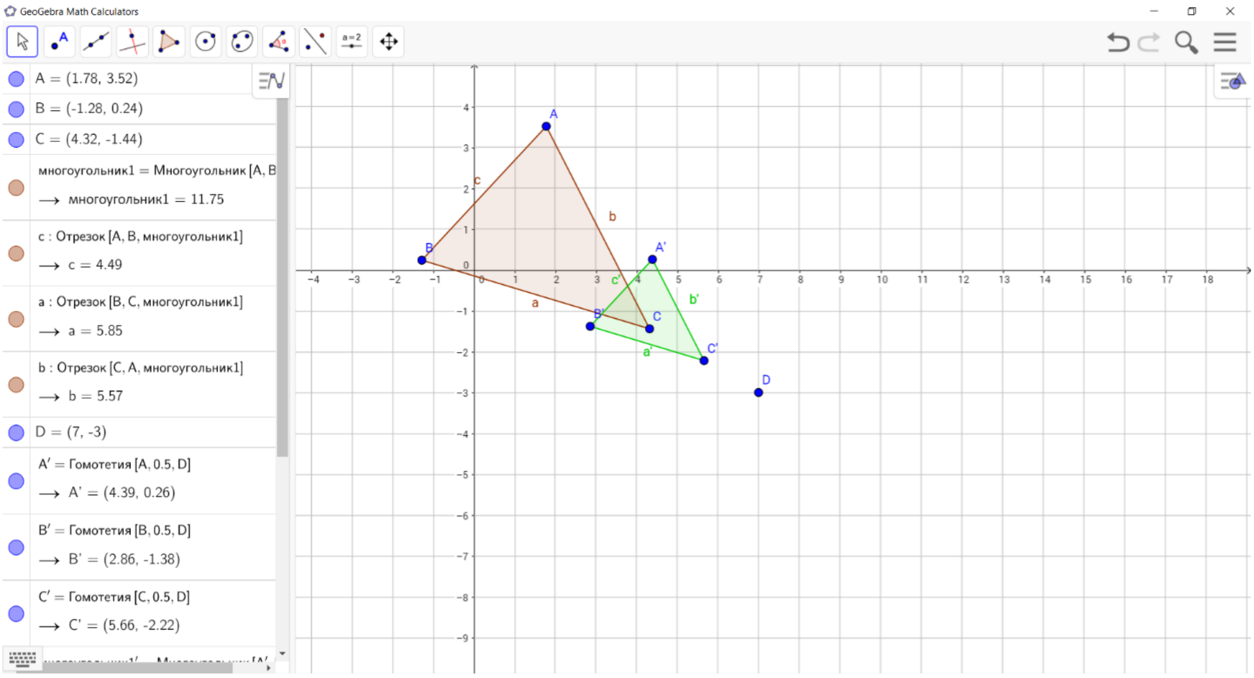


Рисунок 1.13 – Гомотетия относительно точки

Одной из значимых возможностей GeoGebra является использование анимации. При этом анимация построена таким образом, что все анимированные объекты двигаются со скоростью «дистанция за единицу времени». Другими словами, все объекты проходят полный цикл своей анимации за одинаковое время, не зависимо от необходимой длины. Например, у нас есть две окружности, одна радиуса 5 единиц, а другая радиуса 1 единица. Если мы на каждую из окружностей поставим по точке и анимируем их, то они пройдут всю длину своей окружности за одинаковое время, при этом скорость движения точки по окружности с радиусом равным 5 будет выше, чем скорость движения точки по окружности с радиусом 1. Это очень важное свойство в понимании анимации в GeoGebra, которое пригодится нам для построения анимации преобразования плоскости.

Рассмотрим простой пример анимации для демонстрации отражения относительно прямой.

На плоскости построим искомый треугольник и прямую. И используя инструмент «Отражение относительно прямой» построим образ искомого треугольника.

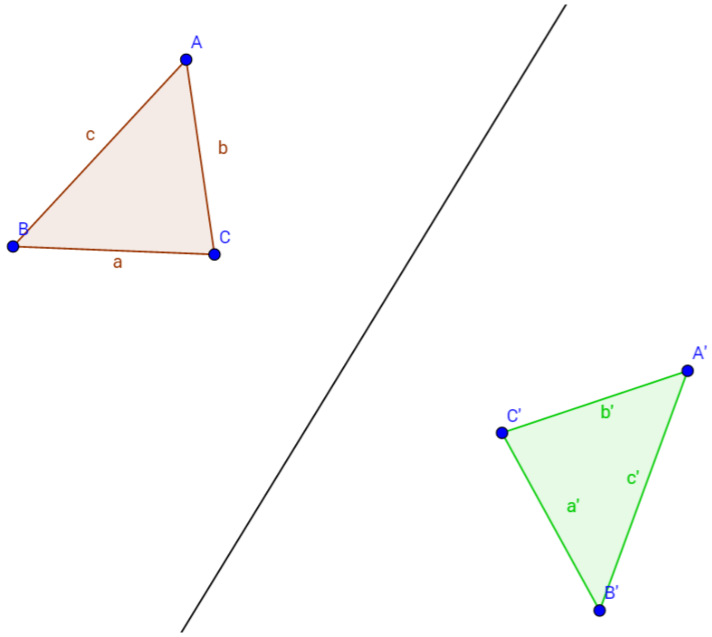


Рисунок 1.14 – Искомый чертёж

Далее соединим отрезками точки A и A', B и B', C и C'.

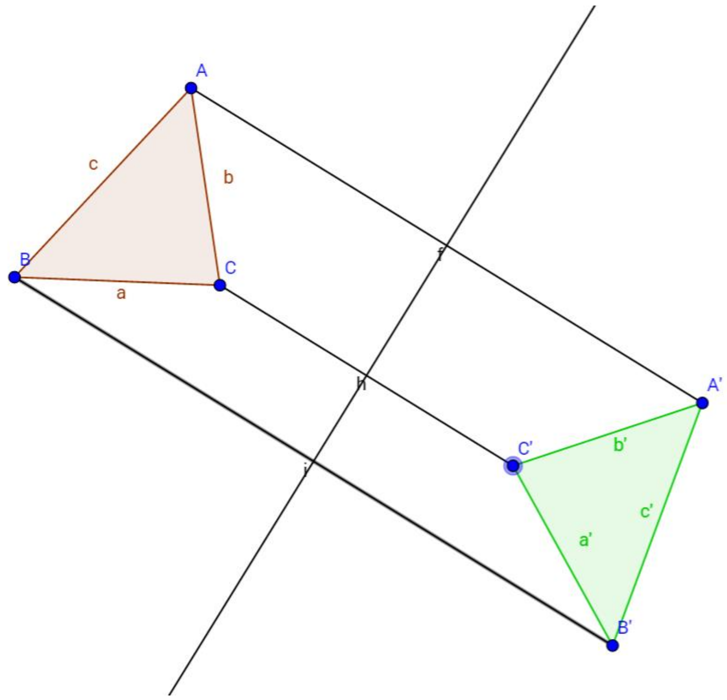


Рисунок 1.15 – Отрезки соединяющие вершины

После этого построим произвольный треугольник таким образом, чтобы его вершины лежали на построенных ранее отрезках. И уберём все обозначения, оставив только сам треугольник. Изменим его цвет на синий.

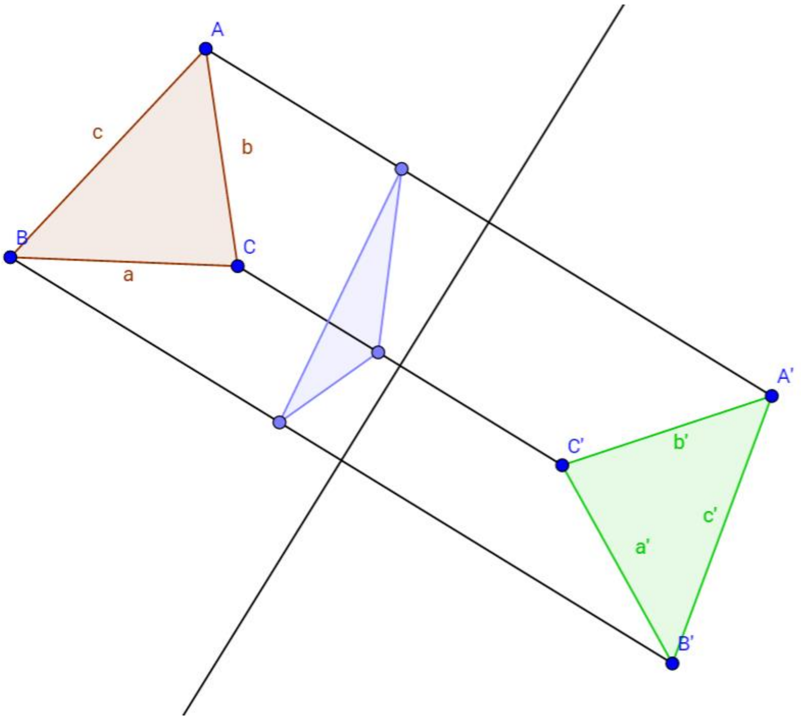


Рисунок 1.16 – Произвольный треугольник

Далее для каждой из вершин синего треугольника зададим анимацию. Для этого нажмём правой кнопкой мыши на вершину и выберем пункт «Анимация». Для данного примера оставим анимацию без изменений. Пи включении анимации все три точки начнут двигаться по своим отрезкам, а когда дойдут до конца отрезка, они переместятся в его начало. Поэтому очень важно, чтобы все три отрезка строились в одном направлении, от искомого объекта к его образу.

После этих действий нажмём на иконку паузы в нижней правой части полотна. Спрячем все три прямые, чтобы они не отображались и сдвинем все вершины синего треугольника в соответствующие вершины красного треугольника.

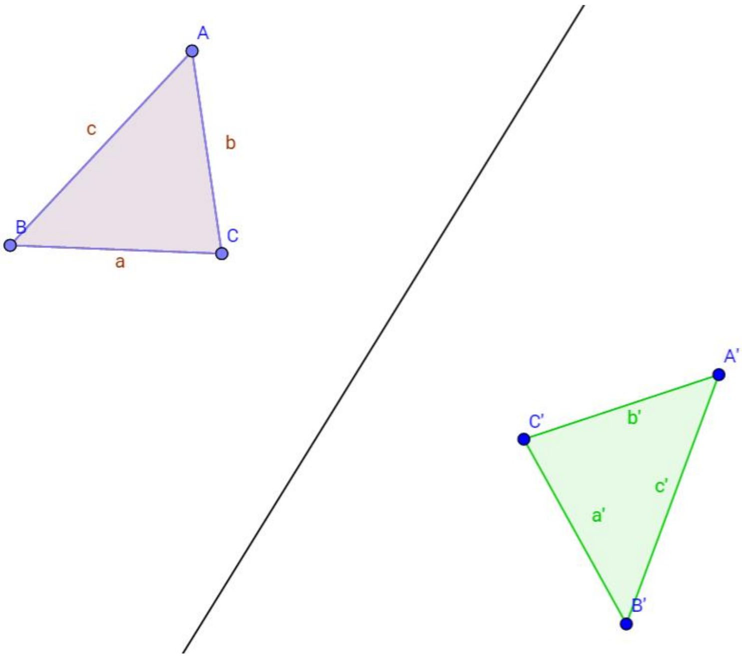


Рисунок 1.17 – Готовый чертёж

Теперь при включении анимации мы получим наглядную демонстрацию преобразования искомого треугольника в его образ.

Таким образом GeoGebra является ценным инструментом для активного изучения студентами понятий и свойств геометрических преобразований. Данная СДГ предлагает богатую среду для изучения различных геометрических ситуаций с различными требованиями и условиями задач. В дополнение к этому, СДГ может поддерживать все функции планируемой последовательности инструктивных этапов на основе модели взаимодействия, объяснения, разработки и оценки. Это делает GeoGebra ценным инструментом для разработки структурированной и эффективной учебной программы для студентов, и даёт возможность для изучения других геометрических понятий.

1.3 Основные компоненты (целевой, содержательный, организационный и оценочный) структуры методики обучения геометрическим преобразованиям на базе GeoGebra

Методика обучения это в первую очередь совокупность различных способы передачи познаний другим. Среди основных методов обучения выделяют: репродуктивный (повторение/воспроизведение), догматический (заучивание), эвристический (самостоятельное изучение) и исследовательский. А в структуре методики обучения выделяют следующие компоненты: целевой, содержательный, организационный и оценочный.

Целевой компонент должен определять, как общее назначение, цели и задачи, так и планируемые результаты, в частности должна присутствовать система оценки достижения поставленных целей и планируемых результатов.

Современное общество задаёт свои цели и задачи к будущему учителю математики. Ярким примером является введение стандарта педагога и ФГОС нового поколения.

Современный учитель должен быть всесторонне развит, обладать действенными знаниями по своему предмету и уметь их применять на практике. Он должен полностью понимать все особенности школьного курса преподаваемого предмета и его связь с другими областями. Одним из обязательных требований к современному учителю являются владение цифровыми средствами обучения и знание современных образовательных технологий.

Т.к. в данной работе рассмотрены условия для будущих учителей математики в рамках преподавания геометрических преобразований на базе GeoGebra, то стоит выделить требования к разрабатываемой структуре.

1. Информационные технологии являются неотъемлемой частью исследования геометрической задачи.

Основная суть появления данного требования заключается в том, что меняется концепция образования и сейчас использование информационных технологий уже не является новаторским, а становится частью повседневной деятельности человека.

2. Студенты должны получить знания, умения и навыки, необходимые и достаточные для использования информационных технологий в рамках курса геометрических преобразований.

Преподавателю недостаточно просто показать цифровые технологии, которые можно использовать в деятельности учителя, но необходимо также научить их правильно использовать.

3. Обеспечить достаточный опыт использования компьютера как средства познания.

В рамках изучения геометрических преобразований необходимо предоставить студентам достаточный объём знаний, чтобы они использовали СДГ самостоятельно, при этом делали это не для подбора решения, а в качестве самостоятельного средства познания.

4. Подготовить будущих учителей математики как психологически, так и идеологически к применению информационных технологий в школьном курсе.

5. Обеспечить условия для формирования геометрической и информационной культуры.

В свою очередь каждое из описанных выше требований формирует цель методики обучения геометрическим преобразованиям на базе GeoGebra.

Первая цель – это формирование научно-исследовательского мировоззрения. Курс геометрических преобразований должен содействовать развитию научной подготовки студентов. Студенты должны понимать суть геометрической науки, её связь с другими областями и обязательно иметь возможность использования информационных технологий в рамках геометрического исследования.

Вторая цель – это обеспечение достаточности уровня знаний, умений и навыков, формирование компетенций. Курс геометрических преобразований должен предоставить такой уровень знаний, умений и навыков, формирование компетенций, который был бы достаточным для применения информационных технологий в геометрических исследованиях.

Третья цель – формирование опыта педагогической деятельности. Основная суть в том, что обучение геометрическим преобразованиям будущих учителей математики должно дать им достаточный опыт для дальнейшего его преподавания в школьном курсе математики. Здесь нужно уделить особое внимание использованию информационных технологий в качестве средств познания.

Четвёртая цель – формирование математической и информационной культуры будущих учителей математики. При подготовке будущих учителей математике стоит использовать различные методы конструирования геометрических объектов с использованием информационных технологий. Можно повторить различные исторические опыты или предложить решить софистические задачи. Кроме того, студент должен чётко понимать, что информационные технологии нужно изучать для того, чтобы их можно было использовать в других областях.

Содержательный компонент должен определять общее содержание рассматриваемого этапа образования и включать образовательные программы, ориентированные на достижение личностных, предметных и метапредметных результатов.

Все принципы компьютерной поддержки курса геометрии в педвузе имеют определённое влияние на содержание геометрической подготовки учителя математики.

Например, для реализации принципа адекватности необходимо знакомить студентов с различными информационными технологиями такими как: пакеты символьных вычислений, математические калькуляторы, системы динамической геометрии и т.д.

Для реализации принципа визуализации необходимо максимально использовать возможности систем динамической геометрии на практических и лабораторных занятиях. В частности, при изучении модуля «Геометрические преобразования» можно представить в динамике и в виде пошаговой процедуры.

При реализации принципа использования информационных технологий как инструмента познания стоит уделить особое внимание использованию средств динамической геометрии в качестве инструмента получения собственных знаний по геометрии.

Четвёртый принцип должен гарантировать содержание курса таким образом, чтобы студент, используя полученные знания, был способен создавать самостоятельные продукты, которые в дальнейшем можно было бы использовать на уроках геометрии в школе.

Исходя из пятого принципа содержание методики должно быть построено таким образом, чтобы студент не только понимал место изучаемого материала в школьном курсе геометрии, но и осознавал как именно можно использовать информационные технологии в рамках преподавания данной темы в школе.

Шестой принцип говорит о том, что использование информационных технологий должно нести непрерывный характер в рамках изучения школьного курса геометрии.

Содержание курса «Геометрические преобразования», опираясь на наши принципы и на государственные стандарты, будет следующим:

- Понятие геометрического преобразования.

В рамках данного раздела будут рассмотрены теоретические основы геометрических преобразований.

- Движения плоскости.

В данном разделе будет рассмотрены практические задачи, с использованием GeoGebra.

- Подобия плоскости.

При изучении темы подобия плоскости, стоит создавать наглядные динамические чертежи, с использованием параметров, для отображения подобия.

- Аффинные преобразования.

В данном разделе также должны быть подробно рассмотрены способы компьютерной визуализации на конкретных примерах школьного курса.

- Инверсия.

В данном разделе будет рассмотрены практические задачи, с использованием GeoGebra.

Организационный компонент должен определять рамки организации образовательного процесса, а также механизм реализации компонентов основной образовательной программы.

Изучение раздела «Геометрические преобразования» проходит в четвёртом семестре курса бакалавриата по направлению «Учитель математики». На весь курс отведено 72 аудиторных академических часа, из которых 36 часов – лекционные занятия, 14 часов – практические занятия, 10 – лабораторно-практические занятия, 12 часов – лабораторные занятия.

При реализации данного курса стоит особое внимание уделить лабораторным и лабораторно-практическим занятиям, т.к. в рамках данных занятий студент будет использовать все свои навыки для самостоятельной работы, и их реализация должна полностью соответствовать описанным выше принципам.

Распределение часов по темам изучаемого курса представлено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Распределение часов по темам

№	Наименование	Вид занятия			
		Лекционные	Практические	Лабораторно-практические	Лабораторные
1	Движения плоскости	16	6	4	4
2	Подобия плоскости	8	0	6	4
3	Аффинные преобразования	8	4	0	2
4	Инверсия	4	4	0	2
ИТОГО:		36	14	10	12

Оценочный компонент включает в себя систему оценивания результатов работы педагогом и самооценку обучающимися.

Все самостоятельные работы студентов, выполняемые в рамках лабораторно-практических и лабораторных занятий, будут сохраняться в единую папку. Из которой в дальнейшем преподаватель будет брать задания для проверки.

Кроме того, студенты также будут проверять работы своих одногруппников и свои собственные работы, выставляя оценки.

Таким образом одна работа будет проверена минимум 3 раза: самооценка, оценка одногруппника и оценка преподавателя.

Для реализации такой оценки необходимо разработать систему оценивания выполненного задания. При это все критерии будут иметь общую структуру, но разное количество баллов, в зависимости от условия задания.

Для самопроверки студент будет выставлять себе баллы по критериям:

- Количество выполненных этапов задания;
- Количество затраченного времени;
- Достижимость цели;
- Свой вклад в работу (использовал готовый материал, частично создал новое, полностью самостоятельная разработка);
- Удовлетворённость выполненной работой.

Критерии для проверки чужой работы студентом:

- Корректность построения;
- Логичность построения;
- Количество выполненных этапов задания;
- Достижимость цели;
- Вклад в работу (использовал готовый материал, частично создал новое, полностью самостоятельная разработка);
- Качество и аккуратность работы (наличие лишних построений, наглядность чертежа и т.д.).

Оценка работы преподавателем по критериям совпадает с критериями оценки студентами чужой работы. Но по результатам проверки преподаватель должен оставить развёрнутый комментарий к своей оценке по критериям.

Преимущества описанной методики заключаются в том, что она обеспечивает запланированную последовательность обучения, при этом ставит обучающихся в центр их обучения, поощряя их исследовать, строить собственное понимание понятий и связывать это понимание с другими концепциями.

1.4 Темы модуля «Преобразования» курса геометрии, удовлетворяющие дидактическим принципам отбора содержания обучения геометрии на базе GeoGebra

Принципы и методы отбора содержания обучения были исследованы во многих работах. Так, например, в своей диссертации А.Г. Мордкович сформулировал критерии профессионально-педагогического подхода непосредственно к математическим курсам педвузов [9]. Он выделил три основных критерия:

- критерий соответствия целям обучения;
- критерий дидактической изоморфности;
- критерий минимизации.

В монографии «Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики» Майер В.Р. и Семина Е.А. выделяют восемь принципов отбора содержания обучения [7].

1. Принцип соответствия целям обучения: содержание курса «Геометрические преобразования» должно способствовать формированию научного мировоззрения, развивать интерес к геометрии, создать условия для развития математической интуиции. Кроме того, студент в рамках курса должен получить необходимый набор знаний, умений и навыков по рассматриваемой теме, которых было бы достаточно для овладения научным

фундаментом школьного курса «Геометрические преобразования». Также содержание курса должно предоставить студентам достаточный педагогический опыт, чтобы будущий учитель способен был преобразовывать полученный научный материал в доступный для школьного уровня учебный материал.

2. Принцип дидактической изоморфности: степень научности курса должна определяться с учётом психологических особенностей студента, а весь объём преподаваемого курса должен быть дидактически переосмыслен. Весь материал, преподаваемый в рамках курса должен быть логически связан и гарантировать формирование профессиональной ориентации студентов – будущих учителей математики.

3. Профессионально-педагогический принцип: курс должен соответствовать профессионально-педагогической направленности обучения (ППНО) А.Г. Мордковича.

4. Принцип преемственности: курс должен гарантировать плавность перехода от школьного курса к вузовскому.

5. Принцип единства содержания обучения: изучение отдельных предметов должно дать студентам понимание целостности научной картины, которая будет служить научно основой студента в его будущей профессиональной деятельности.

6. Принцип перспективности: основная идея этого принципа заключается в том, что в курсе «Геометрические преобразования» стоит рассматривать не только вопросы, имеющие значимость сейчас, но те вопросы, которые могут быть востребованы в будущем. Этот принцип особенно важен в рамках использования информационных технологий.

7. Принцип минимизации: полный объём учебного материала не должен выходит за временные рамки, выделенные на изучение курса, а его содержание не должно включать вопросы, не относящиеся к изучаемому курсу.

8. Принцип учёта средств обучения: идея данного принципа заключается в том, что при формировании содержания обучения следует учитывать изменения в учебных пособиях, учебниках и технологиях обучения.

Содержание разрабатываемого нами модуля будет в большей степени удовлетворять описанным выше модулям.

Выводы по главе 1.

В данной главе были рассмотрены теоретические аспекты методики обучения студентов геометрическим преобразованиям с использованием среды GeoGebra. Рассмотрены вопросы, связанные с историей математического образования. Описаны основные возможности системы динамической геометрии GeoGebra при построении геометрических преобразований. Описана общая структура методики обучения геометрическим преобразованиям с использованием СДГ GeoGebra. Аргументирован выбор тем модуля «Геометрические преобразования» и описаны требования, предъявляемые ФГОС ВО к обучению студентов.

Особое внимание уделено возможностям системы динамической геометрии GeoGebra и показана возможность её использования при изучении темы «Геометрические преобразования».

Рассмотрены вопросы связанные с историей развития математического образования и требования к современному математическому образованию, где выделена основная идея о необходимости модернизации методов обучения с учётом современных информационных технологий.

В главе 1 также рассмотрены основные принципы, к формированию методики преподавания с использованием информационных систем в курсе геометрии, которые в значительной мере повлияли на разрабатываемую методику.

ГЛАВА 2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ GEOGEBRA

2.1 Концепция цифрового модуля поддержки курса «Геометрические преобразования»

При создании цифрового модуля стоит учитывать тот факт, что простая оцифровка информации по курсу не даст необходимого результата. При создании цифрового образовательного контента стоит решить два вопроса:

1. Как сделать образовательный контент цифровым?
2. Как сделать цифровой контент образовательным?

Для того, чтобы образовательный контент сделать цифровым необходимо в первую очередь разработать интерактивную систему, которая способна была бы отвечать на запросы пользователя. А именно пользователь системы должен иметь возможность переходить от одного изучаемого модуля к другому, пропуская часть изученного ранее материала, либо наоборот, получать дополнительную информацию по разделам, вызывающим у него затруднения.

После получения теоретических знаний по изучаемому предмету, студент должен пройти контроль полученных знаний и только после успешного прохождения контрольного теста, может перейти к практической части курса. При этом контроль знаний должен значительно отличаться от того, что можно реализовать при помощи ручки и бумаги.

Проверка теоретических знаний обучаемого проходит в форме адаптивного теста. Основная суть такого теста заключается в том, что первый вопрос, который задаётся проверяемому имеет средний уровень сложности. В случае правильного ответа, обучающийся переходит на уровень выше, при неправильном ответе на уровень ниже. Общая схема такого теста представлена на рисунке ниже.

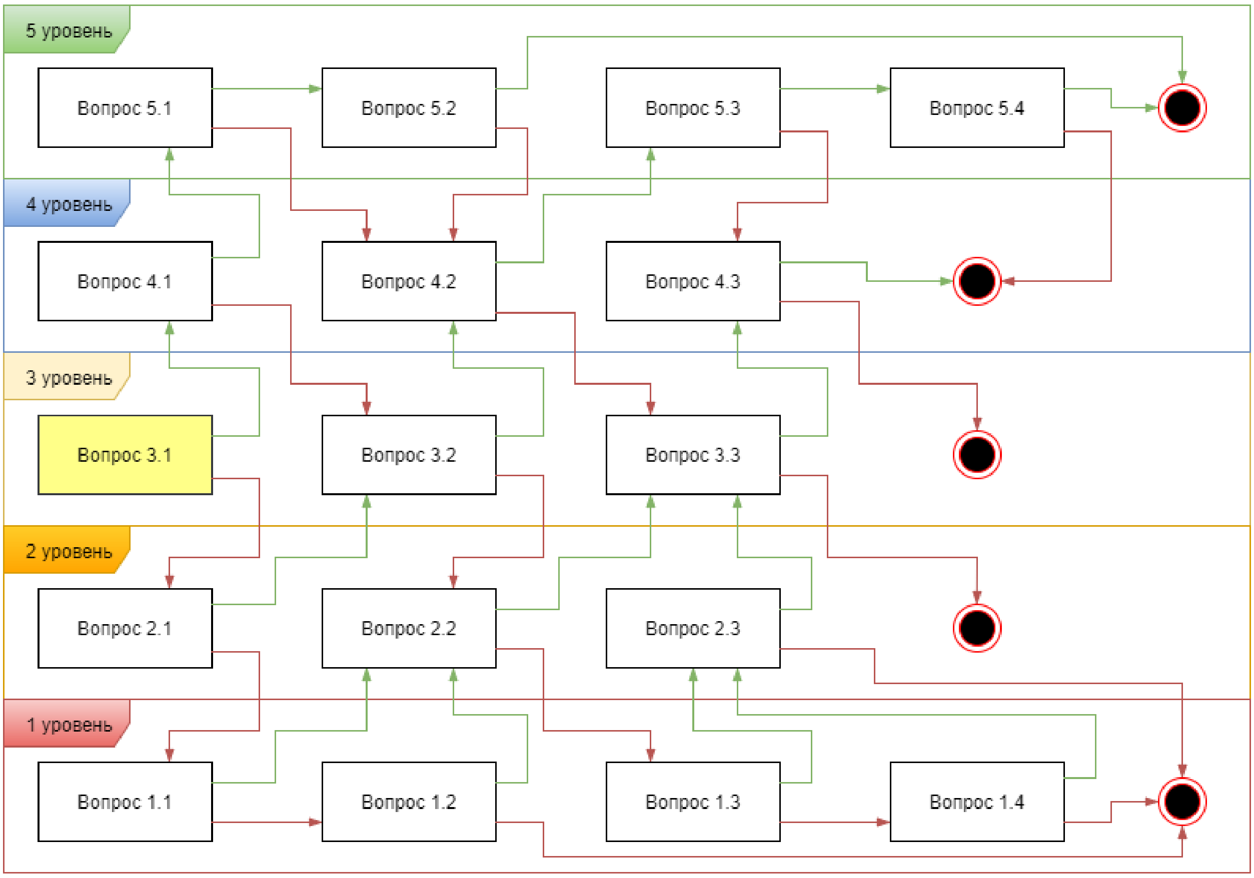


Рисунок 2.1 – Схема адаптивного теста

Каждый студент, выполняя задания теста, должен решить от 4х до 7ми заданий. Каждое задание либо повышает, либо понижает уровень, за исключением двух заданий высокого и низкого уровней, которые являются критическими и от которых зависит результат.

Предложенная выше схема имеет 17 вопросов, по 3 вопроса на 2, 3 и 4 уровнях и по 4 вопроса на 1 и 5 уровнях.

Тестирование начинается с вопроса среднего уровня (выделен жёлтым цветом на рисунке), в случае правильного ответа, происходит переход на один уровень вверх (зелёная стрелка), а в случае неправильного – на один уровень вниз) красная стрелка. Круг в конце рисунка, это выход из тестирования с получением итоговой оценки. Обычно 1 и 2 уровень считаются неудовлетворительным результатом.

В разрабатываемой нами системе тестирования работает принцип понижающего и повышающего коэффициента. Система фиксирует каждый переход и изменяет коэффициент.

Каждый уровень имеет свой процентный результат:

1 уровень: 0-40%

2 уровень: 41-70%

3 уровень: 71-80%

4 уровень: 81-90%

5 уровень: 91-100%

При этом, если студент по окончанию прохождения теста получил пятый уровень, но при его выполнении опустился на второй уровень, то результат у него будет 91% из 100%. При прохождении теста учитываются все переходы, которые в дальнейшем влияют на итоговый результат. Но минимальный и максимальный баллы ограничены конечным уровнем.

Адаптивное тестирование, в отличие от стандартного, имеет ряд преимуществ, например, снижается вероятность списывания (у каждого студента индивидуальная траектория), обычно каждый из уровней имеет избыточное количество заданий, которые появляются у студентов в произвольном порядке. Также значительно повышается качество и объективность оценивания. Стоит отметить сложность составления таких тестов, в отличии от традиционных, т.к. преподавателю необходимо продумать систему переходов и создать количество вопросов значительно превышающее количество для обычного теста, кроме того без использования информационных технологий организация такого вида тестирования сложно реализуема в учебной деятельности.

Чтобы цифровой контент сделать образовательным, он должен удовлетворять основным дидактическим принципам.

Для реализации описанной выше идеи необходимо продумать структуры базы данных, доступные таблицы, уровни доступа, сценарии пользователей.

В качестве базы данных, которая будет хранить всю необходимую информацию, будем использовать MySQL. Структура разрабатываемой базы данных представлена на рисунке ниже.

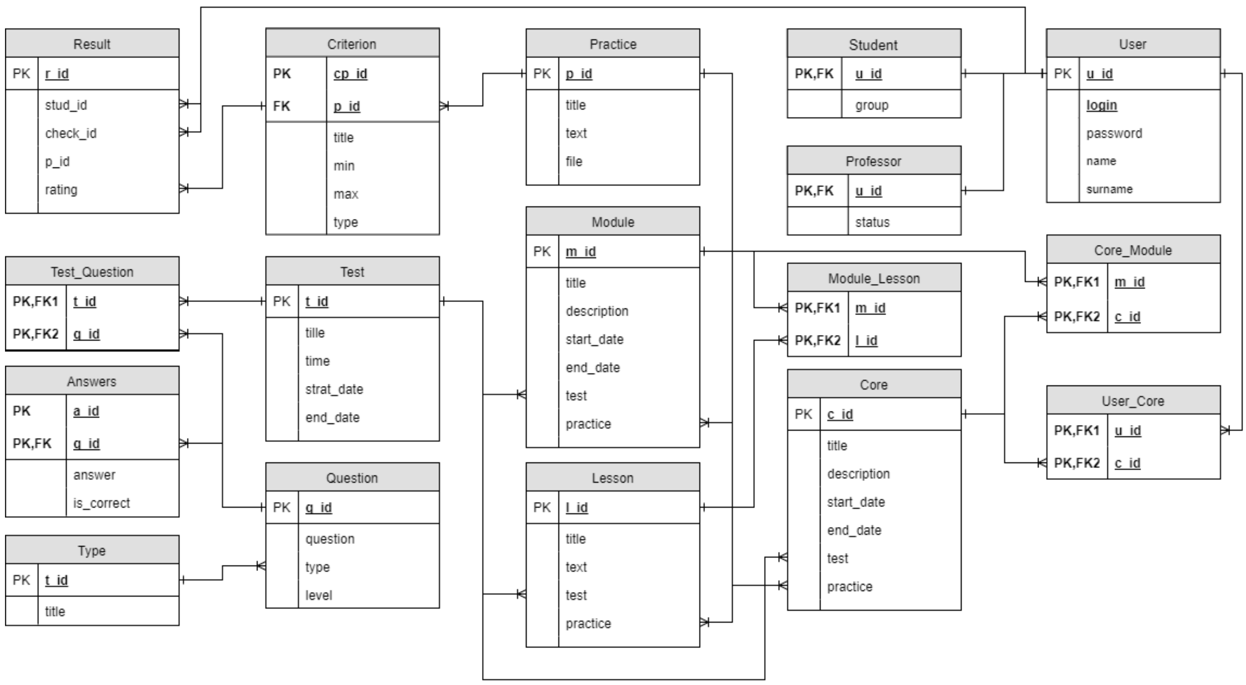


Рисунок 2.2 – Схема БД

При работе с системой стоит рассмотреть функционал использования со стороны пользователей. У нас есть две ключевые роли: преподаватель и студент.

Преподаватель при работе с системой должен выполнять следующие функции: наполнение системы материалами, разработка заданий, разработка теста, разработка критериев проверки, проверка решений, загружать списки студентов, назначать студентов на курс.

Студент должен иметь возможность: проходить назначенный курс, выполнять задания, выставлять себе оценку по критериям самооценки, выставлять оценки другим студентам. В дальнейшем, мы не будем заострять внимание на разработке портала, а остановимся на методике его использования при обучении студентов – будущих учителей теме «Геометрические преобразования».

2.2 Движения: динамические чертежи и методика обучения теме на их основе

В рамках темы движения рассматриваются такие вопросы, как: классификация движений плоскости, движения плоскости, параллельный перенос плоскости, поворот плоскости, осевая симметрия, скользящая симметрия, теорема Шаля, аналитическое задание симметрии, компьютерная визуализация движений, решения задач с использованием движения плоскости.

На данный раздел отводится 16 лекционных часов, 6 практических, 4 лабораторно-практических и 4 лабораторных часа.

Лекции: в рамках лекционных занятий рассматриваются теоретические вопросы, объясняются основные понятия. На этом этапе большое значение имеет наглядность, поэтому компьютерная визуализация выходит на один из главных планов.

Выделяют четыре основных типов движения:

- параллельный перенос;
- поворот;
- осевая симметрия;
- скользящая симметрия.

Для визуализации параллельного переноса можно воспользоваться способом, аналогичным описанному в параграфе 1.2, когда мы после построения образа объекта, соединяем все соответствующие вершины отрезками и на них строим аналогичный объект. После чего необходимо для каждой вершины построенного на отрезках объекта назначить анимацию и сдвинуть все точки в начало искомого объекта.

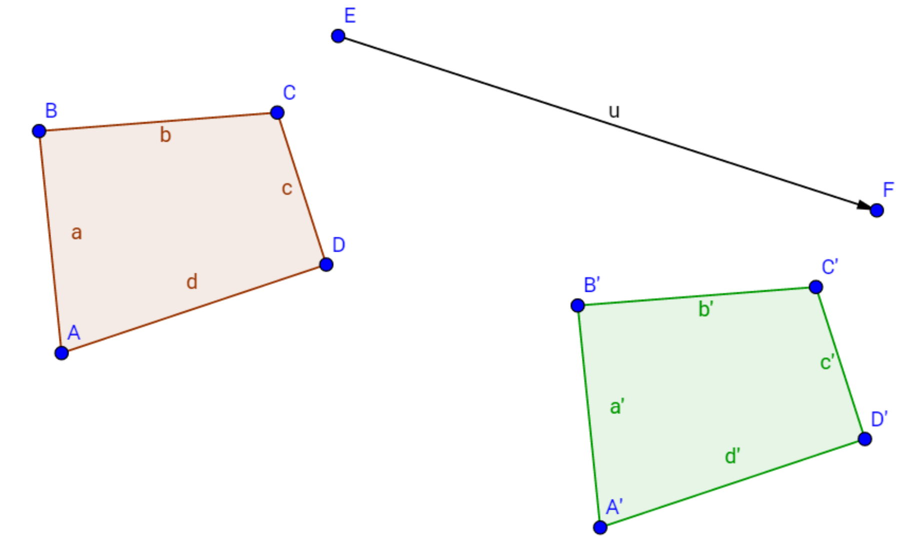


Рисунок 2.3 – Параллельный перенос

После построения фигур, мы строим отрезки AA', BB', CC' и DD', и построим произвольный четырёх угольник на нём (Рисунок 2.4).

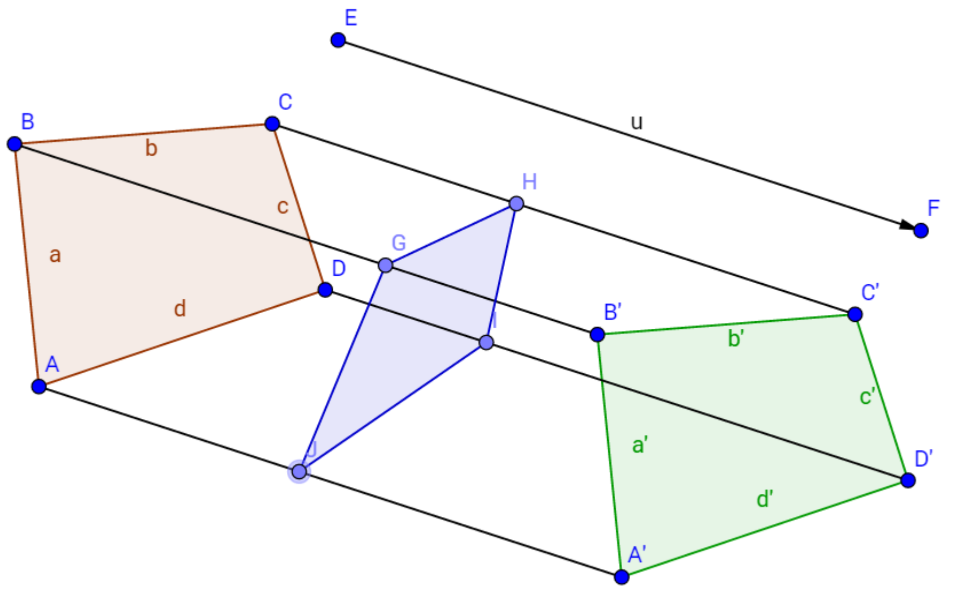
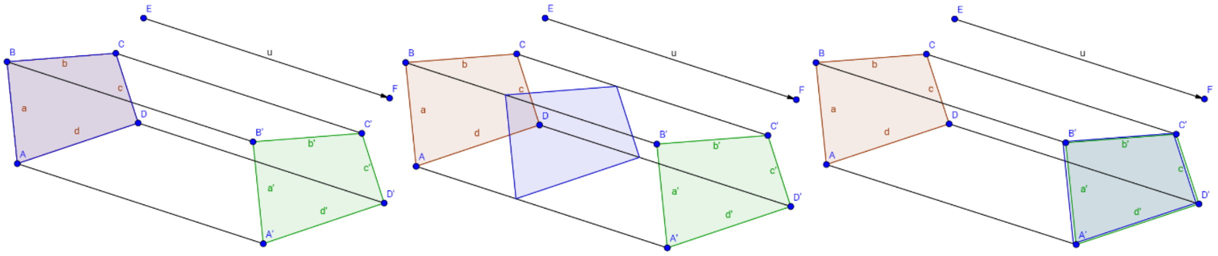
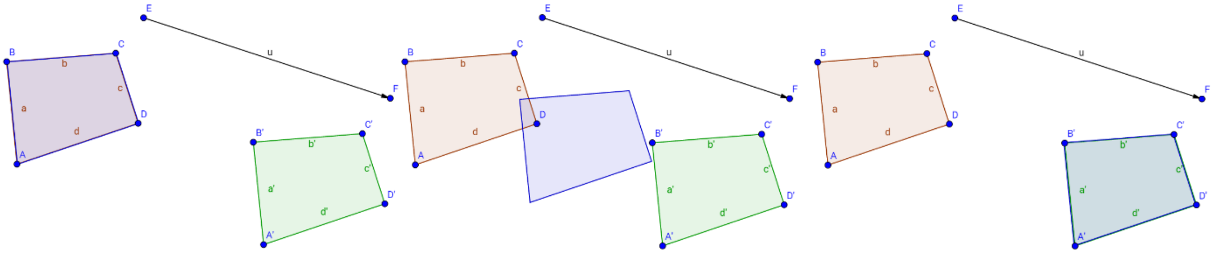


Рисунок 2.4 – Построение «произвольного» четырёхугольника

Для четырёхугольника GHIJ необходимо анимировать каждую из его вершин, после чего нужно остановить анимацию и все вершины сдвинуть в начало отрезков, таким образом, чтобы четырёхугольник GHIJ совпал с ABCD. После этого необходимо спрятать точки G, H, I и J и отрезки AA', BB', CC' и DD'. Тогда при нажатии на кнопку анимации, будет видно движение нашего четырёхугольника и мы получим анимацию параллельного переноса (Рисунок 2.5).



а)



б)

Рисунок 2.5 – Анимация параллельного переноса

На рисунке а) изображена анимация параллельного переноса с сохранением видимости отрезков. В некоторых случаях такая анимация является более наглядной.

Т.к. параллельный перенос сохраняет расстояния между объектами, то можно добавить отображение равенства отрезков AB и A'B', BC и B'C', CD и C'D', DA и D'A'. Также можно добавить отображение длин отрезков и указать их равенство вектору переноса.

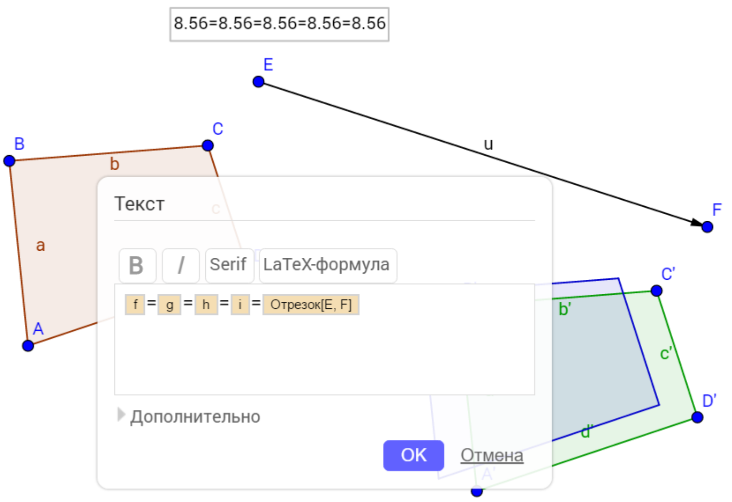


Рисунок 2.6 – Длины отрезков

При построении поворота необходимо указать объект, центр поворота, угол поворота и направление (по или против часовой стрелки).

Для построения анимации нам необходимо будет построить фигуру, центр поворота, указать угол, найти образ фигуры. После чего используя инструмент «Дуга по центру и двум точкам» построим дуги: AA', BB', CC' и DD'. На полученных дугах построим четырёх угольник.

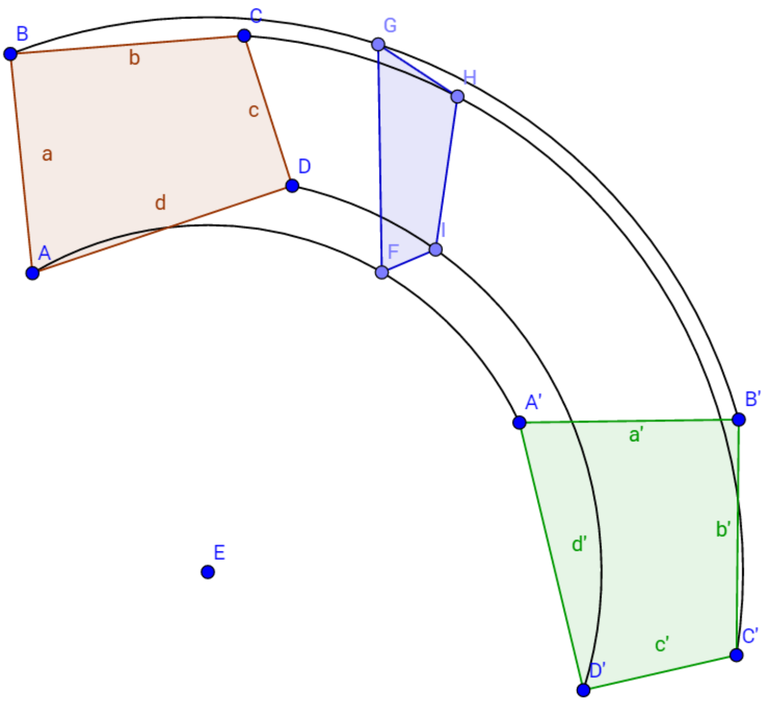
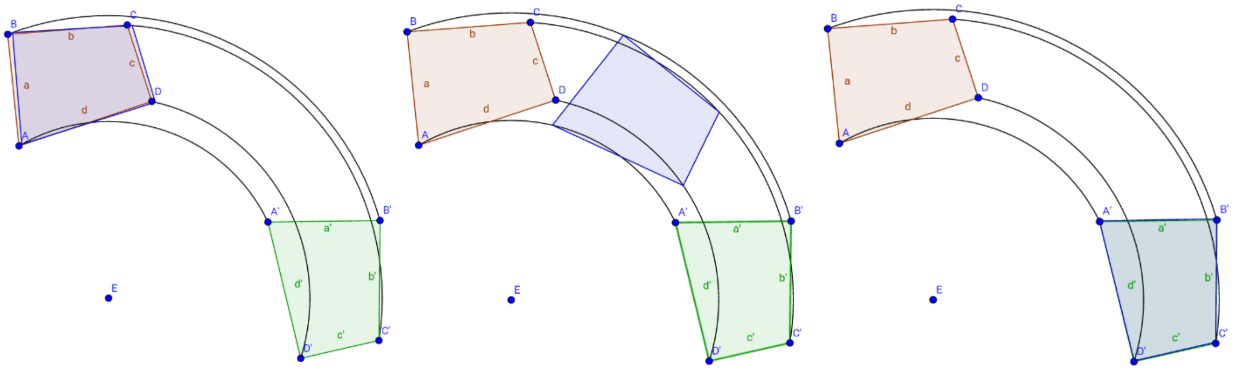


Рисунок 2.7 – Построение анимации поворота.

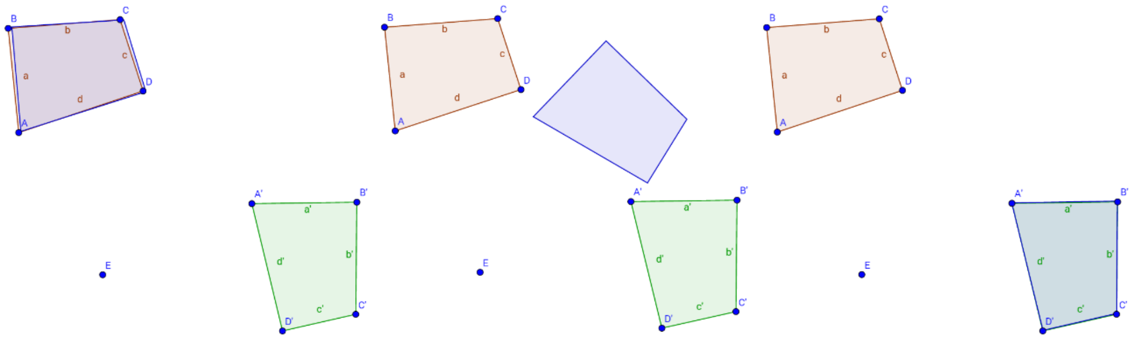
Далее для вершин четырёхугольника FGHI зададим анимацию, сдвинем вершины в начало построенных дуг и сделаем их невидимыми.

Студентам стоит пояснить, что в отличии от отрезков, построенные дуги имеют разную длину (за исключением некоторых случаев), но у всех построенных дуг будет одинаковая градусная мера. Но так как анимация в GeoGebra построена таким образом, что объект за единицу времени проходит полный путь, не зависимо от расстояния, то путь от A до A' займёт такое-же время, что и путь от B до B', хотя у них разное расстояние (очевидно, что радиус EA меньше чем радиус EB).

Аналогично, как и в предыдущем примере, можно показать, что сохраняются длины сторон всех четырёхугольников.



а)



б)

Рисунок 2.8 – Анимация поворота

При анимации поворота можно либо оставить дуги, для наглядности демонстрации, либо убрать.

При визуализации осевой симметрии, мы будем пользоваться способом аналогичным параллельному переносу. Т.е. мы построим фигуру и её образ относительно некой прямой, после чего соединим все вершины фигуры и её образа отрезками и построим на них произвольный четырёхугольник.

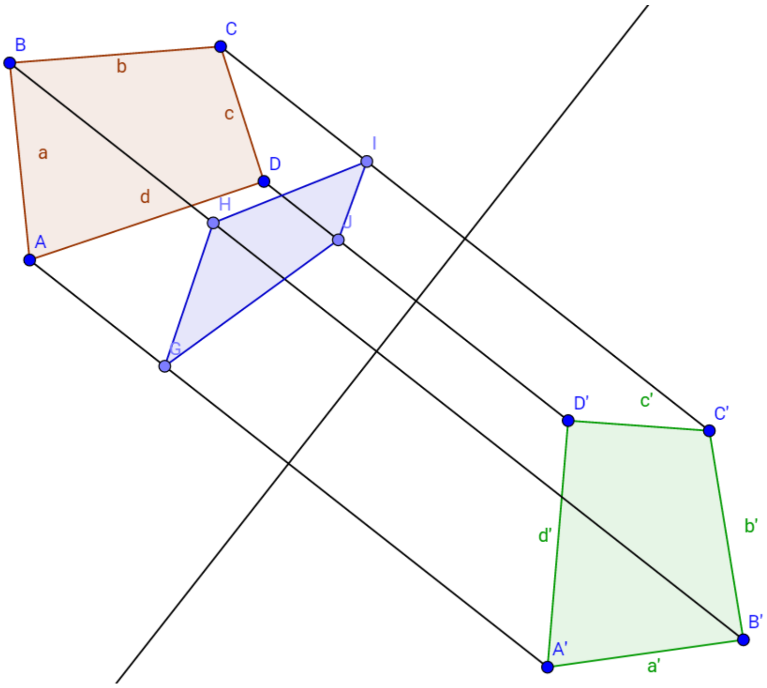
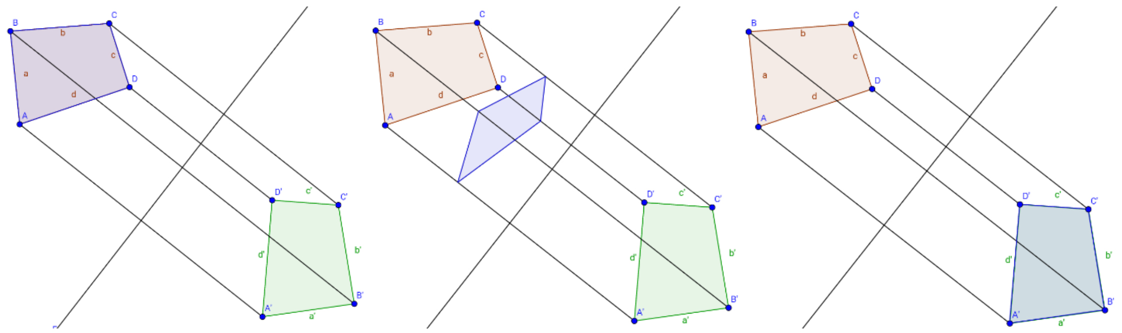
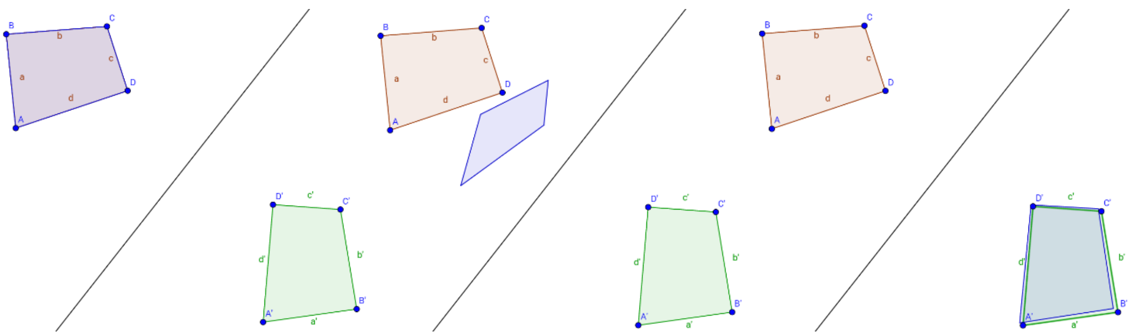


Рисунок 2.9 – Осевая симметрия

Далее мы анимируем все вершины GHIJ, сдвигаем в соответствующие вершины ABCD и делаем их невидимыми. Теперь при включении анимации мы получим наглядную демонстрацию осевой симметрии.



а)



б)

Рисунок 2.10 – Анимация осевой симметрии

При построении анимации осевой симметрии получается визуальный эффект сжатия объекта при приближении к оси симметрии и растяжения объекта при удалении от оси симметрии. При этом данный эффект, без отображения построенных отрезков, также визуально похож на поворот относительно прямой на 180° в пространстве.

Изучая свойства осевой симметрии, стоит уделить внимание тому факту, что сохраняются все расстояния у оригинального объекта и его образа, а также то, что расстояние от вершины А до оси симметрии, равно расстоянию от оси симметрии до вершины А'. Рекомендуется обратить внимание студентов на особенность осевой симметрии как движения второго рода: при имитации перехода фигуры (в нашем случае четырёхугольника) из состояния прообраза в состояние образа происходит деформация этой фигуры, чего не было при переносе и повороте – движениях первого рода. Объясняется это тем, что поворот (перенос) можно представить в виде композиции более «мелких» поворотов (переносов), а симметрию – нельзя.

Таким образом для построения образа необходим опустить перпендикуляр на ось симметрии и отмерить на нём отрезок равный расстоянию от вершины до оси.

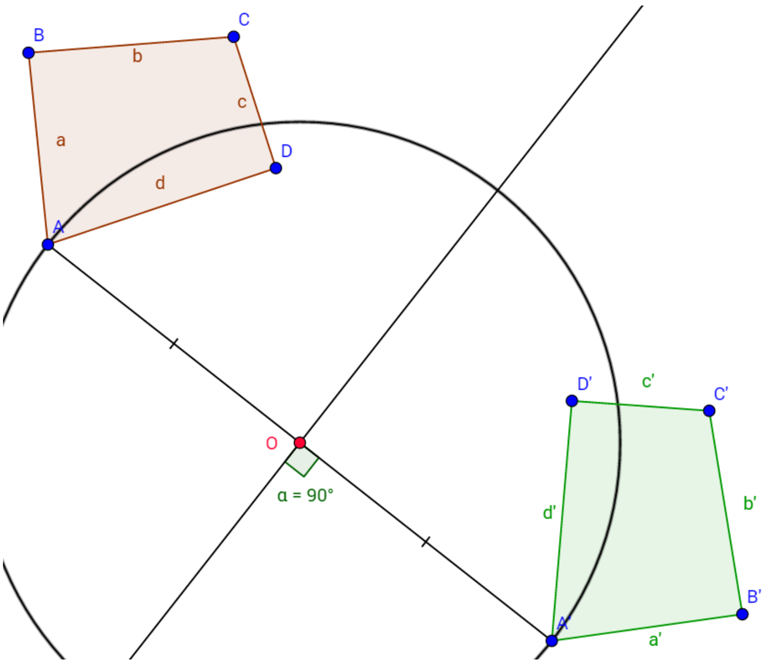


Рисунок 2.11 – Построение осевой симметрии циркулем и линейкой

Стоит обратить внимание на тот факт, что при осевой симметрии не сохраняется ориентация, т.е. образ четырёхугольника будет читаться как A'D'C'B'.

Скользящая симметрия по своей сути является композицией осевой симметрии и переноса на вектор. Поэтому для компьютерной визуализации данного типа движения достаточно последовательно выполнить анимацию осевой симметрии и параллельного переноса.

С другой стороны, для скользящей симметрии всегда есть ось симметрии, которая будет проходить через середины отрезков соединяющих вершины фигур.

Стоит выделить общий алгоритм для построения компьютерной визуализации движения.

1. Используя инструменты из группы преобразования построить необходимый образ объекта.
2. Соединить вершины оригинала с соответствующими вершинами образа линиями (отрезками или дугами).
3. Построить фигуру на построенных ранее линиях, сохраняя ориентацию фигуры.
4. Настроить анимацию на все построенные вершины.
5. Сдвинуть вершины в начала оригинала.
6. Спрятать все лишние построения.

Практические: в рамках данной темы предусмотрено 3 практических занятия (6 часов). На практических занятиях происходит закрепление полученных знаний, а именно построение анимации и теоретические знания о движении.

Кроме того, в рамках практических заданий необходимо рассмотреть решение задач на построение и доказательство.

Задание №1. Даны две пересекающиеся прямые a и b и отрезок CD. Построить параллелограмм ABCD, вершины A и B которого лежат соответственно на a и b [21].

Анализ. Т.к. мы будем строить параллелограмм, у которого противоположные стороны AB и CD и вершины идут в порядке следования ABCD, то вектор $\overrightarrow{AB}$ равен вектору $\overrightarrow{DC}$. Тогда точка A перейдет в точку B при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$. По условию задачи точка B должна лежать на прямой b, но т.к. точка B является образом точки A, то она также должна принадлежать образу прямой a, следовательно, точка B является точкой пересечения образа прямой a при переносе на вектор $\overrightarrow{DC}$ (он равен вектору $\overrightarrow{AB}$) с прямой b.

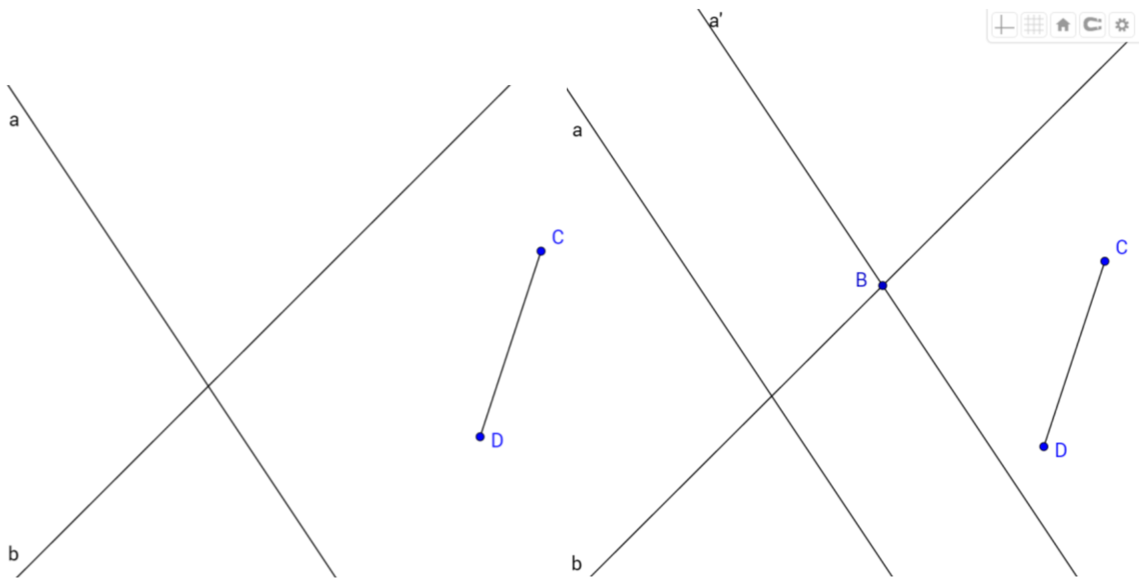


Рисунок 2.12 – Построение точки B

Для нахождения точки A, достаточно провести прямую параллельную CD, либо точку B перенести на вектор $\overrightarrow{CD}$.

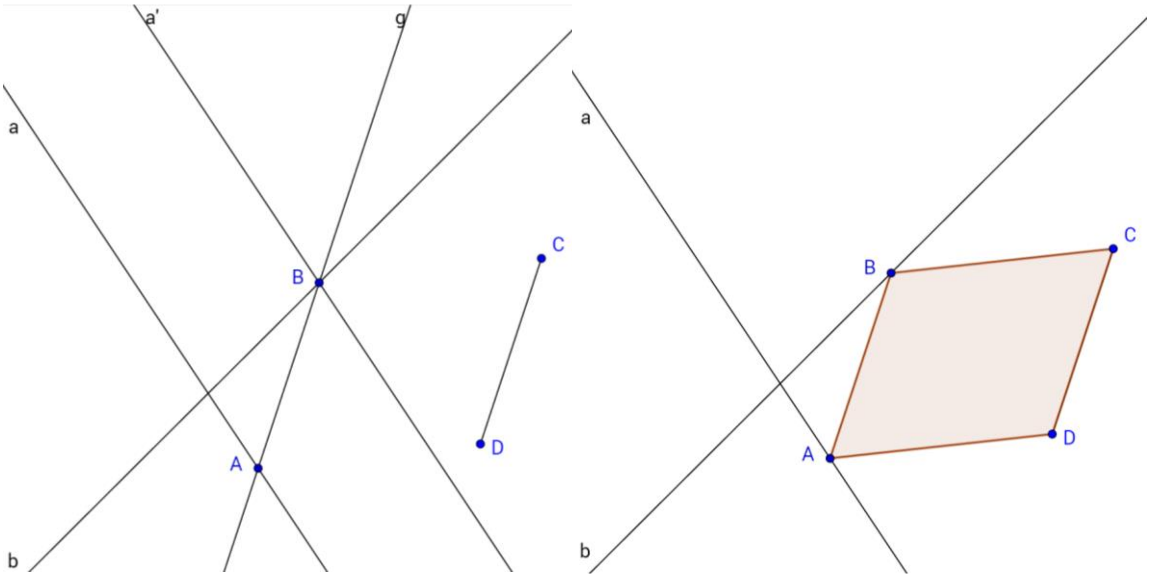


Рисунок 2.13 – Построение параллелограмма ABCD

Построение с использованием GeoGebra.

1. Используя инструмент «Прямая», построим две пересекающиеся прямые.
2. Спрячем точки, которые использовались при построении.
3. Используя инструмент «Отрезок», построим произвольный отрезок и переименуем его вершины в C и D.
4. Используя инструмент «Вектор» построим вектор $\overrightarrow{DC}$.
5. Используя инструмент «Параллельный перенос по вектору», построим образ прямой a при переносе на вектор $\overrightarrow{DC}$.
6. Найдём точку пересечения a и a', используя инструмент «Пересечение», обозначим её как B.
7. Через точку B проведём прямую параллельно прямой CD, используя инструмент «Параллельная прямая».
8. Используя инструмент «Пересечение» найдём точку пересечения последней построенной прямой и прямой a, обозначим её как A.
9. Параллелограмм ABCD искомый.

Исследование. Так как по условию прямые a и b пересекаются, прямые a и a' параллельны (по построению), то прямая a' всегда будет пересекать прямую b в одной точке, и задача всегда имеет одно решение. За исключением того случая, когда точка C или точка D лежит на пересечении прямой b и a'.

Задание №2. На плоскости нарисованы два равных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что обход вершин одного треугольника происходит по часовой стрелке, а обход соответствующих им вершин другого треугольника происходит против часовой стрелки. Докажите, что середины отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой [22].

Решение.

Построим данные треугольники и проведём отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 и найдём середины этих отрезков.

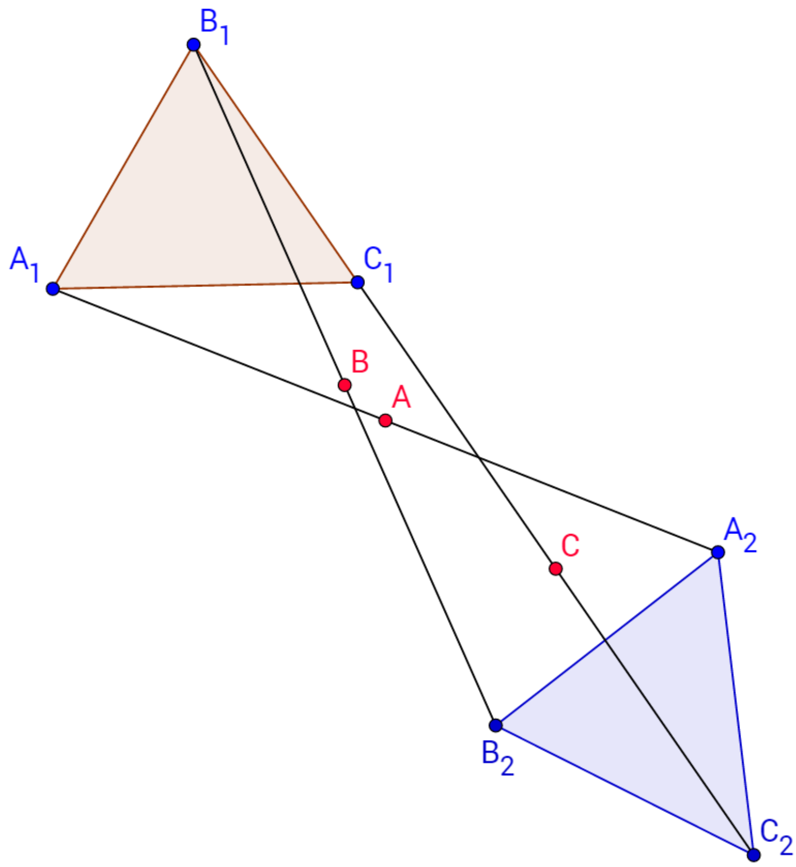


Рисунок 2.14 – Чертёж к заданию

Если в программе GeoGebra провести прямую через две точки, то мы убедимся в том, что это действительно так, и все точки A, B, C лежат на одной прямой.

Так как данные треугольники по-разному ориентированы, но являются равными, то мы получим движение, которое является либо композицией осевой симметрией и поворота, либо осевой симметрии и параллельного переноса. Очевидно, что ось симметрии будет располагаться на серединах отрезков, соединяющих точку оригинал с её образом, и принадлежность этих точек одной прямой не изменится при повороте.

Если данное преобразование будет являться композицией осевой симметрии и параллельного переноса, то мы получим скользящую симметрию, у которой тоже есть ось симметрии, содержащую серединах середины отрезков, соединяющих соответствующие вершины.

Задание №3. На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC выбрать точки A', B', C', так чтобы периметр треугольника A'B'C' был наименьшим. [21].

Анализ. На стороне AB возьмём произвольно току C', на стороне AC – B', на стороне CB – A'. Построим точки C_1 и C_2 таким образом, чтобы они были симметричны точке C' относительно сторон CA и CB. Тогда периметр треугольника A'B'C' будет равен длине ломаной C_1B'A'C_2, следовательно, он будет не меньше длины отрезка C_1C_2.

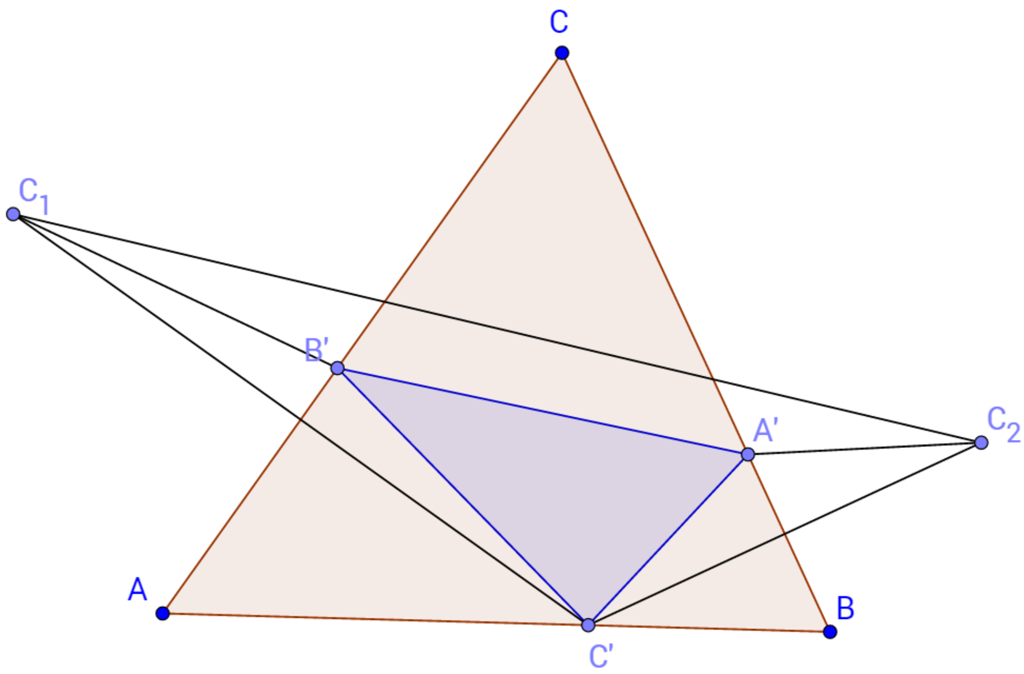


Рисунок 2.15 – Соотношение периметра и длины ломанной

Соответственно если точки B' и A' будут лежать на прямой C_1C_2, то мы получим периметр треугольника, меньше того, что есть сейчас. А это в свою очередь означает, что чем меньше длина C_1C_2 тем меньше периметр треугольника.

Построим отрезки CC_1, CC', CC_2.

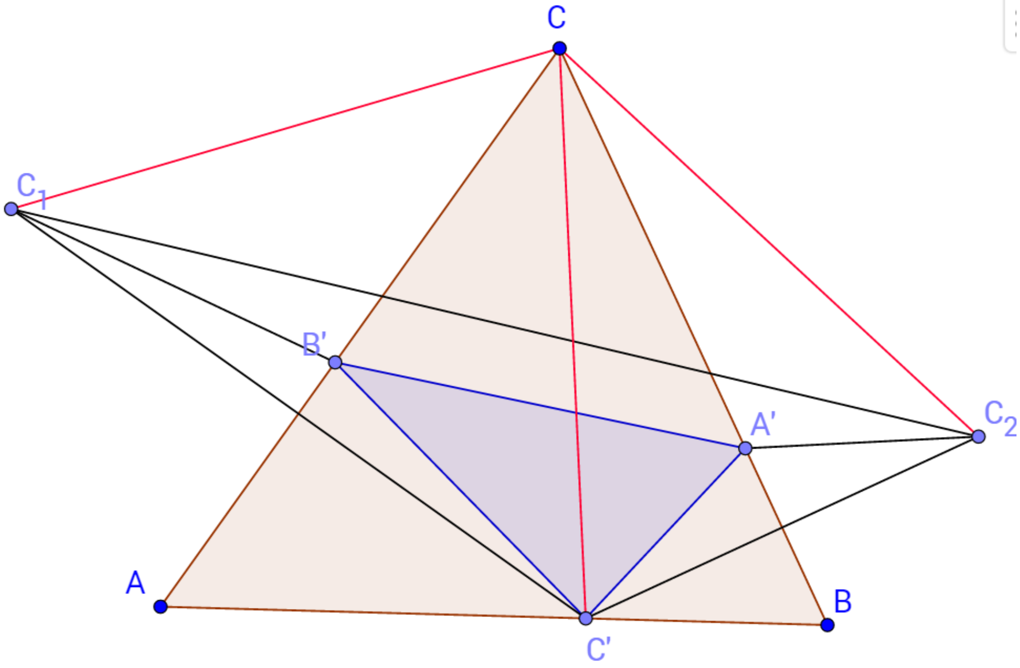


Рисунок 2.16 – Дополнительные построения

Т.к. C_1 является образом C', то AC является медианной и высотой для треугольника $CC'C_1$, а соответственно и биссектрисой угла $C'CC_1$. Аналогичные рассуждения будут и для треугольника $CC'C_2$. Тогда мы получим, что $CC_1 = CC' = CC_2$, а $\angle C_1CC_2 = 2\angle ACB$. Т.к. в обозначении угла $\angle C_1CC_2$ не фигурирует C', то данный угол не зависит от расположения точки C'. Тогда отрезок C_1C_2 будет иметь наименьшую длину, если CC' будет наименьшей длины. Тогда точка C' должна лежать на пересечении высоты, опущенной из вершины C и основания AB. А точки B' и A' будут пересечением прямой C_1C_2 с соответствующими сторонами.

Построение с использованием GeoGebra.

1. Построим произвольный треугольник, используя инструмент «Многоугольник».
2. Используя инструмент «Перпендикулярная прямая» построим перпендикуляр из точки C на сторону AB.

3. Используя инструмент «Пересечение», найдём точку пересечения построенного перпендикуляра и основания AB, обозначим её как C'.
4. Используя инструмент «Осевая симметрия» построим образ точки C' относительно прямых AC и BC. Обозначим их C_1 и C_2 соответственно.
5. Используя инструмент «Отрезок» построим отрезок C_1C_2.
6. Используя инструмент «Пересечение» найдём точки пересечения C_1C_2 со сторонами AC и BC, обозначим их B' и C' соответственно.
7. Треугольник A'B'C' искомый.

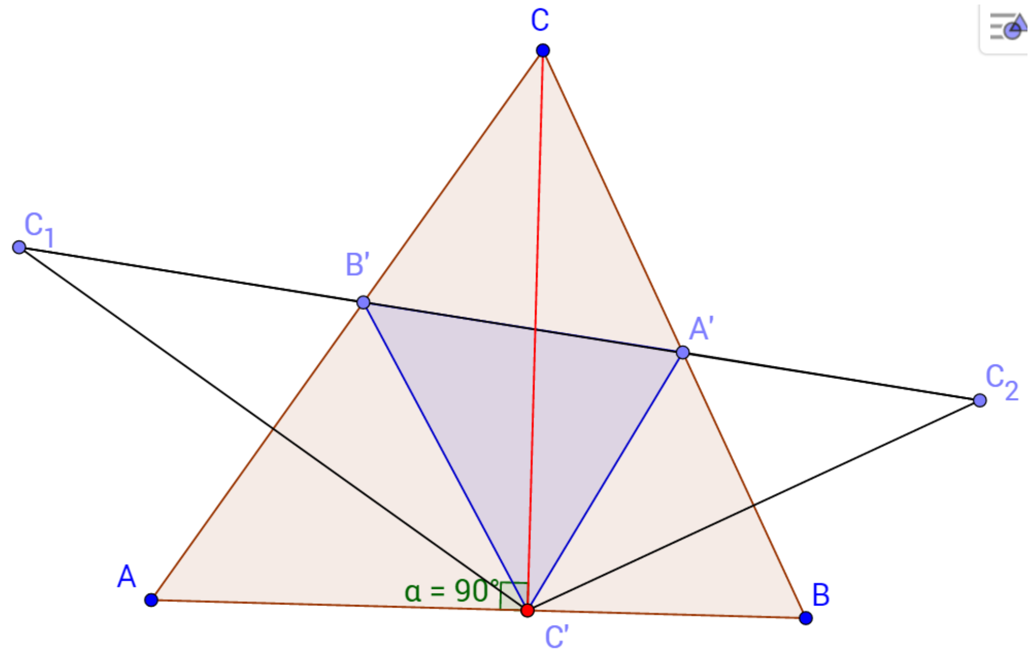


Рисунок 2.17 – Результат построения.

Исследование.

Т.к. по условию задачи данный треугольник является остроугольным, то задача всегда будет иметь одно решение.

Лабораторно-практические: предполагается проведение двух занятий, в рамках которых будут решены задачи на построение циркулем и линейкой, в конце второй лабораторно-практической работы проводится тестирование обучающихся средствами информационной системы.

Лабораторные: предполагается проведение двух лабораторных работ.

Лабораторная работа №1: Движения плоскости

Задание: построить произвольный многоугольник, не менее чем из четырёх вершин и выполнить последовательно: параллельный перенос, осевая симметрия, поворот. При этом каждое последующее движение должно накладываться на образ предыдущего. Настроить последовательную анимацию для всех преобразований.

Цель: научиться применять методы компьютерной визуализации с использованием программы GeoGebra при решении задач по теме «Движения плоскости».

Организация работы: выполнение работы подразумевает групповую (2-3 студента) работу за компьютером.

Контроль: защита проекта, самооценка, оценка одногруппником, оценка преподавателем.

Ход выполнения:

1. Построение необходимых объектов.

При построении необходимо использовать инструмент «Многоугольник» и построить любую фигуру. Выбрав инструмент «Вектор» построить произвольный вектор.

После этого, необходимо выбрать инструмент «Параллельный перенос по вектору» и построить образ фигуры.

Используя инструмент «Прямая», построить произвольную прямую. И при помощи инструмента «Отражение относительно прямой», построить образ предыдущей фигуры.

Используя инструмент «Точка», построить произвольную точку, которая будет центром поворота.

Используя инструмент «Поворот вокруг точки», построить образ фигуры.

Для всех фигур можно задать разные цвета, при этом можно поменять начальные фигуры, для более наглядного представления.

Далее выбрав инструмент «Ломанная» нужно объединить фигуры, кроме полученной поворотом, линиями. А для последней фигуры использовать дугу по центру и двум точкам.

В результате выполнения всех построений должен получиться примерно следующий чертёж:

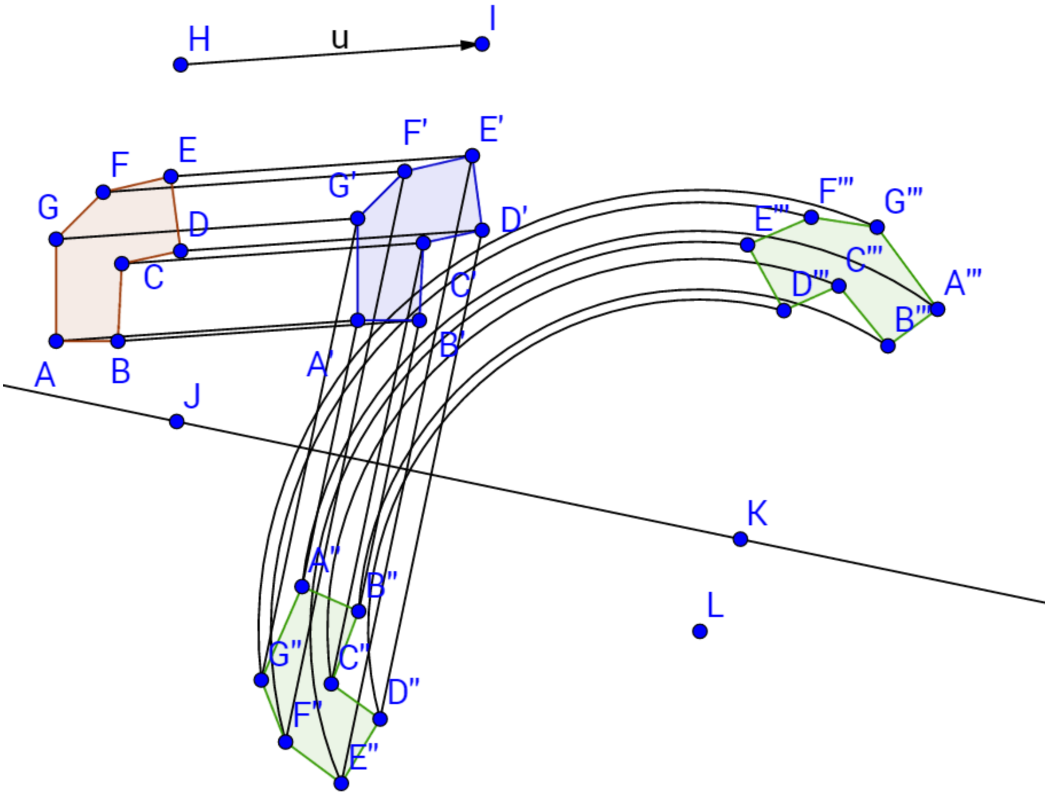


Рисунок 2.18 – Заготовка для лабораторной №1

2. Настройка анимации.

Особенностью данного построения является то, что нельзя просто построить непрерывное движения для перехода с ломанной на дуги. Поэтому придётся строить две анимации.

Первая анимация будет двигаться по ломанной, от ABCDEF, до A"B"C"D"E"F".

А вторая анимация от A"B"C"D"E"F", до A'''B'''C'''D'''E'''F'''.

Для начала построим фигуру для ломанной и зададим для неё анимацию всех точек. После чего сдвинем её в начало фигуры и скроем все ненужные построения.

Зайдём в свойства фигуры и в разделе отображения объекта пропишем: N!=B''. Где N – это точка движущейся фигуры, которая проходит через точки B, B' и B''. Тогда мы получим, что при достижении точки B'' наша фигура исчезнет.

Для вершин движущейся фигуры необходимо указать в разделе «Алгебра» в свойстве «Поворот» значение «Увеличение (один раз)».

Следующим этапом мы рисуем фигуру на дугах. После чего скрываем дуги, чтобы они не мешались.

Вершины построенной фигуры переименуем в $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$. Но для вершин не будем включать анимацию. Сдвинем вершины в начало A''B''C''D''E''F''.

Зайдём в свойства фигуры $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$ и в разделе отображения объекта пропишем: N=B''. Тогда данная фигура станет видимой только при достижении предыдущей фигурой своей конечной точки. После этого необходимо запустить анимацию. Для этого мы воспользуемся функцией написания скриптов.

Для точки N перейдём в раздел «Сценарии» в свойствах точки. Выберем вкладку «По обновлению» и пропишем следующий код.

Если[(x(N)==x(B'')) && (y(N)==y(B'')), ЗапуститьАнимацию[A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1,G_1]]

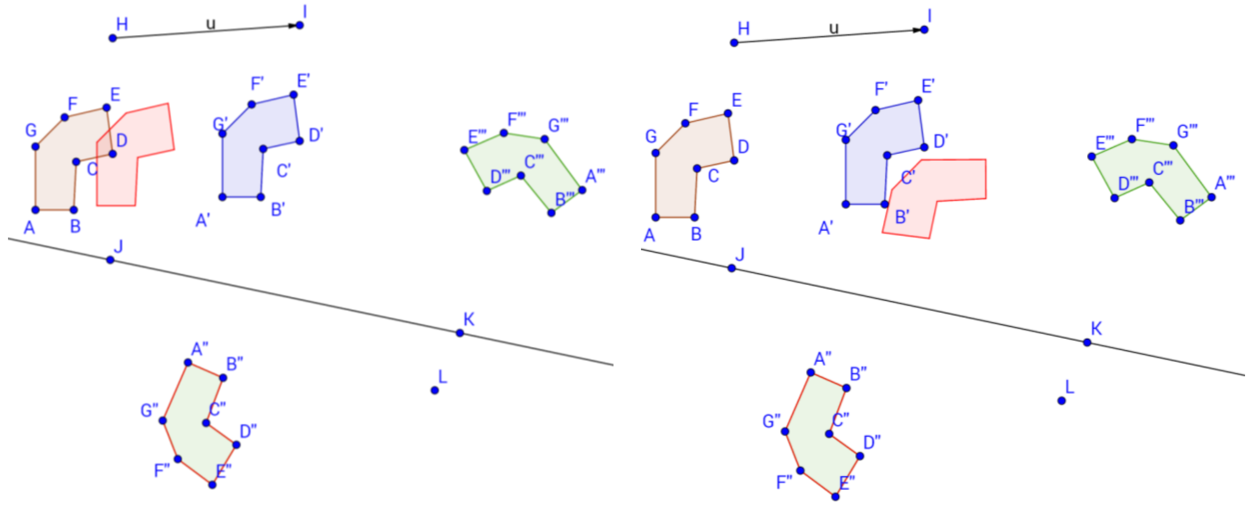


Рисунок 2.19 – Движение плоскости

Все этапы анимации движения плоскости представлены в приложении А.

3. Сохранение проекта.

Все проекты, созданные студентами, сохраняются через информационную систему, после чего студенты выступаю с докладом.

4. Защита проекта.

На защите студенты демонстрируют свои работы, объясняют идею реализации, после чего выступающим ставится оценка преподавателя и оценка группы.

Критерий оценивания:

Самооценка:

- Количество выполненных этапов задания (0-4);
- Количество затраченного времени (в минутах);
- Достижимость цели (0-5);
- Свой вклад в работу (использовал готовый материал, частично создал новое, полностью самостоятельная разработка) (0-5);
- Удовлетворённость выполненной работой (0-5).

Критерии для проверки чужой работы студентом и оценка преподавателем:

- Корректность построения (0-5);
- Логичность построения (0-5);
- Количество выполненных этапов задания (0-4);
- Достижимость цели (0-5);
- Вклад в работу (использовал готовый материал, частично создал новое, полностью самостоятельная разработка) (0-5);
- Качество и аккуратность работы (наличие лишних построений, наглядность чертежа и т.д.) (0-5).

Лабораторная работа №2: Решение задач

Задание: Решить задачи по теме «Движения плоскости».

Задача №1. Для двух данных равнобедренных треугольников, у которых основания лежат на одной прямой, построить прямую, параллельную основаниям и такую, чтобы боковые стороны треугольников высекали на этой прямой отрезок равной длины [7].

Задача №2. Даны две пересекающиеся окружности. Провести прямую через точку их пересечения так, чтобы длины высекаемых ею хорд были равны [21].

Задача №3. Построить квадрат, если дана прямая, содержащая одну из его диагоналей, и даны две окружности, содержащие по одной вершине квадрата, принадлежащих другой диагонали [7].

Задача №4. Внутренняя точка M выпуклого четырёхугольника ABCD такова, что треугольники AMB и CMD – равнобедренные, и у каждого угол при вершине M равен 120^{o}. Докажите, что найдётся точка N такая, что треугольники BNC и DNA - равносторонние [22].

Цель: закрепить полученные знания.

Организация работы: выполнение работы подразумевает самостоятельную, индивидуальную работу за компьютером.

Контроль: самооценка, оценка одногруппником, оценка преподавателем.

Ход выполнения:

При индивидуальной работе каждая из задач на построение должна оформляться по следующему правилу:

1. Анализ: в данном разделе описывается поиск решения, обычно исходят из предположения, что задача решена и требуемая фигура уже построена.

2. Построение: происходит поэтапное описание построения с помощью инструментов программы GeoGebra, возможно с ограничением на использование некоторых из инструментов.

3. Доказательство: в данном разделе происходит доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет всем требованиям, описанным в условии задачи.

4. Исследование: проверяется существование решения и сколько существует разных решений.

Каждый из разделов должен содержать динамические чертежи, выполненные в программе GeoGebra.

Рассмотрим пример решения первой задачи.

Задача №1.

Анализ.

Пусть искомая прямая уже построена, тогда у нас есть два равнобедренных треугольника, у которых прямая высекает равные отрезки, при этом данная прямая параллельна основаниям этих треугольников (Рисунок 2.20).

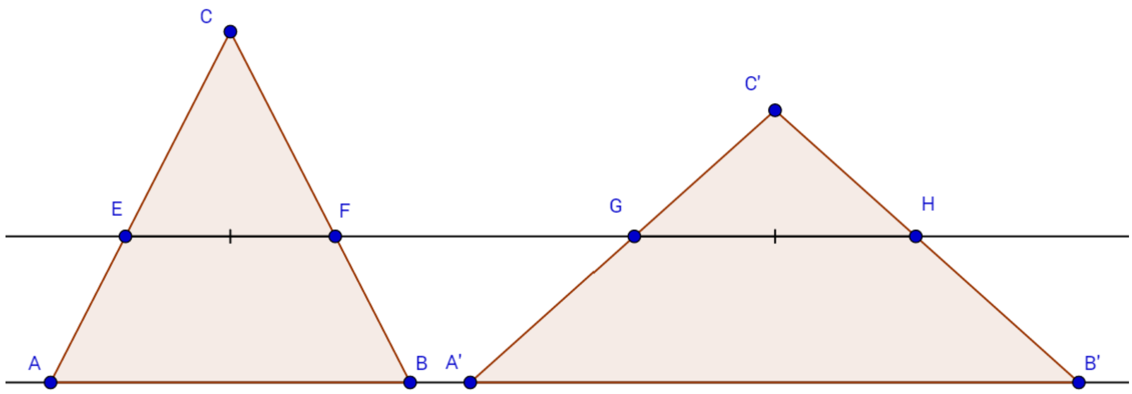


Рисунок 2.20 – Чертёж к задаче №1

Пусть отрезок EF равен отрезку GH, тогда существует такое движение плоскости, которое преобразовывает отрезок EF в отрезок GH. И каждую точку этого отрезка, в соответствующую точку образа.

Опустим высоту в треугольниках, из вершины к основанию. Т.к. треугольники равнобедренные, то высота будет и медианной, а соответственно разделит основания и наши отрезки пополам. Середина отрезка EF при параллельном переносе отобразится в середину отрезка GH, таким образом наш вектор переноса будет равен вектору межу серединами оснований треугольников.

Построение.

1. Из точки C используя инструмент «Перпендикулярная прямая» опустим перпендикуляр на основание AB. Обозначим точку пересечения H.

2. Из точки C' используя инструмент «Перпендикулярная прямая» опустим перпендикуляр на основание A'B'. Обозначим точку пересечения H'.

3. Используя инструмент «Вектор», построим вектор HH'.

4. Используя инструмент «Параллельный перенос по вектору» построим образ треугольника ABC, при переносе на вектор HH'.

5. Отметим точки пересечения образа треугольника ABC и треугольника A'B'C'. Обозначим их как G и H.

6. Используя инструмент «Прямая» построим прямую через точки G и H.

7. Прямая GH искомая.

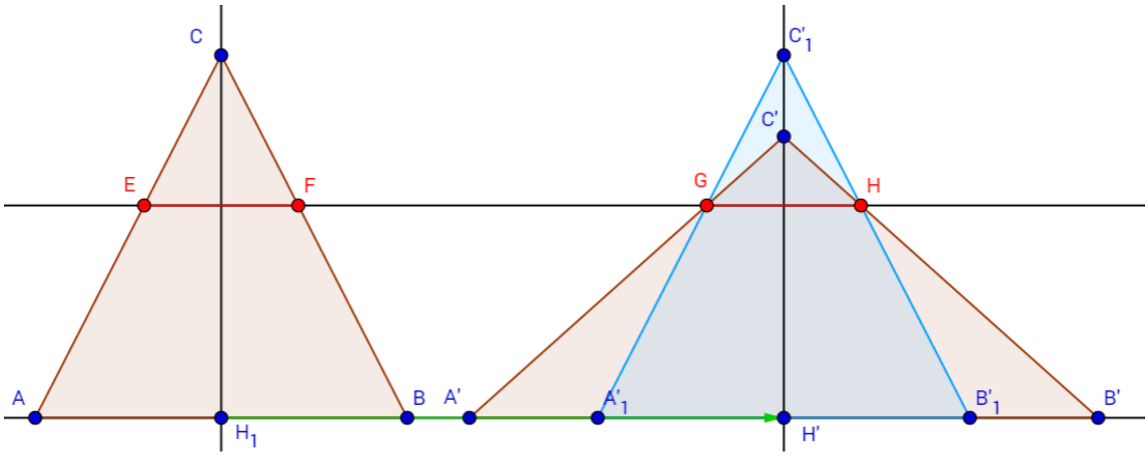


Рисунок 2.21 – Построение прямой GH

Доказательство.

Найдём точки пересечения построенной прямой с треугольником ABC и обозначим их как E и F.

Т.к. GH является образом EF (по построению), то GH равно EF.

Т.к. точки E и G, а также точки F и H, лежат на прямых параллельных вектору HH', а G и H лежат на одной прямой (по построению), то прямая GH будет параллельна основаниям треугольников.

Исследование.

В среде GeoGebra очень удобно проводит исследования построений.

Достаточно изменить начальные значения, и мы увидим, как меняется результат. В нашем случае возможны ситуации, когда задача не имеет решения. Достаточно просто уменьшит высоту первого треугольника.

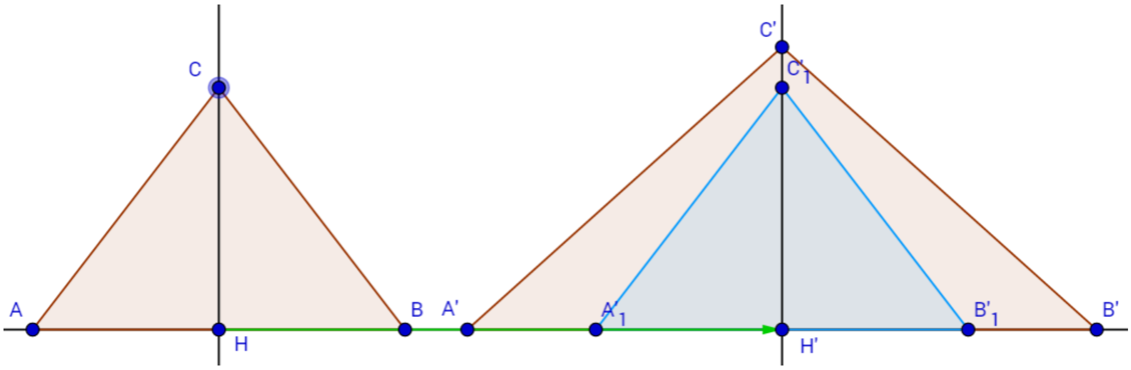


Рисунок 2.22 – Исследование задачи

В данном случае можно сделать вывод, что если высота треугольника, у которого основание меньше, будет меньше или равно высоте другого треугольника, то задача решения не имеет. В остальных случаях задача имеет одно решение.

Критерий оценивания:

Самооценка:

- Количество выполненных этапов задания (0-4);
- Количество затраченного времени (в минутах);
- Достижимость цели (0-5).

Критерии для проверки чужой работы студентом и оценка преподавателем:

- Корректность построения (0-5);
- Логичность построения (0-5);
- Количество выполненных этапов задания (0-4);

- Достижимость цели (0-5);
- Качество и аккуратность работы (наличие лишних построений, наглядность чертежа и т.д.) (0-5).

Оставшиеся две задачи решаются по аналогии, применяя различные свойства движения.

Задача №4 не является задачей на построение. В данной задаче необходимо выполнить доказательство.

Выполним вначале чертёж к заданию.

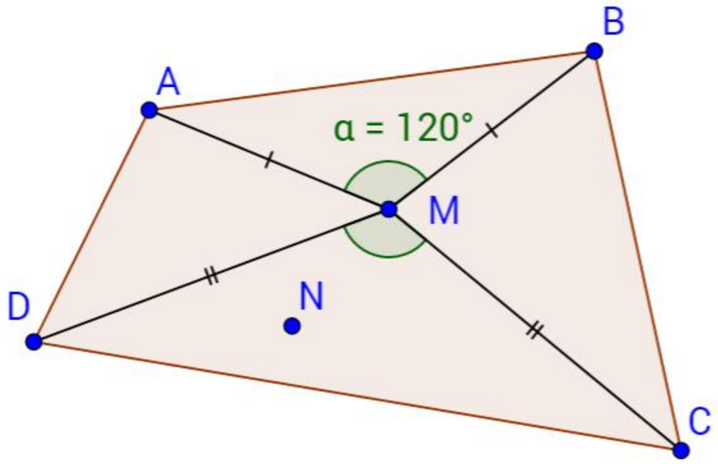


Рисунок 2.23 – Чертёж к задаче №4

Доказательство.

После построения можно заметить, что точка B является образом точки A относительно центра M при повороте на 120°. Аналогично вершина D является образом вершины C.

A это означает, что отрезок AC при повороте вокруг точки M на 120° будет переходить в отрезок BD, следовательно, AC=BD. Построим эти диагонали и отметим их точку пересечения.

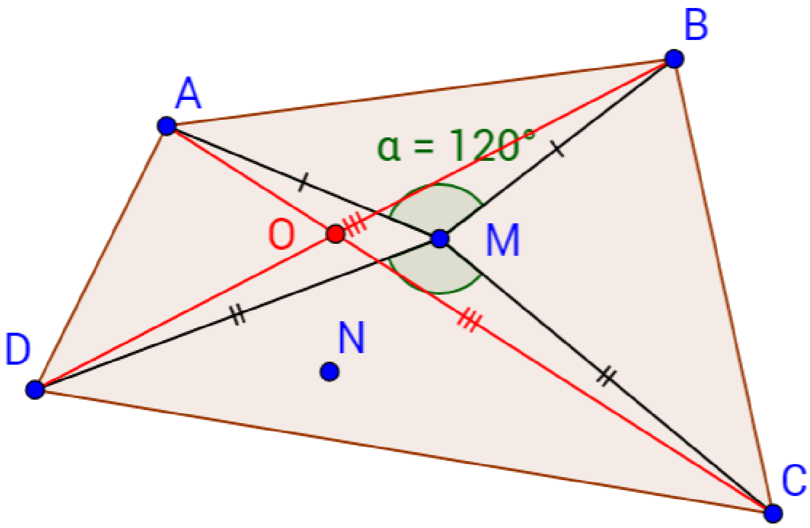


Рисунок 2.24 – дополнительные построения

∠AOB=∠COD=120°, соответственно ∠AOD=∠COB=60°.

Рассмотрим движение, которое переведёт отрезок AC в отрезок DB. Углом поворота в этом случае будет угол равный 60°, тогда центр поворота будет формировать равнобедренные треугольники с углами в 60°, по аналогии с центром M.

Таким образом это и будет наша искомая точка N.

Т.к. в задаче требуется только доказать существование такой точки, то на этом этапе доказательство закончено.

Критерий оценивания:

Самооценка:

- Количество выполненных этапов задания (0-2);
- Количество затраченного времени (в минутах);
- Достижимость цели (0-5).

Критерии для проверки чужой работы студентом и оценка преподавателем:

- Корректность построения (0-5);
- Логичность построения (0-5);
- Количество выполненных этапов задания (0-2);
- Достижимость цели (0-5);

- Качество и аккуратность работы (наличие лишних построений, наглядность чертежа и т.д.) (0-5).

2.3 Подобия: динамические чертежи и методика обучения теме на их основе

В рамках данной темы рассматриваются вопросы: подобия плоскости, группа подобий, гомотетии, свойства гомотетий, аналитическое задание гомотетии, компьютерная визуализация подобия, решения задач с использованием подобий.

На данный раздел отводится 8 лекционных часов, 6 лабораторно-практических и 4 лабораторных часа.

Лекции: в рамках лекции необходимо пояснить, что подобия не являются чем-то новым и многие уже сталкивались с ним, когда работали с масштабом. Необходимо дать определения подобия и гомотетии, после чего перейти к наглядной визуализации.

Реализовать анимацию гомотетии можно несколькими разными способами, рассмотрим два из них, которые наиболее удобны в использовании.

1 способ.

Основная идея первого способа заключается в использовании ползунка, где конечное значение будет равно коэффициенту гомотетии.

В области объектов в строке ввода напишем: k=2,25

Это позволит добавить новый объект, который будет являться ползунком, но работать только в рамках области объектов. Если работать с версией GeoGebra ниже 6, то в область объектов просто будет добавлена переменная, со значением равным 1.

Переменная k будет отвечать за коэффициент подобия.

Добавим на полотно следующие объекты: произвольную фигуру, точку и ползунок. У ползунка в качестве максимального значения нужно ввести k, а в качестве минимального 1, шаг установить в значение 0,1.

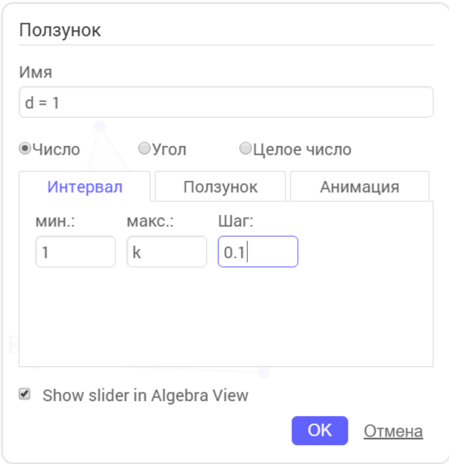


Рисунок 2.25 – настройка ползунка

Выбрав инструмент «Гомотетия относительно точки». Построим образ треугольника относительно построенной точки с коэффициентом k, где k это наш коэффициент подобия.

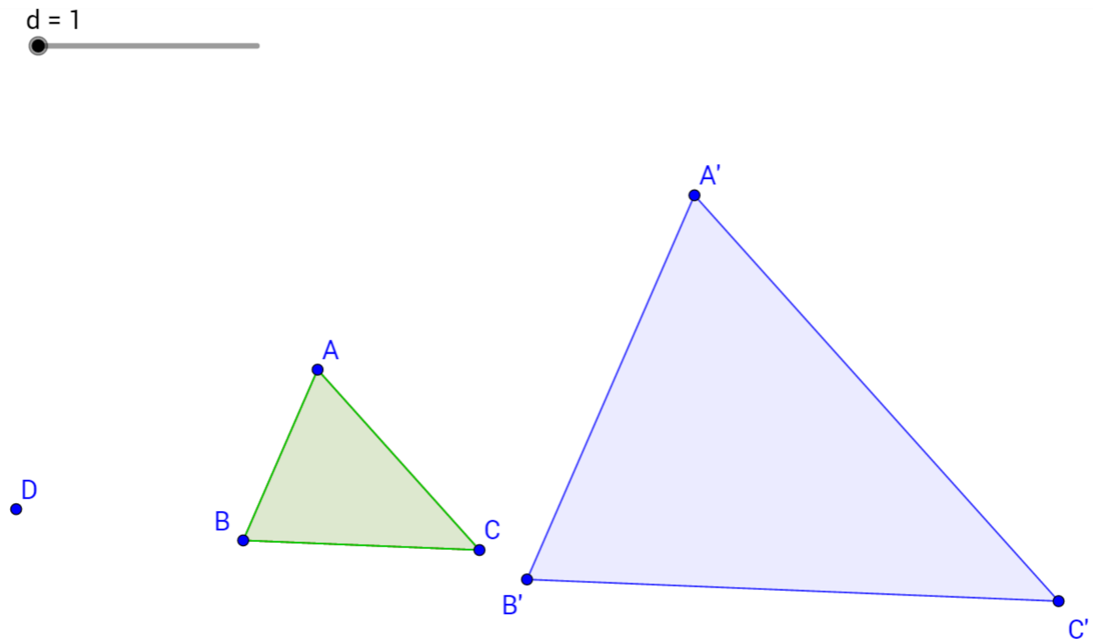


Рисунок 2.26 – Построение образа фигуры при гомотетии

Повторим построение образа, но на этот раз, в качестве коэффициента выберем d, это наш ползунок.

При включении анимации ползунка d мы получим анимацию гомотетии, при этом мы можем менять коэффициент гомотетии, точки или фигуру оригинал, и анимация всё равно будет правильной. Также ползунок можно двигать вручную, для демонстрации анимации.

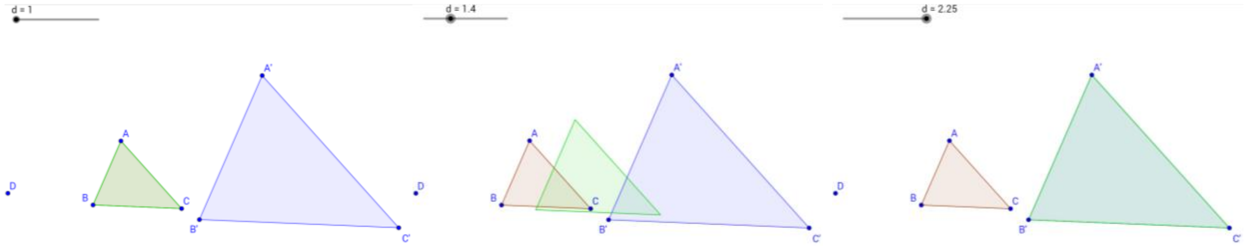


Рисунок 2.27 – Анимация гомотетии (способ 1)

2 способ.

Для организации второго способа, мы воспользуемся способом, аналогичным построению анимации при движении.

Построив фигуру и её образ, мы соединим их отрезками. На отрезках построим аналогичную фигуры, сместим в начало оригинала и анимируем все вершины.

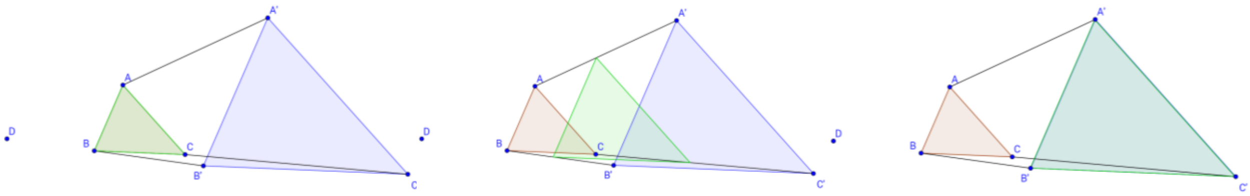


Рисунок 2.28 – Анимация гомотетии (способ 2)

Первый способ анимации хоть и более сложен в построении, но имеет ряд преимуществ. Например, есть возможность ручной анимации, нет необходимости сдвигать вершины фигуры, которая отвечает за анимацию, анимация всегда соответствует реальному положению вещей (при анимации через отрезки может возникнуть проблема с задержкой анимации одной из вершин).

Задание №1. Найти геометрическое место середин хорд окружности, проходящих через данную на окружности точку A.

Анализ.

Анализ с использованием среды GeoGebra будет несколько отличаться от привычного анализа. Мы построим данные объекты, построим произвольную хорду, которая проходила бы через точку А, найдём середину хорды и установим для неё значение «Оставлять след».

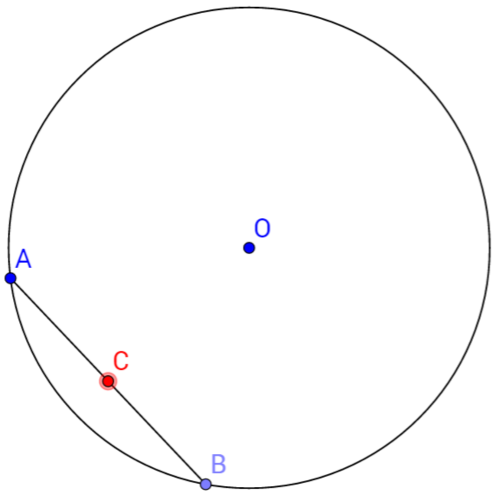


Рисунок 2.29 – Начальное построение задания

После выполненного построения мы анимируем точку В чтобы она «бегала» по окружности и посмотрим, какой след будет оставлять точка С

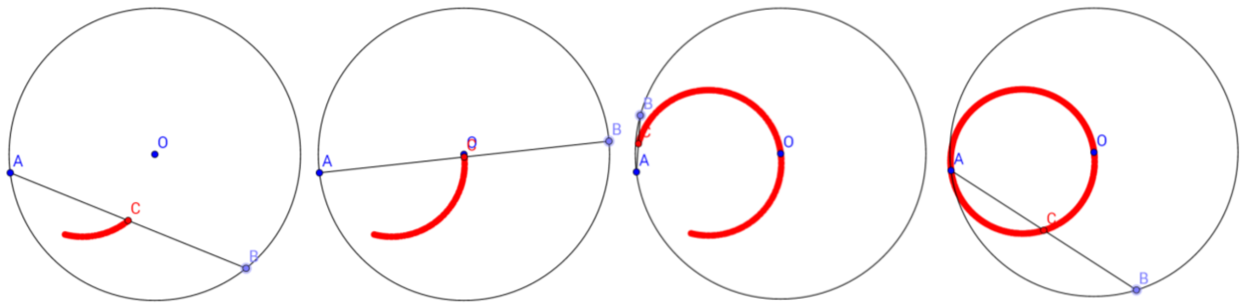


Рисунок 2.30 – Анимация середин хорд

Таким образом при проведении компьютерного анализа стало видно, что результатом построения будет окружность, с центром в середине отрезка АО. То есть это гомотетия с центром в точке А и коэффициентом 0,5.

Построение.

1. Используя инструмент «Гомотетия относительно точки» построим образ данной окружности, относительно точки А и коэффициентом 0,5.

Доказательство.

Пусть С – середина хорды АВ. Гомотетия с центром в А и коэффициентом 0,5 будет преобразовывать В в С. То есть все точки данной окружности при выбранной гомотетии будут преобразованы в искомую окружность.

Исследование.

Построение всегда имеет место, т.к. все необходимые объекты всегда существуют.

Лабораторно-практические: в рамках лабораторно практических занятий необходимо повторить компьютерно-ориентированную методику решения задач. Кроме того, следует уделить особое внимание построению циркулем и линейкой с использованием СДГ GeoGebra. Можно в задании ограничить доступ к некоторым инструментам, например, запретить на время построения пользоваться инструментом «Гомотетия относительно точки».

Лабораторные: планируется проведение двух лабораторных работ.

Лабораторная работа №1: Подобия плоскости

Задание: построить произвольный многоугольник, не менее чем из четырёх вершин и выполнить последовательно три гомотетии. При этом каждое последующее движение должно накладываться на образ предыдущего. Коэффициент первой гомотетии должен быть больше 1, второй гомотетии от 0 до 1, коэффициент третей гомотетии меньше -1. Настроить последовательную анимацию для всех преобразований.

Цель: научиться применять методы компьютерной визуализации с использованием программы GeoGebra при решении задач по теме «Подобия плоскости».

Организация работы: выполнение работы подразумевает групповую (2-3 студента) работу за компьютером.

Контроль: защита проекта, самооценка, оценка одногруппником, оценка преподавателем.

Ход выполнения:

1. Построение необходимых объектов.

При выполнении построения мы будем пользоваться первым способом анимации.

Построим начальную фигуры.

Т.к. нам необходимо выполнить три гомотетии, то добавим три переменные k_1, k_2, k_3, для коэффициентов гомотетии. И три ползунка, со значениями от 1 до k_1 (ползунок e), от k_2 до 1 (ползунок f) и от k_3 до 1 (ползунок g).

Зададим центры гомотетии и построим все три гомотетии с соответствующими коэффициентами используя инструмент «Гомотетия относительно точки».

Кроме того, построим ещё три образа, используя в качестве коэффициента гомотетии ползунки e, f, g. Эти образы будут отвечать уже за анимацию, и они должны будут изменяться в зависимости от условия построения.

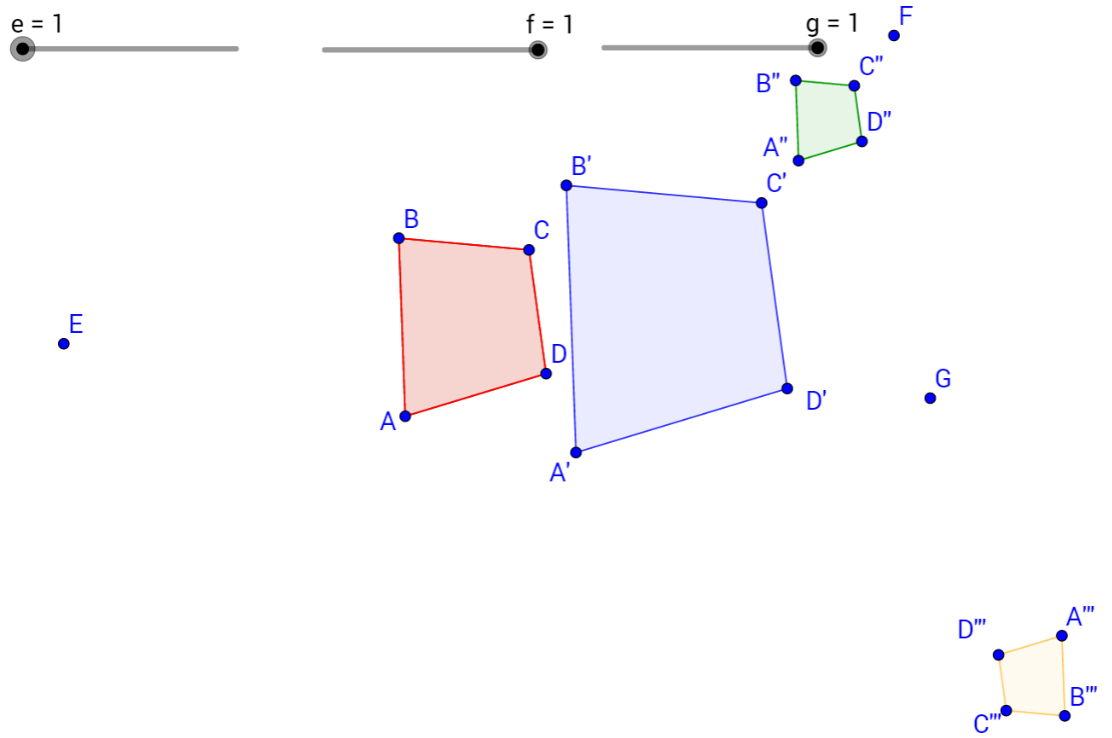


Рисунок 2.31 – Заготовка для анимации

2. Настройка анимации

При построении мы получили четыре образа, которые зависят от ползунков. Соответственно анимация будет настроена только на ползунки.

Последовательность анимации будет следующая. В начале анимируется ползунок e, когда он достигает своего максимального значения, должна начаться анимация ползунка f, при этом образ, который зависел от ползунка e должен исчезнуть, а образ, который зависит от ползунка f должен появиться. После того, как ползунок f достигает своего минимального значения, образ, который зависит от этого ползунка должен исчезнуть, но должна начаться анимация ползунка g и появится образ, зависящий от него.

Таким образом на первый образ должна быть настроена область видимости, таким образом, чтобы он был видим, пока ползунок e не достигнет максимума. Для этого добавим в свойство отображения данного объекта условие e!=k_1. То есть, объект видимый пока ползунок не достигнет максимума. Соответственно в область видимости следующего образа необходимо добавить условие e=k_1.

При включении анимации на первый ползунок (e) мы должны проверять, достигнут ли конец, и если он достигнут, то включить анимацию второго ползунка, а анимацию первого отключить. Это можно сделать при помощи скрипта. Для этого на реакцию обновления первого ползунка добавим следующий скрипт:

```
Если[e==k_1,ЗапуститьАнимацию[f]]
Если[e==k_1,ЗапуститьАнимацию[e,false]]
```

Первая строчка включит анимацию, ползунка f, а вторая выключает анимацию для e.

Аналогично поступим и для остальных ползунков.

Когда последний ползунок достигнет своего минимума, необходимо сбросить все настройки на начальные.

```
Если[g==k_3,ПрисвоитьЗначение[e,1]]
Если[g==k_3,ПрисвоитьЗначение[f,1]]
Если[g==k_3,ЗапуститьАнимацию[e]]
Если[g==k_3,ЗапуститьАнимацию[g,false]]
```

Если[g==k_3,ПрисвоитьЗначение[g,1]]

Первая строка присвоит 1 ползунку e, вторая строка присвоит 1 ползунку f, третья строка запустит анимацию для ползунка e, четвёртая строка остановит анимацию для g, а пятая строка задаст значение для g равное 1.

Пример анимации приведён на рисунке ниже, подробнее анимация представлена в приложении Б.

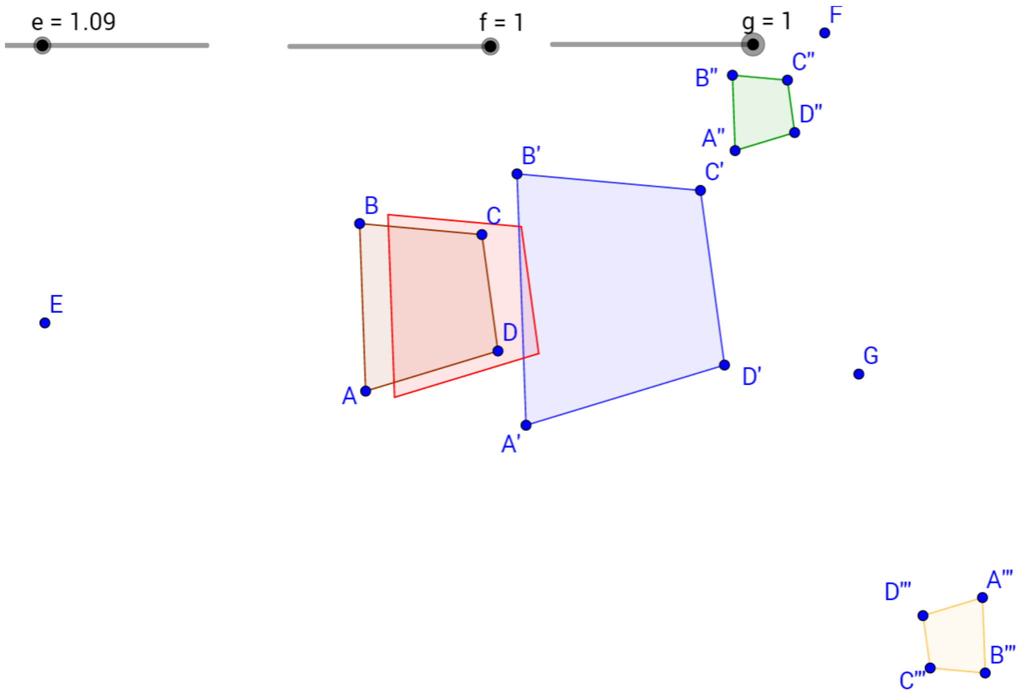


Рисунок 2.32 – Пример анимации гомотетии

3. Сохранение проекта

Все проекты, созданные студентами, сохраняются через информационную систему, после чего студенты выступаю с докладом.

4. Защита проекта.

На защите студенты демонстрируют свои работы, объясняют идею реализации, после чего выступающим ставится оценка преподавателя и оценка группы.

Критерий оценивания:

Самооценка:

- Количество выполненных этапов задания (0-4);
- Количество затраченного времени (в минутах);

- Достижимость цели (0-5).

Критерии для проверки чужой работы студентом и оценка преподавателем:

- Корректность построения (0-5);
- Логичность построения (0-5);
- Количество выполненных этапов задания (0-4);
- Достижимость цели (0-5);
- Качество и аккуратность работы (наличие лишних построений, наглядность чертежа и т.д.) (0-5).

Лабораторная работа №2: Решение задач

Задание: Решить задачи по теме «Подобия».

Задача №1. Для данного угла и точки внутри него, необходимо построить вписанную в него окружность, такую, чтобы она проходила через данную точку.

Задача №2. Точки А и В лежат на окружности. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников АВС, если С – произвольная точка на окружности не совпадающая с А и В.

Задача №3. Построить квадрат по одной из его вершин и двум прямым, проходящим через две другие вершины, принадлежащие одной стороне квадрата [7].

Цель: закрепить полученные знания.

Организация работы: выполнение работы подразумевает самостоятельную, индивидуальную работу за компьютером.

Контроль: самооценка, оценка одногруппником, оценка преподавателем.

Ход выполнения: при выполнении данной работы все задания выполняются самостоятельно, за компьютером. Все три задания на построение, поэтому оформление должно содержать анализ, построение, доказательство и исследование.

Рассмотрим пример решения первой задачи.

Анализ.

Предположим, что наша окружность уже построена. Тогда мы получим чертёж аналогичный тому, что изображён на рисунке ниже.

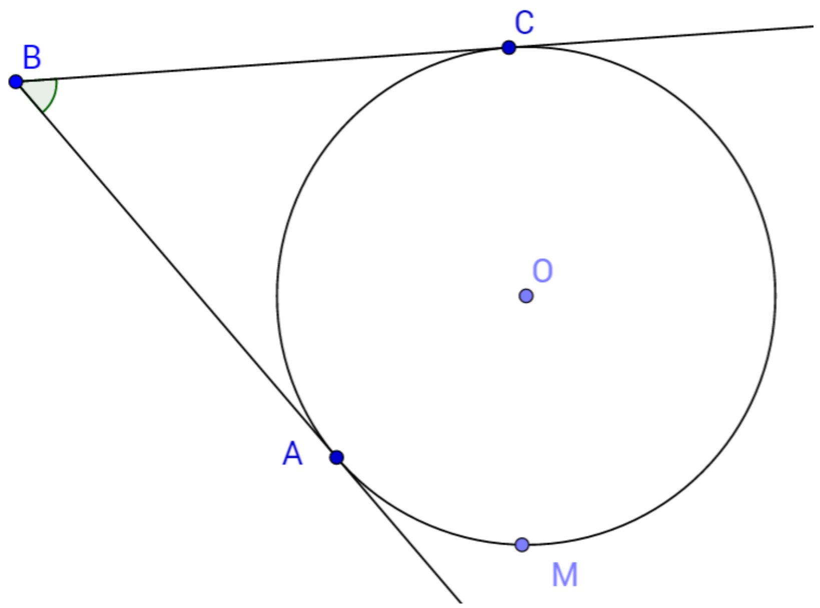


Рисунок 2.33 – Чертёж к задаче

Построим ещё одну произвольную вписанную окружность.

Соединим точки В и М.

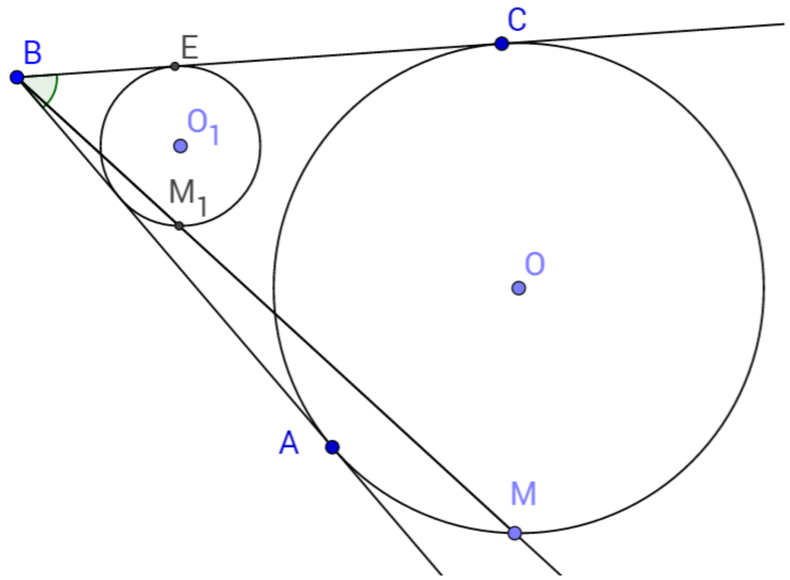


Рисунок 2.34 – Дополнительное построение

Из дополнительного построения видно, что точка M является образом точки M_1 при гомотетии с центром в точке B и коэффициентом $\frac{BM}{BM_1}$. Тогда мы получим, что эта гомотетия преобразует произвольную окружность в искомую.

Построение.

1. Построим произвольную вписанную окружность.
   a. Используя инструмент «Биссектриса» построим биссектрису данного угла.
   b. На биссектрисе отметим произвольную точку.
   c. Используя инструмент «Перпендикулярная прямая» опустим перпендикуляр из точки на любую сторону угла.
   d. Используя инструмент «Окружность по центру и точке», построим вписанную окружность.
2. Построим луч из вершины угла, проходящий через точку M (точку внутри угла по условию).
3. Найдём точку пересечения луча с построенной окружностью (их будет две), обозначим их как M_1 и M_2.
4. Используя инструмент «Гомотетия относительно точки» построим образ произвольной окружности с коэффициентом $\frac{BM}{BM_1}$.
5. Повторим построение с коэффициентом $\frac{BM}{BM_2}$.

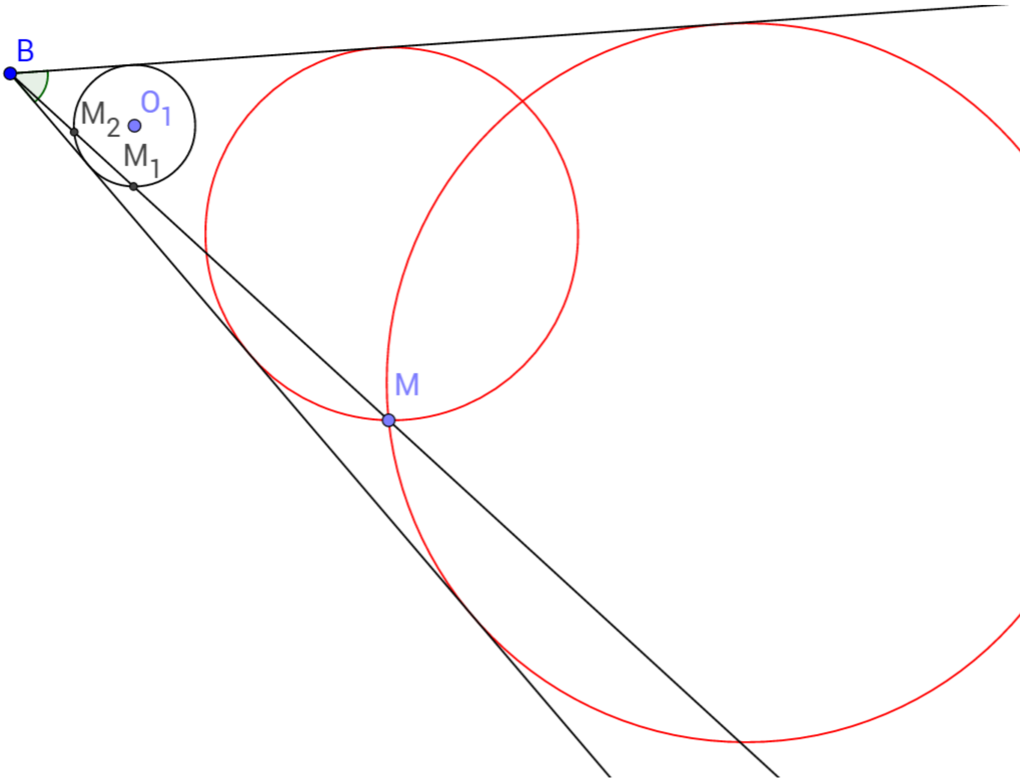


Рисунок 2.35 – Построение к задаче

Доказательство.

Доказательство следует из построения, полученная окружность будет проходить через данную точку, и, т.к. она является образом вписанной окружности, а гомотетия сохраняет отношения, то она останется вписанной окружностью.

Исследование.

По условию задачи точка находится внутри угла, соответственно задача всегда будет иметь два решения, т.к. прямая проведённая через данную точку и вершину угла будет всегда иметь две точки пересечения с окружностью.

Если бы был возможен вариант, когда точка лежит на стороне угла, то задача имела бы одно решение.

Критерий оценивания:

Самооценка:

- Количество выполненных этапов задания (0-4);
- Количество затраченного времени (в минутах);
- Достижимость цели (0-5).

Критерии для проверки чужой работы студентом и оценка преподавателем:

- Корректность построения (0-5);
- Логичность построения (0-5);
- Количество выполненных этапов задания (0-4);
- Достижимость цели (0-5);
- Качество и аккуратность работы (наличие лишних построений, наглядность чертежа и т.д.) (0-5).

Оставшиеся две задачи решаются по аналогии, применяя различные свойства подобия и движения.

2.4 Аффинные преобразования: динамические чертежи и методика обучения на их основе

В теме аффинные преобразования рассматриваются следующие вопросы: аффинные координаты на плоскости, определение и основные свойства, инварианты аффинных преобразований, родство, неподвижные точки, композиция подобия и родства, решение задач на построение и доказательство, компьютерная визуализация, создание новых инструментов.

На данный раздел отводится 8 лекционных часов, 4 практических и 2 лабораторных часа.

Лекции: с аффинными преобразованиями студенты скорее всего ещё не знакомы, и для большей части студентов данная тема является совершенно новой. Поэтому здесь стоит особое внимание уделить определениям и свойствам аффинных преобразований. Особенное внимание стоит уделить аналитическому способу задания, реализовать компьютерную визуализацию родства. При аффинном преобразовании нужно учитывать тот факт, что прямые переводятся в прямые и сохраняется параллельность прямых, аффинные преобразования сохраняют отношения длин параллельных прямых, аффинные преобразования сохраняют отношения площадей фигуры к её образу.

Аналитическое уравнение аффинного преобразования представлено в формуле 2.1

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где (a_1;a_2), (b_1;b_2) – координаты векторов, являющихся образами базисных векторов при аффинном преобразовании, (c_1;c_2) – координаты образа начала координат при этом же преобразовании.

Для визуализации аффинного преобразования нам будет недостаточно стандартных инструментов GeoGebra (точнее их можно использовать, но придётся каждый раз совершать достаточно большое количество действий). Поэтому мы воспользуемся возможностью создания нового инструмента в GeoGebra.

Откроем новый проект и выполним в нём следующие построения:

1. В строке ввода запишем переменные с произвольным значением: a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Это будут наши значения для аналитического задания аффинного преобразования.
2. Поставим произвольную точку А.
3. В строке ввода пропишем формулу:
   B= (x(A)a_{1}+y(A)b_{1}+c_{1},x(A)a_{2}+y(A)b_{2}+c_{2})
4. В главном меню выберем пункт «Инструменты» и нажмём на «Создать инструмент».
5. В качестве выходного объекта выберем точку B.
6. В качестве входных объектов выберем a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, A.
7. Введём название инструмента: «Аффинное преобразование точки», в описании инструмента укажем: «Аффинное преобразование точки (выберите 6 переменных a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) и точку». Поставим галочку «Указывать на панели инструментов» и можно сделать свой значок.

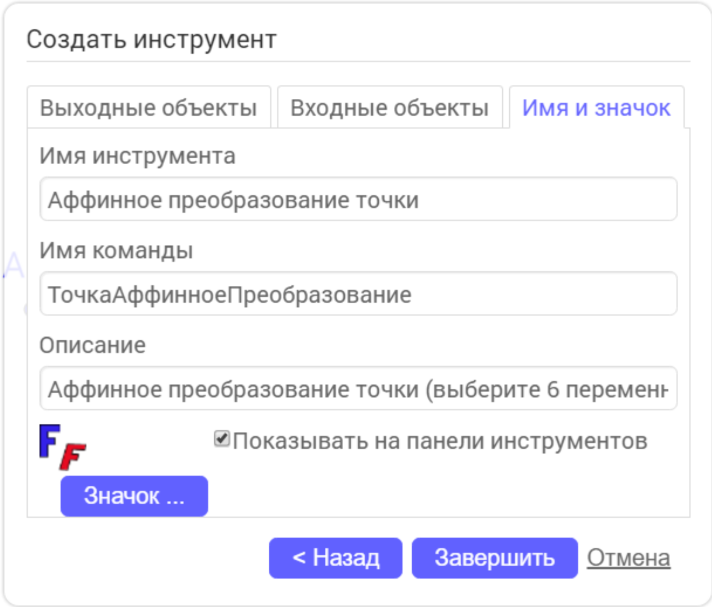


Рисунок 2.36 – Добавление нового инструмента

Отличительной особенность такого задания инструмента и дальнейшего построения образа является тот факт, что значения аффинного преобразования являются динамическими и их можно изменять, меняя значения для переменных a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

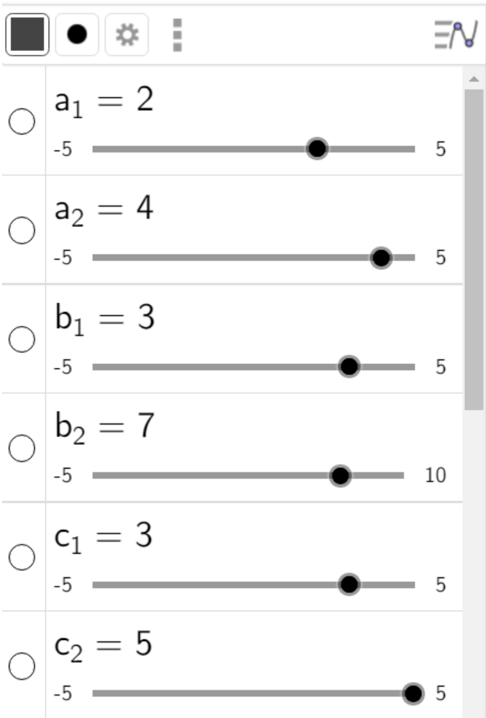


Рисунок 2.37 – Переменные для аффинного преобразования

Рассмотрим пример построения анимации с использованием аффинного преобразования.

Построим произвольный треугольник и используя инструмент «Аффинное преобразование точки» (созданный нами), построим образ всех вершин данного треугольника, с параметрами a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

Изменяя параметры a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, добьёмся наиболее «удачного» расположения образа.

При создании анимации можно воспользоваться двумя способами. Либо соединить всё отрезками, либо использовать ползунки. Использовать ползунки имеет смысл, когда мы рассматриваем одно аффинное преобразование, иначе чертёж получится слишком громоздкий. Если у нас при анимации необходимо отобразить композицию преобразований, то лучше использовать ломаную или отрезки.

Рассмотрим способ создания анимации с использованием ползунков.

Зададим ещё шесть ползунков. Обозначим их как a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22}, c_{11}, c_{22}.

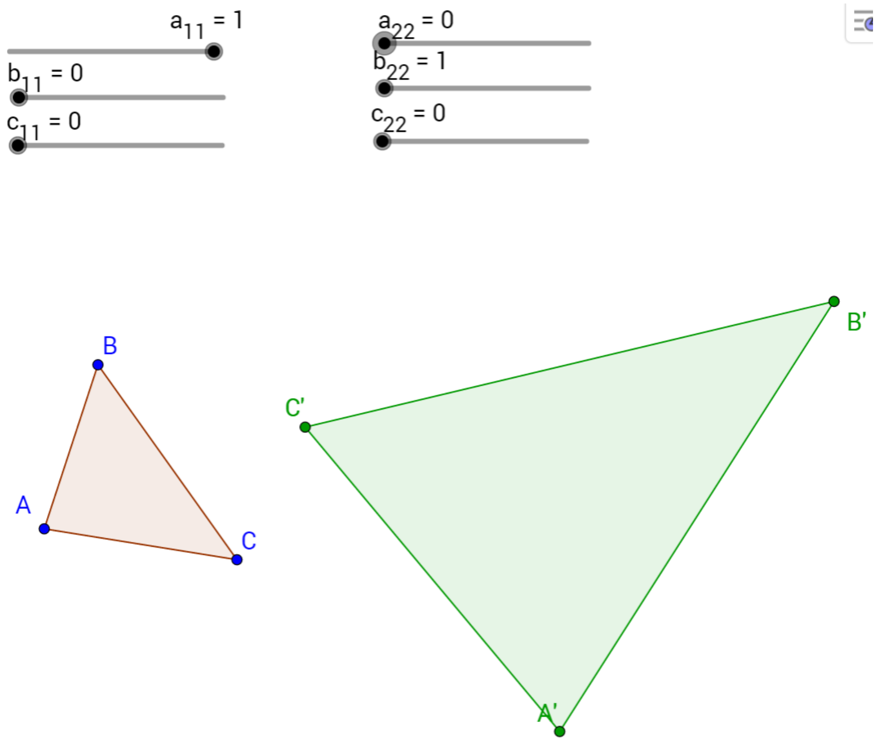


Рисунок 2.38 – Настройка аффинного преобразования

Значение ползунка a_{11} должно изменяться от 1 до a_1, a_{22} должно изменяться от 0 до a_2, b_{11} должно изменяться от 0 до b_1, b_{22} должно изменяться от 1 до b_2, c_{11} должно изменяться от 0 до c_1, c_{22} должно изменяться от 0 до c_2. Кроме этого необходимо корректно выставить «Увеличение» или

«Уменьшать» значение с каждым шагом. Для плавности анимации, для каждого ползунка нужно установить шаг равный 0,01.

Используя инструмент «Аффинное преобразование точки» построим ещё раз образ точек A, B, C, но в качестве параметров введём a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22}, c_{11}, c_{22}.

Для полученных точек построим многоугольник и спрячем все вершины.

Теперь для включения анимации нам достаточно запустить анимацию всех ползунков.

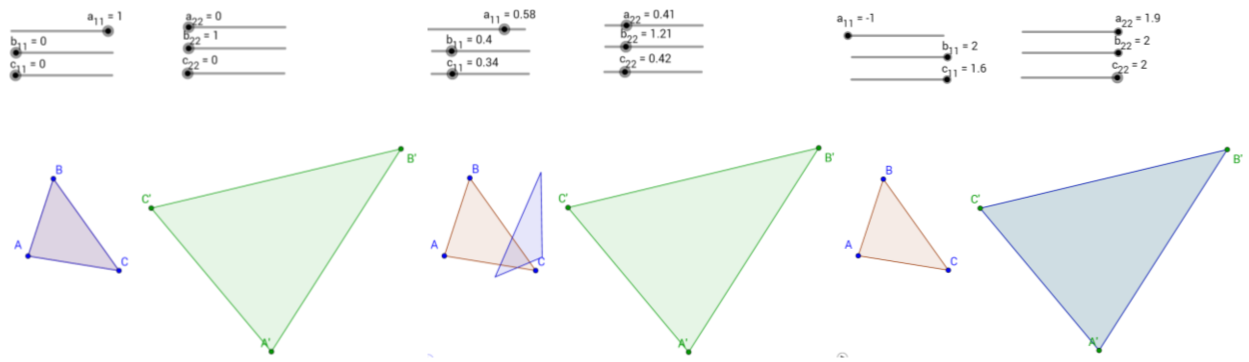


Рисунок 2.39 – Анимация аффинного преобразования методом ползунков

Кроме преимуществ данного метода, описанных выше, при анимации аффинного преобразования и не правильном шаге ползунка можно получить «некрасивую» анимацию, когда некоторые элементы будут двигаться рывками.

Практические: предполагается проведение двух практических занятий. В рамках занятий необходимо повторить теоретическую часть аффинных преобразований и обязательно повторить создание нового инструмента. Кроме этого можно решить несколько задач на построение и доказательство.

Лабораторные: предусмотрено проведение одной лабораторной работы.

Лабораторная работа №1: Аффинные преобразования

Задание: создать инструменты: построение образа точки при аффинном преобразовании, построение образа прямой, при аффинном преобразовании и решить 2 задачи.

Задача №1:

Для данных не совпадающих треугольников ABC и A′B′C′ найти такое аффинное преобразование, которое отображало бы треугольник ABC в треугольник A'B'C'

Задача №2:

Докажите, что точка пересечения боковых сторон трапеции, точка пересечения её диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой.

Цель: научиться применять методы компьютерной визуализации с использованием программы GeoGebra при решении задач по теме «Аффинные преобразования».

Организация работы: выполнение работы подразумевает групповую (2-3 студента) работу за компьютером.

Контроль: защита проекта, самооценка, оценка одногруппником, оценка преподавателем.

Ход выполнения:

Создание инструментов проводится аналогично тому, как это было сделано в лекции. Кроме того, некоторые студенты могут догадаться, что для создания инструмента построения образа прямой, можно воспользоваться уже созданным инструментом поиска точек, что значительно снизит временные затраты на выполнение первой части работы. Построение двух данных инструментов является первыми двумя этапами задания.

Задание на построение выполняется в четыре этапа: анализ, построение, доказательство, исследование.

Рассмотрим выполнение задания на доказательство.

Для решения задачи выполним построение чертежа. Построим произвольную трапецию, для этого можно воспользоваться инструментами «Прямая» и «Параллельная прямая», на которых мы отметим основания трапеции AD и BC. Используя инструмент «Луч» продолжим боковые стороны AB и DC и найдём их точку пересечения, обозначим ей буквой E.

Построим диагонали трапеции, используя инструмент «Отрезок», и тоже отметим точку пересечения, обозначим её буквой F. Отметим середины оснований точками G и H.

Таким образом нам необходимо доказать, что точки E, F, G, H лежат на одной прямой. Если мы построим прямую через две произвольные точки, то мы убедимся в том, что это действительно так. Но для точного доказательства этого недостаточно.

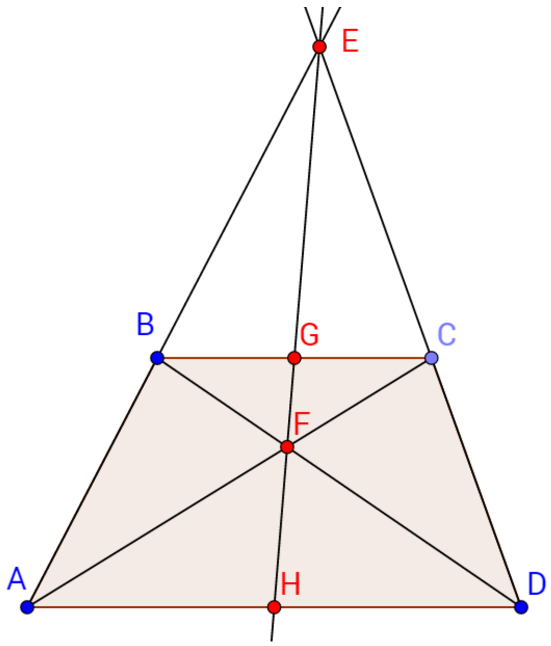


Рисунок 2.40 – Чертёж к задаче

Исходя из задачи 1, можно сделать вывод, что для любых двух треугольников найдётся такое аффинное преобразование, которое отобразит один треугольник в другой. Значит мы можем найти такое аффинное преобразование, которое отобразит треугольник AED в равнобедренный треугольник A'E'D'. Для треугольника A'E'D', точки E', G', F', H' будут лежат на одной прямой, а, следовательно, и их прообразы тоже будут лежать на одной прямой. Таким образом мы получим, что точки E, F, G, H лежат на одной прямой.

Данная задача наглядно демонстрирует, как свойства аффинных преобразований можно применять для упрощения доказательства, кроме того изучение аффинных преобразований может помочь студентам – будущим учителям математики, в подготовке школьников к олимпиадам по геометрии.

Критерий оценивания:

Самооценка:

- Количество выполненных этапов задания (0-7);
- Количество затраченного времени (в минутах);
- Достижимость цели (0-5).

Критерии для проверки чужой работы студентом и оценка преподавателем:

- Корректность построения (0-5);
- Логичность построения (0-5);
- Количество выполненных этапов задания (0-7);
- Достижимость цели (0-5);
- Качество и аккуратность работы (наличие лишних построений, наглядность чертежа и т.д.) (0-5).

2.5 Инверсия: динамические чертежи и методика обучения теме на их основе

В рамках темы рассматриваются такие вопросы, как: определение инверсии, свойства инверсии, инверсии относительно окружности, инверсия относительно линий второго порядка, решение задач на построение и доказательство, компьютерная визуализация.

На данный раздел отводится 4 лекционных часов, 4 практических и 2 лабораторных часа.

Лекции: все геометрические преобразования, которые изучались студентами ранее всегда переводили прямые в прямые, а окружности в окружности. Но инверсия - это совершенно другое преобразование и скорее всего у студента с ним возникнут наибольшие трудности. Инверсия может преобразовать прямую в окружность, а окружность в прямую. Это довольно сложно представить, как это происходит, поэтому вопрос компьютерной визуализации при рассмотрении темы «Инверсия» выходит на ведущий план. При этом инверсия, как и аффинные преобразования, не входят в обязательное изучение в школьном курсе, но могут быть использованы для решения большого числа геометрических задач. В свою очередь понимание инверсии значительно упростит понимание геометрии Лобачевского.

Определение: Точка A' называется образом точки A относительно некой окружности с центром O и радиусом r, если точка A' лежит на луче OA и OA ·OA' =r^2.

Рассмотрим инверсию плоскости относительно окружности. По своей сути данную инверсию можно представить, как сгибание плоскости, относительно окружности.

Построим окружность и произвольный треугольник вне окружности. Используя инструмент «Отражение относительно окружности» найдём образ треугольника (Рисунок 2.41).

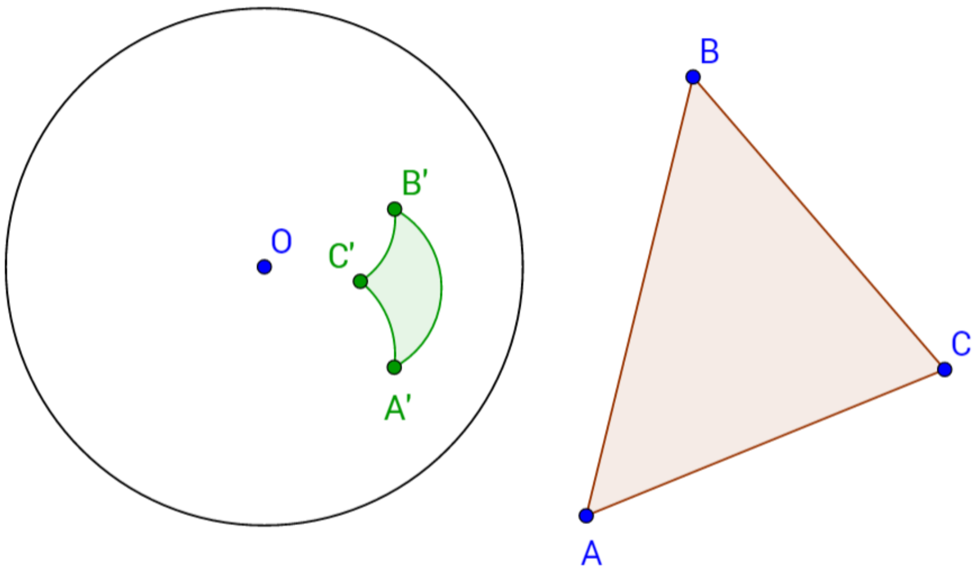


Рисунок 2.41 – Симметрия относительно окружности

Очевидно, что для анимации с использованием отрезков, когда мы соединяем AA', BB' и CC' и строим на этих отрезках аналогичную фигуру, у нас не получится нужного искажения. И треугольник никогда не превратиться в фигуру, аналогичную A'B'C'.

Воспользуемся следующим способом.

Построим отрезки AA', BB' и CC'. На сторонах треугольника отметит по одной произвольной точки, можно выбрать середины сторон, но это не имеет значения, главное, чтобы они не совпадали с вершинами. Соединим эти точки с центром окружности. И отметим точки пересечения этих прямых с соответствующими сторонами образа треугольника.

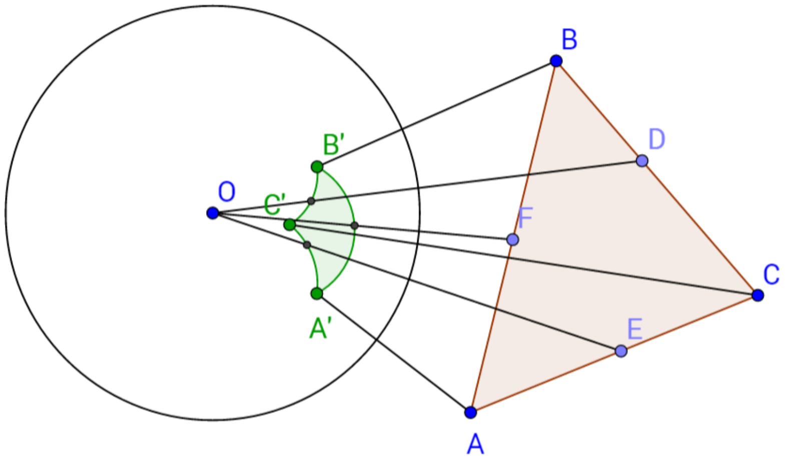


Рисунок 2.42 – Первый этап настройки анимации

Спрячем отрезки, которые проходят через стороны и центр окружности и на их месте построим новые отрезки, которые проходили бы только через точки на сторонах треугольника и его образа.

Используя инструмент «Дуга по трём точка» построим дуги на наших отрезках. После чего спрячем все отрезки, чтобы они не мешали построению.

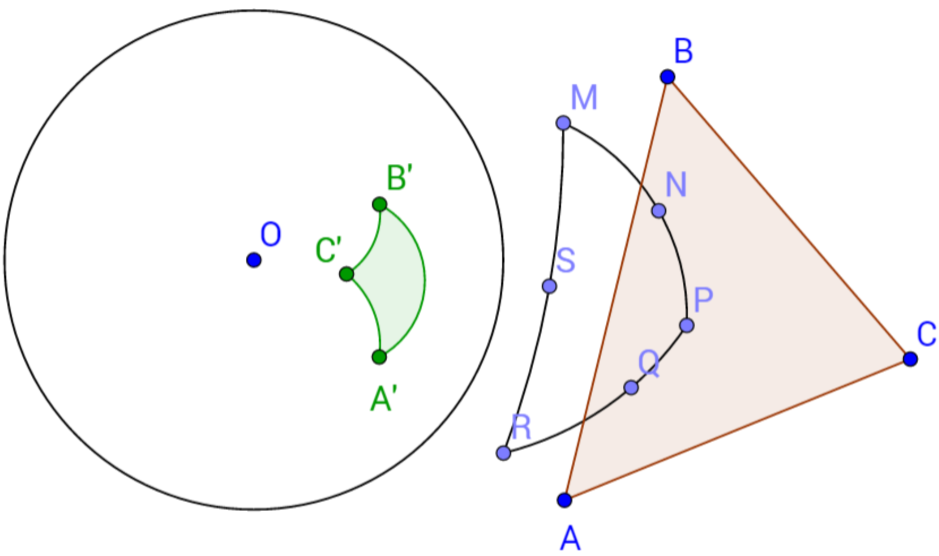


Рисунок 2.43 – Второй этап настройки анимации

Фигура MNPQRS будет в дальнейшем визуализировать построение образа треугольника ABC. К сожалению, закрасить полученную фигуру не так просто, т.к. в понимании среды GeoGebra данный объект не является замкнутой фигурой, а всего лишь набор дуг.

Для того, чтобы закрасить фигуру MNPQRS, можно воспользуемся строкой ввода и построим в ней область, ограниченную тремя дугами. Точнее область, которая будет ограничена тремя окружностями:

$((x-x(T))^2+(y-y(T))^2>t^2)$

$((x-x(U))^2+(y-y(U))^2<b^2)$

$((x-x(V))^2+(y-y(V))^2<f_1{}^2)$

Но при движении расположение окружностей будет меняться, что в результате не даст правильного эффекта.

Поэтому мы будем считать, что закрасить эту область нельзя, но стоит понимать, что всегда можно воспользоваться скриптами и написать такой скрипт, который вычислял бы положения окружностей и всегда закрашивал их в правильно порядке. Но данная тема выходит за рамки исследования в этой работе.

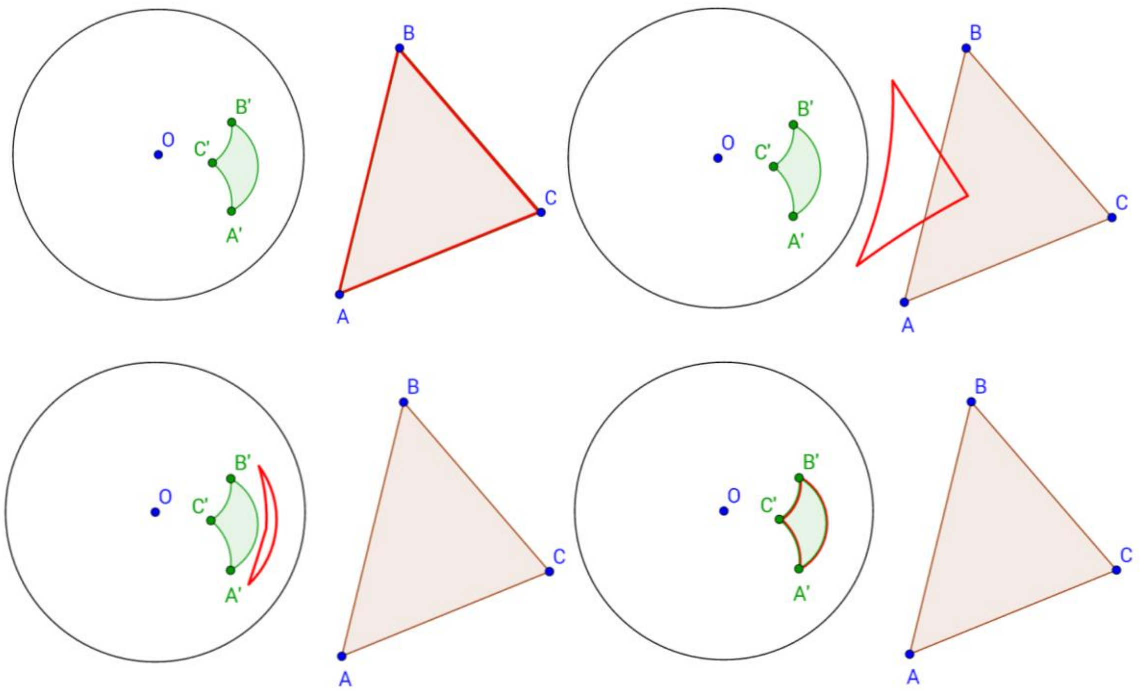


Рисунок 2.44 – Анимация отражения относительно окружности

Практические: на практических занятия нужно повторить теоретические вопросы инверсии, решить несколько задач. Повторить построение компьютерной анимации отражения относительно окружности. Пи наличии достаточного свободного времени можно рассмотреть вопрос о закрашивании области, которая получается при анимации.

Лабораторные: предусмотрено проведение одной лабораторной работы.

Лабораторная работа №1: Инверсия плоскости

Задание: построить произвольный многоугольник, не менее чем из четырёх вершин и выполнить отражение относительно окружности.

Решить три задачи.

Задача №1.

Построить окружность, касающуюся трех данных (задача Аполлония).

Задача №2.

Даны три окружности, центры данных окружностей расположены на одной прямой. Окружности попарно касаются друг друга. Четвертая окружность касается этих трех, и расстояние от ее центра до прямой, на которой лежат центры трех остальных окружностей, равно d. Найти радиус четвертой окружности.

Задача №3.

Для двух данных непересекающихся окружностей. Найти инверсию, которая переводит эти окружности в концентрические окружности.

Цель: научиться применять методы компьютерной визуализации с использованием программы GeoGebra при решении задач по теме «Инверсия плоскости».

Организация работы: выполнение работы подразумевает групповую (2-3 студента) работу за компьютером.

Контроль: защита проекта, самооценка, оценка одногруппником, оценка преподавателем.

Ход выполнения:

Первое задание студент должен выполнить достаточно быстро, т.к. его уже разбирали на лекции и на практическом занятии.

Первая задача является задачей на построение, соответственно должна содержать все четыре этапа: анализ, построение, доказательство, исследование.

Вторая и третья задачи являются вычислительными. К ним нужно выполнить качественный чертёж и найти значение требуемого объекта.

Критерий оценивания:

Самооценка:

- Количество выполненных этапов задания (0-7);
- Количество затраченного времени (в минутах);
- Достижимость цели (0-5).

Критерии для проверки чужой работы студентом и оценка преподавателем:

- Корректность построения (0-5);
- Логичность построения (0-5);
- Количество выполненных этапов задания (0-7);
- Достижимость цели (0-5);
- Качество и аккуратность работы (наличие лишних построений, наглядность чертежа и т.д.) (0-5).

2.6 Эффективность применения среды GeoGebra при обучении геометрическим преобразованиям плоскости в основном курсе и при обучении в рамках элективного курса

В 2016 году в группах 21 и 22 были проведены занятия в рамках темы «Геометрические преобразования». Группа 21 была выбрана как экспериментальная, а 22 как контрольная.

В начале эксперимента было проведено три группы теста. Первая группа теста была связана со знаниями из предыдущих изучаемых разделов, на понимание уровня освоения студентами основных понятий по геометрии.

Вторая группа на определение уровня развитости пространственного мышления.

Третий группа теста была направлена на определение уровня умения решать задачи на геометрические преобразования, с учётом школьного курса математики. Т.е. основные задачи были приведены на движения и подобия плоскости.

По результатам тестирования мы получили следующие данные:

Таблица 2.1 – результаты входного тестирования

№	Процент	Группа 21			Группа 22		
		человек	баллы (медианна)	баллы (среднее)	человек	баллы (медианна)	баллы (среднее)
1	0-40	1	37	37	0		
2	41-70	2	63	63	4	65	65,5
3	71-80	13	76	74,3	11	74	75
4	81-90	8	87	85,25	9	86	86,2
5	91-100	3	92	93,6	4	94	94,5
	Средние		71	70,63		79,75	80,3

Как видно из исследования группы имеют примерно одинаковые результаты тестирования, хотя группа 22 успешнее справилась с тестами.

В группе 21 было проведено 8 занятий с использованием описанной в данном исследовании методики. Группа 22 занималась по традиционной методике.

По окончанию 8 занятий, было проведено повторное тестирование, которое также состояло из двух групп вопросов. Мы исключили первую группу вопросов, т.к. она не будет отображать изменения, и зависит только от знаний, полученных до эксперимента. Вторая группа заданий претерпела изменения, были добавлены задачи из курса «Геометрические преобразования». Также была усложнена третья группа заданий, т.к. студенты уже пользовались не только знаниями из школьного курса, но и полученными знаниями, умениями и навыками из недавно пройденного курса.

По результатам тестирования мы получили следующие данные:

Таблица 2.2 – Результаты контрольного тестирования

№	Процент	Экспериментальная группа (Группа 21)			Контрольная группа (Группа 22)		
		человек	баллы (медианна)	баллы (среднее)	человек	баллы (медианна)	баллы (среднее)
1	0-40	0			0		
2	41-70	2	67	67,5	1	66	66
3	71-80	11	76	75,5	12	74	74,8
4	81-90	10	84	85,2	11	88	86,7
5	91-100	4	95	96	3	96	95,3
	Средние		80,5	81,05		81	80,7

По результатам эксперимента видно, что экспериментальная группа, в плане средних значений, выровнялась и стала приблизительно равна результатам контрольной группы, хотя изначально результаты экспериментальной группы были примерно на 10% ниже.

Кроме того, стоит обратить внимание на тот факт, что в экспериментальной группе увеличилось количество студентов с оценкой хорошо и отлично, и нет ни одного студента с очень низким уровнем знаний.

Опытно-экспериментальная проверка методики, описанной в данной работе, подтвердила ее эффективность в соответствии с выдвинутой рабочей гипотезой исследования.

Выводы по главе 2.

Вторая глава посвящена практической реализации курса «Геометрические преобразования». Описаны этапы компьютерной визуализации для движения, подобия, аффинных преобразований, инверсии плоскости.

Особое внимание уделено вопросу построения анимации различными способами, как для визуализации геометрических преобразований, так и для решения задач на построение, вычисление и доказательство.

Рассмотрены и приведены примеры, лабораторных работ по курсу «Геометрические преобразования», описаны основные этапы решения задач и критерий оценивания работы студентов.

В заключение второй главы описан педагогический эксперимент, проводимый на студентах Красноярского Государственного Педагогического Университета, в рамках апробации разрабатываемой методики в 2016 году. Эксперимент охватывает только изучение темы «Геометрические преобразования» и не затрагивает другие темы курса геометрии.

Приведены результаты эксперимента, которые говорят об эффективности разрабатываемой методики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках диссертационного исследования была выдвинута гипотеза: использование систем динамической геометрии способствует повышению качества решения геометрических задач, и в частности, способствует развитию пространственного мышления.

Данная гипотеза была основана на выявлении проблемы в организации процесса обучения решению задач на построение и доказательство в рамках курса «Геометрические преобразования» с использованием систем динамической геометрии, при котором, учащиеся смогут активно развивать своё пространственное мышление и совершенствовать свои знания, умения и навыки.

Цель исследования была поставлена во введении: теоретически обосновать, разработать и экспериментально проверить методику обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики геометрическим преобразованиям с использованием среды GeoGebra.

Данная цель была достигнута, в первой главе идёт обоснование разрабатываемой методике, во второй главе описана сама методика и примеры её использования. В конце второй главы описывается ход педагогического эксперимента, для доказательства эффективности разработанной методики.

Для достижения поставленной цели исследования, нами были решены следующие задачи:

- проанализировать темы модуля «Геометрические преобразования» курса геометрии для студентов бакалавриата, направление подготовки Педагогическое образование, профили Математика и информатика, с точки зрения эффективности использования при их обучении среды GeoGebra;
- изучить методические возможности среды GeoGebra как виртуальной лаборатории, позволяющей эффективно использовать эти возможности

при обучении студентов педагогических вузов геометрическим преобразованиям;

- разработать методику обучения геометрическим преобразованиям студентов педагогического вуза на базе GeoGebra;
- провести педагогический эксперимент по апробации разработанной методики в реальном учебном процессе и оценить ее эффективность.

По результатам работы можно сделать вывод, что включение методики, описанной в данной исследовательской работе, в процесс подготовки студентов – будущих учителей математики позволит ликвидировать экспериментально-теоретический разрыв между теоретическими и практическими знаниями, что в свою очередь позволит повысить качество математического образования в педагогических вузах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (уровень бакалавриата). Приказ №91 от 09.02.2016 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/8073 (дата обращения: 25.05.2017).

2. Приказ «Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» № 413 от 6 октября 2009 года.

3. «Профессиональный стандарт педагога» утверждён Приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от «18» октября 2013 г. № 544н

4. Атаносян Л.С. Геометрия – М.: Просвещение, 1973

5. Атаносян Л.С. Геометрия Ч.II. / Л.С. Атаносян, Г.Б. Гуревич – М.: Просвещение, 1976

6. Базылев В.Т. Геометрия / В.Т. Базылев, К.И. Дуничев, В.П. Иваницкая – М.: Просвещение, 1974

7. Майер В.Р. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики: монография / В.Р. Майер, Е.А. Семина – Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева – Красноярск, 2014 – 516 с.

8. Официальная сайт GeoGebra [электронный ресурс] - режим доступа: https://geogebra.org (дата обращения: 25.05.2017)

9. Мордкович А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в пединституте: автореф. дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 М. 1986

10. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» №73-ФЗ от 29 декабря 2012 года.

11. Концепции развития математического образования в Российской Федерации [Текст] / URL: http://www.math.ru/conc/vers/conc-3003.pdf, (дата обращения: 27.05.2017)

12. Ларин С.В. «Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Учебное пособие» - Ростов-на-Дону: Издательство Легион, 2015 - 192 с.

13. Безумова О.Л. «Обучение с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие» / Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова»; О.Л. Безумова, Р.П. Овчинников, О.Н. троицкая и др.; отв. ред. О.Л. Безумова – Архангельск : КИРА, 2011 – 140 с.

14. Мордкович А.Г., Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте [Текст]: дис. … д-ра. пед. наук 13.00.02 / Москва, 1986. – 355 с

15. Шабанова М.В., Ширикова Т.С. Компьютерный эксперимент в системе методов работы с теоремой [Текст] // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2; URL: http://www.science-education.ru/108-9005 (дата обращения: 28.05.2017).

16. Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий [Текст]: дис. д-ра.пед. наук 13.00.02 / Красноярск, 2001. – 351 с.

17. Анциферова А.В., Майер В.Р. «Живая геометрия» как средство развития исследовательских умений студентов в условиях индивидуально-ориентированного обучения // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2010 (2) / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2010. – с. 9 - 15.

18. Иванов С.Г., Рыжик В.И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» [Текст] / Иванов С.Г., Рыжик В.И. – М.: Просвещение,2013. – 144 с.: ил. – (Работаем по новым стандартам).

19. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: Учебное пособие [Текст] / [Под ред. Е. И. Смирнова] / Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – 454 с

20. Андрафанова Н. В. О познавательной самостоятельности студентов направления «Педагогическое образование» [Текст] / Н. В. Андрафанова, О. Д. Титарева // Образование и наука в современных условиях: материалы IX Междунар. науч.–практ. конф. (Чебоксары, 8 окт. 2016 г.) / редкол.: О. Н. Широков [и др.]. — Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2016. — № 4 (9). — С. 35–40.

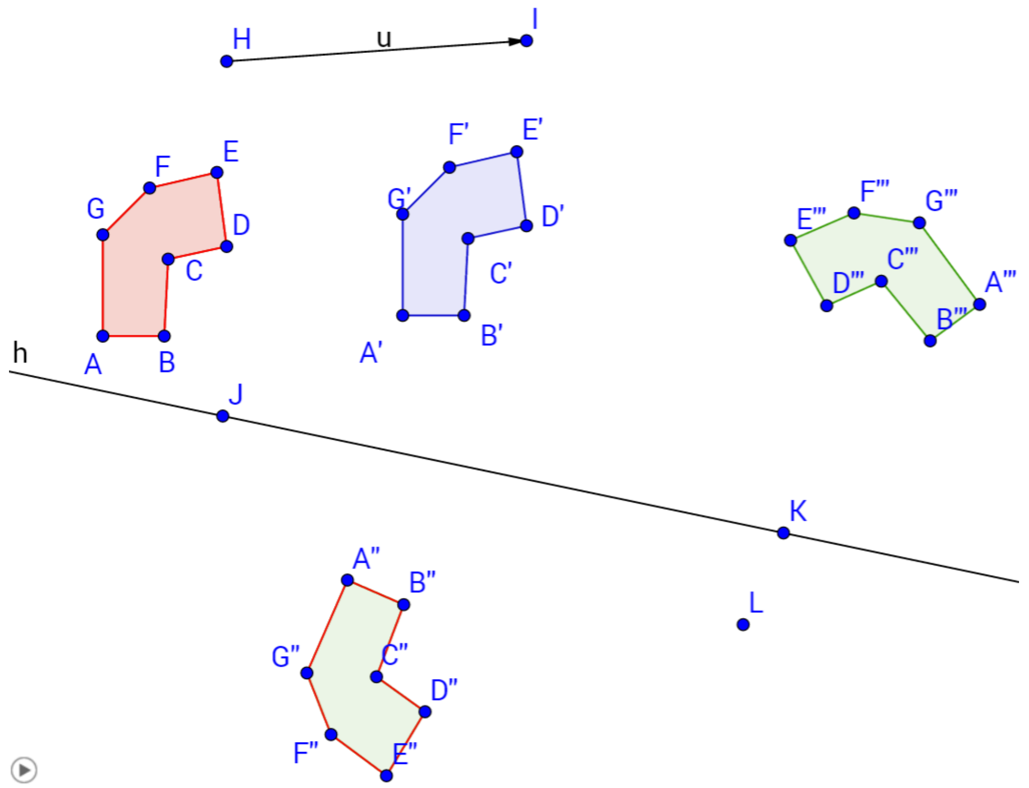
21. Заславский А.А. Геометрические преобразования. – М.: МЦНМО, 2004. — 86 с

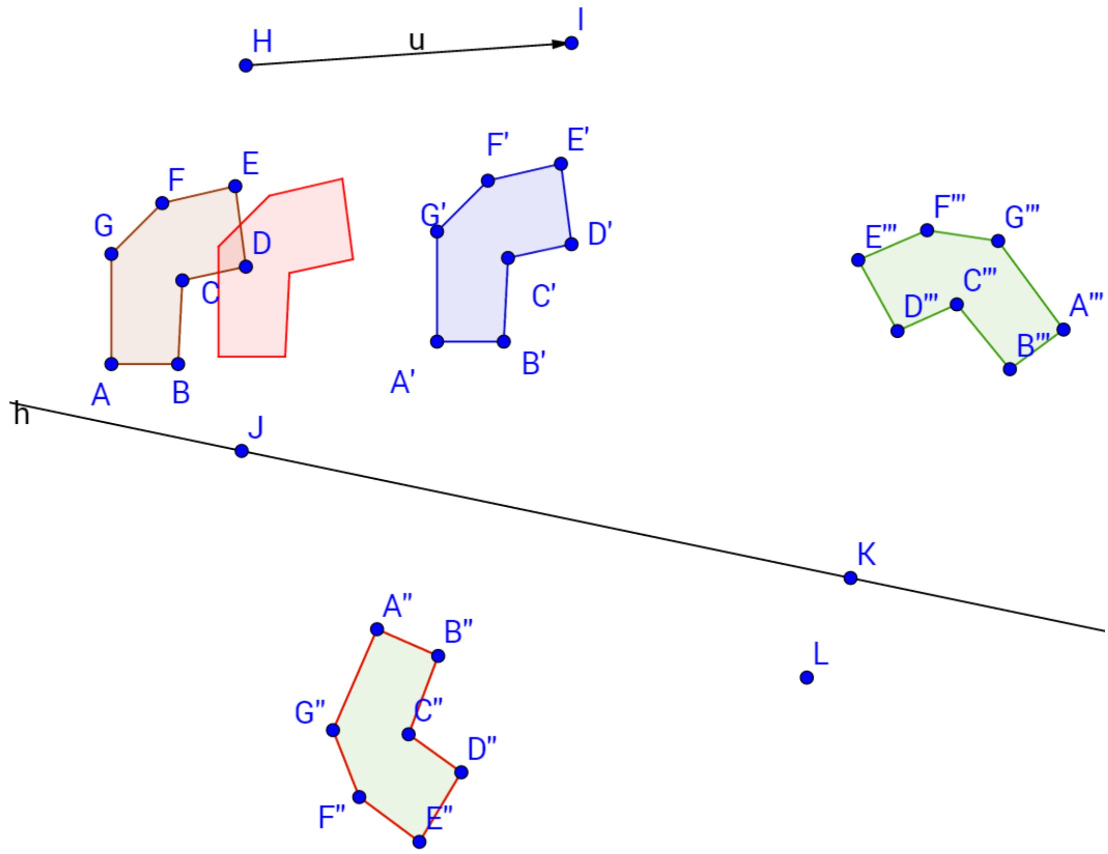
22. Бугаенко В. Движение плоскости и теорема Шаля - Журнал «Квант», 2009. – № 4. – С. 37 – 41.

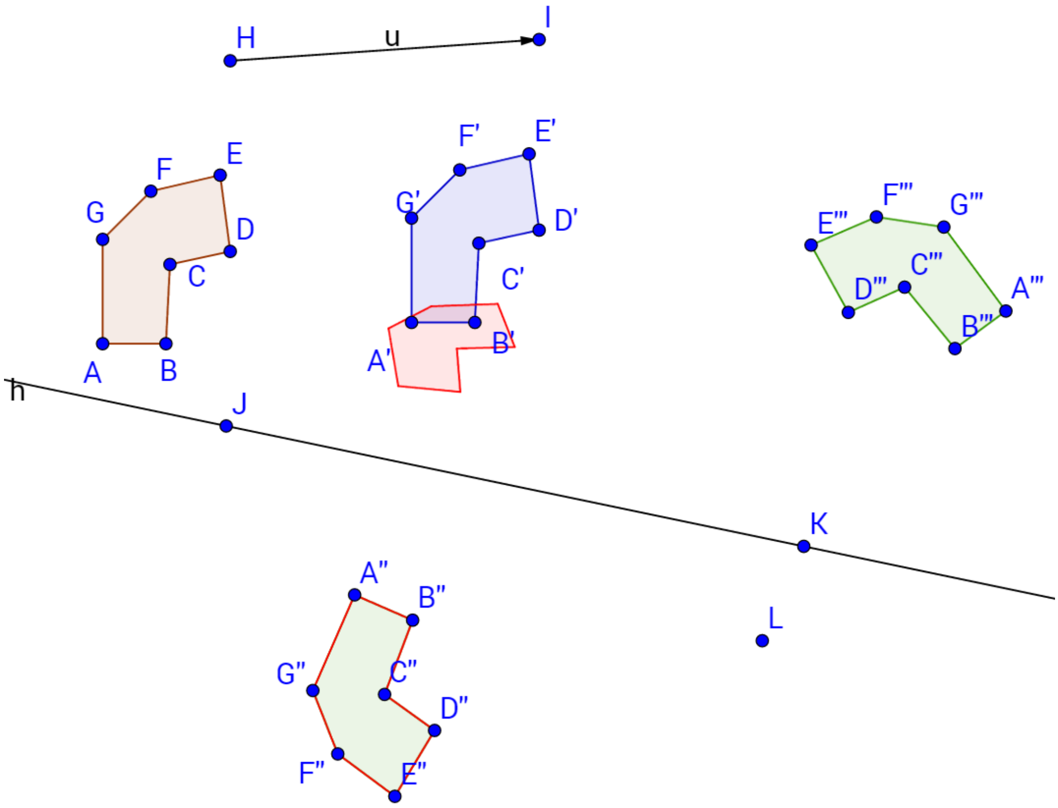
23.Жижилкин И. Д. Инверсия. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. — 72 с.

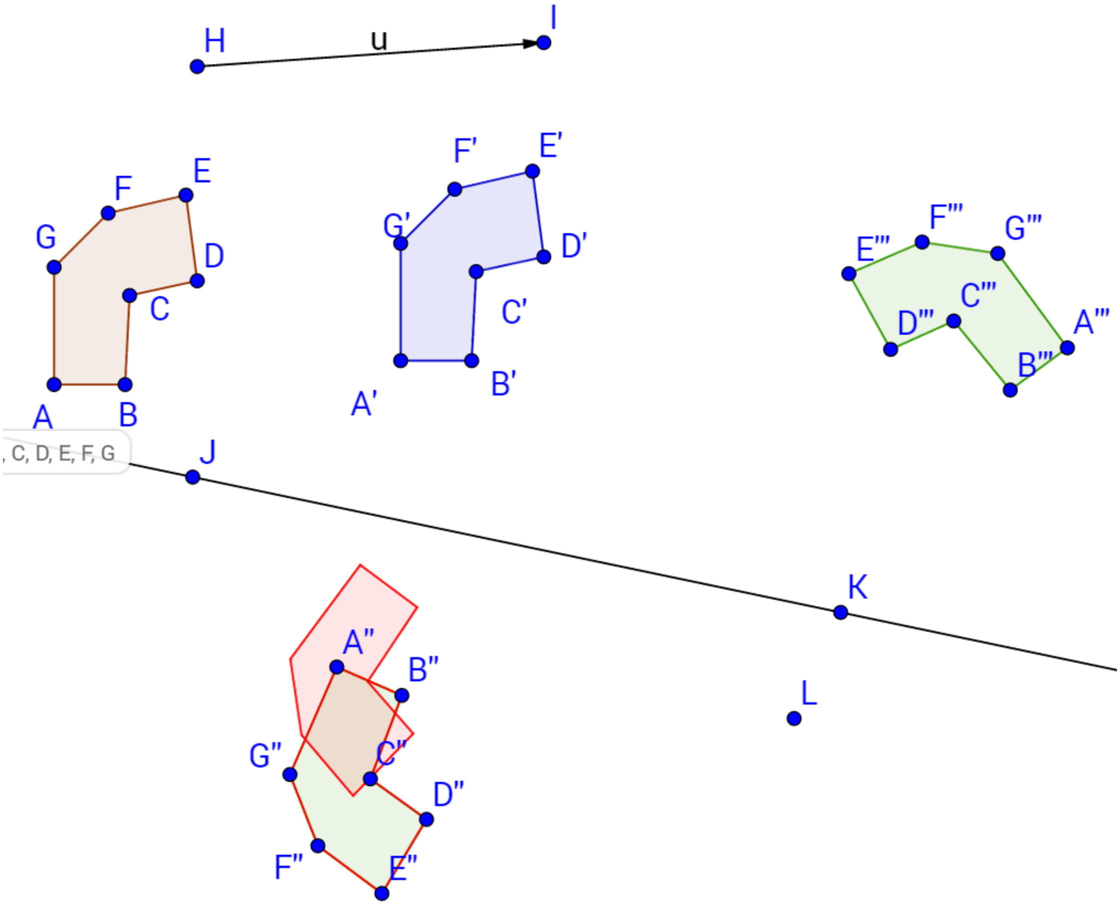
ПРИЛОЖЕНИЯ

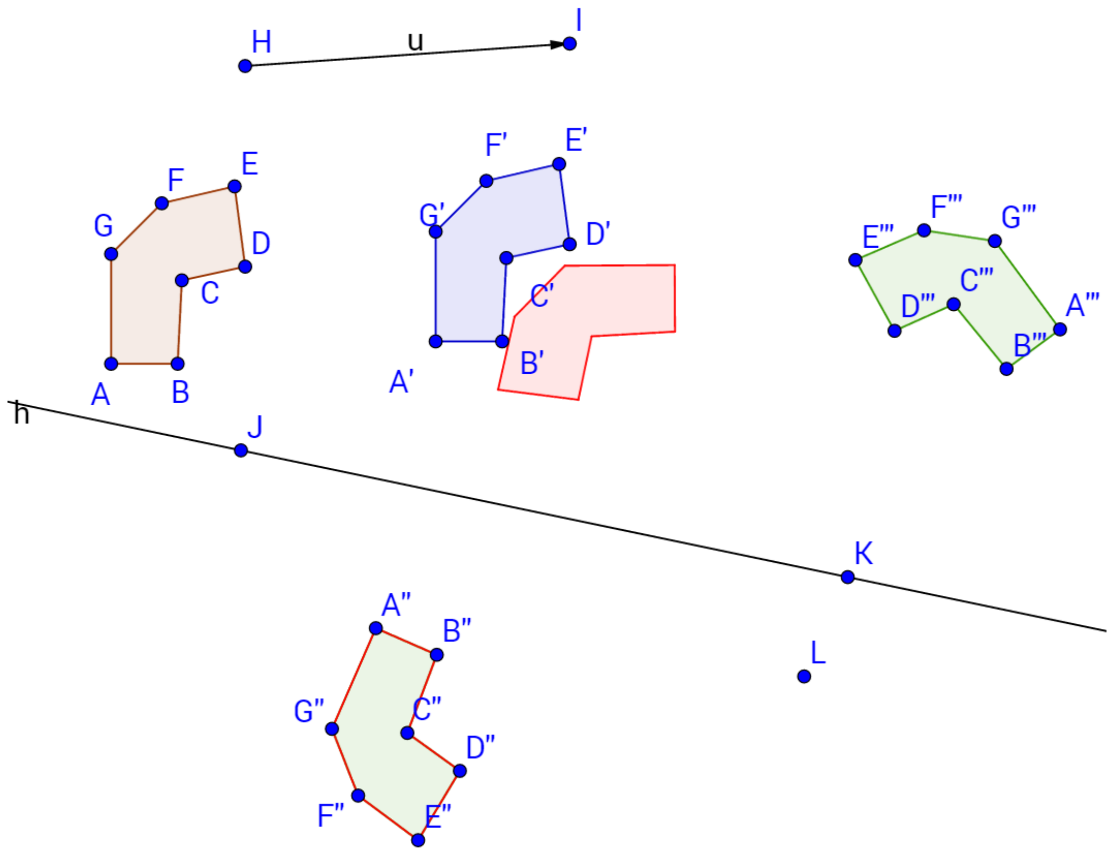
Приложение А



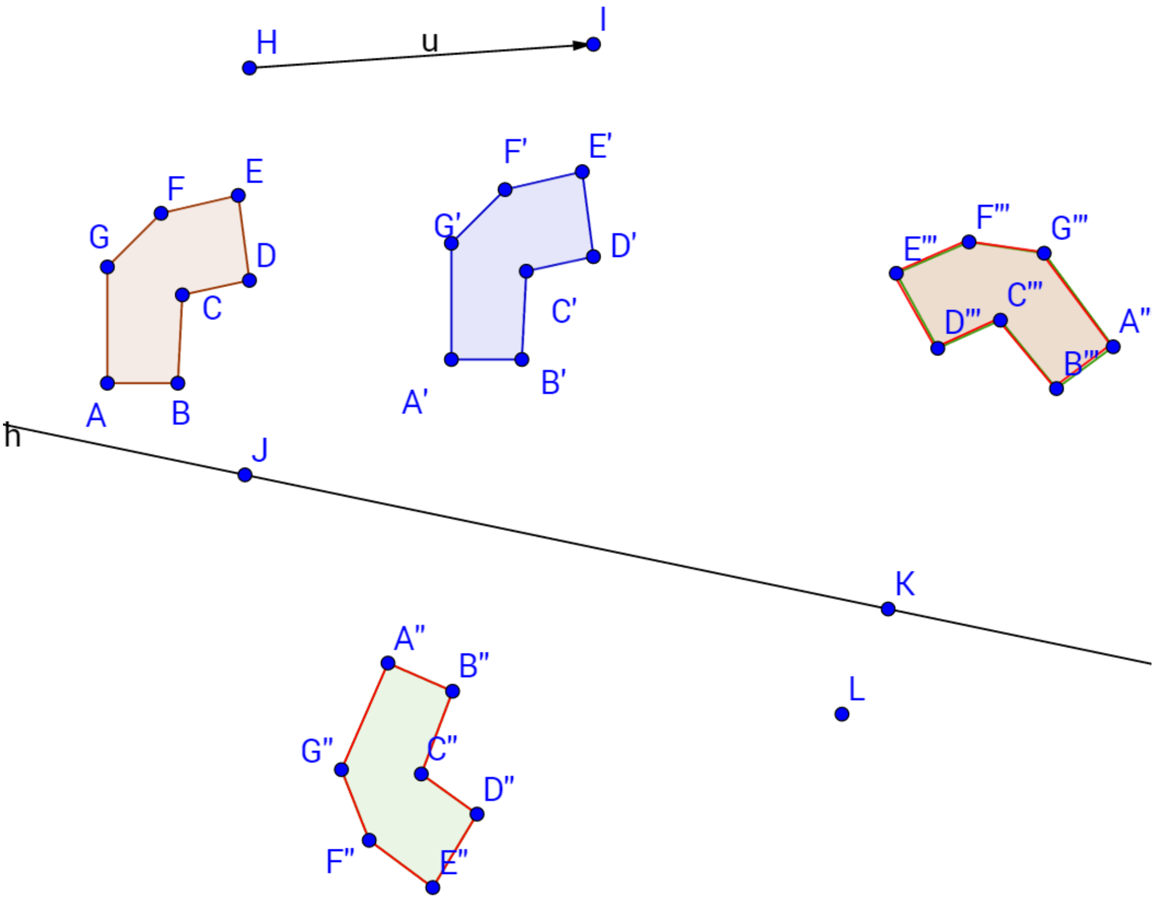



H
u
I
F'
E'
G'
D'
C'
A'
B'
F
E
G
D
C
A
B
E'''
F'''
G'''
C'''
D'''
A'''
B'''
h
J
K
L
A''
B''
G''
C''
D''
F''
E''


H
u
I
F'
E'
G'
D'
C'
A'
B'
F
E
G
D
C
A
B
E'''
F'''
G'''
C'''
D'''
A'''
B'''
, C, D, E, F, G
J
K
L
A''
B''
G''
C''
D''
F''
E''

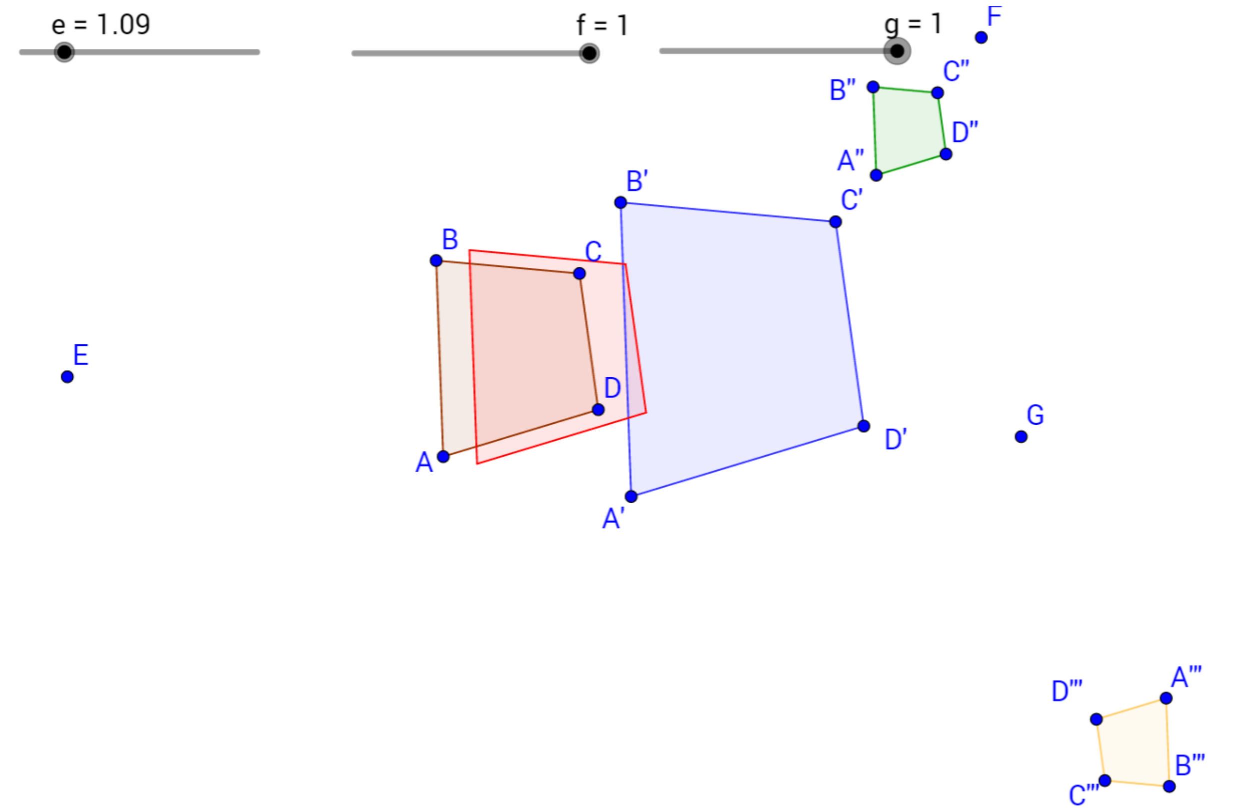


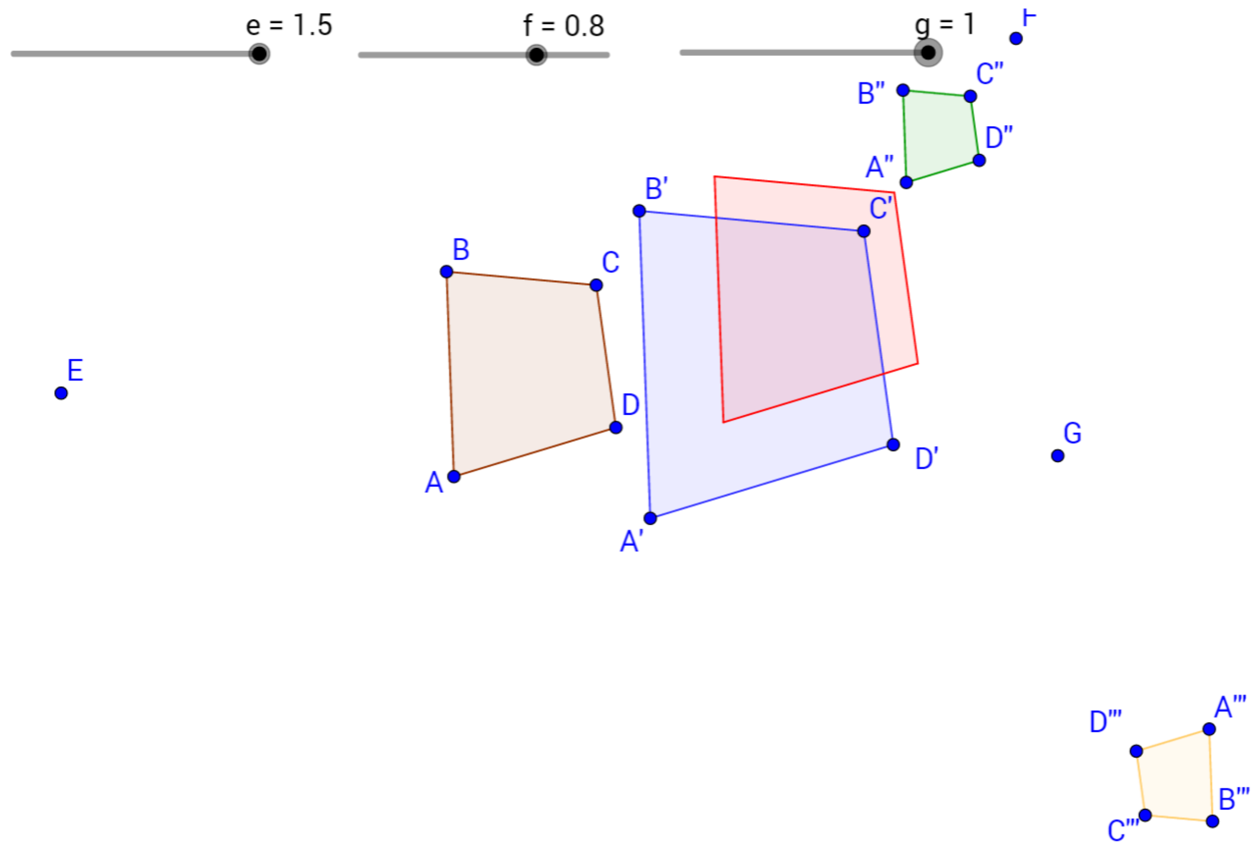
u
H
I
A
B
C
D
E
F
G
A'
B'
C'
D'
E'
F'
G'
E'''
F'''
G'''
C'''
D'''
A'''
B'''
h
J
K
L
A''
B''
C''
D''
E''
F''
G''

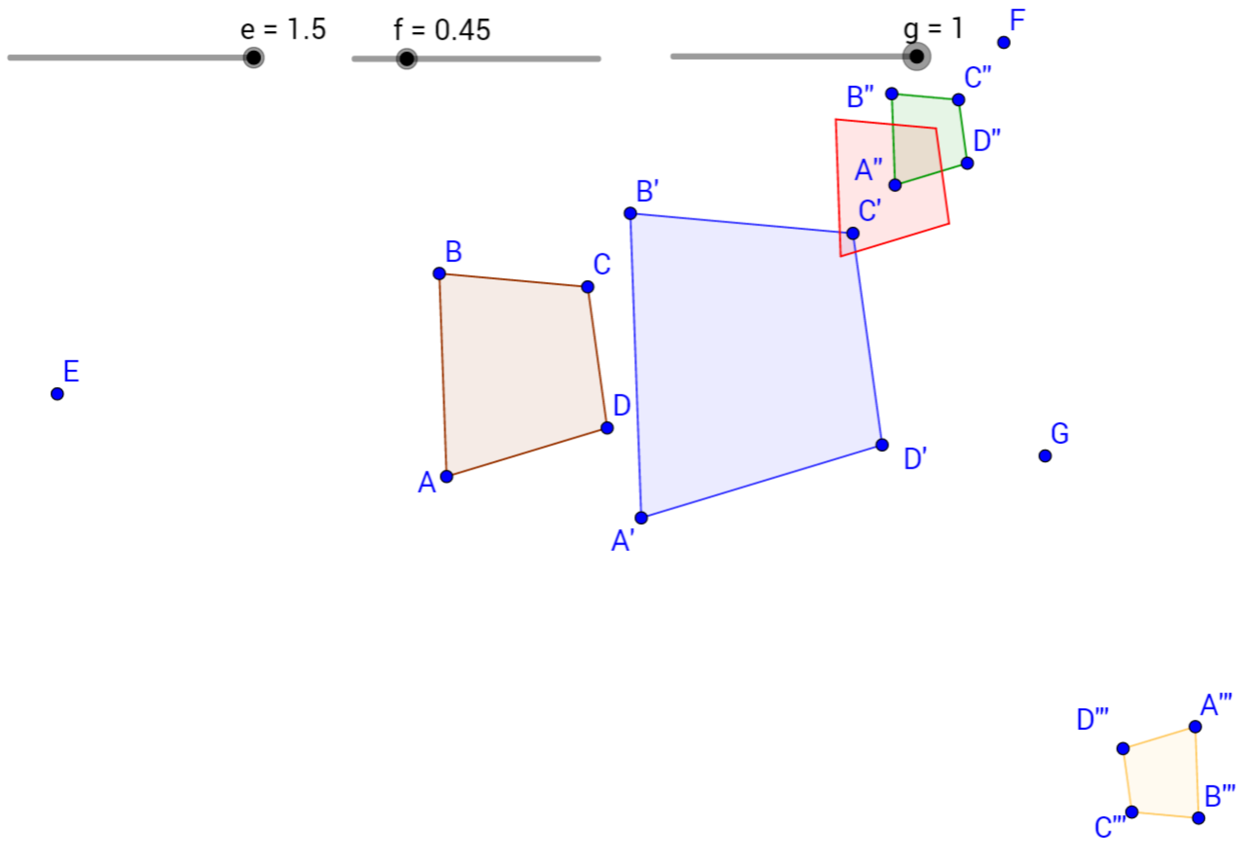


u
H
I
A
B
C
D
E
F
G
A'
B'
C'
D'
E'
F'
G'
E'''
F'''
G'''
C'''
D'''
A''
B'''
h
J
K
L
A''
B''
C''
D''
E''
F''
G''

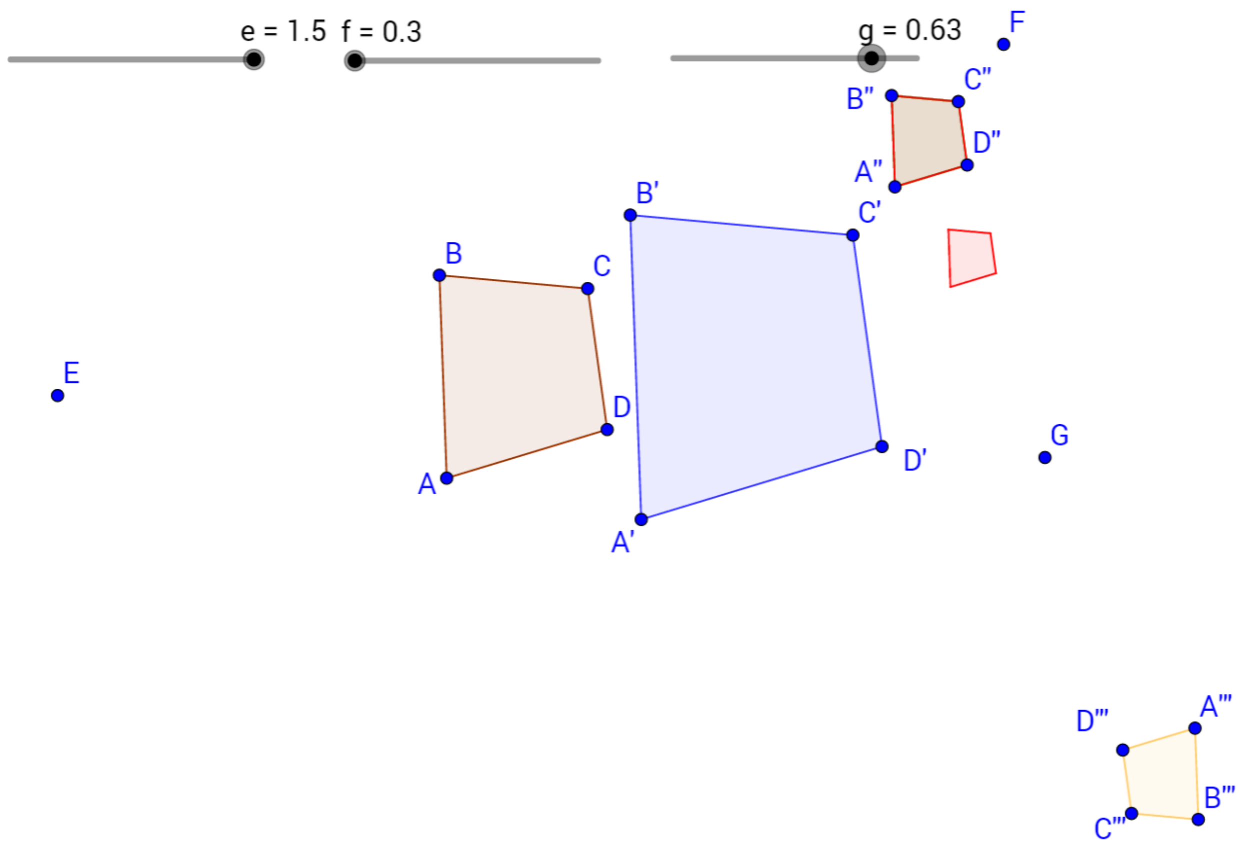
Приложение Б



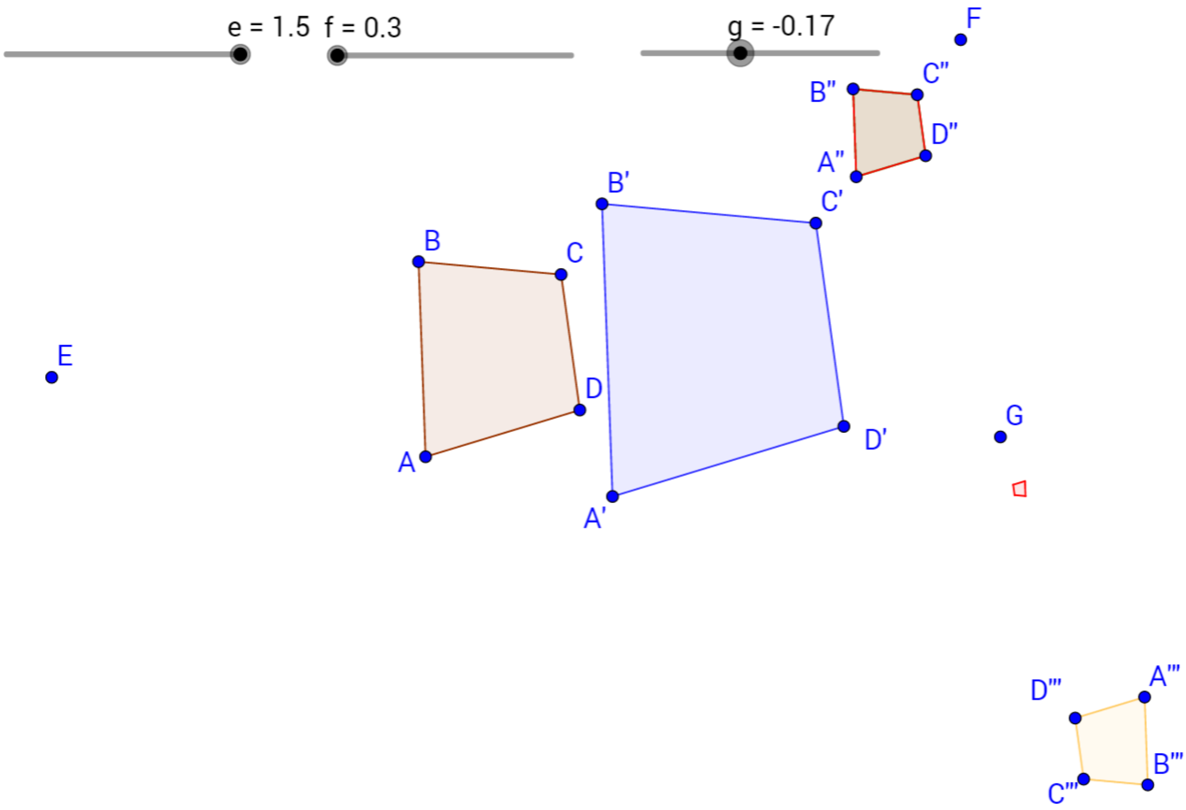




e = 1.5
f = 0.45
g = 1
F
B''
C''
D''
A''
B'
C'
B
C
E
D
G
A
D'
A'
D'''
A'''
B'''
C'''



e = 1.5
f = 0.3
g = 0.63
F
B''
C''
D''
A''
B'
C'
B
C
E
D
G
A
D'
A'
D'''
A'''
B'''
C'''


e = 1.5
f = 0.3
g = -0.17
F
C''
B''
D''
A''
B'
C'
B
C
E
D
G
D'
A
A'
D'''
A'''
B'''
C'''