МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: алгебры, геометрии и методики их преподавания

ТИЛИЧЕЕВА ИРИНА ВАЛЕНТИНОВНА

Магистерская диссертация

Тема: **МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В 10 КЛАССЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Направление подготовки: 44.04.01 Педагогическое образование

Магистерская программа: Информационные технологии в математическом образовании

Допускаю к защите:
Заведующий кафедрой
д.п.н., профессор Майер В.Р.

«17» 06 2017г. __________
дата подпись

Руководитель магистерской программы
д.п.н., профессор Майер В.Р.

«17» 06 2017г. __________
дата подпись

Научный руководитель
д.п.н., профессор Майер В.Р.

«17» 06 2017г. __________
дата подпись

Обучающийся: Тиличеева И.В.

«17» 06 2017г. __________
дата подпись

Красноярск, 2017

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация содержит 86 страниц, 35 рисунков, 2 таблицы, 48 источника и 2 приложения.

Ключевые слова: геометрия, ученики, школьники, 10 класс, GeoGebra, СДГ, система динамической геометрии, задачи, стереометрия, построение сечений, вычисление расстояний, вычисление углов, тетраэдр, параллелепипед, плоскость, позиционные задачи, метрические задачи.

Тема исследовательской работы: методика обучения решению стереометрических задач в 10 классе с использованием систем динамической геометрии.

Объектом исследования является процесс решения стереометрических задач в 10 классе.

Предмет исследования – стереометрические задачи в 10 классе школьного курса геометрии.

Гипотеза данного исследования состоит в том, что использование систем динамической геометрии способствует повышению качества решения геометрических задач, и в частности, способствует развитию пространственного мышления.

Проблемой исследования является организация процесса обучения решению задач на построение по стереометрии, анализ и исследование объектов в пространстве с использованием систем динамической геометрии, при котором, учащиеся смогут активно развивать своё пространственное мышление при решении задач.

Цель исследования: создание методики использования системы динамической геометрии GeoGebra для обучения учащихся 10 классов решению задач по геометрии.

Методами исследования являются:

1) анализ различной учебной, педагогической, учебно-методической, психологической, психолого-педагогической литературы, посвящённой развитию пространственного мышления подростков;
2) анализ особенностей психологического развития у детей 15-17 лет (учащиеся 10 классов);
3) анкетирование;
4) наблюдение и анализ учебной деятельности учащихся в 10 классах общеобразовательной школы.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и приложения. Данная структура работы обусловлена задачами, определёнными во введении данной работы.

Во введении описаны цели, задачи работы, определены актуальность, объект и предмет исследования. Поставлена цель работы и выделены основные задачи работы.

В первой главе говорится о необходимости рассмотрения указанной темы, изучается зарубежный и российский опыт, рассмотрены дидактические принципы отбора содержания обучения школьников решению стереометрических задач.

Вторая глава посвящена практической реализации цели, сформулированной во введении. В данной главе описывается проведённый педагогический эксперимент. Апробация проводилась на учащихся МБОУ СОШ №10 г. Красноярска.

В заключении описаны выводы по данной работе.

Практическая значимость данной работы заключается в использовании разработанной нами методики применения системы динамической геометрии с рекомендациями, при изучении учащимися стереометрии на уроках в 10 классах.

The theme of the research work: the method of teaching for solving of stereometric problems of pupils in the 10th grade with the use of dynamic geometry systems.

The object of the study is the process of solving stereometric problems in grade 10.

The subject of the study is stereometric problems in the 10th grade of the school course of geometry.

The hypothesis of this study is that the use of dynamic geometry systems contributes to improving the quality of the solution of geometric problems, and in particular, promotes the development of spatial thinking.

The problem of the study is the organization of the learning process for solving problems on the construction of stereometry, analysis and exploration of objects in space using dynamic geometry systems, in which students can actively develop their spatial thinking in solving problems.

The purpose of the study was to create a methodology for using the GeoGebra dynamic geometry system to teach pupils in the 10th grade to solve problems in geometry.

Methods of research are:

1) analysis of various educational, pedagogical, methodological, psychological, psychological and pedagogical literature devoted to the development of spatial thinking of adolescents;

2) analysis of the features of psychological development in children 15-17 years old (pupils of 10 grade);

3) questioning;

4) observation and analysis of educational activities of students in 10 classes of general education school.

Qualification work consists of an introduction, two chapters, conclusion and annex. This structure of work is determined by the tasks defined in the introduction of this paper.

In the introduction, the goals, tasks of the work are described, the problem, the object and the subject of the research are determined. The goal of the work was set and the main tasks of the work were identified.

The first chapter talks about the need to consider this topic, studies foreign and Russian experience, and examines the didactic principles of selecting the content of schoolchildren's education for solving stereometric problems.

The second chapter is devoted to the practical realization of the goal formulated in the introduction. This chapter describes the pedagogical experiment. Approbation was conducted on the students of the School №. 10 in Krasnoyarsk.

The practical significance of this work is the use of the technique developed by us to apply a system of dynamic geometry, when students learn stereometry on the lessons in 10 grade.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия в старшей ступени школьного образования не просто является одной из школьных дисциплин, она даёт одно из важнейших представлений о человеческой культуре: представление о пространстве, и это очень важно, т.к. человек живёт именно в пространстве, а это очень сильно влияет на его мировоззрение и мировосприятие. Что в свою очередь накладывает отпечаток на интеллектуальную деятельность, как человека в отдельности, так и на всю цивилизацию. Ведь геометрия повсюду, все объекты, которые видит человек должны иметь чёткое очертание в его восприятии, иначе ориентация в пространстве для него становиться затруднительной. Поэтому геометрия – это не просто раздел в курсе математики, не просто школьный предмет, это особенный феномен всей общечеловеческой культуры.

Все свойства человеческого интеллекта обязаны развиваться в некоторой органичной взаимосвязи друг с другом, среди этих свойств стоит выделить конструктивно-геометрическую деятельность, пространственное мышление и геометрическую интуицию. Под способностью к конструктивно-геометрической деятельности стоит понимать, умение выполнять различные геометрические построения, умение конструировать и моделировать различные геометрические объекты, умение строить и изображать различные геометрические фигуры.

В свою очередь развитие пространственного мышления, которое непосредственно связано с геометрией, является одной из центральных задач школьного курса геометрии, в связи с вышесказанным мы хотим сделать основной упор в нашей работе на методику обучения решению задач по стереометрии в 10 классе, при этом задействовать в процессе обучения специальные системы динамической геометрии (СДГ).

Стоит отметить, что с внедрением Федерального образовательного стандарта (ФГОС) второго поколения, стало обязательным использование компьютерных технологий на уроках математике. Кроме того, во многих странах (США, Австрия, Франция, Германия и т.д.) есть успешный опыт использования СДГ и создания на их основе виртуальных лабораторий, которые в значительной мере повышают интерес и уровень освоения полученных знаний [1-7].

Многие видят повышение качества подготовки учащихся по геометрии в совершенствовании методики изучения стереометрии, по большей части с использованием специальных компьютерных технологий.

Однако, если рассмотреть результаты ЕГЭ, то можно увидеть значительный спад в разделе задач по стереометрии, что обусловлено во многом плохим развитием пространственного мышления у школьников.

Вышеописанное приводит к ряду противоречий:

- между требованиями к подготовке школьников описанными в ФГОС и низким уровнем решения задач по стереометрии у школьников;
- между необходимостью использования СДГ при изучении стереометрии и недостаточно разработанными методиками её использования;
- между качественно разработанным программным обеспечением по СДГ и недостаточностью опыта использования данных программ в школах РФ.

Описанные противоречия позволяют выделить проблему: какая именно должна быть методика обучения решению стереометрических задач при использовании СДГ в 10 классе?

Недостаточная теоретическая и методическая разработанность указанной выше проблемы и необходимость использования СДГ в школьном курсе геометрии, в частности раздела стереометрии, послужили основанием для выбора темы магистерской диссертации: Методика обучения решению стереометрических задач в 10 классе с использованием систем динамической геометрии.

Актуальность выпускной квалификационной работы заключается в существовании проблемы развития пространственного мышления, которая в большей части ложиться именно на школьный курс геометрии, и практически не затрагивает другие дисциплины школьного образования. Таким образом, изучение раздела геометрии является обязательным элементом в процессе развития пространственного мышления, причём умение решать стереометрические задачи в 10 классе представляет собой самый значимый компонент, влияющий на развитие пространственного мышления.

Объектом исследования является процесс решения стереометрических задач в 10 классе.

Предмет исследования – стереометрические задачи в 10 классе школьного курса геометрии.

Гипотеза данного исследования состоит в том, что использование систем динамической геометрии способствует повышению качества решения геометрических задач, и в частности, способствует развитию пространственного мышления.

Проблемой исследования является организация процесса обучения решению задач на построение по стереометрии, анализ и исследование объектов в пространстве с использованием систем динамической геометрии, при котором, учащиеся смогут активно развивать своё пространственное мышление при решении задач.

Цель исследования: создание методики использования системы динамической геометрии GeoGebra для обучения учащихся 10 классов решению задач по геометрии.

Для достижения цели исследования, мы выделили следующие задачи:

- Изучить зарубежный и российский опыт использования систем динамической геометрии при обучении школьников решению позиционных и метрических задач в пространстве;

- Изучить конструктивные, вычислительные и анимационные возможности систем динамической геометрии как средства обучения школьников решению задач по стереометрии;
- Рассмотреть основные дидактические принципы отбора содержания обучения школьников решению стереометрических задач на основе использования систем динамической геометрии;
- Изучить темы школьного курса стереометрии, в рамках которых обучение решению задач допускает поддержку системами динамической геометрии, обоснование выбора тем;
- Рассмотреть задачи на построение сечений;
- Рассмотреть задачи на вычисление расстояний;
- Рассмотреть задачи на вычисление углов;
- Проверить эффективность применения динамических чертежей при обучении решению позиционных и метрических задач в пространстве.

Методами исследования являются:

5) анализ различной учебной, педагогической, учебно-методической, психологической, психолого-педагогической литературы, посвящённой развитию пространственного мышления подростков;
6) анализ особенностей психологического развития у детей 15-17 лет (учащиеся 10 классов);
7) анкетирование;
8) наблюдение и анализ учебной деятельности учащихся в 10 классах общеобразовательной школы.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и приложения. Данная структура работы обусловлена задачами, определёнными во введении данной работы.

Во введении описаны цели, задачи работы, определены актуальность, объект и предмет исследования. Поставлена цель работы и выделены основные задачи работы.

В первой главе говорится о необходимости рассмотрения указанной темы, изучается зарубежный и российский опыт, рассмотрены дидактические принципы отбора содержания обучения школьников решению стереометрических задач.

Вторая глава посвящена практической реализации цели, сформулированной во введении. В данной главе описывается проведённый педагогический эксперимент. Апробация проводилась на учащихся МБОУ СОШ №10 г. Красноярска.

В заключении описаны выводы по данной работе.

Практическая значимость данной работы заключается в использовании разработанной нами методики применения системы динамической геометрии с рекомендациями, при изучении учащимися стереометрии на уроках в 10 классах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБНОВЛЕНИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1 О зарубежном и российском опыте использования систем динамической геометрии при обучении школьников решению позиционных и метрических задач в пространстве.

Системы динамической геометрии появились достаточно давно, за период существования данных систем они претерпели значительное улучшение, как в рамках интерфейса, так и в рамках своих возможностей. Многие системы на данный момент работают не только на плоскости, но и в пространстве. Некоторые такие системы разрабатывались для применения их учителями на уроках математики, наиболее популярными системами являются GeoGebra и Geometer's Sketchpad.

Достаточно высокий интерес у учителей общеобразовательных школ имеет GeoGebra. Это связано с несколькими причинами:

- GeoGebra является бесплатной, свободно распространяемой, кроссплатформенной системой;
- GeoGebra разрабатывается сообществом по всему миру;
- во многих странах есть локальные институты GeoGebra, которые занимаются обучением учителей, разработкой методических рекомендаций для школьных курсов.

Образовательная некоммерческая организация GeoGebra, которая является центральным институтом GeoGebra и занимается развитием сообщества и приложений, ставит перед собой одну из целей совершенствование глобального математического образования. GeoGebra разрабатывает программное обеспечение GeoGebra с открытым исходным кодом для студентов и преподавателей во всем мире [1].

Институт GeoGebra в штате Айова (США) является частью международной сети преподавателей и исследователей со всего мира, известной как Международный институт GeoGebra (IGI).

Институт GeoGebra в штате Айова (США) занимается продвижением и поддержкой учителей математики в Айове, которые заинтересованы в использовании GeoGebra на своих уроках в своих классах, в то же время связывая их с международным сообществом GeoGebra [2].

Основными целями данного института являются:

- способствовать использованию широкого спектра приложений GeoGebra в начальных, средних и старших классах, которые основаны на активном обучении, поиске, творческом решении проблем и приверженности обучению для понимания;
- способствовать сотрудничеству и обмену ресурсами, проектами и исследованиями, включая исследования в классе;
- разработка творческих способов привлечения учащихся начальных, средних и старших классов во внеаудиторные занятия, связанные с GeoGebra, например, конкурсы математики, в которых команды учащихся средних школ конкурируют в области моделирования и решения проблем.

Но, наверное, наиболее интересным достижением данного института является разработка интерактивного учебного пособия для школ. В данном ресурсе представлены все основные темы, указаны методические рекомендации и предоставлены интерактивные чертежи по каждой из тем (Рисунок 1).

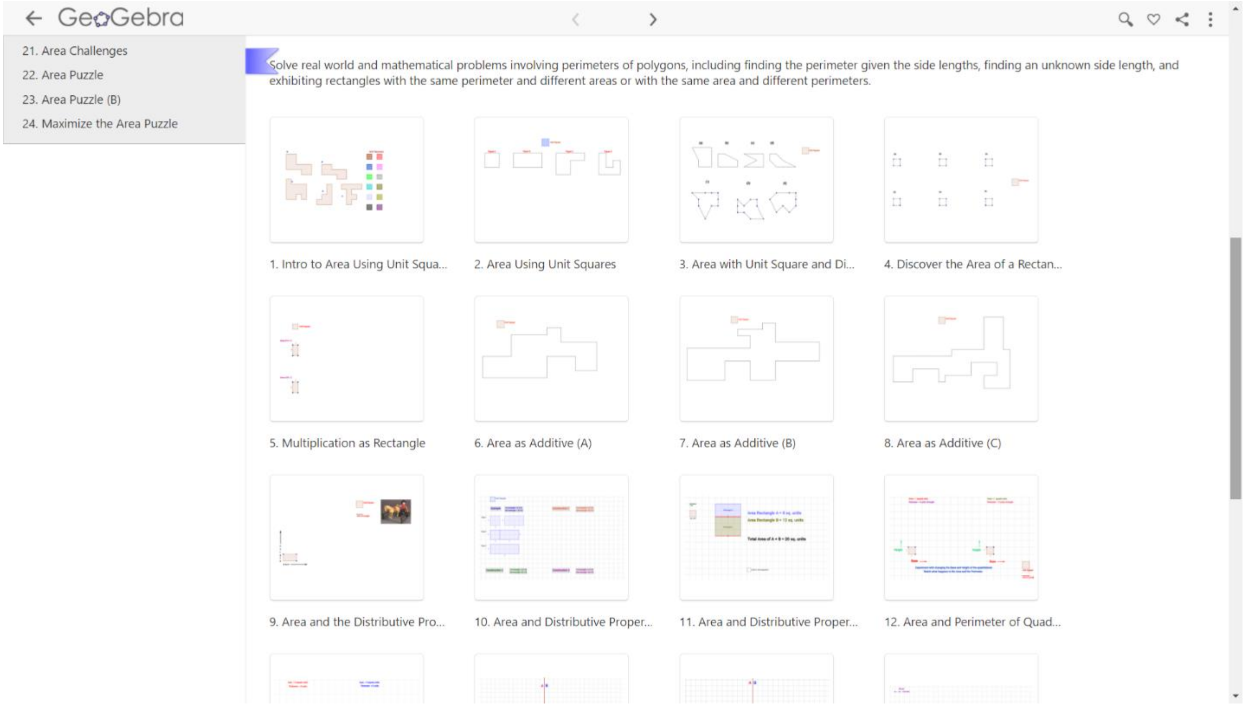

Рисунок 1: Интерактивный учебник Института GeoGebra в штате Айова

В рамках данного института были созданы виртуальные лаборатории [3], в таких лабораториях довольно удобно проводить математические эксперименты. Виртуальная лаборатория охватывает весь курс школьной математики, учебник достаточно удобно разбит на разные разделы с наличием гиперссылок и все чертежи анимированные, что позволяет наглядно продемонстрировать все задачи курса.

Институт в штате Айова является не единственным институтом в США, но, по нашему мнению, располагает наиболее интересными материалами для школьного курса математики.

В Европе сосредоточено наибольшее количество Институтов GeoGebra, включая и главный Институт (IGI). Они также занимаются изучением вопросов, связанных с реализацией математического образования в школе.

Ежегодно проводится международная конференция в Линце (Австрия). В рамках данной конференции представители различных институтов GeoGebra, включая студентов, преподавателей, исследователей, руководителей образовательных учреждений и партнеров со всего мира, делятся своим опытом, идеями, изучают и создают новейшие технологии, разрабатывают новые способы преподавания и обучения и планируют будущее в развитии динамической геометрии.

В рамках конференции расширяются возможности: семинаров-практикумов по учебным материалам GeoGebra, научных публикаций, живых и интерактивных виртуальных занятий с преподавателями и студентами, общения с лидерами образования, партнерами из правительства и предприятий. Всё это влияет на формирование математического образования во всём мире. Такое мощное сообщество GeoGebra позволяет диктовать современное развитие и видение системы динамической геометрии и её использование в школах многих стран.

Рассмотрим статьи [4, 5], в которых обсуждается опыт использования GeoGebra в ряде зарубежных школ. Из представленных авторами результатов исследования следует, что существует значительная разница между средними значениями баллов учащихся за тест по окончанию изучения материала в пользу группы, которая изучала материал с GeoGebra. Кроме того, по результатам исследования получилось, что компьютерное обучение в дополнение к традиционному обучению в классе является более эффективным, чем просто традиционное обучение. Результаты этого исследования согласуются с исследованиями у других иностранных учёных, которые выделили положительное влияние использования математического программного обеспечения в обучении. Данные исследования наглядно демонстрируют учебную эффективность GeoGebra по сравнению с традиционными средствами обучения. Это исследование дает альтернативу учителям использовать математическое программное обеспечение СДГ в качестве инструмента в своей учебной деятельности. Учащиеся могут загрузить это программное обеспечение и использовать его у себя дома.

Рассмотрим ситуацию в России. На данный момент есть два официально аккредитованных региональных института GeoGebra. Один из них функционирует на базе Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева и базируется в институте математики, физики и информатики этого вуза. Второй – находится в г. Казани, открыт по инициативе учителей математики. В рамках данных институтов проводится обучение учителей, проходят семинары и конференции.

Оба эти института оказывают достаточно большое влияние на развитие математического образования с применением компьютерных программ динамической геометрии в своих регионах.

В частности, Сибирский Институт GeoGebra разработал интерактивные учебники, проводит курсы повышения квалификации и ввёл магистерские программы по профилю Информационные технологии в математическом образовании, которые в большей части базируются на использовании систем динамической геометрии в образовательном процессе.

Кроме того, стоит отметить закон «Об образовании в Российской Федерации» [6] и внедрение Федерального образовательного стандарта второго поколения [7].

В новом федеральном стандарте одной из основных задач изучения геометрии в школе ставят развитие пространственного и логического мышления [8], которое должно формироваться через систематическое изучение свойств геометрических фигур, как на плоскости, так и в пространстве. Кроме того, очень важно научить применять эти свойства при решении позиционных и метрических задач.

Стоит отметить, что в Федеральном стандарте среднего образования в разделе 9.3, который посвящён математике и информатике, указано, что требования к предметным результатам освоения базового курса математики должны отражать использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств и владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач [7].

В законе об образовании в РФ указано, что школы обязаны обучать учеников с использованием информационно-коммуникационных технологий, а все учебные пособия обязаны быть оснащены электронными версиями.

Таким образом, два основных документа, которые определяют цели и задачи обучения, указывают на то, что использование специальных компьютерных программ является обязательным при изучении школьного курса математики.

1.2 Конструктивные, вычислительные и анимационные возможности систем динамической геометрии как средства обучения школьников решению задач по стереометрии.

Существует множество различных программ СДГ. На данный момент их более 50. Наибольшую популярность в России имеют 4 программы: «Живая математика», GeoGebra, GEONExT и 1С: Математический конструктор. Каждая из этих программ имеет как свои преимущества, так и свои недостатки.

В качестве системы динамической геометрии в данной работе рассмотрим программу GeoGebra.

Название программы происходит от двух слов GEOmetry и alGEBRA. Само название программы говорит о том, что она разработана для полного цикла изучения школьной математики, таким образом, она полностью удовлетворяет ФГОС, как программа предназначения для использования на уроках.

После установки и запуска программы под управлением ОС Windows откроется окно, как изображено на рисунке 2.

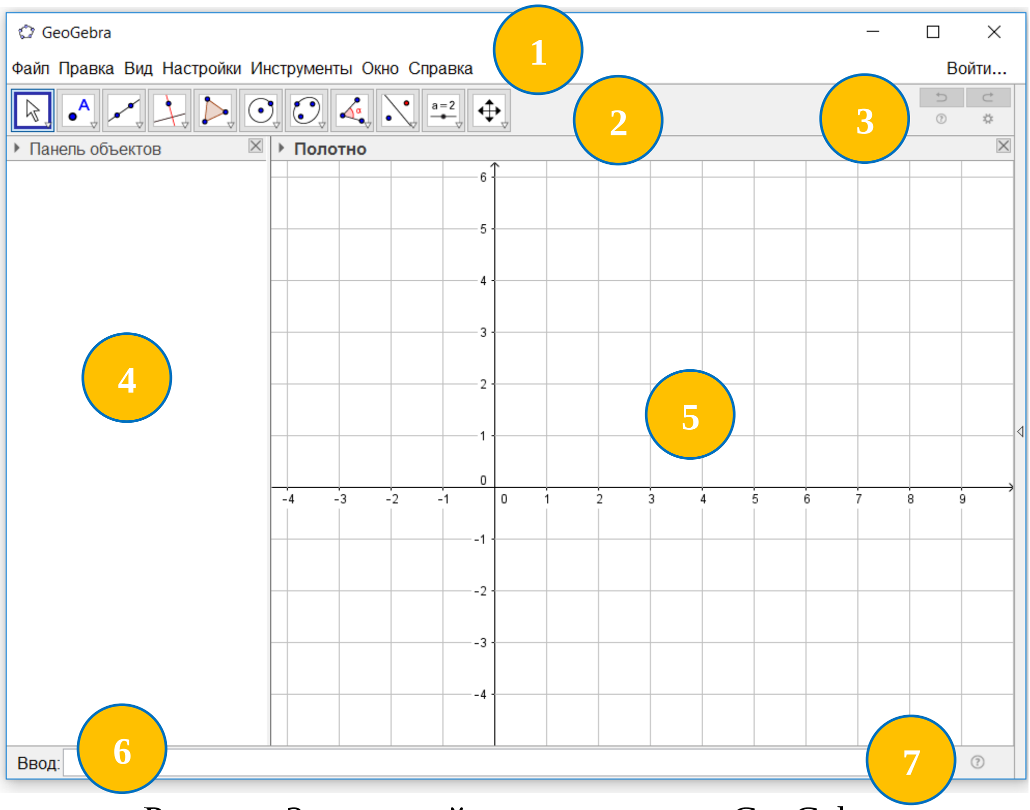

Рисунок 2: внешний вид программы GeoGebra

Интерфейс программы состоит из следующих элементов:

1. Главное меню. Данное меню не сильно отличается от главного меню во многих других программах;
2. Панель инструментов. Данная панель напрямую зависит от рабочей области. На рисунке изображена панель инструментов для работы с двумерным пространством;
3. Дополнительные кнопки (отмена, повтор, справка по программе и настройка);
4. Панель объектов. Её ещё называют областью алгебры. Все объекты, которые создаются для построения чертежа будут отображены здесь в качестве формул или значений.
5. Полотно. В некоторых источниках литературы его также называют областью геометрии и графическим представлением. В данной области нужно строить все чертежи.

6. Строка ввода. Эта область позволяет вручную вводить различные функции, формулы, уравнения и они моментально будут отображены в панели объектов и на полотне.

В данной работе будут рассмотрены только задачи по стереометрии, поэтому основным видом мы выберем «Полотно 3D». Для того, чтобы открыть «Полотно 3D» необходимо в главном меню выбрать пункт «Вид» и нажать на подпункт «Полотно 3D». После выполнения этих действий мы должны получить внешний вид аналогичный рисунку 3.

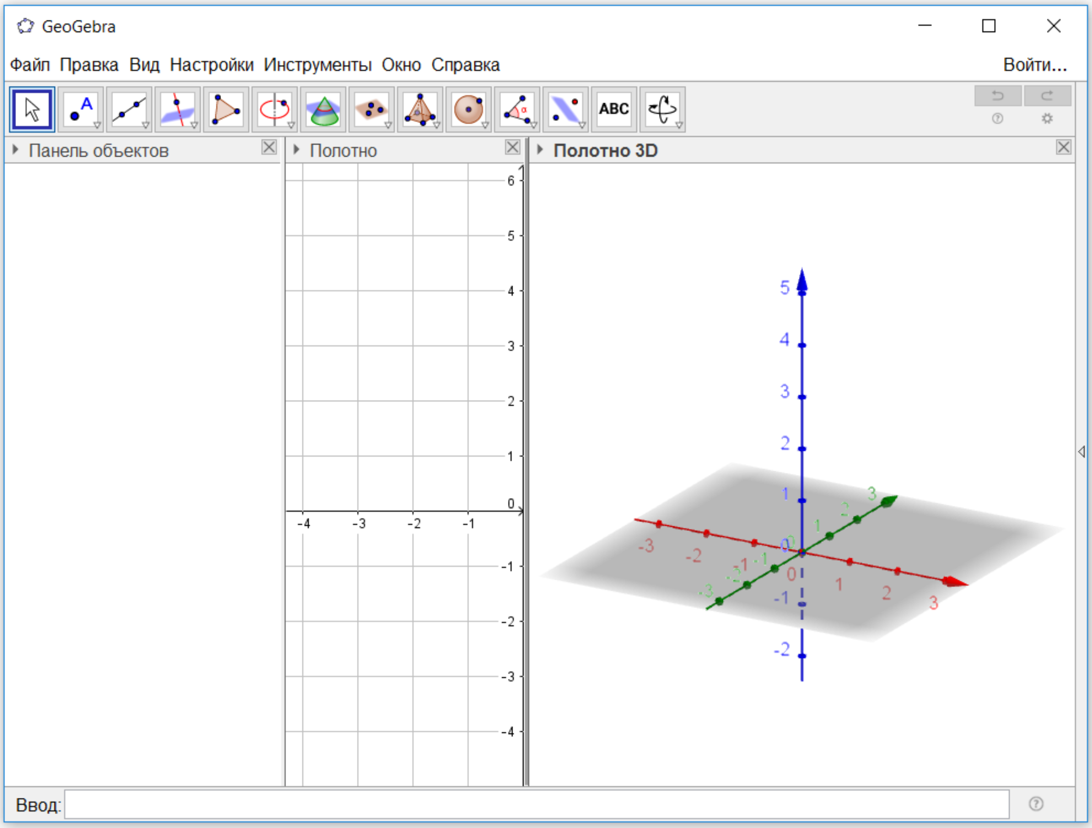

Рисунок 3: внешний вид окна «Полотно 3D»

Стоит отметить, что при изменении области графического представления, автоматически будет изменяться и панель инструментов.

Рассмотрим подробнее панель инструментов для двумерного и трехмерного построения.

На рисунке 4 изображена панель инструментов для работы с Полотном 2D. Каждый из пунктов данной панели включает в себя группу инструментов одного типа. Раскрыть каждую группу можно, нажав левой кнопкой мыши на треугольник в правом нижнем углу. Рассмотрим подробнее каждую из групп данной панели.

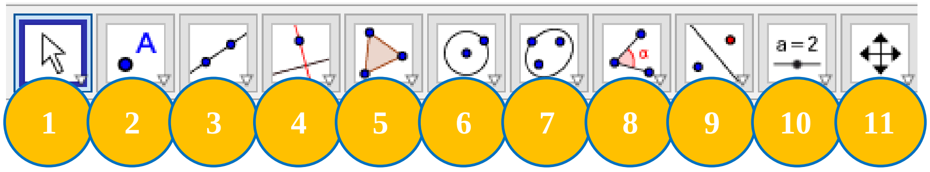

Рисунок 4: Панель инструментов для полотна 2D

Группа 1: Курсор

Данная группа инструментов предназначена для изменения положения или рисования от руки.

1. Перемещать

Выбрав этот инструмент и объект на полотне, можно зажав левую кнопку мыши, перемещать объекты по полю.

2. Вращение относительно точки

Данный инструмент необходим для вращения элементов относительно выбранной точки.

3. Фигура от руки

Выбирая этот инструмент можно рисовать произвольные фигуры от руки, при этом после завершения рисунка полученная фигура будет преобразована в функцию, а если это невозможно, то останется фигурой от руки.

4. Карандаш

Данный инструмент позволяет рисовать произвольные фигуры без преобразования.

Группа 2: Точки

1. Точка

Используя этот инструмент можно поставить точку в произвольное место. Точку можно поставить разными способами, если поставить на объект, то данная точка автоматически будет к нему привязана, но стоит учитывать, что если нажать на многоугольник, то она будет привязана только к одной из сторон объекта. Если точку поставить на пересечение двух объектов, то она автоматически будет привязана к месту пересечения.

2. Точка на объекте

Данный инструмент позволяет поставить точку, которая будет привязана к конкретной области. Если точку поставить в свободное место, то она будет привязана ко всей плоскости. Если точку поставить внутрь многоугольника, то она будет привязана ко внутренней области многоугольника. Если точку поставить на сторону многоугольника, то она будет привязана ко всем сторонам многоугольника.

3. Прикрепить / Снять точку

Этот инструмент позволяет либо открепить, ранее прикреплённую точку, с объекта, либо прикрепить свободную точку к объекту.

4. Пересечение двух объектов

Данный инструмент можно использовать для того, чтобы найти точки пересечения двух объектов. Если объекты имеют общие точки пересечения, то выбрав два объекта этим инструментом, мы получим все точки пересечения.

5. Середина или центр

Используя данный инструмент можно найти точку, которая является центром окружности или любой другой коники и середину отрезка.

6. Комплексное число

Данный инструмент в качестве координат точки использует комплексные числа.

7. Extremum

Позволяет вычислять экстремумы функции.

8. Roots

Позволяет отметить корни функции (точки пересечения с осью Ox).

Группа 3: Прямые линии

1. Прямая по двум точкам

Данный инструмент позволяет построить прямую. Прямая будет не ограничена в обе стороны. Для построения прямой нужно указать две точки, либо установить эти точки (одну из них) данным инструментом.

2. Отрезок по двум точкам

Данный инструмент позволяет построить отрезок по двум точка, он работает аналогично предыдущему инструменту.

3. Отрезок заданной длины

Используя этот инструмент, необходимо указать точку и в появившемся окне указать длину отрезка.

4. Луч по двум точкам

Позволяет построить луч, по двум отрезкам. Работает аналогично инструменту «Прямая по двум точкам». Луч будет бесконечен в сторону второй точки.

5. Ломаная

Данный инструмент позволяет построить ломанную линию. Для этого необходимо просто нажимать на различные точки, либо ставить точки этим инструментом. Последняя точка ломанной обязательно должна быть соединена с первой, но линия, которая должна быть между ними, построена не будет.

6. Вектор по двум точкам

Данный инструмент работает аналогично отрезку по двум точкам, но вторая точка задаёт направление вектора.

7. Отложить вектор

Позволяет отложить вектор по ранее построенному.

Группа 4: Специальные линии

1. Перпендикулярная прямая.

Данный инструмент позволяет построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную прямой, уже построенной на полотне.

2. Параллельная прямая.

Используя этот инструмент, можно построить прямую, проходящую через точку и параллельную прямой, уже построенной на плоскости

3. Срединный перпендикуляр.

Если данным инструментом выбрать какой-либо отрезок на плоскости, либо две точки на плоскости, то он построит срединный перпендикуляр.

4. Биссектриса угла.

Данный инструмент строит биссектрису угла. Угол можно задать либо двумя прямыми, либо двумя отрезками, либо тремя точками.

5. Касательная.

Позволяет построить все касательные к указанной кривой. Для построения касательной нужно указать кривую и точку, через которую будут проходить касательные.

6. Поляра и диаметр.

Данный инструмент позволяет строить сопряжённый диаметр, диаметр и поляру.

7. Аппроксимация.

Данный инструмент позволяет построить прямую линию, которая будет строиться за счёт аппроксимации нескольких точек.

8. Локус.

Позволяет строить кривую, которая является зависимостью двух точек.

Группа 5: Многоугольники

1. Многоугольник

Для построения многоугольника, нужно указать несколько точек, аналогично построению ломанной, и замкнуть последнюю точку с первой. Но в отличии от ломанной, последний отрезок тоже будет построен.

2. Правильный многоугольник

Для построения правильного многоугольника, указываются две точки, после чего необходимо в появившемся окне ввести количество вершин многоугольника.

3. Жёсткий многоугольник

После построения данного многоугольника у него будут доступны только две точки. При этом одна из этих точек позволяет только перемещать его, а втора поворачивать, относительно первой токи.

4. Векторный многоугольник

При построении данного многоугольника, все его стороны задаются как вектора, относительно начальной точки.

Группа 6: Окружности и дуги

1. Окружность по центру и точке

Используя данный инструмент необходимо указать две точки, первая точка является центром окружности, а вторая точка должна лежать на линии окружности.

2. Окружность по центру и радиусу

В данном случае указав центр окружности откроется окно, в котором необходимо ввести значение для радиуса.

3. Циркуль

Циркуль позволяет строить окружность, измерив расстояние между двумя точками или длину отрезка, после чего нужно нажать на точку, которая будет центром новой окружности.

4. Окружность по трём точкам

Если выбрать три произвольные точки, то данный инструмент проведёт окружность, проходящую через каждую из заданных точек.

5. Полуокружность по двум точкам

Если указать две точки, то будет построена полуокружность. При этом указанные две точки будут являться началом и концом диаметра полуокружности.

6. Дуга по центру и двум точкам

Данный инструмент позволяет построить дугу. Первая точка является центром окружности, а две другие началом и концом дуги окружности. Сама окружность построена не будет.

7. Дуга по трём точкам

Для данного инструмента нужно указать три точки, которые будут лежать на окружности. При этом первая точка является началом дуги, а третья её концом.

8. Сектор по центру и двум точкам

Данный инструмент работает аналогично дуге по центру и двум точкам, только вместо дуги, будет построен сектор.

9. Сектор по трём точкам

Данный инструмент позволяет построить сектор указав ему три точки, которые лежат на окружности. Первая и последняя точки определяют длину дуги сектора, центр окружности строится автоматически.

Группа 7: Конические сечения

1. Эллипс

Для построения эллипса необходимо указать три точки. Первые две точки являются фокусами, а третья точка должна принадлежать линии эллипса.

2. Гипербола

Построение гиперболы происходит аналогично построению эллипса. Указываются две точки, которые являются фокусами, а третья точка должна лежать на линии гиперболы.

3. Парабола

Для построения параболы нужно указать директрису и фокус параболы.

4. Коника по пяти точкам

В программу встроена функция, которая позволяет по указанным пяти точкам однозначно определить кривую второго порядка.

Группа 8: Измерения

1. Угол

Используя данный инструмент, можно построить угол. По умолчанию угол задаётся указанием трёх последовательных точек против часовой стрелки, но можно использовать отрезок и точку.

2. Угол заданной величины

Данный инструмент позволяет построить угол, указав значение для третьей точки. Значение можно указать как в радианах, так и в градусах.

3. Расстояние или длина

Данный инструмент позволяет вычислить значение расстояния или длины, для указанных объектов.

4. Площадь

Данный инструмент позволяет вычислить значение площади, для указанных объектов. Если многоугольник построен отрезками, а не инструментом из группы Многоугольники, то для вычисления площади необходимо поочерёдно выбрать все его вершины.

5. Наклон прямой

Позволяет вывести наклон прямой в указанной точке.

6. Создать список

Данный инструмент позволяет создать список из выделенных объектов. Список вноситься в специальную таблицу.

7. Отношения объектов

Позволяет вывести во всплывающем окне информацию, по отношению двух объектов. Например, идентичные они или нет.

8. Исследователь функций

Данный инструмент анализирует функцию на указанном отрезке. Позволяет вывести такую информацию как корни, экстремумы и т.д.

Группа 9: Преобразования

1. Отражения относительно прямой

Данный инструмент позволяет построить образ указанного объекта, относительно указанной прямой, путём осевой симметрии.

2. Отражения относительно точки

Данный инструмент позволяет построить образ указанного объекта, относительно точки, путём центральной симметрии.

3. Отражение относительно окружности

Данный инструмент позволяет построить образ указанного объекта, относительно окружности, путём симметрии относительно этой окружности.

4. Поворот вокруг точки на угол

Данный инструмент позволяет построить образ указанного объекта, относительно точки, путём поворота объекта на указанный угол.

5. Параллельный перенос по вектору

Данный инструмент позволяет построить образ указанного объекта, путём его переноса на указанный вектор.

6. Гомотетия относительно точки

Данный инструмент позволяет построить образ указанного объекта, относительно точки, которая является центром гомотетии и указать коэффициент гомотетии.

Группа 10: Действия над объектами

1. Ползунок

Данный инструмент позволяет добавить на экран инструмент «Ползунок». Это горизонтальная линия с точкой. При этом для ползунка указываются начальные, конечные значения и шаг. При движении ползунка его текущее значение изменяется с указанным шагам. Значение не может быть меньше начально и не может быть больше конечного.

2. Текст

Данный инструмент позволяет выводит текст на полотно. В качестве текста можно вставлять формулы с динамическими переменными, значения которых будут меняться в зависимости от условий.

3. Изображение

Данный инструмент позволяет добавить изображение одного из форматов: bmp, jpg, png, gif и tif. Для изображения обязательно задаётся точка, которая является нижней левой границей.

4. Кнопка

Добавляет кнопку на полотно. Кнопка может обрабатывать различные действия. Для кнопки можно написать программу на языке GeoGebraScript

5. Флажок отображения/скрытия объектов

Достаточно интересный и часто используемый инструмент. После установки флажка можно настроить зависимости таким образом, чтобы при включении/выключении флажка изменялось условие видимости объектов на полотне.

6. Окно ввода

Позволяет добавить на форму специальное окно, в которое можно вводить числовые значения.

Группа 11: Общие

1. Переместить чертёж

Выбрав данный инструмент можно будет изменять область отображения (смещать координатную плоскость).

2. Увеличить
3. Уменьшить

Данные инструменты позволяют изменять масштаб.

4. Показать/скрыть объект

Данный инструмент позволяет менять отображение объекта. Довольно удобно его использовать, когда нужно скрыть выделенную группу объектов.

5. Показать/скрыть обозначения

Данный инструмент позволяет менять отображение объекта. Довольно удобно его использовать, когда нужно скрыть выделенную группу объектов.

6. Копировать стиль

Если есть необходимость в применении одинакового стиля к нескольким объектам, то при помощи этого инструмента можно достаточно быстро настроить одинаковые стили для разных объектов.

7. Удалить объект

Если выбрать данный инструмент, то при нажатии левой кнопки мыши будет происходит удаление объектов.

Если мы выберем в качестве полотна вид «Полотно 3D», то панель инструментов изменится и примет вид, как на рисунке 5.

Рисунок 5: Панель инструментов для полотна 3D

Рассмотрим какие дополнительные инструменты были добавлены при использовании Полотна 3D.

Группа 1: Курсор

Данная группа теперь содержит только один элемент. Это инструмент «Перемещать».

Группа 2: Точки

В данной группе были убраны элементы: Комплексное число, Extremum, Roots.

Группа 3: Прямые линии

Из данной группы убран инструмент ломанная.

Группа 4: Специальные линии

В данной группе убраны инструменты: перпендикулярная прямая и срединный перпендикуляр.

Вместо перпендикулярной прямой используется инструмент «Perpendicular Line», который позволяет построить перпендикулярную прямую, опущенную из точки на плоскость.

Группа 5: Многоугольники

Из данной группы убраны все элементы кроме, самого многоугольника. Работает он аналогично описанному ранее.

Группа 6: Окружности и дуги

В данной группе инструмент «Окружность по двум точкам» заменена на инструмент «Окружность по точке и оси». Для построения данной окружности необходимо выбрать ось, а затем указать точку, которая должна принадлежать окружности.

Кроме этого, был добавлен инструмент «Окружность с центром, радиусом и направлением». Для данного инструмента нужно указать точку (центр окружности), вектор (который задаст направление) и радиус.

Группа 7: Секущая плоскость

Данная группа полностью изменена. Вместо кривых второго порядка в данной группе находится один инструмент, он позволяет найти полученное сечение любого объекта и плоскости.

Группа 8: Плоскость

1. Плоскость через 3 точки

Данный инструмент позволяет построить плоскость через 3 произвольные точки.

2. Плоскость

Данный инструмент позволяет построить плоскость несколькими способами: через три точки, через точку и прямую, через две прямые, через многоугольник.

3. Перпендикулярная плоскость

Данный инструмент позволяет построить плоскость, которая будет перпендикулярна данной прямой и проходить через точку. Для построения необходимо указать прямую и точку.

4. Параллельная плоскость

Данный инструмент позволяет построить плоскость параллельно данной плоскости и проходящей через точку.

Группа 9: Тела

1. Пирамида

Для построения пирамиды необходимо указать (или построить) многоугольник, а потом указать (или построить) вершину.

2. Призма

Призма строится аналогично пирамиде. Указывается многоугольник, который должен быть в основании, а потом указывается точка, которая является первой вершиной верхнего многоугольника.

3. Выдавить пирамиду или конус

Данный инструмент позволяет по выбранному многоугольнику или окружности построить пирамиду или конус. Для этого, после того как фигура будет выбрана, необходимо вытянуть её в любую сторону.

4. Выдавить призму или цилиндр

Данный инструмент работает аналогично предыдущему, только в результате будет получена призма или цилиндр.

5. Конус

Данный инструмент позволяет строить конус аналогично пирамиде.

6. Цилиндр

Этот инструмент работает аналогично призме.

7. Tetrahedron

По указанным двум точкам будет построен правильный тетраэдр.

8. Куб

Данный инструмент строит куб по двум точкам.

9. Развёртка

Этот инструмент позволяет построит развёртку фигуры. Например, можно построить развёртку куба и потом, через использование ползунка, его «сворачивать» и разворачивать.

Группа 10: Сфера

1. Сфера по центру и точке

Данный инструмент позволяет построить сферу, используя две точки. Одна точка должна быть центром сферы, а вторая должна лежать на поверхности сферы.

2. Сфера по центру и радиусу

Используя этот инструмент достаточно указать центр сферы и ввести радиус с клавиатуры.

Группа 11: Измерения

В данном разделе остались инструменты: угол, расстояние, площадь. И был добавлен инструмент объём, который позволяет вычислить объём фигуры, просто нажав на неё.

Группа 12: Преобразования

Были добавлены два инструмента: «Отражение относительно плоскости» и «Вращение вокруг прямой». Но убран инструмент «Отражение относительно окружности».

Группа 13: Действия над объектами

Из всех инструментов здесь оставили только инструмент «Текст».

Группа 14: Общие

В эту группу было добавлено два инструмента.

1. Вращать чертёж

Данный инструмент позволяет поворачивать чертёж левой кнопкой мыши, для более удобного просмотра чертежа с разных углов обзора.

2. Нормально к

Этот инструмент позволяет повернуть обзор под прямым углом к указанной плоскости или прямой.

Таким образом стандартный набор инструментов в программе GeoGebra позволяет выполнять все необходимые построения для школьного курса геометрии, включая построения в пространстве. При этом стоит отметить, что все чертежи являются динамическими и их можно изменять в любой момент времени.

В свою очередь GeoGebra является единственной свободно распространяемой кроссплатформенной системой, которая позволяет строить чертежи на плоскости и в пространстве, при это сохраняются все возможности построения одной мышкой, без дополнительного ввода данных с клавиатуры.

Кроме того, GeoGebra поддерживает технологию движущихся изображений, что в свою очередь даёт широкие возможности в создании анимации. Анимация в GeoGebra тесно связана с построением динамических чертежей [7-8]. Особенностью динамического чертежа является то, что его можно изменять мышкой, через изменение числовых параметров, с помощью ползунков и флажков.

Анимация может быть не только «ручной», но и автоматической. Автоматическую анимацию можно настраивать различными способами, например, выстраивать зависимости одного объекта от другого, устанавливать условия видимости и настраивать время анимации.

Таким образом GeoGebra – это не просто красочная иллюстрация к уроку математики, это прежде всего мощный инструмент, который позволяет организовать исследовательскую работу учащихся. Используя GeoGebra множество тем из школьного курса математики получиться превратить в небольшую исследовательскую работу, которую смогут провести ученик за небольшое время на своём уроке. Можно выдвинуть гипотезу и при помощи построений и динамических возможностей программы проверить её. Такой момент урока мы будем называть - компьютерный эксперимент. Такие компьютерные эксперименты с использованием программы GeoGebra на уроках математики могут помочь учащимся лучше усвоить материал и развить пространственное мышление.

1.3 Основные дидактические принципы отбора содержания обучения школьников решению стереометрических задач на основе использования систем динамической геометрии.

Принципы и методы отбора и построения содержания обучения на общетеоретическом уровне исследованы многими учёными. Так В.И. Загвязинский и Л.И. Гриценко [11] выделяют принципы: изоморфности содержания дисциплины содержанию соответствующей науки; минимизации в отборе содержания; исторический; логический; принцип развёртывания содержания учебного предмета соответственно закономерностям формирования познавательных возможностей субъекта учения.

В диссертации А.Г. Мордковича [12] применительно к математике сформулированы дополнительно три критерия (принципы): критерий соответствия целям обучения; критерий дидактической изоморфности и критерий минимизации. Полностью соглашаясь с перечисленными выше принципами, мы сформулируем дополнительно ещё четыре дидактических положения (принципа), связанных с отбором содержания обучения школьников решению стереометрических задач в связи с появлением нового средства обучения, каковым является система динамической геометрии.

Первое положение. Согласно первому принципу отбора содержания, который мы относим к основным принципам, необходимо осуществлять отбор таких задач стереометрии, при решении которых может быть максимально использована возможность применения системы динамической геометрии, как средства для проведения компьютерного эксперимента и исследования. Назовём это положение «*принципом компьютерного эксперимента при отборе стереометрических задач*». Ниже будут приведены примеры реализации этого принципа.

Второе положение связано с тем, что при отборе стереометрических задач учителю желательно ориентироваться на использование такой уникальной возможности системы динамической геометрии, как анимация. Не все ученики имеют развитое пространственное воображение, которое позволяет им «увидеть» на статическом плоском чертеже пространственную конфигурацию из более «удачной» точки, без затруднений выполнить дополнительное построение в пространстве. Многим из них поможет изменение ракурса чертежа, что в условиях динамического чертежа реализуется соответствующими опциями или перемещением ползунка. Назовём это положение «*принципом приоритета анимации при отборе стереометрических задач*».

Третье положение связано ещё с одной удивительной возможностью системы динамической геометрии – оперативно выполнять необходимые измерения (длина отрезка, расстояние между объектами, величина угла, площадь и периметр плоской фигуры, площадь поверхности и объём тела и т.д.). Всё это позволяет ученику проконтролировать найденное им решение, сверить полученный результат с тем, что указан в ответе. Такую дидактическую процедуру иногда называют верификацией. Назовём это положение «*принципом верификации при отборе стереометрических задач*».

Четвёртое положение ориентирует учителя на такой выбор стереометрических задач, чертёж-иллюстрацию для которых ученик способен выполнить на рабочем поле системы динамической геометрии самостоятельно. Связано это с тем, что чрезмерное употребление заранее подготовленных учителем динамических 3D чертежей в конечном счёте будет не способствовать, а тормозить развитие пространственного воображения учеников. Необходимо обучать их умению самостоятельно создавать GG-файлы, что будет, безусловно, крайне полезно тем, кто это делает. О поддержке этого тезиса сказано и в профессиональном стандарте педагога [13, стр. 17]. Учителю математики рекомендуется «**совместно с обучающимся** (выделено нами) создавать и использовать наглядные представления математических объектов и процессов с помощью компьютерных инструментов на экране». Назовём это положение «*принципом самостоятельности при отборе стереометрических задач*».

Остановимся более подробно на основном дидактическом положении нашей методики – принципе компьютерного эксперимента при отборе стереометрических задач.

Для этого в первую очередь необходимо определиться с тем, что мы будем понимать под компьютерным экспериментом. Для выделения данного определения обратим внимание на то, как данная проблема была рассмотрена у авторов различных книг.

В учебниках школьного курса Информатики [14, 15] и научной литературе [16, 17] понятие компьютерного эксперимента раскрывается через понятие противоположное реальному эксперименту. Под реальным экспериментом понимается создание реальной модели объекта или процесса и непосредственное взаимодействие с ним в реальном мире. При этом во время компьютерного эксперимента предлагается воспользоваться виртуальной моделью объекта или процесса и взаимодействовать с ними по средствам устройств ввода и вывода.

Но есть и другие определения компьютерного эксперимента. Например, под компьютерным экспериментом может пониматься анализ данных полученных от различных сенсоров и определяющий вероятность событий. Или эксперимент над созданной математической моделью реального объекта, но выполненного на ЭВМ, при это в рамках эксперимента по одним параметрам будут вычисляться другие параметры и на основе вычислений будут сделаны выводы об объекте [18, 19].

В нашем понимании компьютерный эксперимент, а точнее эксперимент проводимый посредствам СДГ при обучении стереометрии (КЭ) – это особенная разновидность эксперимента, которая заключается в создании электронных динамических чертежей с целью изучения и поиска решения конкретной геометрической задачи.

Опираясь на наше определение, при компьютерном эксперименте будет создаваться информационная модель средствами СДГ, которая является виртуальным объектом, предназначенным заменить оригинальный чертёж, выполненный на листе бумаги. При этом в зависимости от конкретной учебной задачи оригиналом будет выступать либо абстрактный геометрический объект, который описан в условии задачи (понятия, теоремы), либо объект из реального мира (модель из дерева, металла, бумаги и т.д.), математической моделью которого является изучаемый геометрический объект.

Одним из главных достоинств компьютерного эксперимента является возможность проведения целого ряда исследований путём изменения идеи основной задачи или ранее доказанного утверждения через внесение каких-либо изменений в исходные данные, план эксперимента или в полученный результат. Причём такой подход изначально присущ каждому человеку, пытаться изменить входные данные, проверить, а что будет если...

В качестве примера такого эксперимента рассмотрим теорему Пифагора, и пример развития данной теоремы при проведении компьютерного эксперимента. Будем рассматривать зависимость площадей различных фигур, построенных на сторонах прямоугольного треугольника и попробуем рассмотреть данную задачу в пространстве.

Пример 1: Построить на сторонах произвольного треугольника квадраты, таким образом, чтобы они были во внешней части. Для каждого квадрата вычислите площадь и определите вид такого треугольника, для которого площадь одного из квадратов равна сумме площадей двух других квадратов.

Для проведения компьютерного эксперимента в СДГ GeoGebra по данному примеру нам нужно будет выполнить следующие этапы: анализ, построение, компьютерный эксперимент, вывод.

Анализ: на каждой из сторон произвольного треугольника построен квадрат таким образом, что сторона квадрата равна стороне треугольника, на которой он построен. Рассмотрим площадь квадрата, который построен на стороне, лежащей против угла ABC. Изменяя значение угла ABC, посмотрим, как будет меняться сумма двух оставшихся квадратов.

Построение (рисунок 6):

1. Построим произвольный треугольник ABC.
2. Используя инструмент «Угол» выделим угол ABC, это тот угол, значение которого мы будем изменять.
3. Построим на каждой из сторон треугольника квадраты, используя инструмент «Правильный многоугольник».
4. Используя инструмент «Площадь» вычислим площадь всех построенных квадратов.
5. Используя инструмент «Текст» добавим: многоугольник4=многоугольник2+многоугольник3

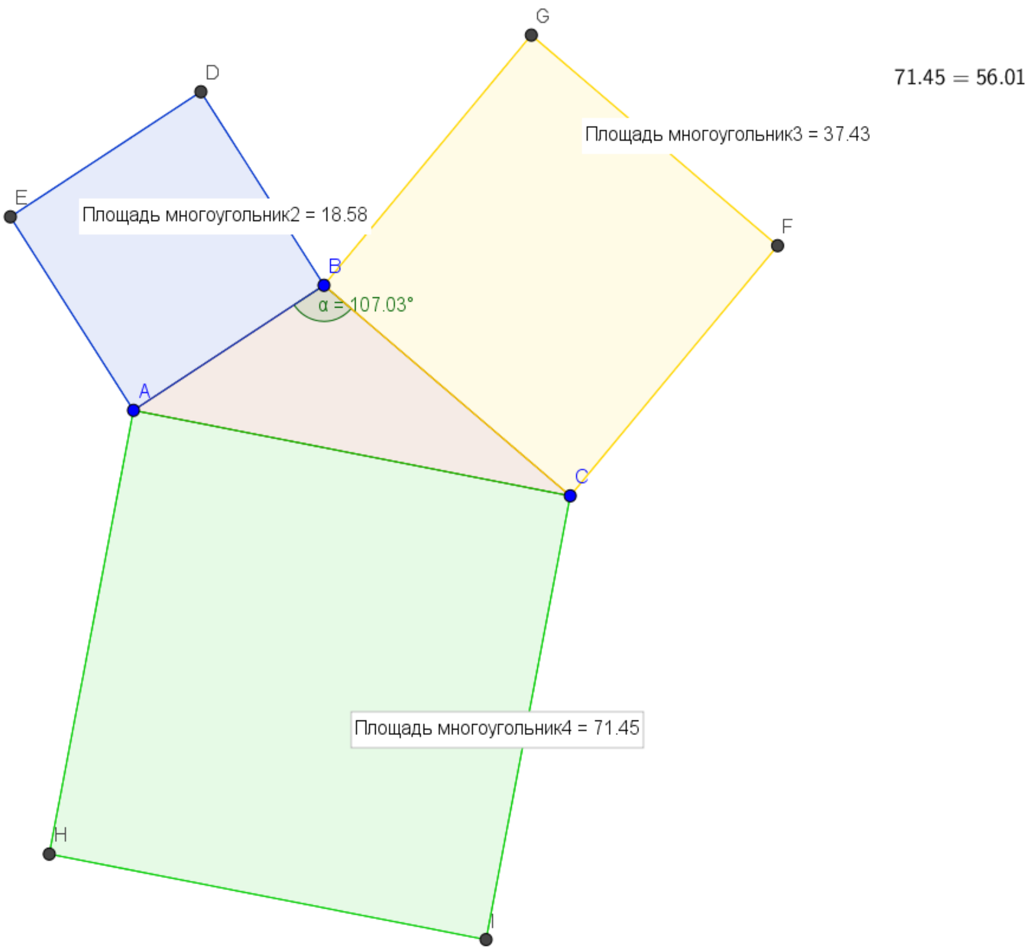

Рисунок 6: Чертёж для примера 1

Эксперимент: начнём двигать точку B таким образом, чтобы изменялась величина угла. Можно обратить внимание на то, что чем меньше становится угол, тем больше становиться его сумма. Чем больше значение угла ABC, тем меньше сумма. При достижении значения угла в 90 градусов, сумма площадей двух квадратов, будет равна площади третьего квадрата (рисунок 7).

Вывод: в прямоугольном треугольнике площадь квадрата, лежащего на гипотенузе, равна сумме площадей квадрата, лежащего на катетах. Кроме того, из эксперимента можно сделать и другие выводы. Например, то, что если площадь одного квадрата больше, чем сумма площадей двух других квадратов, то треугольник будет тупоугольным, а если сумма больше, то остроугольным.

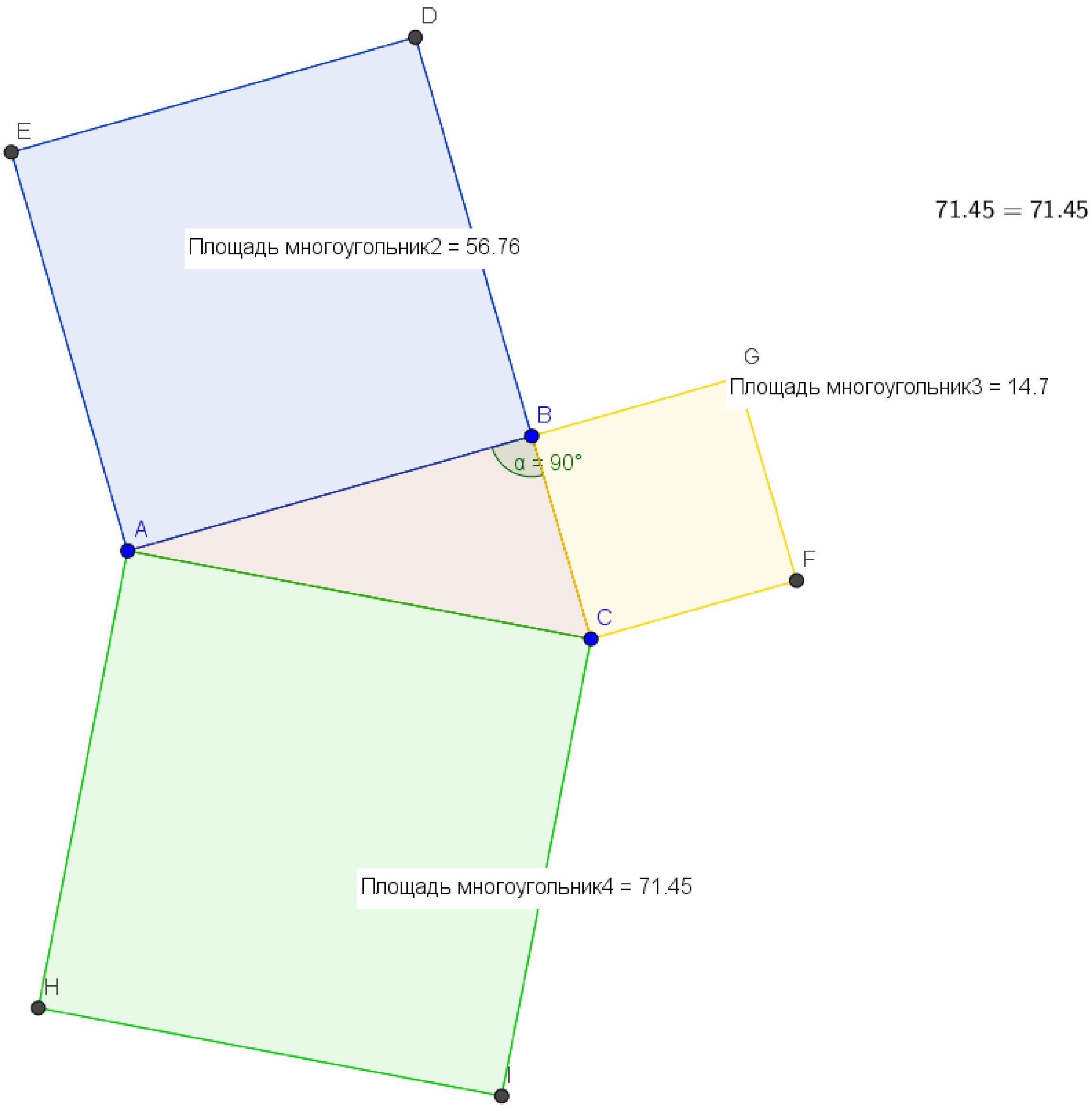

Рисунок 7: Результат эксперимента

Кроме того, самый главный вывод, который нужно будет обязательно сделать ученику, это то, что $c^2=a^2+b^2$. Таким образом можно подвести учащихся к открытию теоремы Пифагора.

Но многие учителя в школьном курсе геометрии останавливаются на этом, т.к. дальнейшее развитие данной темы довольно сложно и громоздко. Но с использованием СДГ GeoGebra это не так и компьютерный эксперимент становится доступным всем учащимся, рассмотрим другой пример.

Пример 2: Дан прямоугольный треугольник АВС с прямым углом В. Исследуйте, будет ли выполняться равенство площадей, описанное в педыдущем примере, для любых правильных многоугольников, построенных на сторонах данного прямоугольника и имеющих одинаковое количество вершин (рисунок 8).

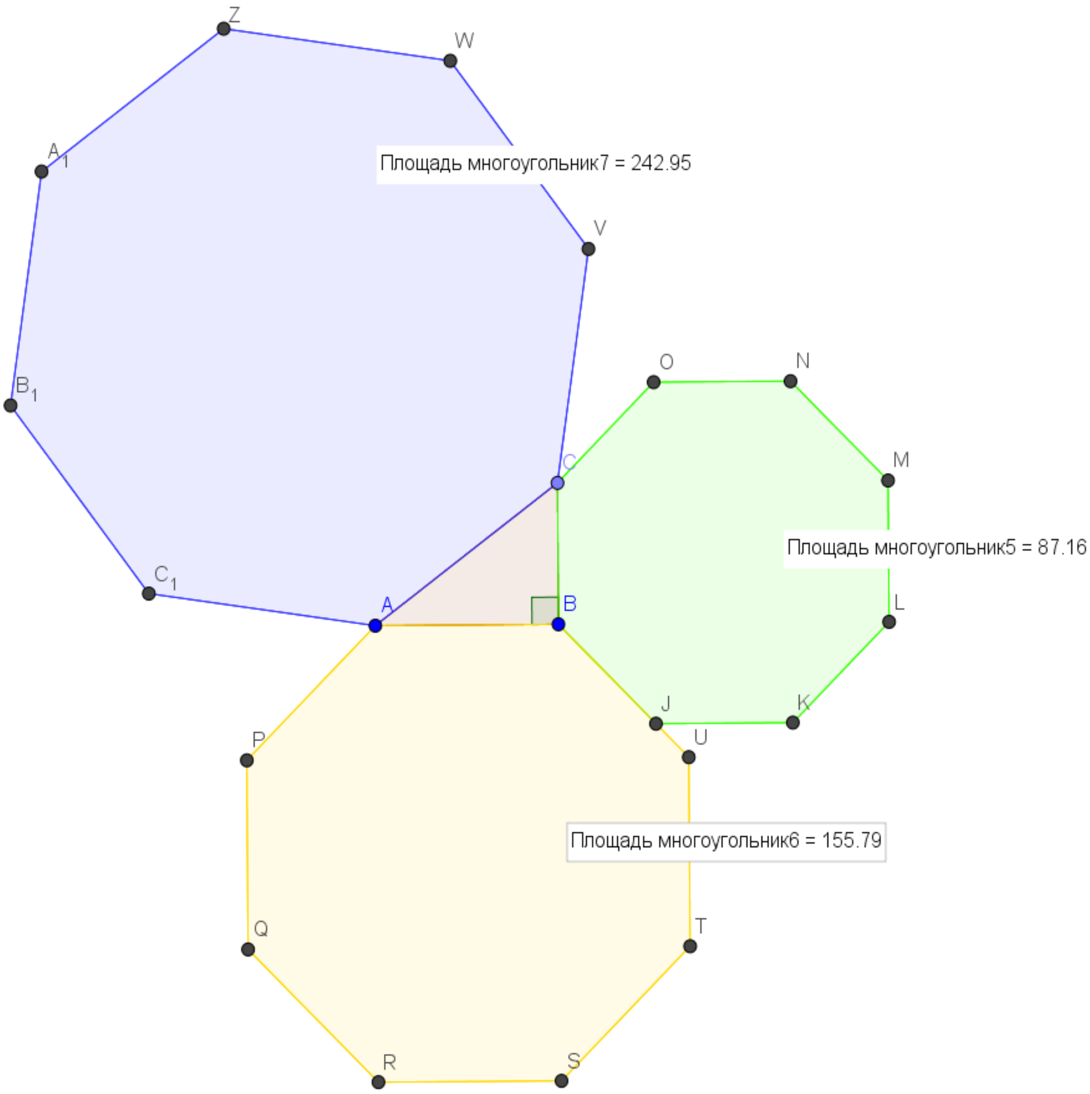

Рисунок 8: Иллюстрация для примера 2

Анализ: построим на сторонах прямоугольного треугольника правильные n-угольники, при этом n будет задаваться как параметр и должен изменяться в реальном времени. Добавим на область рисования текст с информацией о площадях многоугольников.

Построение:

1. Добавим элемент «Ползунок» с диапазоном от 3 до 25 и шагом 1.
2. Построим прямоугольный треугольник, с прямым углом B.
3. Обозначим прямой угол

4. Построим на каждой из сторон треугольника правильные многоугольники с количеством сторон равной значению ползунка, используя инструмент «Правильный многоугольник».
5. Используя инструмент «Площадь» вычислим площадь всех построенных правильных многоугольников.
6. Используя инструмент «Текст» добавим: многоугольник4=многоугольник2+многоугольник3

Компьютерный эксперимент: Изменяя параметр, отвечающий за количество вершин многоугольников, двигая «ползунок», обратим внимание на площади. Равенство сохраняется, независимо от того, сколько углов у правильных многогранников.

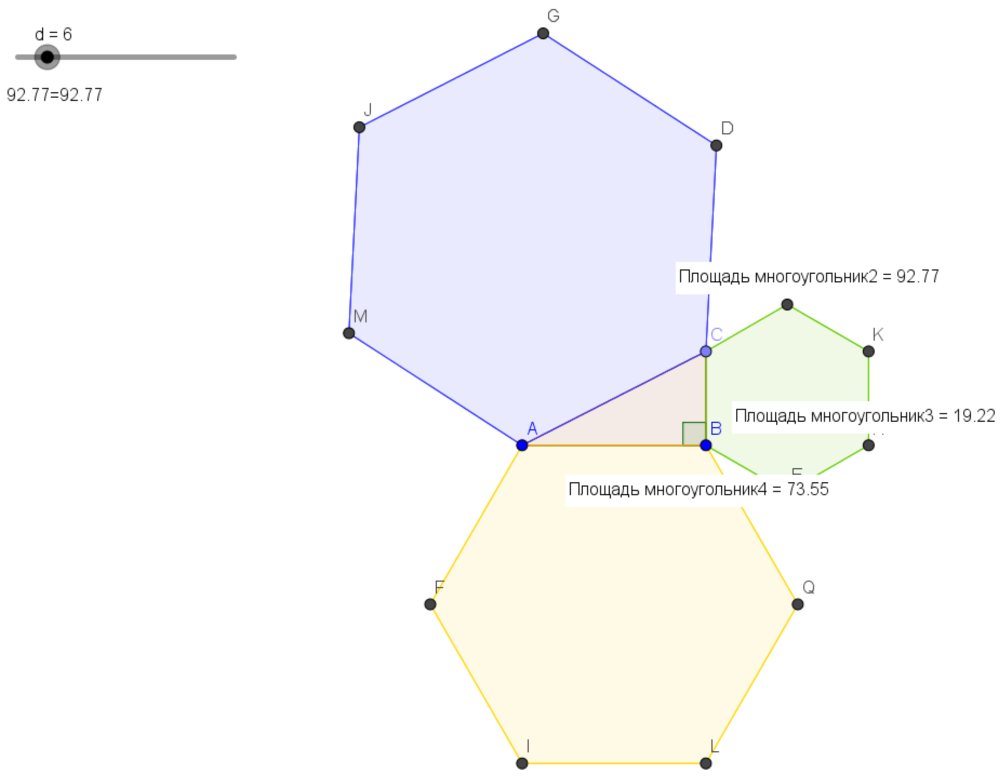

Рисунок 9: Построение

Вывод: проведённый нами эксперимент показывает, что равенство площадей правильных многоугольников, описанных в условии задания, сохраняется, независимо от количества вершин многоугольника. Таким образом можно получить обобщение теоремы Пифагора наглядно и доступно для всех учащихся.

Использование СДГ на уроке позволяет проводить компьютерный эксперимент и довольно быстро визуально подтверждать выдвинутую гипотезу. Рассмотрим ещё один пример, который является логическим продолжением из примера 2.

Пример 3: Дан прямоугольный треугольник АВС с прямым углом В. Исследуйте, будет ли выполняться равенство площадей, описанное в педыдущем примере, для произвольных подобных четырёхугольников, построенных на сторонах данного прямоугольника.

Анализ: для построения подобных фигур нам нужно, чтобы все углы у четырёхугольников совпадали, а стороны находились в равном соотношении.

Построение:

1. Построим прямоугольный треугольник, с прямым углом В.
2. Обозначим прямой угол
3. Построим на одной из сторон треугольника произвольный четырёхугольник.
4. Для построения подобных фигур нужно воспользоваться последовательно инструментами «Угол», «Луч», «Окружность по центру и радиусу». В качестве радиуса окружности следуют установить значение равное отношению одной стороны треугольника к другой, умноженное на сторону четырёхугольника.
5. Используя инструмент «Площадь» вычислим площадь всех построенных правильных многоугольников.
6. Используя инструмент «Текст» добавим: многоугольник4=многоугольник2+многоугольник3

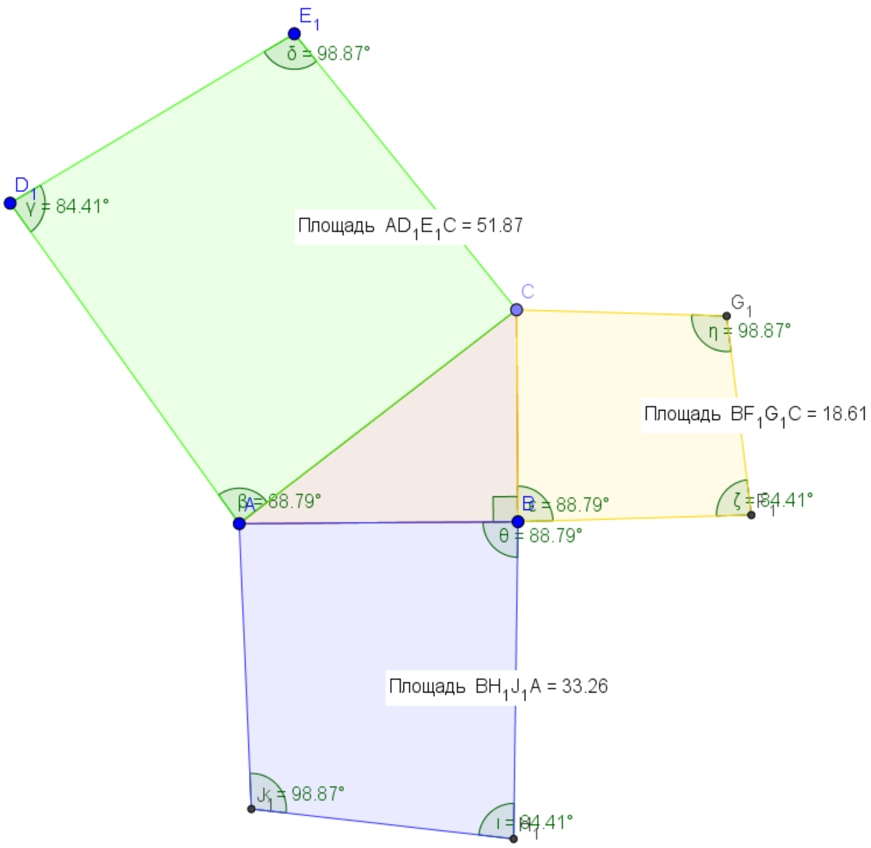

Рисунок 10: Чертёж для примера 3

Компьютерный эксперимент: Попробуем изменить тругольник. При изменении одной из сторон, автоматически будут меняться и четырёхугольники, при этом сумма площадей будет сохранена. Если изменять начальный четырёхугольник, то соотношение площадей тоже сохраняется.

Вывод: Теорема Пифагора применима не только к правильным многоугольникам, но может использоваться для площадей не правильных четырёхугольников, а, возможно, и для других фигур.

Рассмотрим ещё один пример, развития теоремы Пифагора. На этот раз перейдём в трёхмерное пространство и построим призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник.

Пример 4: Дана прямая призма, в основании которой прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Исследуйте, будет ли выполняться равенство объёмов параллелипипедов, построенных на боковых гранях данной призмы.

Анализ: для построения треугольной призмы построим вначале прямоугольный треугольник, а потом достроим его до прямой призмы. Параллелепипеды будем строить таким образом, чтобы сохранялось соотношение стороны, лежащей на треугольнике и высоты параллелепипеда, аналогично предыдущему примеру, либо чтобы высота параллелепипеда была равна стороне треугольника, на которой он лежит.

Построение:

1. Построим прямоугольный треугольник.
2. Используя инструмент «Выдавить призму», построим призму.
3. Опустим перпендикуляр к каждой из боковых граней призмы.
4. На каждом из перпендикуляров поставим по точке так, чтобы выполнялось условие из анализа.
5. Используя инструмент «Выдавить призму», построим параллелепипеды на каждой из сторон.
6. Используя инструмент «Объём», вычислим объём для каждого параллелепипеда.

Компьютерный эксперимент: Изменяя точки на сторонах параллелепипеда, будем смотреть за изменением объёмов фигур, но по эксперименту видно, что сумма объёмов двух параллелепипедов равна объёму третьего паралелепипеда.

Вывод: Теорема Пифагора применима и правильно работает для трёхмерного пространства.

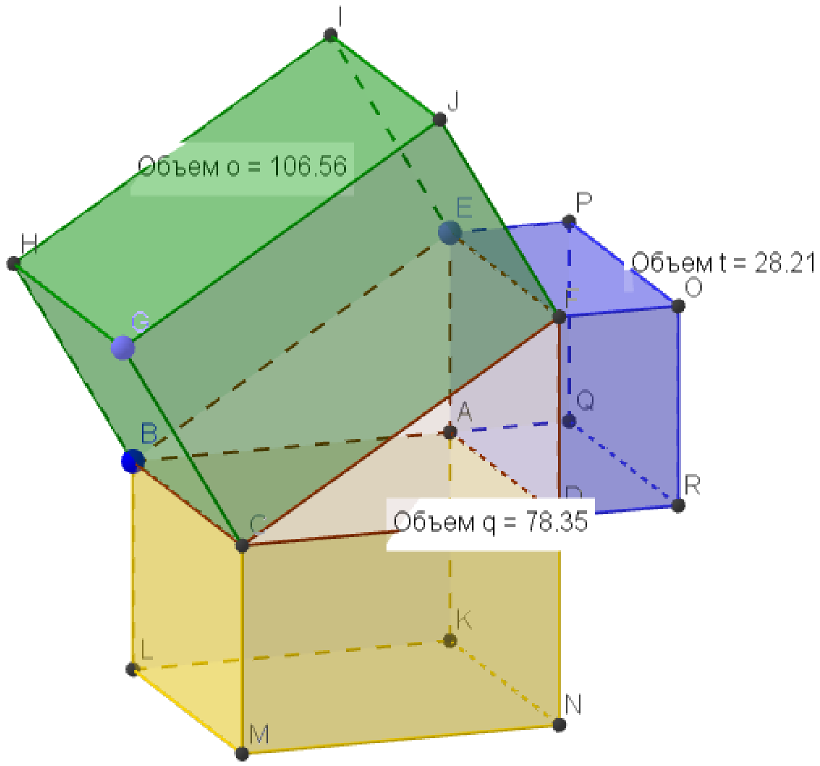

Рисунок 11: Чертёж для примера 4

Стоит отметить, что компьютерные эксперименты могут быть различными и зависеть от цели, задач, этапа урока [18-31].

Рассмотрим ещё один пример аналога теоремы Пифагора.

Пример 5. Сумма площадей трёх граней тетраэдра, являющихся прямоугольными треугольниками с общей вершиной при прямом угле, равна площади четвёртой грани.

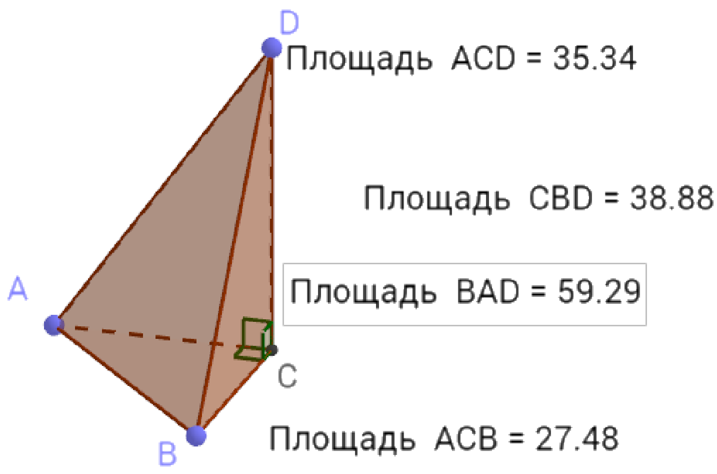

Рисунок 12: Чертёж для примера 5

Анализ: Для того что бы построить тетраэдр, три грани которого будут являться прямоугольными треугольниками необходимо вначале построить прямоугольный треугольник в основании, опустить перпендикуляр к плоскости треугольника в вершину прямого угла, затем достроить до тетраэдра, соединив оставшиеся вершины.

Построение: Построим прямоугольный треугольник ABC и опустим DC – перпендикуляр в точке C к плоскости ABC. В вершину прямого угла. Соединим AD и BD. Используя инструмент «Площадь» вычислим площади всех граней тетраэдра и проверим наше предположение. $S_{BDA}^2 = S_{ACD}^2 + S_{CBD}^2 + S_{ACB}^2$ проверим выполнится ли данное равенство для нашего чертежа SBDA2 $= 59{,}29^2 = 3515{,}3041$; $S_{ACD}^2 + S_{CBD}^2 + SACB^2 = 35{,}34^2 + 38{,}88^2 + 27{,}48^2 = 1248{,}9156 + 1511{,}6544 + 755{,}1504 = 3515{,}7204$

Выводы: При произвольных A, B и D столь незначительное расхождение в вычислении не является однозначным опровержением предположения, следовательно, данное предположение стоит рассматривать как гипотезу с возможным доказательством, но это выходит за рамки нашего исследования.

Выделим следующие виды компьютерных экспериментов:

1. Конструктивный компьютерный эксперимент. Данный вид эксперимента применяется, когда учащимся необходимо выполнить

геометрическое построение и проверить условия существования геометрического объекта. Примером может послужить задание на построение треугольника по двум сторонам и медиане [21].

2. Первичный компьютерный эксперимент. Данный вид эксперимента применяется, когда учащимся необходимо самостоятельно подойти к формированию теоремы или гипотезы при условии ограниченности знаний или данных об объекте исследования. Примером данного вида эксперимента могут послужить примеры 1 и 2 описанные выше.

3. Контрольный компьютерный эксперимент. Данный вид эксперимента применяется для подтверждения или поиска контрпримера выдвинутой гипотезы. Примером такого вида эксперимента может послужить пример 3, когда мы уже знаем достаточно об объекте исследования и пытаемся применить эти знания для получения нового свойства.

4. Компьютерная визуализация. Данный вид эксперимента непрерывно связан со всеми остальными. В этой ситуации мы визуализируем все наши рассуждения и на их основе пытаемся доказать или опровергнуть выдвинутые утверждения.

5. Модифицирующий компьютерный эксперимент. Данный вид эксперимента применяется, когда мы изменяем некоторые условия для расширения теоремы. Примером может послужить пример 4, в котором мы рассматриваем нашу теорему в пространстве. То есть мы модифицировали область применения от двумерного пространства к трехмерному.

Выделенная классификация говорит о том, что любой компьютерный эксперимент может быть использован на различных этапах урока по математике.

1.4 Темы школьного курса стереометрии, в рамках которых обучение решению задач допускает поддержку системами динамической геометрии, обоснование выбора тем.

Для выбора тем школьного курса в первую очередь стоит обратить внимание на требования, предъявляемые к современным учебникам и ознакомиться с перечнем допущенных учебников [32, 33, 34].

Опираясь на официальные документы [6, 7, 32, 33, 34] и содержимое учебников по геометрии для 10-11 класса [35-43], которые входят в федеральный перечень рекомендованных учебников, можно сделать вывод, что нет ограничений на использование СДГ в зависимости от преподаваемой темы. Всё будет зависеть от компьютерной грамотности самого учителя и понимания им целей и задач использования СДГ.

В свою очередь стоит отметить следующее. Исходя из анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2016 года по математике, опубликованного Федеральным институтом педагогических измерений [44] задачу №14, которая относится к стереометрии, смогли решить только 5% всех выпускников. Низкая выполняемость задания №14 свидетельствует о плохой сформированности пространственных представлений у учащихся выпускных классов. При подробном рассмотрении контрольно-измерительных материалов [45] и спецификации к ним [46], а также анализа кодификатора элементов содержания по математике [47] можно сделать вывод, что основными темами для 14 задания профильного ЕГЭ по математике являются:

1. Расстояния и углы, включая: расстояние от точки до плоскости, расстояние между двумя точками, расстояние от точки до прямой, расстояние между скрещивающимися прямыми, угол между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями.
2. Площади и объёмы, включая: площадь поверхности многогранника, площадь сечения многогранника, объем многогранника.

3. Методы построение сечения многогранника плоскостью.
4. Сечение тел вращения

Из описанного выше следует, что наибольшую значимость курса геометрии для профильного уровня, с учётом рассмотрения только раздела стереометрии, играют задачи на построение сечений и вычисление площади, задачи на вычисление расстояний и задачи на вычисление углов. Поэтому в нашей работе мы в первую очередь будем ориентироваться именно на эти разделы.

Структура нашей работы будет описана в виде методических рекомендаций к решению задач из учебников по геометрии 10-11 класса, удовлетворяющих требованиям ФГОС и находящихся в официальном перечне учебников, допущенных к использованию в общеобразовательных учреждениях на май 2017 года.

Каждый раздел второй главы, посвящённый методике преподавания с использованием СДГ, будет иметь модульную структуры. Каждый модуль будет содержать теоретический материал по теме, набор задач из различных учебных пособий, относящихся к школьному курсу, решение задач с методическими рекомендациями, динамический чертёж и описание компьютерного эксперимента.

Выводы по первой главе:

1. Системы динамической геометрии используются по всему миру уже достаточно давно, многие исследования показывают, что использование СДГ значительно увеличивает уровень успеваемости. Кроме того, согласно ФГОС второго поколения использования компьютерного программного обеспечения является необходимым для школьного курса математики.

2. Среди большого числа компьютерных программ, которые можно использовать при обучении геометрии, стоит выделить программу GeoGebra, которая является бесплатной, свободно распространяемой и поддерживающей как двумерные, так и трёхмерные построения.

3. Использование СДГ GeoGebra позволяет учащимся проводить качественные компьютерные эксперименты, визуализируя все изменения и работая как в плоскости, так и в пространстве. Мы выделили несколько различных видов компьютерных экспериментов, которые можно использовать на уроках геометрии для более наглядного преподавания на различных этапах урока по геометрии.

4. Использование СДГ «GeoGebra» при изучении раздела стереометрии является актуальным и способным повысить эффективность и качество обучения геометрии. Это должно привести к улучшениям пространственного представления, что, в свою очередь, должно сказаться на выполнении задач по стереометрии из ЕГЭ.

ГЛАВА II. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ И МЕТОДИКИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1 Задачи на построение сечений: динамические 3D-чертежи и методика их применения.

Рассмотрим методику применения динамических 3D-чертежей на примере использования учебника геометрии 10-11 класса Л.С. Атанасяна [35]. В курсе геометрии 10-го класса по учебнику Л.С. Атанасяна тема «Задачи на построение сечений» является лишь пунктом параграфа «Тетраэдр и параллелепипед» и на него по программе выделяют не более 2-х уроков, при этом навык выполнения построения сечений является важной составляющей для решения большого количества задач, включая задания из ЕГЭ по математики профильного уровня.

Использование динамических 3D-чертежей в среде GeoGebra при изучении курса стереометрии позволяет учителю решить ряд таких проблем как:

- непонимание учениками видимых и невидимых граней, рёбер, отрезков и пр.;
- понятия принадлежности и пересечения точек, прямых и плоскостей, параллельности прямых и плоскостей в пространстве не столь очевидны, при построении чертежа на плоскости;
- не очевидность взаимного расположения прямых и плоскостей, при построении чертежа на плоскости.

На момент изучения темы «Задачи на построение сечений» учащиеся уже знакомы с интерфейсом среды GeoGebra и обладают следующими навыками:

- находить на панели инструментов и использовать для построения чертежей все необходимые инструменты;

- использовать пункты контекстного и главного меню;
- строить геометрические объекты: прямую, точку и плоскость в пространстве;
- строить отрезок, луч, прямую по двум точкам;
- строить плоскость по трём точкам, по точке и прямой, по двум прямым;
- строить многоугольники и простейшие многогранники: тетраэдр и параллелепипед;
- строить параллельные прямые, прямую и плоскость, плоскости в пространстве.

Рассмотрим задачи на построение сечений многогранников. В задачах школьного курса используются в основном построения сечений простейших многогранников. Задачи представлены в основном без числовых данных, чтобы использовать возможность их многовариантного решения.

Применять динамические 3D-чертежи в среде GeoGebra можно на всех этапах обучения.

В качестве примера рассмотрим методику применения динамических 3D чертежей при изучении темы «Задачи на построение сечений» на этапах изучения нового материала и закрепления полученных знаний.

Для решения задач на построение сечений, учащихся необходимо познакомить с понятием «сечения» и «секущая плоскость»

«Назовём секущей плоскостью тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра (параллелепипеда)» (Л.С. Атанасян [35]).

В школьном курсе геометрии выделяют три основных метода построения сечений многогранников:

Метод следов.

Метод вспомогательных сечений.

Комбинированный метод.

Первые два из которых являются разновидностями Аксиоматического метода построения сечений.

В пункте учебника в рамках объяснения нового материала приведено построение всех возможных сечений тетраэдра и параллелепипеда, с подробным описанием построения и анализом. Мы рассмотрим методику построение нескольких из них с использованием 3D-чертежей в среде GeoGebra.

Построение сечений тетраэдра. Сечениями тетраэдра могут быть только треугольники и четырёх угольники.

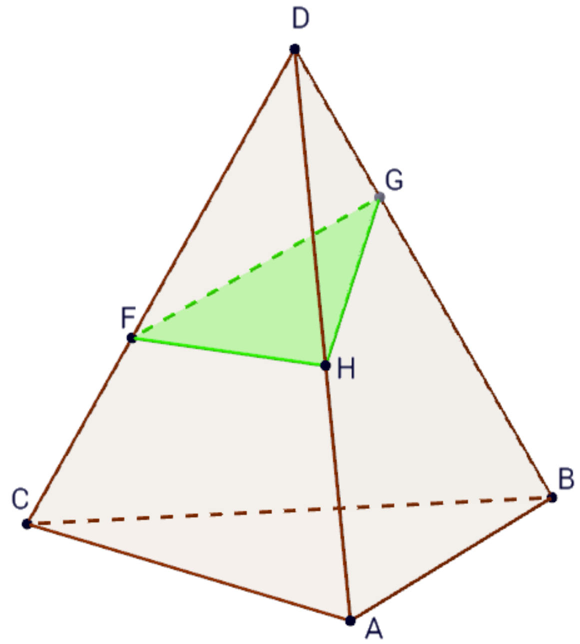

Рисунок 13: Сечение тетраэдра

Задача 1 «Сечения тетраэдра – треугольники»

Дан тетраэдр DABC, в тетраэдре построим сечения, таким образом, чтобы они проходили через рёбра, выходящие из одной вершины.

Решение

Рассмотрим несколько способов выполнения данного построения в среде GeoGebra.

1) Отметим на рёбрах DA, DB и DC произвольные точки H, G и F (Рисунок 13) при помощи инструмента «Точка», при наведении курсора мыши на отрезки (грани тетраэдра) рядом с курсором появляется отображение символа «Точки», что помогает закрепить точку непосредственно на отрезке.

   Соединим построенные точки при помощи инструмента «Отрезок». Треугольник GHF – искомое сечение тетраэдра DABC.
2) Отметим на ребре DB точку G (инструмент «Точка»), проведём прямую GH пересекающую ребро DA в точке H, для этого воспользуемся инструментом «Прямая», выбрав при построении второй точки ребро DA. Аналогичным образом построим прямые HF и FG (Рисунок 14). Треугольник GHF – искомое сечение тетраэдра DABC.
3) Воспользуемся инструментом «Многоугольник», построим треугольник GHF поочерёдно щёлкая мышью на рёбрах DA, DB и DC (Рисунок 13). Треугольник GHF – искомое сечение тетраэдра DABC.

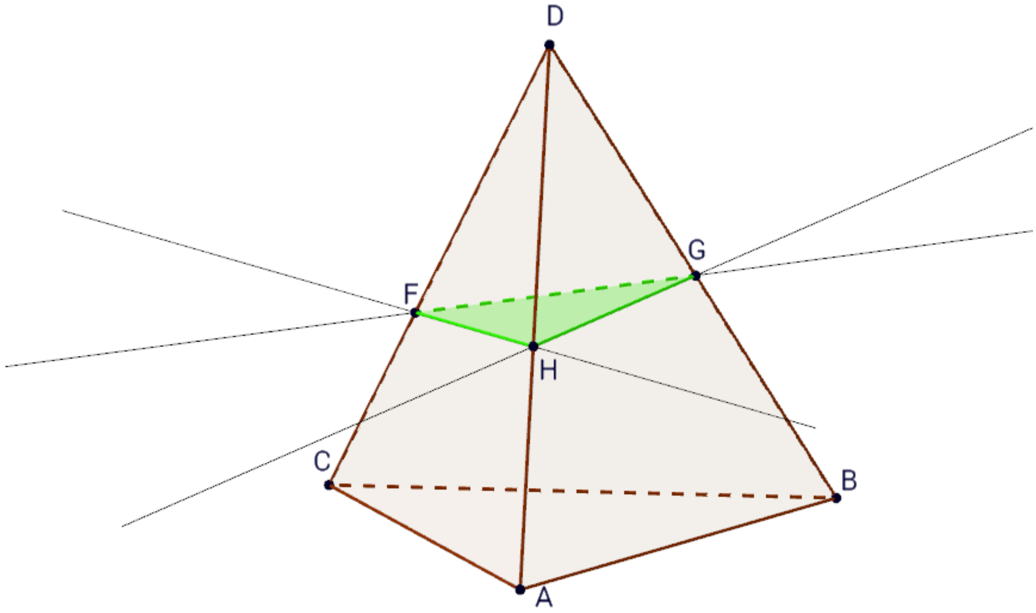

Рисунок 14: Способы построения сечение тетраэдра

Отметим, что для удобства и наглядности выполнения чертежа в процессе построения и после его окончания в среде GeoGebra чертёж можно поворачивать к себе видимой гранью, при этом можно наглядно проследить за всей последовательностью построения. Динамический 3D-чертёж позволяет, также провести исследование построения, выбрав инструмент «Перемещать» можно поочерёдно менять положение точек H, G и F перемещая их вдоль отрезков DA, DB и DC, прослеживая изменения вида сечения, и привести учащихся к выводу о том, что независимо от положения этих точек на рёбрах, выходящих из одной вершины сечение будет оставаться треугольной формы.

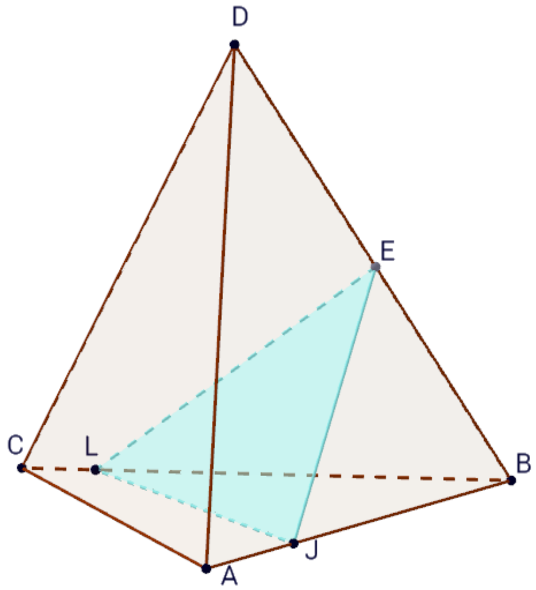

Рисунок 15: Исследование

Ради чистоты эксперимента можно выполнить построение сечения, проходящего через другие три грани, например, BA, BC и BD (Рисунок 15) этот эксперимент поможет ученикам убедиться в том, что искомое сечение ELJ так же является треугольником.

Задача 2 «Сечение тетраэдра – четырёхугольник»

На ребрах AB, BD и CD тетраэдра ABCD отмечены точки F, E и H (Рисунок 16). Построить сечение тетраэдра плоскостью EFH.

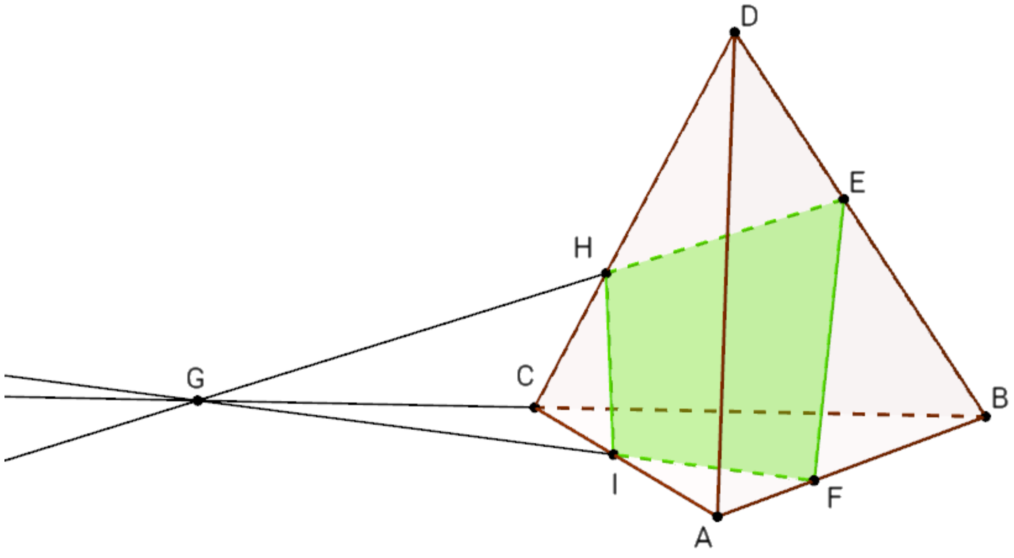

Рисунок 16: Сечение тетраэдра – четырёхугольник

Решение

Построим сначала прямую, по которой плоскость EFH пересекается с плоскостью грани ABC. Точка F является общей точкой этих плоскостей. Для построения еще одной общей точки продолжим отрезки EH и BC (инструмент «Прямая») до их пересечения в точке G (инструмент «Пересечение»), которая и будет второй общей точкой плоскостей EFH и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой FG. Аналогично при помощи инструментов «Прямая» и «Пересечение» строим прямую FG точку её пересечения с ребром AC – точку I. Четырехугольник EFIH — искомое сечение. При построении сечения EFIH, также будет полезно и удобно вращать полученный 3D-чертёж (Рисунок 17), чтобы проанализировать все возможные варианты, подвигав точки E, H и F по рёбрам AB, DB и DC. И исследовать вопрос: «Почему нельзя построить данное сечение только при помощи инструмента «Многоугольник»?»

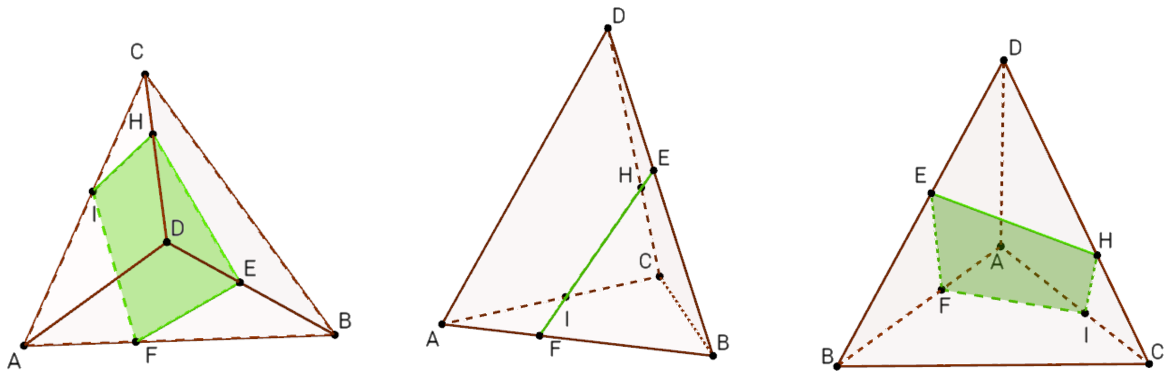

Рисунок 17: Вращение 3D-чертежа на этапе исследования

Рассмотрим второй случай.

Если прямые EH и BC параллельны (Рисунок 18), то прямая EH параллельна грани АБС, поэтому плоскость EFH пересекает эту грань по прямой FI параллельной прямой EH, для построения прямой FI воспользуемся инструментами «Параллельная прямая» (построение прямой параллельной данной через указанную точку) и «Пересечение» (находим точку I пересечения прямой FI и отрезка AC).

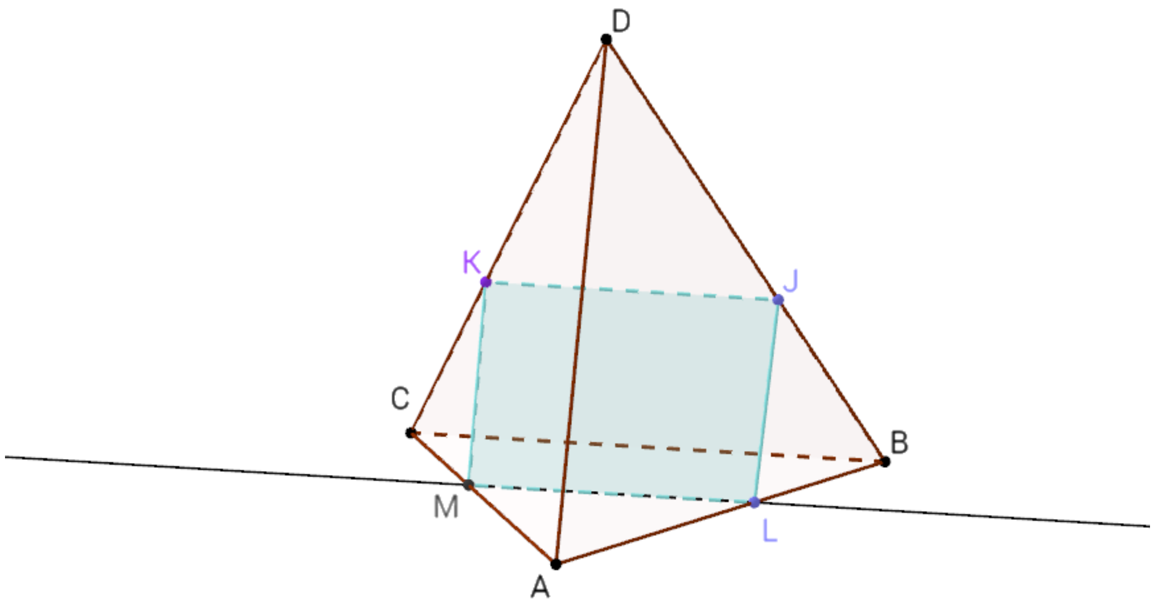

Рисунок 18: Сечение тетраэдра – четырёхугольник с двумя параллельными сторонами

Построение сечений параллелепипеда. Сечениями параллелепипеда могут быть треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники. Случаи с построением треугольного и четырёх угольного сечений достаточно просты, с методикой их построения с применением 3-D чертежей можно ознакомиться в приложении.

Задача 3

На ребрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечения параллелепипеда плоскостью ABC, A, B и C – произвольные точки на рёбрах параллелепипеда.

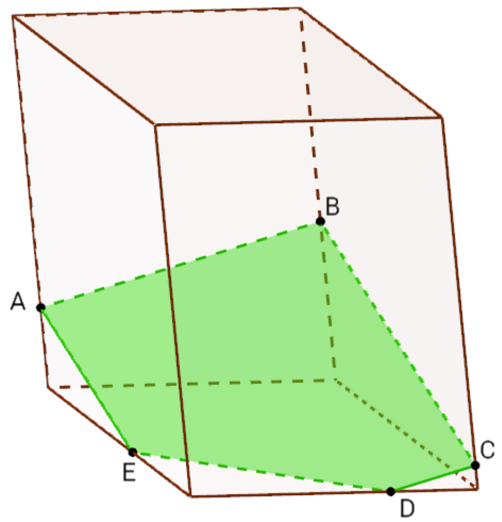

Рисунок 19: Сечение параллелепипеда. ABCDE – пятиугольник

Решение

Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах параллелепипеда лежат точки A, B и C. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если точки A, B и C лежат на ребрах, выходящих из одной вершины, то искомое сечение — треугольник ABC (см. Приложение А)

Если точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке (Рисунок 19), то сначала нужно провести отрезки AB и BC (инструмент «Отрезок»), а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, а через точку C — прямую, параллельную AB (инструмент «Параллельная прямая»). Точками пересечения этих прямых с ребрами нижней грани будут точки E и D (инструмент «Точка пересечения»). Остается провести отрезок ED. Пятиугольник ABCDE — искомое сечение.

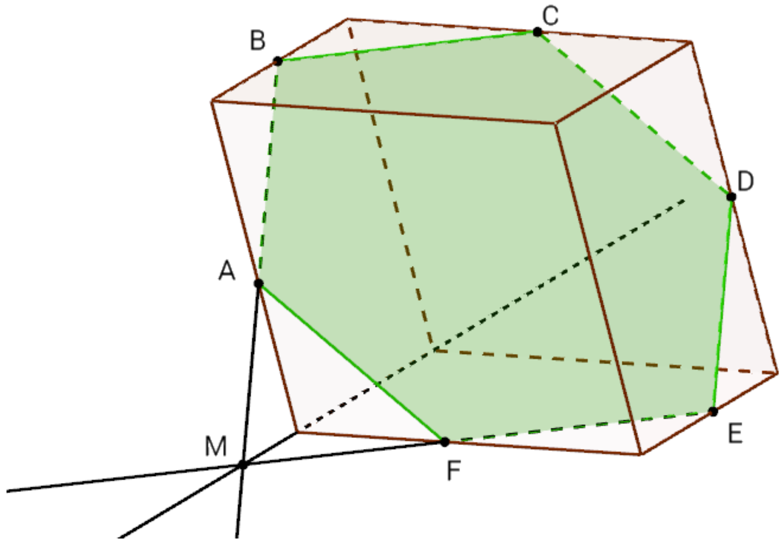

Рисунок 20: Сечение параллелепипеда. ABCDEF – шестиугольник

Более трудный случай, когда данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке (Рисунок 20). Построение в этом случае будем проводить следующим образом. Построим прямую, пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Для этого используем основные инструменты, описанные в предыдущем построении, проведем прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и прямая AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Затем через точку M проведем прямую, параллельную прямой BC. Получим прямую, по которой секущая плоскость пересекает плоскость нижнего основания. Построенная прямая пересекается с ребрами нижнего основания в точках E и F. Далее через точку E проведем прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD. Для того что бы выполнить заливку построенного, искомого сечения — шестиугольника ABCDEF необходимо воспользоваться инструментом «Многоугольник» и построить шестиугольник ABCDEF, поочерёдно выделив каждую из шести вершин.

Когда сечением многогранника является многоугольник, содержащий более 3-х вершин, всегда интересно проверить правильность построения, повернув динамические чертежи таким образом, чтобы построенные сечения проецировались в одну линию (Рисунок 21)

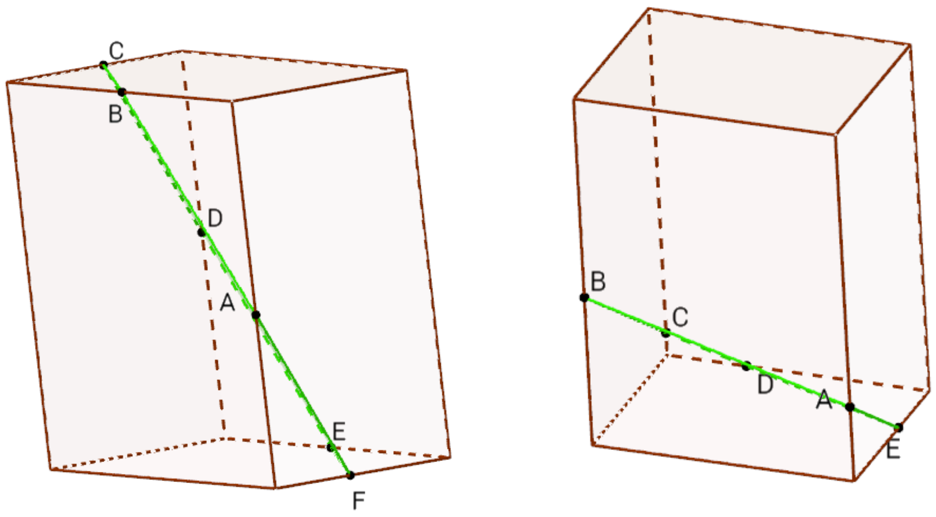

Рисунок 21: Исследование построенных чертежей

Как правило в задачах на построение сечений на искомое сечение накладываются определённые условия, которым оно должно удовлетворять. И для решения некоторых задач не всегда достаточно применение рассмотренных выше методов построения сечений.

Мы хотели бы также выделить виды построения сечений многогранников, применение которых возможно и достаточно просто благодаря широкому функционалу динамической среды GeoGebra:

построение сечения плоскостью, проходящей через заданную точку параллельно заданной плоскости;

построение сечения многогранника, проходящего через заданную точку параллельно двум заданным скрещивающимся прямым;

построение сечения плоскостью, проходящей через заданную прямую параллельно другой заданной прямой;

построение сечения многогранника, проходящей через заданную прямую перпендикулярно заданной плоскости;

построение сечения, проходящего через заданную точку перпендикулярно заданной прямой.

Рассмотрим применение этих методов на конкретных примерах решения задач на построение из учебника Л.С. Атанасяна 10-11 класс.

Задача №72. Изобразите тетраэдр DABC и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости грани ABC, если: а) точка M является серединой ребра AD;

б) точка M лежит внутри грани ABD.

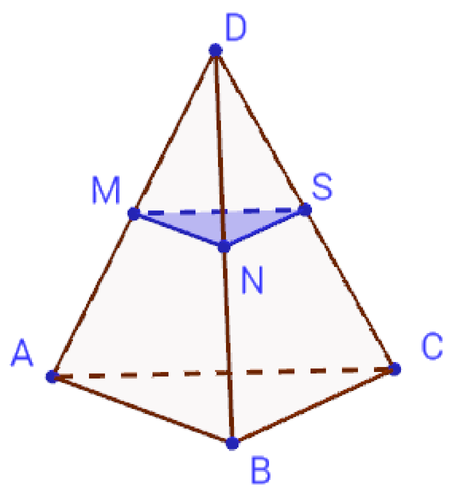

Рисунок 22: Построение сечения параллельного основанию, условие а)

Решение

а) точка M является серединой ребра AD. Построение 3D-чертежа (Рисунок 22) можно выполнять несколькими способами.

1) по точкам, отметив N и S середины рёбер DB и DC (инструмент «Середина или центр») соответственно, MN, NS и MS как средние линии треугольников будут параллельны соответствующим рёбрам основания, следовательно, MNS – искомое сечение.

2) построить прямые, проходящие через точку M, параллельно прямым AB и AC (инструмент «Параллельная прямая»), отметить точки N и S пересечения построенных прямых с рёбрами DB и DC («Точка пересечения») соединить NS, MNS – искомое сечение.

3) построение сечения плоскостью, проходящей через заданную точку M параллельно заданной плоскости ABC (инструмент «Параллельная плоскость»). Найдём точки пересечения построенной плоскости и рёбер DB и DC («Пересечение»). MNS – искомое сечение.

б) точка M лежит внутри грани ABD (Рисунок 23). Для данного случая выполнять построения так же можно несколькими способами. Если время урока позволяет, то можно выполнить поочерёдное построение прямых, параллельных рёбрам основания, начиная с прямой проходящей через точку M. Затем для проверки правильности чертежа воспользоваться инструментом «Параллельная плоскость» и построить плоскость параллельную ABC, проходящую через заданную точку M.

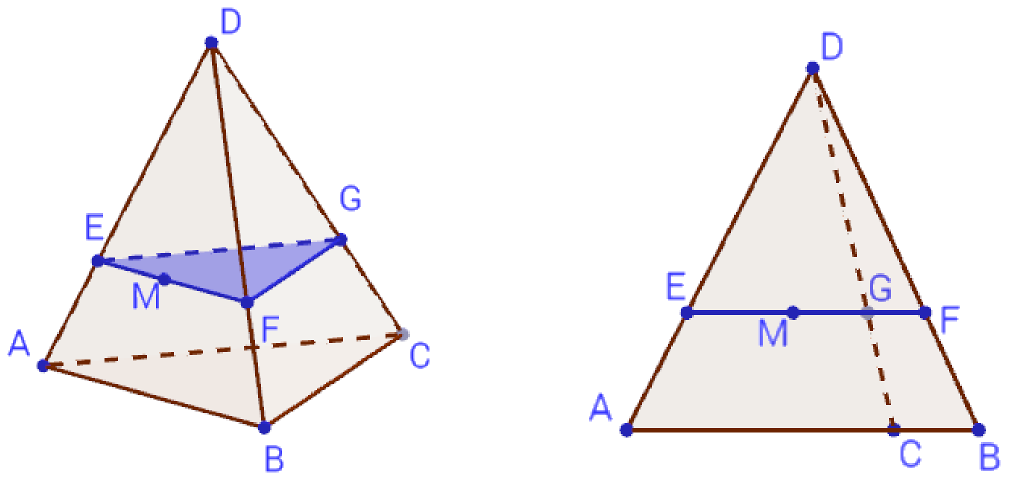

Рисунок 23: Построение сечения параллельного основанию, условие б)

Другие примеры построения с тетраэдром и сечений параллелепипеда представлены в приложении Б.

Определение сечения многогранников. Построение сечений призмы, параллелепипеда, пирамиды методом следов. (Как правило в школьном курсе стереометрии используются задачи на построение сечений многогранников, решаемые основными методами. Остальные методы, в связи с их более высоким уровнем сложности, учитель может оставить для рассмотрения на факультативных занятиях или на самостоятельное изучение. В задачах на построение основными методами требуется построить плоскость сечения, проходящую через три точки).

Нахождение площади сечений в многогранниках (без использования теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника).

Нахождение площади сечений в многогранниках (с применением теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника).

После изучения темы «Задачи на построение сечений» учащиеся должны овладеть следующими знаниями, умениями и навыками:

знать понятие сечение и уметь им оперировать;

знать виды сечений тетраэдра и параллелепипеда;

уметь строить параллельные прямые, прямую и плоскость, плоскости в пространстве;

точки пересечения прямых, прямой и плоскости в пространстве;

линию пересечения плоскостей в пространстве.

2.2 Задачи на вычисление расстояний: динамические 3D-чертежи и методика их применения.

При рассмотрении задач на вычисление расстояний в пространстве стоит учитывать тот фак, что расположение объектов, между которыми нужно вычислить расстояние, не очевидно для ученика.

Например, рассмотрим рисунок ниже.

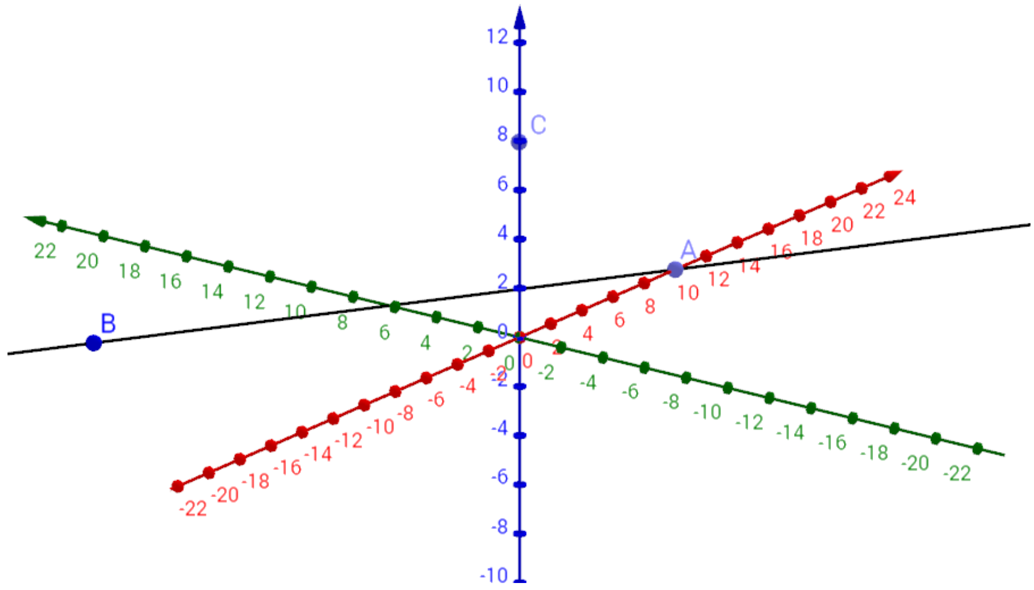

Рисунок 24: Расположение точки и прямой

На первый взгляд можно предположить, что точка C находится на оси Oz и имеет координаты (0;0;8), а прямая AB пересекает ось Oz в точке с координатами (0;0;2). Тогда расстояние между точкой и прямой будет равно 6. Но стоит немного повернуть чертёж, и задача принимает совершенно другое значение (Рисунок 25).

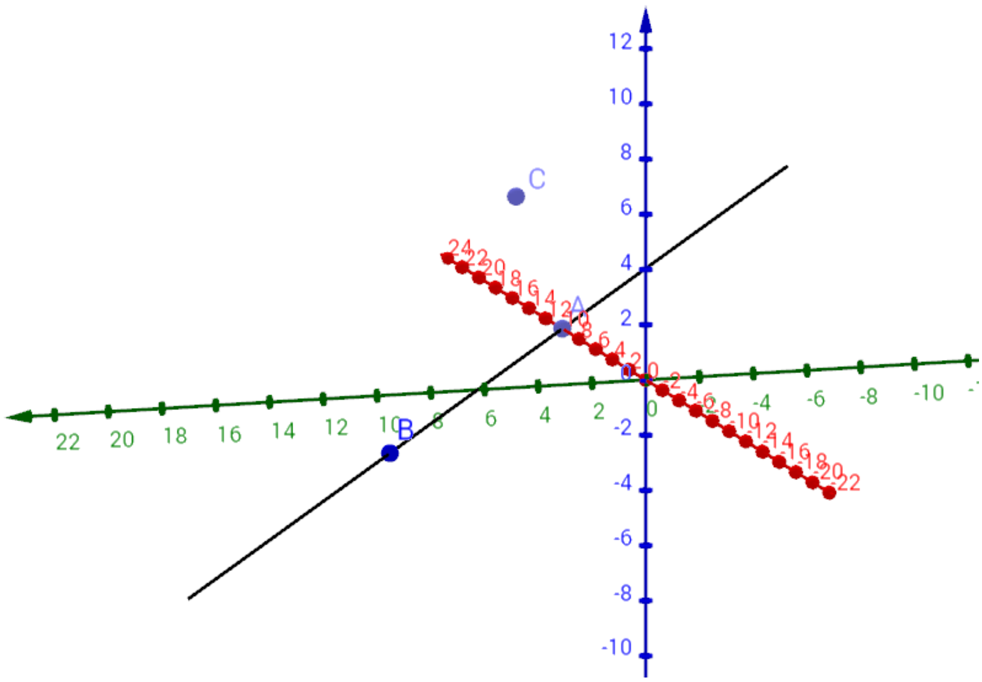

Рисунок 25: Расположение точки и прямой

При данном угле обзора видно, что прямая AB не пересекает ось Oz, а точка C ей не принадлежит.

Таким образом использование GeoGebra при вычислении расстояний может сыграть значимую роль, как в правильности логических рассуждений при решении задачи, так и в развитии пространственного мышления.

При рассмотрении задач на вычисления расстояний в пространстве, стоит выделить четыре группы:

1. Расстояние между точками в пространстве.
2. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
3. Расстояние от точки до плоскости в пространстве.
4. Расстояние между прямыми в пространстве.

Первые две группы не рассматривается явно в курсе геометрии 10-11 класса, т.к. принцип вычисления ничем не отличается от принципа вычисления на плоскости, рассмотренного в школьном курсе геометрии 7-9 класса.

Но задачи на нахождения расстояний между точками и от точки до прямой встречаются довольно часто. Решение подобных задач в пространстве по сути не отличается от плоскостного, главная сложность заключается лишь в неочевидности взаимного расположения на чертеже, но как мы указывали выше динамические 3D-чертежи помогают справиться с проблемой недостаточной визуализации.

Третья группа (расстояние от точки до плоскости) рассматриваются в учебнике Л.С. Атанасяна в рамках темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей» в параграфе «Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью». Тема «Расстояние от точки до плоскости» является новым материалом и требует введения новых понятий и сведений.

Перпендикуляр к плоскости, наклонная к плоскости, проекция наклонной на плоскость. Исходя из этих понятий, через доказательство вводиться понятие «расстояние от точки до плоскости» и устанавливается, что оно равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость (Рисунок 26). Отрезок АН – перпендикуляр, из точки А к плоскости α, точка Н — основание перпендикуляра, отрезок АМ – наклонная из точки А к плоскости α, точка М — основанием наклонной. Отрезок НМ – проекция наклонной на плоскость α. Так как перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости, то АН – расстояние от точки А до плоскости α.

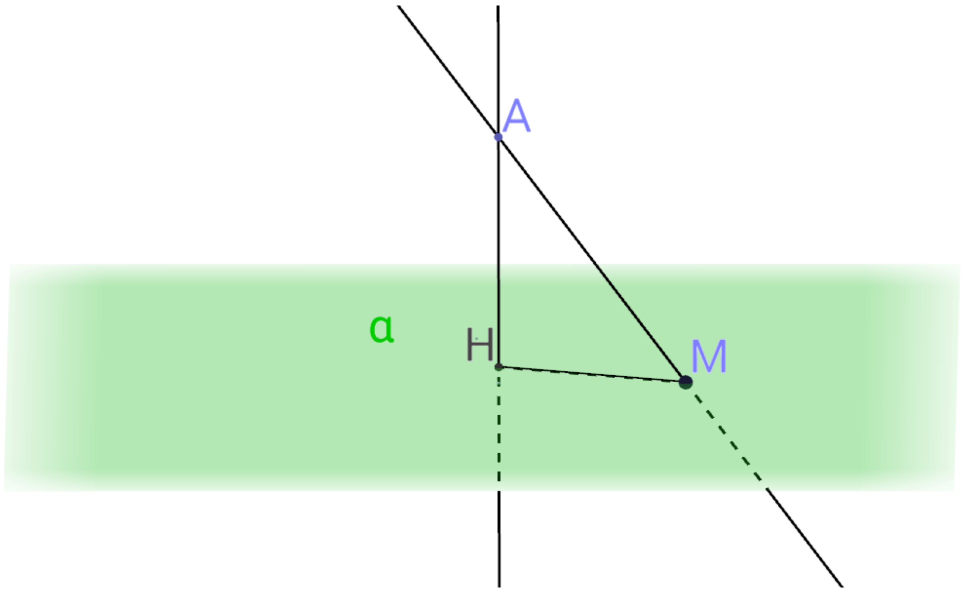

Рисунок 26: Расстояние от точки до плоскости

Замечания

1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости.

2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости.

3. Если две прямые скрещивающиеся, то через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.

Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Тема «Расстояние от точки до плоскости» идёт после п. 2.1, рассмотренного выше, поэтому на данном этапе учащиеся обладают знаниями, умениями и навыками, описанными выше, а также вновь приобретёнными.

Третья группа (расстояние между прямыми в пространстве) рассматривается в зависимости от расположения данных прямых, если прямые параллельны, то расстояние между ними вычисляется так же, как и в курсе планиметрии. Если прямые скрещивающиеся, то расстояние между ними вычисляется, как указано в 3-ем замечании.

Применение вычислительных возможностей среды GeoGebra позволяет учителю и самим ученикам выполнять проверку решёных задач.

Рассмотрим решение задачи из учебника Л.С. Атанасяна на определение расстояния от точки до плоскости в пространстве.

Задача №150 Через вершину А прямоугольника ABCD проведена прямая АК, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что KD = 6 см, КВ = 7 см, КС = 9 см. Найдите: а) расстояние от точки К до плоскости прямоугольника ABCD; б) расстояние между прямыми АК и CD.

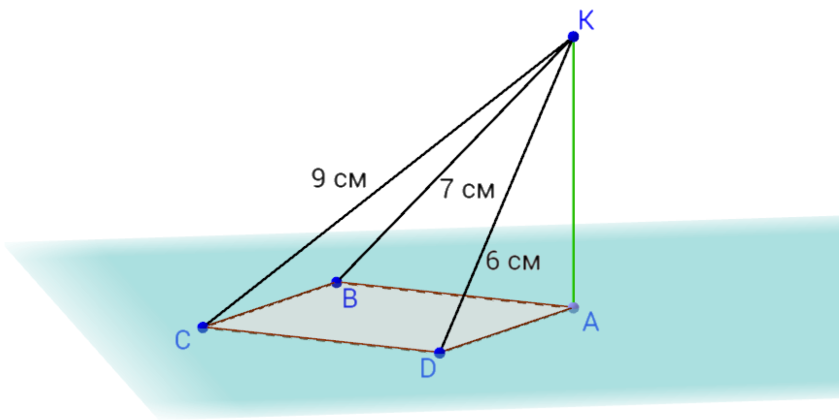

Рисунок 27: Вычисление расстояния от прямой до плоскости

Решение

а) Рассмотрим треугольники KAD, KDC, KBC и KAB (Рисунок 27). Так как AK перпендикуляр к плоскости ABCD, то он перпендикулярен любой прямой в этой плоскости (наглядно ученикам в этом легко убедиться, посмотрев на чертёж под разными углами (Рисунок 28)), следовательно треугольники KAD, KDC, KBC и KAB – прямоугольные. $AK^2 = KD^2 - AD^2$, AD = BC, как противоположные стороны прямоугольника, $BC^2 = KC^2 - KB^2$, следовательно, $AK^2 = KD^2 - (KC^2 - KB^2)$, проведя несложные вычисления мы получим, что AK = 2 см. Исходя из определения расстояние от точки K до плоскости прямоугольника ABCD равно 2 см.

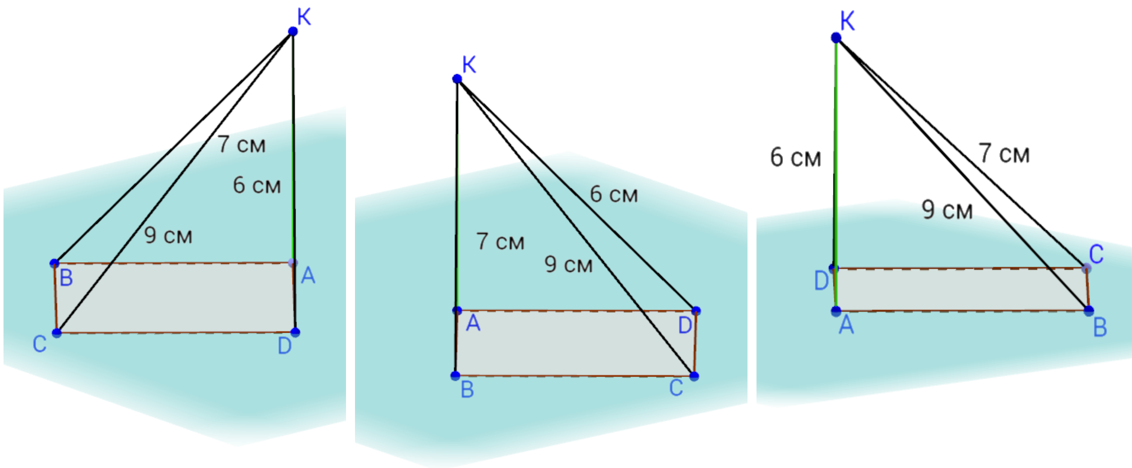

Рисунок 28: Наглядное отображение прямоугольных треугольников

б) Прямые, содержащие отрезки AK и CD – скрещивающиеся, следовательно, исходя из замечания 3, расстоянием между прямыми AK и CD (Рисунок 29) будет расстояние от прямой CD до плоскости ABK (ABK параллельна CD и содержит AK), в свою очередь расстояние от прямой CD до плоскости ABK равно длине их общему перпендикуляру AD (так как ABCD – прямоугольник). Исходя из предыдущих вычислений $AD = \sqrt{32}$

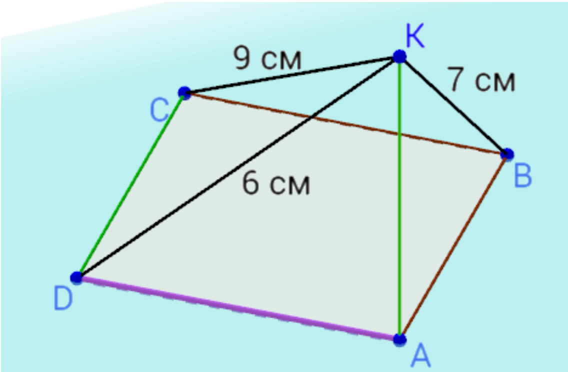

Рисунок 29: Высисление расстояния между скрещивающимися прямыми

Получив все искомые значения, в качестве дополнительного задания ученикам можно предложить выполнить построение точного чертежа, в соответствии со всеми значениями длин отрезков. Подобное задание способствует закреплению материала, а также интересно в качестве исследования и проверки правильности выполненного решения.

2.3 Задачи на вычисление углов: динамические 3D-чертежи и методика их применения.

Задачи на вычисление углов в той или иной форме присутствуют во всех разделах стереометрии, однако в явном виде эта тема встречается лишь дважды. В учебнике Л.С. Атанасян в параграфах «Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью» и «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей». При этом в параграфе «Двугранный угол» в качестве дополнительного материала даются понятия «Трёхгранный угол» и «Многогранный угол».

Новые понятия: проекция точки на плоскость, проекция прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, проекция произвольной фигуры на плоскость, (прямоугольная (или ортогональная) проекция фигуры), определение угла между прямой и плоскостью («Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.» Л.С. Атанасян), двугранный угол (угол, образованный двумя полуплоскостями), линейный угол двугранного угла, трехгранный угол (фигура, состоящая из углов, образованных тремя лучами, выходящими из одной вершины), плоский угол, многогранный угол.

Теоремы

1. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.
2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

При рассмотрении задач на вычисление углов в пространстве стоит учитывать тот фак, что расположение объектов, между которыми нужно вычислить угол, при выполнении чертежа на плоскости, не столь очевидно, как в пространстве и в этом случае на помощь учителю так же приходит среда динамической геометрии GeoGebra.

Задача №171 Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а катет наклонен к этой плоскости под углом 30°. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.

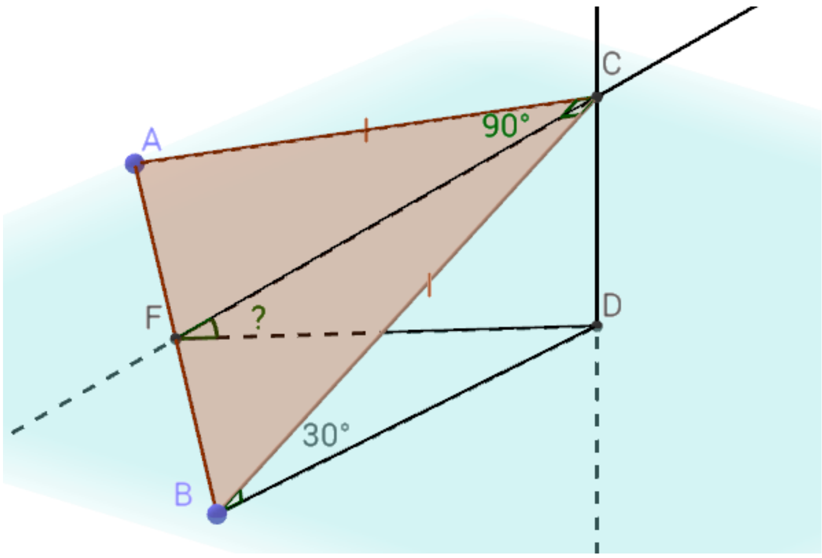

Рисунок 30: Вычисление двугранного угла

Решение

Двугранный угол между плоскостью α и плоскостью треугольника равен линейному углу CFD, где FD – проекция наклонной CF на плоскость α (Рисунок 30) Рассмотрим треугольник CDF. CD – перпендикуляр (по построению), следовательно CDF – прямоугольный, следовательно $\sin(\angle \mathrm{CFD}) = \frac{CD}{CF}$. $\mathrm{CD} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, $BC = CF\sqrt{2}$, следовательно $CD = \frac{CF\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\angle \mathrm{CFD}) = \frac{\frac{CF\sqrt{2}}{2}}{CF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle$CFD = 45°.

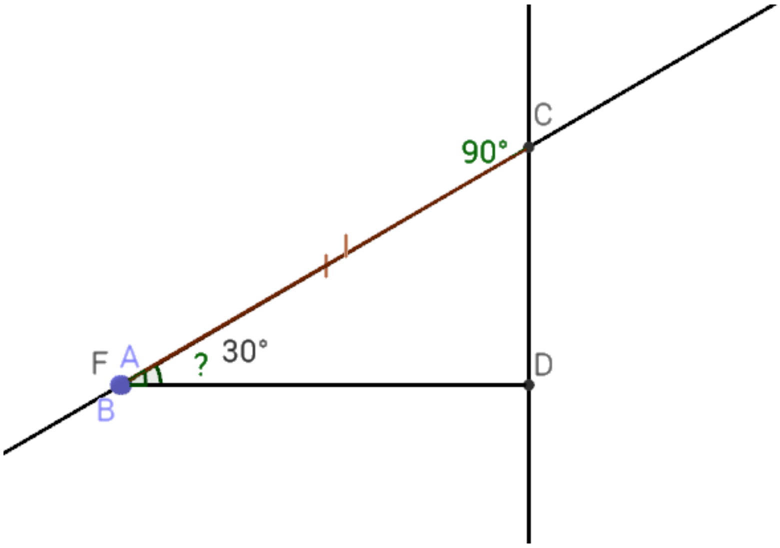

Рисунок 31: Исследование двугранного угла

Занимаясь поиском решения данной задачи учащиеся, вращая чертёж могут выдвигать различные гипотезы в том числе и ошибочное предположение о том, что углы CBD и CFD равны (Рисунок 31).

2.4 Эффективность применения динамических чертежей при обучении решению позиционных и метрических задач в пространстве.

Целью представленной методики является обеспечение учащегося общеобразовательной школы подготовкой по геометрии, необходимой ему для грамотного, творческого развития, для дальнейшей работы по углублению и расширению геометрических знаний.

Основные задачи методики применения 3D-динамических чертежей при изучении стереометрии состоят в том, чтобы:

1. Дать ученику необходимые геометрические знания, на основе которых строится курс стереометрии.

2. Содействовать формированию у школьника глубоких геометрических представлений, без наличия которых невозможно правильное понимание развития многих других разделов математики и построение математики в целом.
3. Раскрыть ученикам значение стереометрии, углубить представление о роли и месте геометрии в изучении окружающего мира.
4. Дать школьникам подготовку для дальнейшей самостоятельной работы по углублению и расширению геометрических знаний, математических методов.

Рассмотрим более подробно раздел: «Стереометрия». На самом деле указанная тема является основным рабочим аппаратом всего курса геометрии 10-го и 11-го классов. Доказательство большей части теорем курса и так же решение многих задач проводится при выполнении различных геометрических построений, таких как построение сечений, построение параллельных и перпендикулярных прямых и плоскостей. Применение динамических 3D-чертежей при решении задач дает возможность постепенно накапливать опыт проведения доказательных рассуждений, отточить опыт работы над чертежами.

Содержание рассмотренных выше тем располагает к использованию и внедрению информационных технологий в процесс обучения, обеспечивая наглядность и вариативность решения той или иной задачи, позволяя доказывать или опровергать собственные суждения (к примеру динамическая математическая среда «GeoGebra» без особых затруднений позволяет выявить, что при построении треугольника по трем сторонам, решение возможно не всегда, что при статическом решении не всегда удается заметить).

Таксономия целей, основанная на категориях учебных целей в когнитивной области

Таблица 1

Знание:	Ученик знает: – знает определения: точка, линия, плоскость и их взаимное расположение в пространстве и умеет выполнять их построения; – знает основные стереометрические фигуры тетраэдр и параллелепипед и умеет их строить; – знает принципы построения параллельных прямых и плоскостей в пространстве, точки пересечения прямых, прямой и плоскости, находить пересечение плоскостей.
Понимание:	Ученик понимает: – понимает, что такое теорема и доказательство; – интерпретирует чертежи – преобразует словесные данные в чертежи; – понимает определения перпендикулярности и параллельности; – понимает принадлежность элементов в пространстве; – понимает в какой последовательности и как следует выполнять построения.
Применение:	Ученик применяет: – применяет знания определений при построении чертежей. – применяет навыки выполнения построений при решении задач и в работе по готовым чертежам. – применяет знание процедур построения различных объектов при решении задач.
Оценка:	Ученик оценивает: – оценивает соответствие выводов имеющимся данным; – оценивает значимость того или иного продукта деятельности, исходя из внутренних критериев; – оценивает значимость того или иного продукта деятельности, исходя из внешних критериев.

Требования к результатам обучения:

Знать/понимать:

- ✓ ключевые определения, теоремы и следствия данной темы;
- ✓ отличительные особенности каждого из построений;
- ✓ видимость/невидимость граней, прямых;
- ✓ определять взаимное расположение объектов в пространстве;

- способы построения сечений многогранников, параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости в пространстве;
- принципы построения отрезка, равного данному, угла, равного данному;
- понимает в какой последовательности и как следует выполнять построения.

Уметь:

- интерпретировать данные по готовым чертежам;
- преобразовывать словесные данные в чертежи;
- проводить доказательные рассуждения по готовому чертежу;
- выполнять построение чертежей для решения позиционных и метрических задач по рассмотренным темам.

Применять:

- знания определений при построении чертежей;
- навыки построений стереометрических чертежей при решении задач.

Содержание дидактического модуля

Учебник: А.Л. Атанасяна 10-11 класс

Таблица 2

	Содержание тем	***Количество часов***
	Тетраэдр. Параллелепипед.	2
	Изображение пространственных фигур. Задачи на построение.	2
	Угол между прямой и плоскостью.	1

	Двугранный угол. Признак перпендикулярности двух плоскостей.	2
	Решение задач	2
ИТОГО ЧАСОВ		**9**

В рамках данного исследования был проведён эксперимент. Для проведения эксперимента по результатам контрольного среза были выбраны два класса на параллели с примерно одинаковыми показателями начальных знаний, качеством и уровнем успеваемости. Описанная выше методика обучения стереометрии с использованием динамических 3D-чертежей в среде GeoGebra была апробирована на одном из выбранных 10-х классов, второй класс продолжил обучение без применения систем динамической геометрии. В качестве технического оснащения на уроке математики был использован мобильный компьютерный класс.

В экспериментальном классе у учащиеся работали как под руководством учителя, так и самостоятельно проводя исследования и компьютерные эксперименты. Урок условно делился на четыре этапа:

1. Актуализация знаний, решение нескольких не сложных задач по готовым чертежам с использованием среды GeoGebra.
2. Объяснение нового материала, когда учитель излагал на доске новый материал, вводил новые понятия и новые факты, подкрепляя изложение наглядными 3D-чертежами.
3. Закрепление, решение двух – трёх задач у доски, так же с использованием GeoGebra.
4. Самостоятельная работа, учащихся по закреплению полученных знаний, решение задач непосредственно на местах (с установленными ноутбуками), так же с возможностью использования среды GeoGebra.

По окончанию эксперимента было проведён итоговый контрольный срез и были получены следующие результаты:

Класс, в процессе обучения которого была использована методика обучения с применением динамических 3D-чертежей показал более высокие результаты по следующим пунктам:

- ✓ понимать видимость/невидимость граней, прямых;
- ✓ определять взаимное расположение объектов в пространстве;
- ✓ знать способы построения сечений многогранников, параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости в пространстве;
- ✓ понимать в какой последовательности следует выполнять построения;
- ✓ выполнять построение чертежей для решения позиционных и метрических задач;
- ✓ навыки построений стереометрических чертежей при решении задач.

По остальным пунктам знания экспериментальной группы были так же на достаточно высоком уровне. Кроме этого у учащихся экспериментальной группы было отмечено повышение интереса к изучению геометрии и познавательной активности на уроках и при выполнении домашних работ. Исходя из чего, мы можем считать данный эксперимент успешным.

Выводы по второй главе:

1. Применение динамических 3D-чертежей при обучении решению задач на построение сечений способствует развитию пространственного представления и способствует лучшему усвоению понятий видимости/невидимости граней. Появляется возможность работы с чертежом не как с проекцией фигуры на плоскость, а как с реальным объектом.

2. Расстояние расположение в пространстве не всегда очевидно и очень часто учащимся необходимо неоднократно взглянуть на чертёж под разными углами, чтобы наиболее объективно оценить положение объектов.

3. При решении задач на вычисление углов в пространстве так же стоит учитывать тот фак, что взаимное расположение объектов, между которыми

нужно вычислить угол, при разном наклоне проекции чертежа, не столь очевидно, и в этом случае на помощь учителю так же приходит среда динамической геометрии GeoGebra, позволяющая менять угол обзора.

Хотим отметить, что методика использование 3D-чертежей не должна заменять классическую методику построения в тетрадях. Представленная методика является дополнением и должна быть интегрирована в учебный процесс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс «Геометрия» является одним из основных математических курсов, составляющих фундамент математической подготовки учащихся. В нем уточняются, в 10 – 11 классах углубляются и обобщаются многие важнейшие понятия школьной математики.

Составление динамических чертежей в обучении геометрии является структурирующей и должно пронизывать все годы обучения. Поскольку курс стереометрии для понимания детей является достаточно абстрактным и достаточно сложным для восприятия учащимися, то задача учителя состоит в том, чтобы сделать изучение этого учебного материала максимально наглядным и понятным. Одним из путей решения данной задачи является использование компьютерных технологий, что позволяет не только увидеть на экране динамическую 3D модель, но и рассмотреть бесконечное множество вариаций, как, например, при построении сечений различных многогранных фигур. Наилучшим образом для этих целей подходит компьютерная среда GeoGebra с её возможностями анимации.

Согласно ФГОС ОШО [7] будущему выпускнику старшей школы предъявляются следующие требования:

- сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;
- понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения;
- умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;

- сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;
- применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

Для достижения такого качества подготовки школьников содержание дисциплины представим, как совокупность трех компонентов: когнитивный, деятельностный, ценностный, ориентирующие десятиклассников на осознание ценности математических знаний.

Когнитивный блок содержания включает в себя предметные знания и методические рекомендации для учителя по интеграции основ дисциплины в сложившуюся систему школьного математического образования.

Деятельностный блок содержания представлен комплексом практико-ориентированных заданий, выполнение которых школьник учится владеть определенной системой знаний, применять знания на практике с использованием компьютерных технологий.

Ценностный блок содержания состоит из комплекса задач, ориентирующих ученика на осознание ценностных аспектов изучаемого материала. Это задачи на анализ, сравнение и оценку объектов, которые подразумевают осуществление школьником оценочной деятельности, ставят его в ситуацию выбора ценностей, на проявление рефлексии, критического мышления.

Для достижения цели были решены веденые нами следующие задачи:

- Изучить зарубежный и российский опыт использования систем динамической геометрии при обучении школьников решению позиционных и метрических задач в пространстве.

- Изучить конструктивные, вычислительные и анимационные возможности систем динамической геометрии как средства обучения школьников решению задач по стереометрии.
- Рассмотреть основные дидактические принципы отбора содержания обучения школьников решению стереометрических задач на основе использования систем динамической геометрии.
- Изучить темы школьного курса стереометрии, в рамках которых обучение решению задач допускает поддержку системами динамической геометрии, обоснование выбора тем.
- Рассмотреть задачи на построение сечений.
- Рассмотреть задачи на вычисление расстояний.
- Рассмотреть задачи на вычисление углов.
- Проверить эффективность применения динамических чертежей при обучении решению позиционных и метрических задач в пространстве

Опираясь на полученные результаты эксперимента, мы можем отметить, что поставленная цель исследования (создание методики использования системы динамической геометрии GeoGebra для обучения учащихся 10 классов решению задач по геометрии) была достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальная сайт GeoGebra [электронный ресурс] - режим доступа: https://geogebra.org (дата обращения: 16.04.2017)

2. Сайт института Айова [электронный ресурс] - режим доступа: https://sites.google.com/site/geogebrainstituteofiowa/ (дата обращения: 16.04.2017)

3. Электронный учебник «A Laboratory Guide for Elementary and Middle School Geometry Using GeoGebra» [электронный ресурс] - режим доступа: https://sites.google.com/site/geogebraiowa/new-geogebrabook-versions-of-these-activities (дата обращения: 16.04.2017)

4. Shadaan, P.: 2013, 'Effectiveness of Using Geogebra on Students' Understanding in Learning Circles', in Leong Kwan Eu (eds.), The Malaysian Online Journal of Educational Technology, vol. 4, Malaysia, pp. 1–11.

5. Royati Abdul Saha: 2014, 'The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning', in Ahmad Fauzi Mohd Ayub and Rohani Ahmad Tarmizi (eds.), International Conference on Mathematics Education Research, Malaysia, pp. 686–693.

6. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» №73-ФЗ от 29 декабря 2012 года.

7. Приказ «Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» № 413 от 6 октября 2009 года.

8. Хонюкова В.С. «Формирование пространственного мышления школьников в рамках выполнения требований фгос общего образования» // Научное сообщество студентов XXI столетия. ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ: сб. ст. по мат. XXVII междунар. студ. науч.-практ. конф. № 12(27). URL: http://sibac.info/archive/guman/12(27).pdf (дата обращения: 16.04.2017)

9. Ларин С.В. «Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Учебное пособие» - Ростов-на-Дону: Издательство Легион, 2015 - 192 с.

10. Безумова О.Л. «Обучение с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие» / Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова»; О.Л. Безумова, Р.П. Овчинников, О.Н. троицкая и др.; отв. ред. О.Л. Безумова – Архангельск : КИРА, 2011 – 140 с.

11. Основы дидактики высшей школы : (учеб. пособие) / В.И. Загвязинский, Л.И. Гриценко. – Тюмень : Изд-во ТюмГУ, 1978. – 91 с.

12. Мордкович А.Г., Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте [Текст]: дис. … д-ра. пед. наук 13.00.02 / Москва, 1986. – 355 с

13. «Профессиональный стандарт педагога» утверждён Приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от «18» октября 2013 г. № 544н

14. Гейн А.Г. Информатика: учебн. для 11 кл. общеобразоват. учреждений [Текст] / А. Гейн, А.И. Сенокосов – М: Просвещение, 2014 – 336с.

15. Семакин И.Г. Информатика. Базовый курс. 9 класс / И.Г. Семакин, Л.А. Залогова, С.В. Русаков, Л.В. Шестакова. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016 – 208 с.: ил.

16. Иванов С.Г., Рыжик В.И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» [Текст] / Иванов С.Г., Рыжик В.И. – М.: Просвещение,2013. – 144 с.: ил. – (Работаем по новым стандартам).

17. Шабанова М.В., Ширикова Т.С. Компьютерный эксперимент в системе методов работы с теоремой [Текст] // Современные проблемы науки

и образования. – 2013. – № 2; URL: http://www.science-education.ru/108-9005 (дата обращения: 28.04.2017).

18. Иванова А. Ю. Практическое моделирование. Компьютерный эксперимент. Методические указания для преподавателя: Учеб. пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005 – 112с.

19. ВикипедиЯ Свободная энциклопедия [электронный ресурс] - режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82 (дата обращения: 28.04.2017)

20. Ширикова Т.С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием geogebra [Текст]: дис. … канд. пед. наук 13.00.02 / Архангельск, 2014. – 250 с.

21. Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий [Текст]: дис. д-ра.пед. наук 13.00.02 / Красноярск, 2001. – 351 с.

22. Анциферова А.В., Майер В.Р. «Живая геометрия» как средство развития исследовательских умений студентов в условиях индивидуально-ориентированного обучения // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2010 (2) / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2010. – с. 9 - 15.

23. Далингер В.А. Компьютерные технологии в обучении геометрии [Текст] // Информатика и образование.- 2002.- №8, с.71-77

24. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений [Текст]/ М.:Просвещение, 2006 – 257с.

25. Иванов С.Г., Рыжик В.И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» [Текст] / Иванов С.Г., Рыжик В.И. – М.: Просвещение,2013. – 144 с.: ил. – (Работаем по новым стандартам).

26. Ершов А.П. Компьютеризация школы и математическое образование. Пленарный доклад 6-му Международному конгрессу по математическому образованию [Текст] / URL: http://ershov.iis.nsk.su/archive/eaindex.asp?lang=1&did=3444, (дата обращения: 30.04.2017).

27. Концепции развития математического образования в Российской Федерации [Текст] / URL: http://www.math.ru/conc/vers/conc-3003.pdf, (дата обращения: 30.04.2017)

28. Иванова А. Ю. Практическое моделирование. Компьютерный эксперимент. Методические указания для преподавателя: Учеб. пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005 – 112с

29. Люблинская И.Е., Рыжик В.И. От доказательства с использованием компьютера к компьютерному доказательству [Текст] // СПб: Компьютерные инструменты в школе, 2009. – № 1. – с. 14 - 20.

30. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие [Текст]/ Федер. гос. автоном. образоват. учреждение высш. проф. образования «Север. (Аркт.) федер. ун-т им. М.В.Ломоносова»; [Безумова О.Л., Овчинникова Р.П., Троицкая О.Н., Троицкий А.Г., Форкунова Л.В., Шабанова М.В., Ширикова Т.С., Томилова О.М.] – Архангельск: КИРА, 2011. – 140 с

31. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: Учебное пособие [Текст] / [Под ред. Е. И. Смирнова] / Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – 454 с

32. Приказ от 31 марта 2014 №253 Министерства образования и науки Российской Федерации «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования»

33. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 июня 2015 г. №576 «О внесении изменений в федеральный

перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального и общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденного приказом министерства образования и науки российской федерации от 31 марта 2014 г. № 253»

34. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 26 января 2016 г. №38 «О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального и общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденного приказом министерства образования и науки российской федерации от 31 марта 2014 г. № 253»

35. Атанасян Л.С., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы. Учебник для общеобраз.орган. Базов. и углубл.уровни(МГУ-школе) / Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. – М: Просвещение, 2017 – 255с.

36. Бутузов В.Ф. Математика: алгебра и начало математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы / Бутузов В.Ф., Прасолов В.В. / Под ред. Садовничия В.А. – М: Просвещение, 2014 – 240с.

37. Александров А. Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс. Углублённый уровень / Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. – М: Просвещение, 2014 – 272с.

38. Александров А. Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс. Углублённый уровень / Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. – М: Просвещение, 2014 – 272с.

39. Потоскуев Е.В., Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. 10 класс. Углубленный уровень / Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. – М: Дрофа, 2016 – 226с.

40. Потоскуев Е.В., Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. 11 класс. Углубленный уровень / Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. – М: Дрофа, 2016 – 384с.

41. Шарыгина И. Ф., Геометрия (10-11) (баз.) – М: Дрофа, 2016 – 240с.

42. Потоскуев Е.В., Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Задачник. 10 класс. Углубленный уровень / Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. – М: Дрофа, 2016 – 257с.

43. Потоскуев Е.В., Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Задачник. 11 класс. Углубленный уровень / Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. – М: Дрофа, 2016 – 240с.

44. Ященко И.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2016 года по МАТЕМАТИКЕ / И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий – М: ФИПИ, 2016 – 42с.

45. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2017 года по математике Профильный уровень [электронный ресурс] - режим доступа: http://fipi.ru/sites/default/files/document/1478682475/ma_ege_2017.zip (дата обращения: 05.05.2017)

46. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2017 году единого государственного экзамена по математике [электронный ресурс] - режим доступа: http://fipi.ru/sites/default/files/document/1478682475/ma_ege_2017.zip (дата обращения: 05.05.2017)

47. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена [электронный ресурс] - режим доступа: http://fipi.ru/sites/default/files/document/1478682475/ma_ege_2017.zip (дата обращения: 05.05.2017)

48. Пикулева Н.Л. Методы построения сечений многогранников / М.Н. Пронина, Н.В. Сальникова, Т.В. Чернышева [электронный ресурс] – режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/212754/ (дата обращения: 15.05.2017)

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

На ребрах параллелепипеда даны три точки А, В и С. Построить сечения параллелепипеда: а) плоскостью KMN, К и N – вершины одного ребра в основании, а M – лежат на ребре, соединяющем основания и не пересекающем KN; б) плоскостью ABC, если точки А, Б и С лежат на ребрах, выходящих из одной вершины

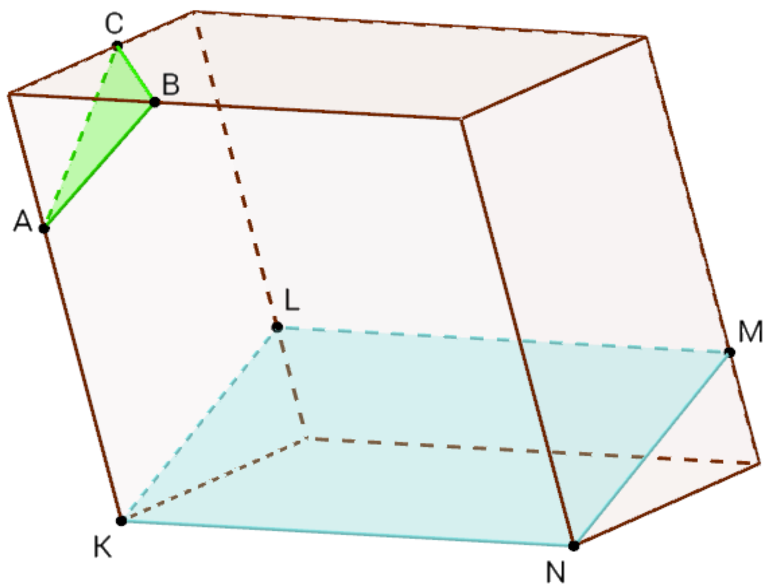

Рисунок 32: Сечение параллелепипеда плоскостями KMN и ABC

Решение

а) KMN пересекает плоскость основания по прямой KN (Рисунок 19). Т.к. противоположные грани параллелепипеда параллельны, то плоскость KMN пересекает противоположную грань по прямой, проходящей через точку M, параллельно KN. Построим точку L: при помощи инструмента «Параллельная прямая» построим прямую, проходящую через точку M, параллельную прямой KN; при помощи инструмента «Пересечение» найдём L – точку пересечения построенной прямой и ребра параллелепипеда. KLMN – искомое сечение, KLMN является четырёхугольником по построению.

б) Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах параллелепипеда лежат точки А, Б и С. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если точки А, Б и С лежат на ребрах, выходящих из одной вершины (см. рис. 39, а), нужно провести отрезки АБ, ВС и СА, и получится искомое сечение — треугольник АВС.

Приложение Б

Задача №71 Изобразите тетраэдр DABC и на ребрах DB, DC и BC отметьте соответствующие точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости АБС; б) прямой KN и плоскости ABD.

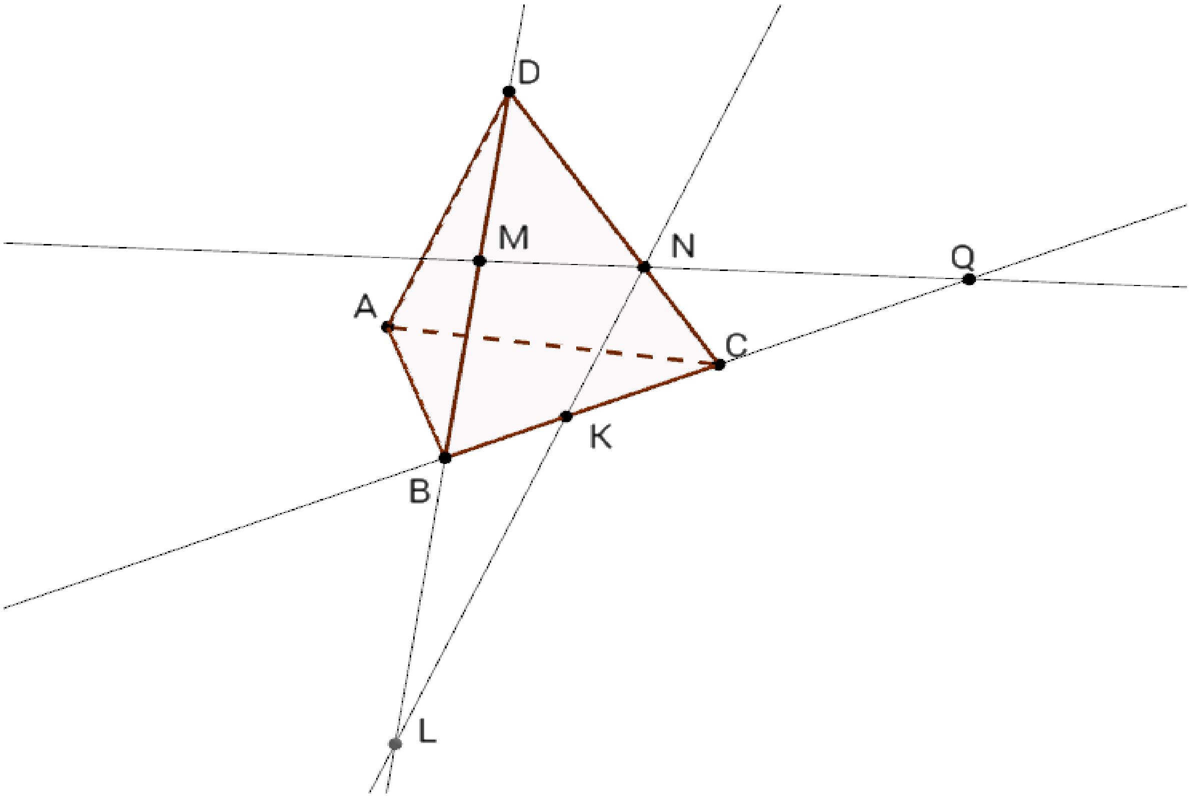

Рисунок 33: Построение точек пересечения в пространстве

Задача №79 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение: а) плоскостью ABC_1; б) плоскостью ACC_1. Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

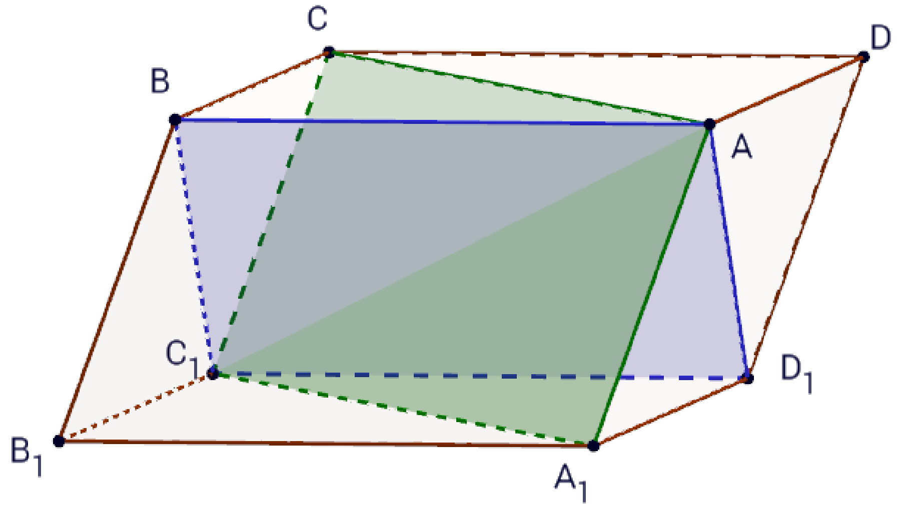

Рисунок 34: Построение сечений параллелепипида

Задача №80 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также отрезок, по которому эти сечения пересекаются.

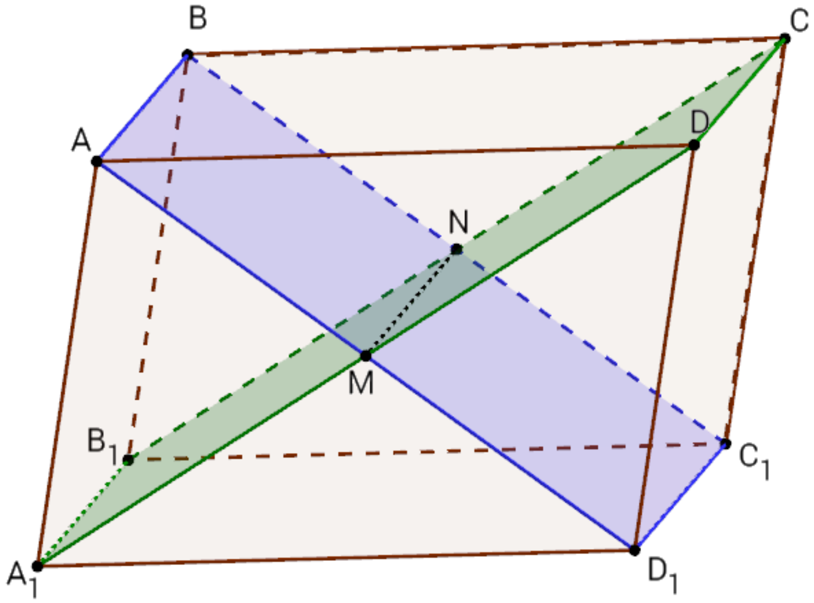

Рисунок 35: Построение линии пересечения двух сечений параллелепипида