

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования  
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. В.П. АСТАФЬЕВА  
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики  
(полное наименование института/факультета/филиала)  
Выпускающая кафедра Математического анализа и методики  
обучения математике в ВУЗе  
(полное наименование кафедры)

**Ганичева Надежда Владимировна**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Тема РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ 8 КЛАССА НА ЭЛЕКТИВНОМ  
КУРСЕ «ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ»

Направление подготовки/специальность 44.03.01 Педагогическое образование  
(код и наименование направления)

Направленность (профиль)  
образовательной программы Математика  
(наименование профиля для бакалавриата)



**ПОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ**  
Зав. кафедрой  
профессор, доктор п.н., к.ф. – м.н.  
Игумина Л.В.  
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)  
20.06.2017  
(дата, подпись)

Руководитель  
к.п.н. Н.А. Журавлева  
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

Дата защиты 20.06.2017

Обучающийся Ганичева Н. В.  
(фамилия, инициалы)

09.06.2017  
(дата, подпись)

Оценка \_\_\_\_\_  
(прописью)

Красноярск  
2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ НА ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ ПО МАТЕМАТИКЕ .....	6
1.1 Элективный курс. Теоретический аспект .....	6
1.2 Исследовательские умения учащихся .....	11
1.3 Требования к элективному курсу, направленному на развитие исследовательских умений учащихся .....	20
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ» .....	30
2.1 Цели и содержание элективного курса «Задания с параметрами» .....	30
2.2 Формы, методы и средства элективного курса «Задания с параметрами» .....	36
2.3 Эксперимент .....	61
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	68
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	70

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** В школьной математике есть классы задач, вызывающие особый интерес учителей и методистов, традиционно считающиеся трудными для освоения учениками: задачи на построение, решение систем алгебраических неравенств, текстовые задачи с использованием дробных и процентных соотношений... Задачи с параметрами занимают в этом перечне не последнее место. Вызвано это рядом обстоятельств.

Во-первых, трудности вызывает само понятие параметра и характер задачи с параметром. Этот термин не имеет чётко сформулированного определения, подобного определениям других математических терминов. Его первичное восприятие учащимися усложнено тем, что в их субъектном опыте сложно выделить примеры использования параметров. Решение задачи с параметрами требует вместо однозначно заданного объекта рассмотреть множество объектов, добавляет в рассматриваемую ситуацию динамики, в отличие от подавляющего большинства «статичных» задач, решаемых в школьном курсе.

Во-вторых, задачи с параметрами относятся к задачам более высокого уровня сложности, не имеют однозначных алгоритмов решения, требуют уверенного владения разнородными фрагментами школьного курса математики, применения разнообразных эвристик.

Наконец, несмотря на большое количество статей и учебных пособий, методика обучения решению задач с параметрами для большинства учителей остаётся недостаточно разработанной.

Проведенный нами анализ привел к **противоречию** между достаточной разработанностью в методической литературе темы задачи с параметрами и отсутствием методического сопровождения изучения темы задания с параметрами.

**Проблема** данного исследования вытекает из противоречия и состоит в разработке методического сопровождения элективного курса, направленного на развитие исследовательских умений учащихся.

Перечисленные обстоятельства создают определённые трудности в работе с детьми, испытывающими интерес к математике, ориентированными на высокие результаты итогового экзамена по предмету. Таким образом, актуальным является вопрос рассмотрения методических аспектов: введение понятия параметра и знакомство с задачами с параметром, формирование специальных умений, определение круга типовых задач, формулировка эвристик к решению этих задач.

**Объект исследования** – процесс обучения математике в 8 классе основной школы.

**Предмет исследования** – процесс развития исследовательских умений учащихся 8 класса на элективном курсе «Задания с параметрами».

**Цель исследования** – разработать методическое сопровождение элективного курса «Задания с параметрами», направленного на развитие исследовательских умений учащихся 8 класса.

**Задачи исследования:**

1. Рассмотреть теоретические аспекты исследовательских умений учащихся и возможность их развития на элективных курсах.
2. Определить требования к элективному курсу, направленному на развитие исследовательских умений.
3. Разработать методическое сопровождение элективного курса «Задания с параметрами», направленное на развитие исследовательских умений учащихся.

**Гипотеза:** если в процессе обучения математики использовать элективный курс «Задания с параметрами», то это будет способствовать развитию исследовательских умений учащихся 8 класса.

**Практическая значимость исследования:** разработанный элективный курс может быть использован учителями математики для углубленного изучения предмета и для подготовки к экзаменам.

**Структура выпускной квалификационной работы:** выпускная квалификационная работа представлена двумя главами, введением, заключением, списком литературы.

# **ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ НА ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ ПО МАТЕМАТИКЕ**

## **1.1 Элективный курс. Теоретический аспект.**

ФГОС предоставляет школьникам возможность в каждом цикле дисциплин учебного плана выбирать факультативные и вариативные дисциплины. Считается, что своим выбором школьники принимают непосредственное участие в формировании содержания собственного образования, как это и предусмотрено в Федеральном законе об образовании № 273-ФЗ . Если смотреть на эту ситуацию широко, то действительно это право выбора реализуется, но реализуется глобально. За этим выбором не видно индивидуальности. Система образования пока еще не настолько подвижна и открыта, чтобы учитывать индивидуальные предпочтения каждого школьника. При выборе факультативных и вариативных дисциплин, на данном этапе развития системы образования, чаще всего учитывается либо предпочтение самого учебного заведения, и это предпочтение навязывается учащимся, либо, в лучшем случае, предпочтение большинства школьников. В результате, та часть школьников, которая осталась в меньшинстве, вынуждена подчиниться предпочтению большинства.

Для более полного обеспечения прав учащихся, которые прописаны в законе об образовании, а также отражены в федеральных образовательных стандартах, необходимо не формально, а в полной мере реализовать те возможности, которые данный закон и стандарты предоставляют.

Для того чтобы более точно определить роль и место элективных курсов в организации самостоятельной работы студентов и в формировании с их помощью индивидуальных планов обучения, необходимо разобраться с самим понятием элективного курса, определить их задачи и характерные

особенности. В толковом словаре иноязычных слов элективный в переводе с латинского языка означает избранный, отобранный. Словарь педагогики приводит практически аналогичное определение данного понятия – избирательный. Следовательно, элективный курс это избранный, отобранный, избирательный курс или другими словами курс по выбору.

Курс по выбору, согласно П.С. Лернеру это – факультативный, элективный курс, направленный как на внутрипрофильную дифференциацию, так и на компенсацию профильной однонаправленности. Курс способствующий углублению индивидуализации профильного образования, расширению мировоззренческих представлений учащихся. Согласно данному определению очевидно, что курсами по выбору могут быть не только элективные курсы, но и факультативы, однако это не является одним и тем же. В соответствии с Письмом Минобразования России от 13.11.2003 г. № 14-51-277/13 «Об элективных курсах в системе профильного обучения на старшей ступени общего образования», элективные курсы принципиально отличаются от факультативных курсов. Они являются обязательными для обучаемых. Факультативные же занятия обучаемые могут посещать по желанию. Кроме того, из определения видно, что элективные курсы являясь курсами по выбору ориентированы не просто на углубленное изучение учебного материала по профильным дисциплинам, но и на внутрипрофильную дифференциацию и индивидуализацию профильного образования, т.е. элективные курсы изначально ориентированы на то, чтобы предоставлять обучаемым возможность принимать участие в формировании содержания своего образования и строить индивидуальный план обучения.

Согласно Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования, утвержденной приказом Минобразования РФ от 18.07.2002 № 2783 под элективными курсами понимаются обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Здесь стоит обратить внимание на то, что право на выбор элективных учебных предметов и курсов осуществляется на

старшей ступени общей образовательной школы для реализации профильного обучения. Данное понятие распространено достаточно широко и используется многими исследователями, такими как Г.А. Рогова, А.А. Колесников, Т.И. Рыбкина, Д.С. Ермаков и др.

Далингер В.А. определяет элективные курсы как средство создания пространства индивидуальной познавательной деятельности. Из этого определения видно, что элективные курсы позволяют организовать индивидуальные программы обучения для каждого обучающегося с учетом их способностей и потребностей.

Опираясь на приведенные выше определения можно сделать следующий вывод, что элективные курсы – это обязательные для изучения курсы по выбору обучаемых, которые за счет дифференциации и индивидуализации образования предоставляют обучаемым возможность принять непосредственное участие в формировании содержания собственного образования, самостоятельно создавать пространство индивидуальной познавательной деятельности.

При составлении программы элективного курса необходимо руководствоваться следующими принципами.

1. Принцип регулярности. Основная работа происходит в классе на совместных занятиях и дома, индивидуально. Полноценная подготовка невозможна без достаточно большого количества часов, посвященных работе над задачей. При этом лучше заниматься понемногу, но часто, скажем, по часу ежедневно, чем раз в неделю, но по многу часов. Хорошо бы еженедельно набирать по 10 часов, включая классные занятия. Заниматься математикой, думать можно, даже гуляя на улице (но не переходя при этом проезжую часть).

2. Принцип параллельности. Несмотря на то, что учебное пособие разбито на отдельные главы по темам, было бы совершенно неправильно изучать эти темы последовательно, одну за другой. Следует постоянно

держат в поле зрения несколько (две-три) тем, постепенно продвигаясь по ним вперед и вглубь.

3. Принцип опережающей сложности. Не следует загружать ученика большой по объему, но несложной работой, так же как и ставить его в положение лисицы перед виноградом, задавая непосильные для него задачи. Слишком легко и слишком трудно — равно плохо. Напомним, что оптимальными для развития цивилизации оказались широты, климатические условия которых, не позволяя человеку расслабиться, в то же время не превращали его жизнь в сплошную борьбу за существование. На практике реализовать этот принцип можно, например, следующим образом. Задавая на дом очередную недельную порцию задач (от 10 до 15), желательно подобрать их так, чтобы 7-8 из них были доступны практически всем слушателям элективного курса, 3—4 были бы по силам лишь некоторым, а 1—2, пусть не много, но превышают возможности даже самых сильных учеников. Ученик имеет право отложить трудную задачу, если он потрудился над ее решением определенное время, скажем, один час, и она у него не получилась. В этом случае процесс усвоения новых идей будет более эффективным. Действие этого принципа будет тем лучше, чем ближе друг к другу по уровню математического развития члены факультатива. Кроме того, он развивает такие полезные качества, как сознательность, внутренняя честность, научное честолюбие.

4. Принцип смены приоритетов. Приоритет идеи. В период накопления идей, а также при решении достаточно трудных задач ученику прощаются небольшие и даже средние огрехи в решении задачи; главное — правильная идея решения, которая может быть доведена до числа за разумное время. Именно так действуют иногда и экзаменационные комиссии вузов при оценке решений наиболее сложных конкурсных задач.

Приоритет ответа. При отработке уже известных идей, а также при решении наиболее простых, стандартных задач главное — правильный ответ.

5. Принцип вариативности. Очень полезно на примере одной задачи рассмотреть различные приемы и методы решения, а затем сравнить получившиеся решения с различных точек зрения: стандартность и оригинальность, объем вычислительной и объяснительной работы, эстетическая и практическая ценность.

6. Принцип самоконтроля. Большинство людей склонны прощать себе небольшие (да и крупные) ошибки. Школьники не исключение. Проявлением этого недостатка, имеющего большие последствия на экзамене, является привычка подстраиваться под ответ. Решив задачу, получив ответ и заглянув в конец учебника, обнаружив некоторые, иногда серьезные, расхождения, ученик делает кое-какие исправления, в результате которых его ответ соответствует ответу, данному в учебнике, и считает, что все в порядке, хотя задача не решена.

Регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач должен быть неизменным элементом самостоятельной работы.

7. Принцип быстрого повторения. По мере накопления числа решенных задач следует просматривать и некоторым образом раскладывать по полочкам образовавшийся задачный архив примерно по следующей схеме: эта задача простая — я ее без труда решил в свое время и сейчас вижу весь путь решения от начала до конца. Эта задача потруднее — я ее в свое время не решил (решил с трудом, нашел правильную идею, но запутался в вычислениях), но хорошо помню ее решение, данное учителем (товарищем). И наконец, эту задачу я не решил, объяснение вроде бы понял, но сейчас не могу восстановить в своей памяти. Надо разобраться в своих записях или же спросить об этой задаче учителя.

8. Принцип работы с текстом. Школьные учебники приучили учеников иметь дело с текстами разжеванными; более или менее сложные места, как правило, предваряются объяснениями учителя. Учебник читают, а не изучают с карандашом, бумагой и напряжением мысли. А ведь работа со сложными научными текстами, понять которые иногда не проще, чем решить

небольшую проблему,— будни научного работника. В пособии немало трудных задач, снабженных лишь краткими указаниями. Понять эти указания, заполнить логические пробелы, выполнить промежуточные вычисления, рассмотреть самостоятельно варианты, сопровождающиеся оборотом «аналогично»,— главное назначение этих задач.

9. Принцип моделирования ситуаций. Полезно моделировать критические ситуации, которые могут возникнуть на экзамене, и отрабатывать стереотипы поведения.

Итак, в первом параграфе проведен анализ педагогической литературы по вопросам элективных курсов. Выделены дидактические принципы составления программ элективных курсов.

## **1.2 Исследовательские умения учащихся**

Федеральный государственный образовательный стандарт ориентирует учителей на организацию исследовательской деятельности школьников. Однако результаты проведенных исследования отношений учителей к организации исследовательской деятельности позволяют сделать вывод о том, что они не владеют достаточными знаниями о необходимом минимуме исследовательских умений учащихся. В связи с этим актуальной становится проблема определения перечня конкретных исследовательских умений, которым учитель должен обучить школьников. Для решения данной практической проблемы школьного образования необходимо представление о разнице данных понятий: в отличие от навыков, умение может образовываться и без специальных упражнений в выполнении какого-либо действия. Данные знания позволяют определиться с сутью понятия «исследовательские умения». Несмотря на множество подходов к определению данного понятия, мы будем придерживаться точки зрения П.В. Середенко, считающего, что «исследовательские умения и навыки

школьников - это возможность и ее реализация выполнения совокупности операций по осуществлению интеллектуальных и эмпирических действий, составляющих исследовательскую деятельность приводящих к новому знанию». Таким образом, в соответствии с данной позицией мы будем рассматривать понятие «исследовательские умения».

Обратимся к анализу работ зарубежных исследователей. Интерес к организации исследовательской деятельности, исследовательскому методу стал наиболее заметным в конце XIX - начале XX вв. В США большую роль в становлении данного метода сыграл философ-прагматик, педагог Джон Дьюи.

Дьюи считал, что ребенка нужно обучать тому, что может быть полезно в жизни, поэтому он особое значение придавал развитию исследовательских умений. По мнению историка педагогической мысли Г.Б. Корнетова, Джон Дьюи являлся реформатором образования, который полагал, что «образование должно базироваться на исследовательском методе, помогающем ребенку самостоятельно формулировать и решать проблемы, стимулирующем познавательную активность, связывающем освоение мира с личным опытом».

Польский педагог В. Оконь пишет о том, что

процесс проблемного обучения во многом схож с процессом научного исследования, ученый характеризует умения, необходимые учителю и ученикам для ведения исследовательской деятельности. В. Оконь считает необходимым, чтобы в ходе проведения исследования ученик действительно почувствовал определенную теоретическую или практическую трудность, сформулировал основную проблему или уяснил сформулированную учителем, захотел решать эту проблему и смог это сделать.

Таким образом, анализ опыта зарубежных авторов позволяет нам выделить ряд умений, которые помогают учащимся проводить исследование. К таковым относятся: умение самостоятельно формулировать проблему,

умение мотивировать себя к решению данной проблемы, умение находить способы для решения проблемы.

Большую работу в отношении разработки и использования исследовательского метода в обучении школьников проделали отечественные педагоги-исследователи, такие как М.И. Махмутов, И.Я. Лернер, В.И. Загвязинский, А.И. Савенков.

М.И. Махмутов считает, что «при исследовательском методе доминируют проблемные задачи и задания, имеющие обыкновенно практический характер (проведение опыта, сбор дополнительной информации, фактов, их самостоятельный анализ и выводы, поиск аргументов, доказательство или опровержение и т.п.)». Для решения данных заданий ученику, таким образом, необходимы следующие исследовательские умения: умение собирать дополнительную информацию, умение находить и формулировать аргументы, умение доказывать и опровергать что-либо ими, умение делать самостоятельный анализ и выводы, умение проводить опыты.

В.И. Загвязинский, описывая сущность поисково-исследовательской технологии обучения, говорит следующее: «Чтобы построить учебное познание как систему задач и разработать средства для того, чтобы, во-первых, помочь учащимся в осознании проблемности предъявляемых задач, во-вторых, найти способы сделать разрешение проблемных ситуаций личностно-значимым для учеников. Наконец, в-третьих, научить их видеть и анализировать проблемные ситуации, вычленять проблемы и задачи». Также автор считает, что в процессе проведения исследования ученики должны самостоятельно изучать литературу, источники, вести наблюдения, измерения и выполнять другие действия поискового характера.

Затрагивая тему различий между имитацией исследования и подлинным исследованием, В.И. Загвязинский пишет о том, что в обоих случаях нужен анализ достигнутого, обнаружение противоречий и проблем, формулирование задач, выдвижение гипотез, их проверка, интерпретация результатов, выдвижение предложений об их использовании в теории и на

практике, а значит, и тот, и другой виды поиска формируют во многом сходные творческие способности и подходы: аналитические способности, проблемное видение, умение выдвинуть гипотезу, альтернативное мышление, рефлексию, способности интерпретации, интуицию и т.д.

Специалист в области исследовательского обучения А.И. Савенков соотносит развитие исследовательских умений с преодолением соответствующего этапа исследовательской работы. Таким образом, ученый должен пройти десять шагов к намеченной цели, среди которых актуализация проблемы (выявить проблему и определить направление будущего исследования); определение сферы исследования (сформулировать основные вопросы, ответы на которые мы хотели бы найти); выбор темы исследования (попытаться как можно строже обозначить границы исследования); выработка гипотезы (разработать гипотезу или гипотезы, в том числе должны быть высказаны и нереальные, провокационные идеи); выявление и систематизация подходов к решению (выбрать методы исследования); определение последовательности проведения исследования; сбор и обработка информации (зафиксировать полученные знания); анализ и обобщение полученных материалов (структурировать полученный материал, используя известные логические правила и приемы); подготовка отчета (дать определения основным понятиям, подготовить сообщения по результатам исследования); доклад (защитить результаты публично перед сверстниками, ответить на вопросы).

К специальным знаниям, умениям и навыкам исследовательского поиска учеников начальной школы А.И. Савенков относит умение видеть проблемы; умение ставить вопросы; умение выдвигать гипотезы; умение давать определение понятиям; умение классифицировать; умение наблюдать; умения и навыки проведения экспериментов; умение делать выводы и умозаключения; умение структурировать материал; умение готовить тексты собственных докладов; умение объяснять, доказывать и защищать свои идеи.

Данный список умений отражает возрастные особенности детей, однако почти полностью соответствует представленной выше последовательности организации исследовательской работы.

Исследование трудов отечественных авторов позволяет сделать следующие выводы: к исследовательским умениям относятся умения, напрямую связанные с этапами проведения исследования.

Ученики должны овладеть умением анализировать проблемные ситуации, выдвигать гипотезы, предположения, формулировать проблемы, умением проводить опыты, вести наблюдения и измерения, умением работать с информацией, искать дополнительную информацию в различных источниках, умением проверять и интерпретировать результаты, умением находить и формулировать аргументы, умением выдвигать предположений в использовании результатов в теории и на практике, умение готовить тексты собственных докладов, умение объяснять, доказывать и защищать свои идеи.

Зачастую исследователи классифицируют исследовательские умения в соответствии с этапами выполнения исследовательской работы. Однако ряд современных авторов рассматривает классификацию исследовательских умений с иных позиций.

П.М. Скворцов к учебным исследовательским умениям относит умение работать с научной и научно-популярной литературой, проводить наблюдения и ставить эксперимент. Однако, по мнению Л.З. Елекеновой, «немаловажную роль играют и теоретические, интеллектуальные умения (способность к анализу и обобщению результатов наблюдения, исследования, способность к построению научных гипотез и т.д.), а также мотивационный фактор». Таким образом, Л.З. Елекенова все исследовательские умения делит на два вида: теоретические и практические.

С.В. Хапугина дает определение исследовательским умениям и предлагает собственный перечень исследовательских умений, в который включает умение формулировать актуальность темы исследования; видеть и выделять проблемы; выдвигать гипотезы; структурировать полученный в

ходе материал исследования; анализировать, конкретизировать, обобщать, оценивать теоретические положения исследования; подбирать и применять соответствующие методы и методики исследования; организовывать эксперимент; делать выводы и умозаключения. Стоит заметить, что перечисленные умения по своей сложности больше характерны для студентов, чем для школьников. Однако уже сегодня стоит обучать данным умениям, по крайней мере, старшеклассников.

О.В. Лебедева, исследуя примеры использования эвристического метода, приходит к пониманию того, какие исследовательские умения в данном случае могут быть сформулированы. Кроме прочих, О.В. Лебедева относит к исследовательским умениям умение планировать решения задач, умение строить модели и работать с моделями.

Е.А. Острикова под исследовательскими умениями понимает умения, относящиеся к структурным компонентам исследовательских способностей: формулировать актуальность темы исследования; видеть и выделять проблемы; выдвигать гипотезы; структурировать полученный в ходе материал исследования; анализировать, конкретизировать, обобщать, оценивать теоретические положения исследования; подбирать и применять соответствующие методы и методики исследования; организовывать эксперимент; делать выводы и умозаключения.

Н.А. Семенова предлагает рассматривать умения и навыки учащихся, необходимые для ведения исследовательской деятельности, по блокам. К первому блоку исследователь относит умения и навыки организации своей работы, ко второму блоку - умения и навыки исследовательского характера, к третьему - умения и навыки работы с информацией, к четвертому - умения и навыки представления результата своей работы. Таким образом, непосредственно исследовательские умения данным автором выделены в отдельный блок и включают следующие умения и навыки: уметь выбирать тему исследования; осуществлять целеполагание как этап деятельности;

выстраивать структуру исследования; осуществлять поиск информации; владеть методами исследования и общелогическими методами.

Подводя итог анализу работ отечественных авторов, стоит сказать, что на сегодня существуют различные классификации исследовательских умений.

Одни исследователи перечень исследовательских умений составляют, исходя из этапов исследовательской работы, другие авторы разделяют умения на два вида (практические и теоретические) в соответствии с господствующим способом деятельности.

Проблему составления собственного перечня исследовательских умений мы будем решать с помощью контент-анализа - формализованного метода изучения текстовой и графической информации, заключающегося в переводе изучаемой информации в количественные показатели и ее статистической обработке.

Контент-анализ исследований позволяет сказать, какие умения чаще всего включаются в перечень исследовательских умений, которыми должен овладеть школьник. Анализ дает право говорить о том, что чаще всего в перечень входят следующие умения: умение проводить эксперимент (опыты, наблюдения, измерения), умение выдвигать гипотезы, умение делать выводы, умение видеть проблему или проблемную ситуацию, умение работать с различными источниками информации и анализировать её, умение подбирать и владеть различными методами исследования, умение планировать исследование, умение структурировать и конкретизировать.

Полученный перечень отражает совокупность исследовательских умений, которым необходимо обучить школьников. Данные умения позволяют ученику самостоятельно работать над проблемой исследования. В данном перечне особое внимание уделяется исследовательским умениям, которые связаны с логическим мышлением: умение анализировать, конкретизировать, структурировать, делать выводы. Овладение ими в

недостаточном объеме не позволит ученику проводить собственное исследование, именно поэтому данные умения включены в перечень.

Подводя итог сказанному, стоит отметить, что перечень отобранных нами умений в ходе контент анализа трудов исследователей по данной проблеме не является достаточно полным, однако понимание учителями необходимости обучению вышеперечисленным умениям школьников поможет эффективнее организовывать исследовательскую деятельность школьников.

В дидактике и педагогике под понятием средства обучения понимаются материальные объекты и носители учебной информации и предметы естественной природы, а так же искусственно созданные человеком и используемые педагогами и учащимися в учебном процессе в качестве инструмента их деятельности.

Задачи в обучении математике играют очень большую роль. Л.М. Фридман в одной из своих работ определяет значение этой роли с двух сторон. С одной стороны, он говорит о том, что «конечные цели этого обучения сводятся к овладению учащимися методами решения определенной системы математических задач. С другой стороны, он выделяет то, что «полноценное достижение целей обучения возможно лишь с помощью решения учебных и математических задач». Он приходит к выводу, что «решение задач в обучении математике выступает и как цель и как средство обучения».

Выделим различия математической задачи и учебной. Л.В. Виноградова выделяет то, что «в математической задаче получают математический факт (корень уравнения, график функции и т.д.)

В учебной задаче - учебный факт, т.е. знание на уровне обобщения, когда оно выполняет функции метода обучения или учебного познания».

Вовлечение учащихся в учебно-исследовательскую деятельность приводит к необходимости составления соответствующих исследовательских заданий.

Исследовательские задания нестандартны по формулировке проблемы, по способам нахождения их решения, для них характерны как многовариантность способов их решения, так и верных ответов. Для их решения необходимо выдвижение нескольких мощных идей, связывающих различные разделы математики (геометрию и комбинаторику, геометрию и математический анализ и т. п.) Решение их может быть получено только путем следования известному алгоритму, оно требует выдвижения нескольких гипотез, поиск решения их не обходится без догадок, эвристик. Процесс решения исследовательских заданий не конечен: полученное решение порождает новую проблему, имеет свое развитие, углубление в сформулированную проблему. Исследовательское задание представляет собой серию задач, составляющих как бы единое целое, так как в ней рассматривается общая проблема, которая реализуется в различных частных случаях. Результатом решения исследовательского задания является не только получение новых сведений об исследуемом объекте, но и получение новых, ранее неизвестных учащимися методов решения.

И.Я. Лернер, под исследовательской задачей понимает задачу, в основе которой лежит противоречие между известным и искомым, находимым при помощи системы действий умственного или практического характера, смысл которых - в обнаружении не заданных в условии задачи связей, а в построении неизвестных субъекту преобразований. В. Оконь под задачами-проблемами понимает такие задачи, в которых содержится определенная практическая или теоретическая трудность, требующая исследовательской активности, приводящей к решению.

Итак, во втором параграфе рассмотрена исследовательская деятельность, которая способствует формированию мыслительных и творческих способностей, умение ставить и решать проблемы, способность ориентироваться в разных потоках информации, умение общаться, формулировать и высказывать свое мнение; прогнозированию последствий тех или иных последствий; проведению анализов результатов.

### **1.3 Требования к элективному курсу, направленному на развитие исследовательских умений учащихся**

Основную воспитательную и развивающую функцию (помимо семьи) выполняет школа, а потому социальные, экономические, политические, культурные преобразования, происходящие в нашей стране, обуславливают изменение социального заказа система образования, основная задача которой - научить ребенка мыслить. Ценность приобретает не количество получаемых знаний (хотя это, безусловно, тоже важно), а умение справляться с потоком информации способность добывать необходимые сведения обрабатывать, делать соответствующие выводы, планировать свою дальнейшую деятельность.

В сфере образования выделяются новые приоритеты: от сообщения, репродуцирования суммы систематизированных знаний – к конструированию знаний; от навязывания знаний – к пробуждению интереса к ним; от «образования на всю жизнь» - к образованию как базе дальнейшего непрерывного совершенствования; от тезиса «знание – сила» к тезису «познание – сила».

Нынешнее образование ориентировано на развитие личности. Современному обществу нужен выпускник, самостоятельно мыслящий, умеющий видеть и творчески решать возникающие проблемы.

Особую актуальность эта задача получает в динамично развивающемся информационном пространстве. Однако учащиеся не всегда могут ориентироваться в огромном потоке новых сведений, извлекать необходимые факты и данные, продуктивно использовать их в своей работе.

Выходом из создавшейся проблемной ситуации может стать организация учебно-воспитательного процесса на основе исследовательской деятельности школьников. Под учебно-исследовательской деятельностью понимается такая форма организации учебно-воспитательной работы, которая связана с решением учениками творческой, исследовательской

задачи с заранее неизвестным результатом и предполагающая наличие основных этапов, характерных для научного исследования: постановка проблемы, ознакомление с литературой по данной проблеме, овладение методикой исследования, сбор собственного материала, его анализ, обобщение, выводы.

Именно исследовательский подход в обучении делает ребят участниками творческого процесса, а не пассивными потребителями готовой информации. Тем более что современная система образования ориентирует учителя не на передачу знаний в готовом виде, а на организацию обучения самостоятельной деятельности школьника и доведения ее до уровня исследовательской работы, выходящей за рамки учебной программы. Исследовательская деятельность позволяет вооружить ребенка необходимыми знаниями, умениями, навыками для освоения стремительно нарастающего потока информации, ориентации в нем и систематизации материала.

Исследовательская деятельность дает ученикам:

- активизацию мыслительной деятельности; развивает познавательную и социальную активность; заинтересованность в обучении; расширение кругозора; возможность осознанно получать знание и использовать их;
- умение работать над проблемой; навыки сбора и обработки информации; умения и навыки исследовательской деятельности; научится применять знания в дальнейшей исследовательской деятельности;
- возможность проявить способности творчески проявиться, возможность определиться в интересах, самоопределение, самоутверждение, самореализация, самооценка (понять свои ошибки), познать себя.
- сотрудничать с учителем, обсуждать, предлагать свою точку зрения;
- радость, сопереживания, общения, познания.

На основе анализа данной декларации выявляется яркое проявление положительных изменений учащихся, происходящие за счет участия в исследовательской деятельности.

Исследовательская деятельность учащихся - образовательная технология, использующая в качестве главного средства учебное исследование, исследовательская деятельность предполагает выполнение учащимися учебных исследовательских задач с заранее неизвестным решением, направленных на создание представлений об объекте или явлениях окружающего мира, под руководством специалиста учителя предметника, научного сотрудника и т.п.

Учебное исследование – образовательный процесс, реализуемый на основе технологии исследовательской деятельности. Его основные характеристики:

- выделение в учебном материале проблемных точек, предполагающих вариативность; специальное конструирование учебного процесса «от этих точек» или проблемная подача материала;
- развитие навыка формулирования развитие навыков анализа и выбора одной версии в качестве истинной;
- гипотез;
- обучение работе с разными версиями на основе анализа свидетельств или первоисточников (методика сбора материала, сравнения и др.);
- знакомство с первоисточниками.

Авторская позиция учащегося в учебных исследованиях. Как было сказано, главной целью исследовательской работы школьников является развитие их способности критически мыслить, формулировать проблему, искать ее решение. Эти цели достигаются наилучшим образом, если ребенку создаются условия для самостоятельной постановки задач исследования, выбора объекта, анализа и т.д. В этом случае юный исследователь действует в соответствии со своими интересами и предпочтениями, занимает

творческую, авторскую позицию при выполнении исследования. Очевидно становится то, что на каждом этапе нужно дать учащемуся определенную свободу в работе, иногда даже в ущерб методике, - иначе исследование может постепенно превратиться в последовательность стандартных учебных этапов.

Основная особенность исследования в образовательном процессе - то, что оно является учебным. Если в науке главной целью является получение новых знаний, то в образовании цель исследовательской деятельности – приобретение учащимся функционального навыка ведения научной работы.

Исследовательские способности – индивидуальные особенности личности, являющиеся субъективными условиями успешного осуществления исследовательской деятельности.

Исследовательская позиция - значимые личностные основания, исходя из которого, человек не просто активно реагирует на изменения, происходящие в мире, но и ощущает потребность искать и находить ранее ему неизвестное. Исследовательская позиция проявляется и развивается в ходе реализации исследовательской деятельности.

Педагогический проект руководителя исследовательской работы - организация образовательного процесса на основе учебного исследования. Его главной целью является достижение образовательного результата - развитие способностей учащихся анализировать полученные данные, планировать ход выполнения работы. С этой целью руководитель анализирует склонности и способности учащихся, возрастные особенности и предлагает те или иные темы исследований, адаптирует методики, создает условия для проведения познавательной инициативы детей.

Исследовательские умения - умения, относящиеся к структурным компонентам исследовательских способностей:

- формулировать актуальность темы исследования;
- видеть и выделять проблемы;
- выдвигать гипотезы;

- структурировать полученный в ходе материал исследования;
- анализировать, конкретизировать, обобщать, оценивать теоретические положения исследования;
- подбирать и применять соответствующие методы и методики исследования;
- организовывать эксперимент;
- делать выводы и умозаключения.

Главными составляющими содержания образования при реализации исследовательской деятельности являются:

- построение ориентационных сетей, позволяющих вписывать любое явление или информацию в общую систему;
- приобретение исследовательского опыта, выражающегося в самостоятельном проведении исследовательского цикла от начала до конца и освоение его структурных элементов;
- выстраивание личностного отношения к объекту исследования, а также результатам, включая развитие рефлексивного мышления, а также эмоционально-нравственную оценку собственных действий;
- способность строить эффективные коммуникации для достижения результата, включая фиксацию недостающего ресурса, формирование запроса по его поиску.

Основные функции учебного исследования в образовательном процессе:

- путь повышения эффективности усвоения учащимися знаний, умений, навыков; освоения государственных образовательных программ общего образования и достижения соответствующих образовательных стандартов;
- инструмент становления и развития психических функций, общих и специальных способностей, мотивационных установок учащихся;
- способ профориентации и начальной профессиональной подготовки;
- средство обретения молодым поколением культурных ценностей и традиции научного сообщества.

Исходя из этого, логично сформулировать исследовательское обучение:

- создание познавательной базы исследовательской компетентности - представлений об общей систематике знаний человечества, которая задается через сетку учебных предметов, определяемых базисным учебным планом;

- развитие базовых способностей личности к рефлексивному мышлению, аналитическому подходу, становлению субъектности или способности «строить» себя как человека, субъекта собственной деятельности;

- введение ребенка в мир культуры с помощью культуры научного общества;

- освоение принятых здесь способов и норм деятельности, восприятию на личностно значимом уровне образцов, авторитетов и ценностей научного сообщества;

- приобретение навыка решения познавательных, поисковых, проектных задач исследовательским методом.

Среди форм организации исследовательской деятельности выделим следующие:

1. Проблемное ведение уроков базисного компонента учебного плана общеобразовательной школы. Реализуется проблемный подход к ведению урока: учитель представляет различные точки зрения по конкретной теме, организовывает дискуссию, в процессе которой проходит анализ предлагаемых первоисточников и высказываются различные мнения. Можно организовать доклады учащихся по проблемным вопросам (с написанием проблемно-реферативных работ).

2. Курсы в рамках школьного компонента - элективные курсы педпрофильного и профильного обучения в области естественных и гуманитарных наук, которые строятся на основе выполнения исследовательских проектов.

3. Программы дополнительного образования с применением широкого спектра различных форм групповой и индивидуальной работы по дополнительным образовательным программам. Фиксация результата в виде законченной исследовательской работы.

4. Применение исследовательского подхода при проведении экскурсий. Постановка индивидуальных исследовательских задач с фиксацией результата в виде отчетных работ.

5. Организация походов и экспедиций как самостоятельных форм исследовательской деятельности и как элементов годового цикла проведения учебных исследований.

6. Проведение научно-практических конференций и конкурсов-форм презентации исследовательской деятельности.

При проектировании организации указанных форм педагог планирует ряд этапов, перечень которых в целом остается одним и тем же для разных форм организации исследовательской деятельности.

Этап 1. Выбор педагогом образовательной области и предмета:

- степень связи с базовой программой соответствующего класса,
- наличие собственной практики научной работы в избранной области;
- возможности консультационной помощи специалистов и ее формы;
- форма образовательной деятельности в плане работы учреждения

Этап 2. Разработка программы вводного теоретического курса (занятия):

- доступность – соответствие учебной нагрузки возможностям учащихся (по сложности, продолжительности, включению в учебный план);
- опора на базовую программу (новые сведения опираются на базовые предметные программы, количество новых вводимых понятий и схем не составляют большей части программы);
- необходимость и достаточность объема теоретического материала для возникновения у учащихся интереса к работе, выбору темы и постановке задач исследования.

Этап 3. Выбор темы, постановка целей и задач исследования, выдвижения гипотезы:

- соответствие выбираемой темы, преподанному теоретическому материалу;
- соответствие сложности темы и объема работы возможностям учащихся;
- исследовательский характер темы, формулировка темы, ограничивающая предмет исследования и содержащая проблему исследования;
- соответствие задач цели, адекватность, гипотезы.

Этап 4. Подбор и освоение методики исследования:

- методологическая корректность методики- соответствие научному прототипу, обоснованность адаптации к специфике детского исследования;
- соответствие методике целям и задачам, предполагаемому объему и характеру исследования;
- доступность освоения и реализации школьниками.

Этап 5. Сбор и первичная обработка материала:

- доступность запланированного объема работ учащихся;
- доступность объекта исследования;
- адекватность используемой методики объекту и условиям исследования.

Этап 6. Анализ, выводы:

- наличие обсуждения, сравнения данных с литературными источниками;
- соответствие результатов и выводов поставленным целям и задачам сформулированной цели.

Этап 7. Презентация:

- правильность оформления итогов;
- отражение этапов исследования;
- отражение авторской позиции учащегося.

Результаты исследовательского обучения разделяются на две части.

Первая – формальная – соответствие результата нормам проведения исследования и структуре модели исследовательской деятельности.

Вторая – показывает, какие способности, и характеристики личности были развиты в процессе исследовательского обучения. Такими характеристиками могут быть: способности видеть и выделять проблему, способность к мотивации, наличие и выраженность авторской позиции и др.

Исследовательская деятельность для реализации педагогического потенциала должна строиться на принципах доступности, естественности, осмысленности, самостоятельности, экспериментальности, культуросообразности.

Осуществление принципа доступности предполагает способность ребенка выполнить задание и ощущение успеха от результатов собственной деятельности после завершения исследования. Обратим внимание на то, что задание должно соответствовать возрасту ученика, при этом не быть слишком легким или слишком трудным.

Таким образом, ребенок генетически предрасположен к учению, ему изначально интересно все, что в мире. Любознательность детей способствует активному изучению действительности, поэтому именно исследовательский метод представляется наиболее адекватным потребностям учащихся. Главная особенность исследовательского подхода – «активизировать обучение, придав ему, исследовательский, творческий характер, и таким образом передать учащемуся инициативу в организации своей познавательной деятельности.

Вовлеченный в исследовательскую деятельность ребенок находится на пути продвижения от незнания к знанию, от неумения к умению, то есть осознает смысл и результат своих усилий. Только те знания, которые добыты исследовательским путем, становятся прочно усвоенными и осознанными, образующими научную картину мира в сознании ребенка.

Исследовательская деятельность способствуют формированию мыслительных и творческих способностей, умение ставить и решать проблемы, способность ориентироваться в разных потоках информации, умение общаться, формулировать и высказывать свое мнение; прогнозированию последствий тех или иных последствий; проведению анализов результатов.

Рассмотренные понятия могут оказаться полезными для учителей, работающих над подготовкой учащихся к итоговой аттестации, а также для работы в рамках элективных курсов и в других формах работы с учащимися, проявляющими интерес к изучению математики.

Итак, в этом параграфе рассмотрены требования к элективному курсу, направленному на развитие исследовательских умений учащихся. А также, этапы технологии – исследовательская деятельность учащихся на элективных курсах, ее методы и формы.

## ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ» ДЛЯ 8 КЛАССА

### 2.1 Цели и содержание элективного курса «Задания с параметрами»

Элективный курс «Задания с параметрами» направлен на реализацию концепции стандарта образования, на расширение школьного курса математики, подготовку к итоговой аттестации.

Программа элективного курса «Задания с параметрами» составлена на основе книги П.И. Горштейна, В.Б. Полонского, М.С. Якира «Задачи с параметрами».

Отличительной особенностью курса является систематизация и классификация квадратных уравнений с параметром и методов их решения по основным разделам курса математики 8 класса. Разделы элективного курса свободно могут перемещаться в рамках курса, без ущерба для общей цели и результата, в зависимости от основной программы.

На ЕГЭ, вступительных экзаменах, олимпиадах часто встречаются квадратные уравнения с параметрами. В школьном курсе математики такие задачи рассматриваются пока крайне редко, бессистемно, поэтому при решении таких задач у школьников обычно возникают затруднения. Но в государственном стандарте образования по математике отмечается, что в ближайшем будущем задачи с параметрами будут введены в школьный курс.

**Цель курса:** расширить представления учащихся о задачах с параметрами.

**Задачи курса:**

- Расширить представления учащихся о задачах с параметрами, мотивировав и разобрав уравнения и неравенства.
- Показать некоторые нестандартные приёмы решения задач на основе свойств квадратичной функции и графических соображений.
- Формировать навыки проектной работы.

## **Планируемые результаты обучения:**

### **Учащиеся узнают:**

- Что представляет собой уравнение с параметром.
- Способы решения задач с параметрами.

### **Учащиеся научатся:**

- Решать задачи с параметрами,
- Самостоятельно работать с дополнительной литературой.
- Принимать правильные решения при ответе на вопросы.
- Учащиеся получают навыки исследовательской работы.

Рассмотрим подробнее разделы элективного курса.

## **1. Предпрофильное образование**

Известны такие основные задачи проведения элективных курсов по математике:

1. Познакомить школьников с тем, что и как делает математик – профессионал при решении задач в профессиональной деятельности.
2. Представить школьникам возможности попробовать свои силы в решении задач, которыми занимается математик.
3. Познакомить с тем, каким образом математика используется в тех областях человеческой деятельности, которая интересует школьников.
4. Представить различные возможности включиться в творческую деятельность и выполнить задания, результаты выполнения которых могут быть зачтены и включены в портфолио выпускника девятого класса.
5. Позволить школьникам, выбравшим элективный курс, изучить важный раздел математики углубленно, изучить методы решения новых задач.
6. Подготовить школьников к заключительной аттестации и вступительным экзаменам по математике.

Для того, чтобы могли быть разработаны и реализованы такие элективные курсы, они должны удовлетворять ряду требований. Вот некоторые из таких требований:

- Содержание математического материала должно быть таким, чтобы он позволял решить широкий спектр педагогических задач.
- Математический материал связан с различными темами школьной программы.
- Математический материал должен применяться при решении задач в различных областях человеческой деятельности.
- Математический материал элективного курса должен активно использоваться при проведении заключительной аттестации как за курс основной, так и средней школы.
- Математическое содержание не только должно быть доступным учащимся, но и позволить учащимся выбрать свой уровень изучения программы элективного курса и проявить свои способности.
- Реализация программы элективного курса должно готовить школьников к дальнейшему образованию и обучению в вузе.

**Доказательство:**

1. Задания с параметром могут быть сформулированы в любой теме школьной программы по математике.
2. Задания с параметром включаются во все три части единого государственного экзамена (как по алгебре, так и по геометрии).
3. Практически все вузы на экзаменах по математике включают задачи с параметром (уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств, содержащие параметры) именно потому, что решение этих задач позволяет узнать не только то, как школьник усвоил программу по математике, но и то, каким образом он может применять свои знания в новых ситуациях. Кроме того, такие задания позволяют проверить владения математическими методами решения задач, умение спланировать и реализовать решение цепочки вспомогательных задач, уровень логического мышления абитуриентов, их математическую культуру. Задачи с параметром, предлагающиеся на экзаменах, являются прообразами тех научно – исследовательских задач, которыми предстоит решать будущим студентам.

4. Большинство задач с параметром могут быть решены различными методами. Это позволяет школьникам проявить свои творческие способности и выполнить задания для портфолио.

5. Возрастающая популярность задач с параметром не случайна. Теоретическое изучение и математическое моделирование процессов в различных областях человеческой деятельности часто приводит к сложным задачам, в которых «много» различных неизвестных, которые по существу и представляют собой параметры. Важно осознать, что с точки зрения математики решение любой задачи с параметром – представляет собой изучение или применение свойств функции многих переменных.

6. Важность задач с параметром связана и с тем, что необходимым элементом решения этих задач является исследование характера и конечного результата процесса в зависимости от того, какие значения принимает параметр. Такие задачи требуют не только глубокого понимания сути процесса, владения математическими методами, но и умения логически мыслить.

7. Элективный курс позволяет предлагать школьникам такие творческие задания: решение задач различными методами, самостоятельное составление задач, выполнение творческих проектов, учитывающие интересы и возможности учащихся.

– Изучение элективного курса позволяет школьникам отработать такие понятия:

- Область допустимых значений;
- Область значения функции;
- Условие равносильности преобразований;
- Необходимые и достаточные условия;
- Четность, периодичность, монотонность функций, симметричность систем уравнений и неравенств относительно всех или некоторых переменных.

Курс «Задания с параметрами» является элективным курсом (курсом по выбору для учащихся). Эта часть программы для учащихся 8-го класса, которые интересуются математикой, информатикой, экономикой, биологией, педагогикой или психологией, гуманитарными науками и др. Изучение данного элективного курса позволит школьникам овладевать такими умениями: анализировать ситуации, планировать свою деятельность, осуществлять самоконтроль, планировать и выполнять перебор, работать с учебной и научной литературой, систематизировать знания по теме, решать и составлять задачи и др. Кроме того, изучение элективного курса позволит выполнить такое творческое задание, которое они могут (в разных вариантах) применить в тех областях, которые их интересуют (а не только в математике), подготовить материалы для портфолио. Это будет способствовать изменению отношения к математике, улучшению качества математической подготовки учащихся.

Основа курса – личностная, развивающая и продуктивная направленность занятий. Одна из целей изучения данного элективного курса – представить ученикам возможность личностного самоопределения и самореализации в выборе профиля обучения и участия в творческой деятельности, связанной с математикой и применением ее методов. Для реального достижения этой цели требуется, чтобы каждый школьник:

1. Осознал актуальность формулировки и решения задач с параметром.
2. Не только усвоил основные теоретические сведения и методы решения задач с параметром, но и создал личностно значимую для него образовательную продукцию – система знаний по элективному курсу.
3. Мог выбрать и выполнить творческое задание в соответствии со своими интересами и склонностями.

Общепедагогическая направленность занятий – сопряжение социализации и индивидуализации по отношению к математике в целом и того, чем интересуется каждый ученик в отдельности. Знания, умения и

методы решения задач с параметром являются элементами математической культуры. Умение решать такие задачи необходимое условие подготовки учащихся к заключительной аттестации и прообраз тех задач, которыми, обучаясь в вузе, будут заниматься ученики практически всех факультетов. Таким образом, усвоенные методы решения и составления задач с параметром, результаты выполнения творческих заданий (выполненных учеником) – выступает отдельным образовательным продуктом. Реально реализовать это можно, если будет разработана специальная разно уровневая система заданий для учащихся и школьникам будет обеспечена возможность выбора как уровня выполнения заданий, так и выбора творческих заданий.

**Модель элективного курса**, который разрабатывается для учащихся включает:

- раздел справок, содержащего основные теоретические сведения, которые используются при решении задач;
- коллекция заданий на каждый из методов решения;
- задания для самостоятельного выполнения;
- раздел тренажеров: отработка методов, обучение самоконтролю и составлению задач, отказу от известных методов решения задач и поиску нового метода и др.;
- раздел личного мониторинга;
- раздел творческих заданий;
- раздел систематизации знаний по теме.

**Количество учебных часов:** 36 часов в 8 классе.

**Образовательная область:** математика.

**Профиль:** естественно – математический, информационно – технологический, экономический, гуманитарный.

Итак, в этом параграфе разобраны подробно цели, задачи, планируемые результаты и модель элективного курса «Задания с параметрами».

## **2.2 Формы, методы и средства элективного курса «Задания с параметрами»**

Элективный курс имеет реальное развивающий, обучающий и воспитательный потенциал, так как он учит школьников готовиться к самообразованию, общаться в условиях учебной деятельности, овладевать общими методами решения задач (не только математических) и др.

Основная методическая установка – обучение школьников навыкам самостоятельной индивидуальной и групповой работы по выделению методов составления и решения задач с параметром. Методика преподавания курса предполагает уровневую дифференциацию, которая задает различную глубину освоения фиксированного содержания и достижение различных уровней планируемых результатов обучения. Содержание минимального уровня определяется выполнением заданий по шаблонам, общего – творческим выполнением заданий.

Общих методов решения задач, в которых присутствуют числовые параметры, не существует. В каждом конкретном случае подход к их решению выбирается исходя из структуры задания. Но во всех случаях необходим анализ полученного решения в зависимости от конкретного значения параметра.

Если требуется решить уравнение, неравенство или их систему, содержащие параметр, то необходимо выяснить, при каких значениях параметра уравнение имеет решение и для всех таких значений параметра найти все решения. Если хотя бы одно значение параметра не исследовано, то решение задачи не считается полным.

В основу решения задач с параметром может быть положен следующий принцип: значение параметра считается произвольно фиксированным и затем ищется решение задачи так, как мы это делаем, решая уравнение или

неравенство с одним неизвестным. Ответом должно быть перечисление решений для каждого допустимого значения параметра, что требует проведения исследования.

Для проведения исследования множество значений параметра по некоторому признаку разбивают на подмножества и затем решают заданное уравнение или неравенство на каждом из этих подмножеств. Множество значений параметра разбивают на подмножества теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение уравнения.

Индивидуальное усвоение основных методов составления и решения задач с параметром осуществляется на основе системы заданий, моделирующих деятельность математика – профессионала от знакомства до проведения исследований и разработок в новом для него разделе математики. Изучение программы курса может быть осуществлено в разных вариантах ( в том числе и на дистанционной основе и в летней математической школе). На всех этапах реализации программы используется компьютер.

Кроме индивидуальной, предполагается и групповая работа учащихся как на занятиях, так и при выполнении творческих заданий. Основная задача учителя – создание условий для того, чтобы школьники могли осуществить выборы, которые им предстоит сделать и усвоили основные методы составления и решения задач с параметром, могли выбрать и выполнить творческое задание.

Отбор конкретных методов обучения осуществляется:

- на основе диагностики учащихся, от сформированности у них общеучебных умений;
- какие выборы осуществили школьники на том или ином этапе изучения курса;
- какие представления о работе математика – профессионала сложились у учащихся;
- от интересов у отдельных учеников;

- какие творческие задания приняты к выполнению;
- какие компетенции формируются в процессе реализации программы элективного курса.

Решение последней задачи обеспечивает наличие в программе курса следующих элементов этих компетенций:

- социально - практическая значимость компетенции (для чего необходимо изучить методы решения задач с параметром и выполнять исследования, предлагаемые для проведения);
- знания, умения и навыки, связанные с решением и составлением задач с параметром;
- способы деятельности с математическими объектами на разных этапах реализации программы;
- минимально необходимый опыт деятельности учеников в сфере данной компетенции и знание того, каким образом можно расширить этот опыт и как проанализировать опыт ее применения;
- мониторинг процесса формирования компетенции и то, каким образом его можно корректировать на разных этапах реализации программы.

Усвоение содержания (в том числе и компетенций) происходит на основе системы заданий. Для учителя будет подготовлены специальное методическое пособие.

Формы проведения занятий существенно зависят от того, какие педагогические задачи решаются на отдельных этапах реализации программы. Единицей работы над темой признан блок уроков. Каждый такой блок моделирует деятельность математика - профессионала, решающего задачу в новой для него области математики. Если говорить о модели, то она состоит из таких элементов:

1. Игра – цель которой обеспечить положительную мотивацию к тому, что будет изучаться в теме и осознанию того, каким образом математик выходит на новые задачи.

2. Работа с ключевыми задачами.
3. Работа учащихся с коллекцией заданий и усвоение методов решения задач.
4. Работа учащихся с задачами для самостоятельного изучения (индивидуально или в группе).
5. Знакомство с творческими заданиями и выбор заданий для выполнения (по своему желанию, индивидуально или с кем-то из учащихся).
6. Самостоятельный анализ своей подготовки по теме и ее коррекция (работа по своей инициативе с разделом «Личный мониторинг»).
7. Участие в выполнении коллективного творческого проекта «Электронный задачник».
8. Систематизация знаний по теме.
9. Сообщение о результатах исследований, выполненных учениками. Обсуждение результатов учениками и анализ деятельности школьника, который выполняет рецензент или учитель, рекомендации по дальнейшей работе над творческим проектом.

В предлагаемой программе количество часов на изучение материала определено для блоков уроков. Внутри блока разбивка по времени изучения определяет учитель. При этом он учитывает результаты своего анализа деятельности учащихся как на уроках, так и при выполнении домашних и творческих заданий и какие продукты решили создавать школьники.

В начале изучения каждой темы школьники информируются:

1. О начальных условиях, которые могут обеспечить успешную работу над темой.
2. О том, какой продукт они могут создать в результате работы над темой и рекомендации учителя о том, что имеет смысл делать и о чем свидетельствует опыт работы над материалом блока (которые школьники могут игнорировать частично или полностью).
3. Школьникам могут быть представлены продукты, которые создали ученики, изучавшие данный элективный курс.

4. Возможные формы отчетности по теме в целом и на отдельных этапах ее изучения.

5. О возможных творческих заданиях и того, каким образом они могут узнать более подробную информацию о каждом из творческих заданий (формулировка задания, информация о руководителе, возможности участия в конкурсах и др.).

6. О том, какую и у кого они могут получить помощь в изучении темы, каким образом обращение за помощью может влиять на оценку выполнения.

**Программа курса обеспечивается учебным пособием** (пособие подготовлено в электронном виде. Его можно использовать при разных вариантах реализации программы ЭК, а также пакетом программных средств «МАРШ», позволяющим выполнять проекты школьникам, которые имеют низкий уровень готовности работать на компьютере). Занятия могут проводиться как с использованием Интернета, так и без его использования.

**Цель учебного пособия** заключается в том, чтобы:

- познакомить с основными теоретическими сведениями и методами решения задач с параметром;
- представить возможность учащимся разобрать решение задач из коллекции заданий и самостоятельно выполнить задания из раздела самостоятельных задач;
- учить работать с учебной и научной литературой;
- представить творческие задания, которые ориентированы на учеников с разными интересами возможностями;
- обеспечить возможность выбора разного варианта работы над темой;
- представить ученикам своевременно изучить уровень своей подготовки и информацию о том, каким образом ее можно своевременно скорректировать.

В качестве дополнительных источников информации по курсу рекомендуется список доступных ученикам изданий, который приводится далее в списке литературы.

Работа с пособием и дополнительными источниками позволяет ученикам готовиться к самообразованию и осознать важность овладения навыками грамотного пользователя.

Курс предполагает интеграцию с другими предметами и выполнение проектов, связанных с интересами учащихся в других учебных предметах.

В рамках данного элективного курса учащиеся овладевают следующими знаниями, умениями и способами деятельности:

- знанием необходимости учитывать наличие параметра в задачной ситуации;
- усвоят основные варианты реализации методов решения задач с параметром, которые они решают изучать;
- умеют определить необходимые теоретические сведения и грамотно их применить;
- умеют выполнить необходимые обоснования и вычисления;
- овладеют методами составления задач с параметром и накопят опыт такой деятельности и обсуждения задач, составленных школьниками;
- имеют опыт коллективного сотрудничества при решении и составлении задач с параметром;
- имеют опыт коллективной работы при подготовке электронного задачника задач, составленных учениками, изучающими элективный курс;
- способны систематизировать знания по теме;
- владеют необходимыми умениями организовать учебно–познавательную деятельность и деятельность по выполнению творческих заданий;
- получают представление о работе математика профессионала;
- получают возможность выполнить задания для портфолио.

Предметом диагностики и контроля служат образовательные продукты учеников (задачи, составленные школьниками; творческие работы учеников; материалы электронного учебника; материалы систематизации знаний по теме), а также их внутренние личностные качества (усвоенные методы составления и решения задач, способы деятельности; знания и умения; контрольные работы и т. п.), которые относятся к целям и задачам элективного курса.

Оценивание деятельности учащихся является результаты анализа деятельности учащихся на уроках, при выполнении домашних заданий и выполнения творческих заданий. Оценка может иметь различные способы выражения – устное суждение педагога, письменные качественные характеристики, отзывы экспертов о результатах выполнения творческих заданий, использование продуктов деятельности школьников при проведении занятий по курсу, отзывы школьников и том, что сделали одноклассники.

Оценке подлежит в первую очередь уровень достижения учеником минимально необходимых результатов, названных в целях и задачах курса. Оцениванию подлежит и то, что школьник делал по своей инициативе, участие школьников в выполнении коллективных заданий и творческих заданий.

Ученик является полноправным субъектом оценивания. Одна из сравнительно новых и сложных задач педагога – обучение учащихся навыкам самооценки и такая организация деятельности учащихся, чтобы они не только могли получить опыт самооценки, но могли проанализировать правильность ее выполнения. С этой целью учителю требуется подготовить критерии оценки деятельности школьников на разных этапах реализации курса и познакомить учащихся с этими критериями (в идеале следует готовить к тому, чтобы школьники сами разрабатывали такие критерии, анализировали свой опыт и обменивались опытом деятельности по самооценке).

Проверка достигаемых учениками образовательных результатов проводится разными способами:

- 1) текущий самоанализ выполнения заданий, предлагаемых учителем с помощью пособия и по материалам, представляемых учителем;
- 2) взаимооценка учащимся работ друг друга или работ, выполненных группой;
- 3) оценка творческих заданий, выполненных учениками и результаты их защиты и обсуждений школьниками;
- 4) оценка материалов систематизации знаний по теме, выполненная учеником;
- 5) текущая диагностика и оценка учителем, экспертом деятельности школьников;
- б) итоговая оценка деятельности школьника и того, что им создано в результате работы над курсом.

Предметом контроля и оценки являются внешние образовательные продукты учеников. Качество ученической продукции оценивается следующим образом:

- по задачам, которые составил ученик и таким критериям: сложность задач, составленных учеником; маскировка метода составления и решения задачи; «близость» к задачам, которые использовались при обучении;
- по степени оригинальности того, что сделал ученик;
- по относительной новизне задач, составленных учеником;
- по возможностям применения при проведении занятий по курсу;
- по результатам участия школьников в конкурсах и олимпиадах;
- по результатам оценки творческих работ, выполненных рецензентами и участию школьников в конференциях и конкурсах.

Итоговый контроль проводится в конце всего курса. Это может быть зачет, специальные конкурсы, олимпиады или защита творческих работ. Для осуществления такого контроля осуществляется на основе системной

проверки образовательных результатов по всем заявленным целям и направлениям курса.

### **Примерное тематическое планирование**

1. Десять мелких «пакостей» параметра (2ч).
2. Первоначальные сведения: параметр, различные формулировки задач с параметром, область допустимых значений параметров и неизвестных, область изменения функции, условие равносильности преобразований, свойства функций (6ч).
3. Решение линейных уравнений, содержащих параметры (2ч).
4. Решения линейных неравенств, содержащих параметры (2ч).
5. Решение уравнений и неравенств с модулем, содержащих параметр (4ч).
6. Квадратные уравнения, содержащие параметры (8ч).
7. Нестандартные задачи с параметрами (8ч).
8. Конкурс по составлению и решению задач с параметром (2ч).
9. Систематизируем знания по теме (2ч).
10. Конференция учащихся (2ч).

### **Краткое содержание отдельных глав курса**

#### **Глава 1. Десять «мелких пакостей» параметра (2ч).**

При изучении данной главы школьникам, в ходе специальной игры, предстоит:

- Обсудить вопрос: Нужно ли учиться составлять новые задачи?
- Познакомиться с общими методами составления задач: на основе «известных стандартных задач», замены постоянных объектов, изменение числа объектов в ситуации, объединение в одной задаче нескольких, составление задач на основе профессионального подхода;
- Методы составления задач не только в математике;
- Вспомнить задачи, которые решались ранее и формулировка задач с параметрами;

– Решение десяти простых задач, в которых сказывается влияние параметра.

– Подвести итоги и сформулировать выводы и задачи, которые имеет смысл учиться решать.

**Основные понятия:** метод составления задач, задача решения уравнения с параметром.

**Десять «мелких пакостей» параметра:** не сложные ключевые задачи, в которых сказывается влияние параметра. Такие задачи учитель может подобрать самостоятельно.

Приведем примеры задач:

**Задача 1.** Сравнить  $a$  и  $2a$ .

**Задача 2.** При каких  $a$  уравнение  $ax^2+2x+1=0$  имеет единственное решение?

**Задача 3.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\frac{x^2 + ex + 1}{x - 2} = 0$  имеет единственное решение?

**Составление и решение задач «близких» к тем, которые отнесены к «мелким пакостям» параметра.**

**Конкурс по составлению задач.**

**Самооценка учащихся:** усвоение методов составления задач; задач, которые были составлены; отзыв о задачах, составленных как отдельными школьниками, так и учащимися вместе.

**Принятие решения о коллективном творческом деле:** «Электронный сборник задач с параметром, составленных теми, кто изучает курс».

**Знакомство с творческими заданиями.** Вот два примера возможных творческих заданий.

**Задание 1 (заказ учителя математики) для тех, кто интересуется компьютерами): Подготовка презентации «Задачи с параметрами» («Методы составления задач с параметрами»).** Школьнику предстоит:

- сформулировать тему и цель создания презентации (возможно после согласования с учителем);
- определить аудиторию, для которой будет готовиться презентация;
- решить какие разделы будут в презентации, оценив степень важности разных разделов;
- спланировать работу по созданию презентации
- подготовить презентацию.

Это задание школьники могут выполнять коллективно или индивидуально, под руководством учителя, другого руководителя или полностью самостоятельно. Результаты этого задания предполагается использовать при изучении этого элективного курса. Презентация может быть размещена на сайте школы в том разделе, в котором речь идет о элективных курсах, которые проводятся в школе.

**Перспектива работы:** может быть подготовлена система презентаций для всех тем программы элективного курса; презентация может быть включена в портфолио, если школьники претендуют на зачисление в класс, в котором информатика будет изучаться углубленно; проведен эксперимент по использованию презентаций; подготовлена работа на конкурс проектов учеников.

**Задание 2. (заказ администрации школы, в которой предполагается гуманитарный профиль образования)** (для тех, кто интересуется иностранными языками). Перевод материала первой главы элективного курса на тот иностранный язык, который изучают ученики, выполняющие это задание. Школьникам предстоит выполнить перевод материала и подготовка материала для сайта школы (в том числе переводу подлежит материал презентации, которая будет создана при выполнении первого задания).

**Перспективы работы:** может быть выполнен перевод всего материала; материалы перевода могут быть включены в портфолио, если

школьники, выполняющее это творческое задание, претендуют на зачисление в гуманитарный класс; материалы могут быть использованы учителем при работе в гуманитарном классе или учениками, которые интересуются психологией или педагогикой (они могут провести эксперимент по применению материалов элективного курса на иностранном языке).

**Глава 2.** Первоначальные сведения: параметр, различные формулировки задач с параметром, область допустимых значений параметров и неизвестных, область изменения функции, условие равносильности преобразований, свойства функций (6ч).

**При изучении этой главы школьникам предстоит:**

- вспомнить основные определения, связанные с уравнениями,
- сформулировать задачу решения уравнения с параметром,
- обсудить основные определения, связанными с решением уравнений с параметром,
- выполнить классификацию задач с параметром (по степени неизвестного),
- привести примеры,
- познакомиться с разными типами задач с параметром;
- сформулировать и доказать условия равносильности преобразований уравнений,
- сформулировать задачу решения уравнений первой степени с параметром.

**Основные понятия:** уравнение с параметром, корень уравнения, что означает решить уравнение, область допустимых значений параметров и неизвестных.

**Содержание главы.**

Вводятся основные определения и доказываются теоремы о преобразованиях. Здесь будут сформулированы такие определения:

- область допустимых значений (ОДЗ);
- условия равносильности, или эквивалентности преобразований;

- необходимые и достаточные условия;
- отдельные типы задач с параметром и понятие решения различных задач;
- классификация задач с параметром по степени неизвестного.

#### Типы задач

№	Тип задачи	Что значит решить задачу?
1	Для каждого значения параметра, фигурирующего в ситуации задачи, решить уравнение (неравенство, систему уравнений и др.)	Определить значения параметра, при которых задача имеет решения и найти эти решения.
2	Найти все значения параметра, при каждом из которых задача имеет решение, с заданными свойствами.	Для решения задачи не требуется решать уравнение или неравенство, а требуется указать значения параметров, при которых решение обладает заданными свойствами. Требуется привести доказательство утверждений.
3	Найти все значения параметра, при которых задача не имеет решений.	Указать значения параметра, при которых задача не имеет решения. При этом требуется привести доказательство своих утверждений.

Такую таблицу школьники должны подготовить на уроке. Для этого школьникам предлагаются система заданий. После выполнения заданий предстоит выполнить классификацию задач по типу вопроса и по степени неизвестного.

Творческие задания аналогичны тем, которые приведены к первой теме.

### **Глава 3.** Решение линейных уравнений, содержащих параметры (2ч).

**Основные понятия:** определение уравнения первой степени, алгоритм решения уравнения первой степени с параметром ( разные варианты его представления), составление задач первой степени с параметром.

**Решение уравнений,** приводимых к линейным. Решение линейно - кусочных уравнений. Применение алгоритма решения линейных уравнений, содержащих параметр.

Геометрическая интерпретация.

**Начальные условия:** учащиеся повторили тему «Решение линейных уравнений».

**Цели:**

- обучение решению уравнений с параметром,
- обучение составлению уравнений,
- обучение самоконтролю,
- формирование устной и письменной речи учащихся,
- изготовление сборника уравнений с параметром, составленных учениками,
- обучение самоанализу результатов творческой деятельности.

**Необходимые умения.** К концу работы над темой школьники должны:

1. Понимать необходимость учета наличия параметра.
2. Уметь решать уравнения вида:

1)  $ax+2=5$ ; 2)  $ax+2=5x$ ; 3)  $\frac{ax+3}{4}=2$ ; 4)  $ax+6=2x+2a$ ; 5)  $\frac{ax+3}{4}=\frac{ax+5}{3}$ ; 6)  $(2x-3)(ax+4)=0$ ; 7)  $a^2x=x+2$ .

3. Уметь составить уравнение с параметром.

4. Уметь проверять и исправлять ошибки, допущенные при решении эталонных заданий с параметром.

**Творческие задания.**

**Приведем задания на решение уравнений первой степени с параметром.**

1. При каких  $a$  уравнение  $(a-1)x=2$  имеет:

- а) положительное решение,
- б) отрицательное решение,
- в) корень, равный нулю?

2. Решить уравнения:

- 1)  $(a^2+4x-5)x=a-1$ ;
- 2)  $||a-1|-2|x=3-a$ ;
- 3)  $||a-1|-2|x=3+a$ ;
- 4)  $||a-1|-2|x=a+1$ .

3. Составить уравнения с модулем.

4. Подготовить сообщения:

- 1) Задачи с параметром.
- 2) Ошибки при решении задач с параметром и способы их предупреждения.

5. Найдите в Интернете материал по теме «Задачи с параметром».

6. Предложите, каким образом провести дистанционный математический бой с учениками другой школы, в котором будут предложены решить задачи с параметром, сводящиеся к уравнениям первой степени.

**Заключительный контроль:** проводят ученики десятого класса путем принятия зачета.

**Глава 4.** Решения линейных неравенств, содержащих параметры (2ч).

**Глава 5.** Решение уравнений и неравенств с модулем, содержащих параметр (4ч).

**Глава 6.** Квадратные уравнения, содержащие параметры (8ч).

**Начальные условия:** учащиеся повторяют задачи с параметром, которые решались в предыдущих темах, изучили тему «Квадратные уравнения», «Теорема Виета и ее применение».

**Цели :**

- обучение обобщению,

- теоретическое обоснование решения задач с параметром на расположение корней квадратного уравнения;
- обучение составлению задач,
- обучение самоконтролю,
- включение школьников в творческую деятельность (в соответствии с их интересами и возможностями).

**Необходимые умения.** К концу изучения темы школьники должны уметь:

**1.** Решать задачи вида: При каких  $a$  уравнение  $x^2+2(a-2)x+a+3=0$  имеет:

- 1) хотя бы один положительный корень;
- 2) хотя бы один отрицательный корень;
- 3) один корень меньше 1, второй корень – больше 1;
- 4) корни уравнения меньше 1;
- 5) корни уравнения больше 1.

**2.** Задачи, в которых фигурирует биквадратное уравнение. Например: При каких  $a$  уравнение  $x^4+(1-a)x^2+a^2-1=0$  имеет: 1) четыре разных решения; 2) три решения; 3) два решения?

**3.** Задачи, в которых фигурирует неравенство. Например: Найдите значения параметра  $a$ , при котором минимальным положительным решением

неравенства  $\frac{ax-12}{x} \geq 9$  является число 5.

**4.** При каких значениях  $a$  уравнение  $|x-3|+|7+x|=a$  имеет два решения?

- 1) составьте аналогичное задание так, чтобы в нем явно не было модулей;
- 2) составьте задание, в котором «больше» модулей;
- 3) составьте задание, в котором выражение зависит от  $a$ .

**5.** При каких значениях  $a$  уравнение  $x^3-3x^2-a^2x+3a^2=0$  имеет два корня?

1)  $a \in \{-3; 0; 3\}$ ; 2)  $a \in [-3; 3]$ ; 3)  $a \in (-3; 3)$ ; 4)  $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ .

6. При каких значениях  $a$  уравнение  $x^2 + a|x| - a - 1 = 0$  имеет четыре решения?

7. Сколько решений, в зависимости от  $a$ , имеет система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y = 3 - a \\ 2x + 2a = 1 \end{cases} \quad ?$$

8. При каких значениях  $a$  уравнение  $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ , где  $a$  и  $b$  - целые числа, имеет только один отрицательный корень? Верно ли школьник выполнил задание, если привел такой ответ:  $a \in (-1; 3]$ ?

9. Решить уравнение  $\sqrt{1-x^2} = a-x$ .

10. Решить уравнение  $\sqrt{x-a} = \sqrt{2x-1+a}$ .

### ***Творческие задания***

1. Подготовить сообщения:

а) Параметр в квадратных неравенствах;

б) Типичные ошибки при решении задач с параметром, их объяснение и предупреждение;

в) Генерирование задач с параметром с помощью компьютера.

2. Подготовить материалы: о задачах с параметром на английском языке; для сайта школы; электронный задачник с задачами с параметром, составленный учениками (с указаниями и ответами).

3. Подготовить сообщения на тему «Задания с параметрами и квадратичной функцией в ЕГЭ».

4. Отследить задачи с параметром в Интернете. Подготовить обучающую программу на основе этих материалов.

5. Изучить свойство корней кубического четырехчлена.

### **Заключительный контроль.**

1. Выполнение заданий ЕГЭ за предыдущие годы и самоанализ личной подготовки. Формулировка проблем и планирование их решения.

2. Сдача зачета. Рецензия на результаты научного руководителя.
3. Результаты работы подшефного и его отзыв о совместной работе с научным руководителем.

4. Экзамен за курс 8 класса.

### **Рейтинговая контрольная работа по теме «Задачи с параметрами»**

Школьники выполняют эту работу только в том случае, если хотят узнать свой рейтинг. Задания выполняются вне уроков. Кроме учителя, работу проверяют ученики десятого класса.

1. Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $ax^2+(a+1)x+1=0$  имеет единственное решение.
2. Для каждого значения  $a$  указать число корней уравнения  $|x^2-3|x+2|=a$ .
3. Решить неравенство  $x^2+2x+a>0$ .
4. При каких  $a$  система уравнений  $\begin{cases} ax+4y=3, \\ x+ay=1-a \end{cases}$  не имеет решений.
5. При каких  $a$  корни уравнения  $x^2+ax, 2a^2=0$  больше 1.
6. Существует ли такое  $a$ , при которых уравнение  $x^2+a|x|-a-1=0$  имеет четыре решения?
7. При каких  $a$  уравнение  $|x-1|+|x+3|=a$  имеет два решения?
8. Решить уравнение:  $a|x+3|+2|x+4|=2$ .
9. Уравнение  $(a-1)x^2-(a+1)x+2a, 1=0$  имеет корни  $x_1, x_2$ . Найти все значения  $a$ , при которых корни меньше 1.
10. При каких значениях параметра  $a$  сумма  $S$  квадратов корней уравнения  $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$  является наибольшей? Найти эту сумму.

### **Система упражнений**

1. При каких  $a$  уравнение  $x^2+2x+a=0$  имеет два различных корня?
2. Решить уравнение  $\frac{x^4+2x^2+a}{\sqrt{x^2-6x-7}}=0$ .

3. При каких  $a$  один из корней уравнения  $16x^2 - 60x + 4a^2 = 0$  является квадратом другого?

4. При каких  $a$  уравнение  $x^2 + 2(a+1)x + a - 3 = 0$  имеет корни разных знаков, которые не превосходят 5?

5. Составьте задачу с параметром, в которой используются утверждения о расположении корней.

6. Предложите задание, которое решается аналогично такому: «При каких  $a$  оба корня уравнения  $x^2 - 2ax + 2 = 0$  больше 1?». Выполните «свое» задание более, чем одним методом.

7. Найдите множество значений функции  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 4x + 6}$ . Выполните задание двумя способами.

8. Найти множество значений функции  $y = \frac{x^2 - ux + y^2}{x^2 + 4xy + 6y^2}$ . Объясните, каким образом могло быть составлено это задание?

9. Предложите задание, для которого вам известно не менее двух различных решений.

10. Найти наименьшее значение функции  $y = |x+a| + |x+2| + |x+3|$ .

11. Сколько корней имеет уравнение  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} = a$  в зависимости от  $a$ ?

12. Найдите все такие значения  $a$ , при которых неравенство  $\frac{x^2 + ax + 5}{x^2 + 2x + 2} < 3$  выполняется при всех  $x$ . Выполните задание разными способами.

## Глава 7.

- Нестандартные задачи с параметрами (8ч).
- Конкурс по составлению и решению задач с параметром (2ч).
- Систематизируем знания по теме (2ч).
- Конференция учащихся (2ч).

Практика работы в школе показывает, что уравнения и неравенства с параметром - это один из сложнейших разделов школьного курса математики, представляющий для школьников наибольшую трудность, как в логическом, так и в техническом плане. Решение уравнений и неравенств с параметрами можно считать деятельностью, близкой по своему характеру к исследовательской. Выбор метода решения, запись ответа совершенствуют умения наблюдать, сравнивать, анализировать, строить схемы и графики, выдвигать гипотезу и обосновывать полученные результаты. Задачи с параметром проверяют не только умение работать по алгоритму, но и способность к поиску нестандартных решений, формируя при этом творческий подход к выполнению заданий.

Решению задач с параметрами в школьной программе уделяется мало внимания. Большинство учащихся либо вовсе не справляются с такими задачами, либо приводят громоздкие выкладки. Причиной этого является отсутствие системы заданий по данной теме в школьных учебниках.

Как начинать решать такие задачи? Прежде всего при решении задач с параметрами надо сделать то, что делается при решении любого уравнения – привести заданные уравнения к более простому виду. Затем необходимо еще и еще раз прочитать задание.

Основные типы задач с параметрами:

Тип 1. Задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.

Тип 2. Задачи, где требуется найти количество решений в зависимости от значения параметра.

Тип 3. Задачи, где необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений.

Тип 4. Задачи, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

*Методические рекомендации при изучении некоторых тем «Линейные и квадратные уравнения».*

Линейное уравнение, записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами:  $ax = b$ , где  $x$  – неизвестное,  $a$ ,  $b$  – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном.

При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него.

Особым значением параметра  $a$  является значение  $a = 0$ .

1. Если  $a \neq 0$ , то при любой паре параметров  $a$  и  $b$  оно имеет единственное решение  $x = b/a$ .

2. Если  $a = 0$ , то уравнение принимает вид:  $0x = b$ . В этом случае значение  $b = 0$  является особым значением параметра  $b$ .

2.1. При  $b \neq 0$  уравнение решений не имеет.

2.2. При  $b = 0$  уравнение примет вид:  $0x = 0$ . Решением данного уравнения является любое действительное число.

### Примеры (ОГЭ 2016)

1)  $x^2 - 2x + a + 3 = 0$ ; 2)  $x^2 - (2 + a)x + 3 = 0$ ; 3)  $ax^2 - 2x + 3 = 0$

### Задачи

#### № 1

Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых отношение дискриминанта уравнения  $bx^2 + 3x + 5 = 0$  к квадрату разности его корней равно  $5b + 6$ .

**Решение:**

$$bx^2 + 3x + 5 = 0, b \neq 0$$

$$\frac{D}{(x_1 - x_2)^2}$$

$$D = 9 - 20b$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 20b}}{2b}$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 20b}}{2b}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 20b}}{2b} - \frac{-3 + \sqrt{9 - 20b}}{2b} = \frac{-\sqrt{9 - 20b}}{b}$$

$$\left( -\frac{\sqrt{9 - 20b}}{b} \right)^2 = \frac{9 - 20b}{b^2}$$

$$\frac{D}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{(9 - 20b)b^2}{9 - 20b} = b^2$$

$$b^2 = 5b + 6$$

$$b^2 - 5b - 6 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$b_1 = \frac{5 - 7}{2} = -1$$

$$b_2 = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

**Ответ:** отношение дискриминанта уравнения  $b^2 + 3b + 5 = 0$  к квадрату разности его корней равно  $5b + 6$  при  $b = -1$  и  $b = 6$ .

### № 2

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решением

неравенства  $\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - (a-1)x - a} < 0$  является объединение двух непересекающихся интервалов.

### № 3

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$(x + 3a) \cdot \sqrt{x - 2a - 25} = 0$  имеет единственное решение.

**Решение:**

$$(x + 3a) \cdot \sqrt{x - 2a - 25} = 0$$

$$\begin{cases} x \geq 2a + 25 \\ x_1 = -3a \\ x_2 = 2a + 25 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3a \\ -3a > 2a + 25 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3a \\ a > -5 \end{cases}$$

Ответ: при  $a \in (-5; +\infty)$  уравнение  $(x + 3a) \cdot \sqrt{x - 2a - 25} = 0$  имеет единственное решение.

**№4.** Решить уравнение

$$2a(a - 2)x = a - 2. \quad (1)$$

Решение. Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при  $x$  обращается в 0. Такими значениями являются  $a=0$  и  $a=2$ .

При этих значениях  $a$  невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при  $x$ . В то же время при значениях параметра  $a \neq 0$ ,  $a \neq 2$  это деление возможно. Таким образом, целесообразно множество всех действительных значений параметра разбить на подмножества  $A_1=\{0\}$ ,  $A_2=\{2\}$  и  $A_3=\{a \neq 0, a \neq 2\}$  и решить уравнение (1) на каждом из этих подмножеств, т. е. решить уравнение (1) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра:

1)  $a=0$  ; 2)  $a=2$  ; 3)  $a \neq 0, a \neq 2$ .

Рассмотрим эти случаи.

1) При  $a=0$  уравнение (1) принимает вид  $0x = -2$ . Это уравнение не имеет корней.

2) При  $a=2$  уравнение (1) принимает вид  $0x=0$ . Корнем этого уравнения является любое действительное число.

3) При  $a \neq 0, a \neq 2$  из уравнения (1) получаем,  $x = (a-2) : 2a(a-2)$ , откуда  $x = 1/2a$ .

Ответ: 1) Если  $a=0$ , то корней нет;

2) если  $a=2$ , то  $x$  – любое действительное число;

3) если  $a \neq 0, a \neq 2$ , то  $x = 1/2a$ .

**№5.** Решить уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0; \quad (2)$$

Решение. В данном случае контрольным является значение  $a=1$ . Дело в том, что при  $a=1$  уравнение (2) является линейным, а при  $a \neq 1$  оно квадратное (в этом и состоит качественное изменение уравнения). Значит, целесообразно рассмотреть уравнение (2) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1)  $a = 1$ ; 2)  $a \neq 1$ .

Рассмотрим эти случаи.

1) При  $a=1$  уравнение (2) примет вид  $6x+7=0$ . Из этого уравнения находим  $x = -7/6$ .

2) Из множества значений параметра  $a \neq 1$  выделим те значения, при которых

дискриминант уравнения (2) обращается в 0.

Дело в том, что если дискриминант  $D=0$  при  $a=a_0$ , то при переходе значения  $D$  через точку  $a_0$  дискриминант может изменить знак (например, при  $a < a_0$   $D < 0$ , а при  $a > a_0$   $D > 0$ ). Вместе с этим при переходе через точку  $a_0$  меняется и число действительных корней квадратного уравнения (в нашем примере при  $a < a_0$  корней нет, так как  $D < 0$ , а при  $a > a_0$   $D > 0$  уравнение имеет два корня). Значит, можно говорить о качественном изменении уравнения. Поэтому значения параметра, при которых обращается в 0 дискриминант квадратного уравнения, также относят к контрольным значениям.

Составим дискриминант уравнения (2):

$$D/4 = (2a+1)^2 - (a-1)(4a+3). \text{ После упрощений получаем } D/4 = 5a+4.$$

Из уравнения  $D/4 = 0$  находим  $a = -4/5$  — второе контрольное значение параметра  $a$ . При этом если  $a < -4/5$ , то  $D < 0$ ; если  $a \geq -4/5$ , то  $D \geq 0$ ,  $a \neq 1$ .

Таким образом, осталось решить уравнение (2) в случае, когда  $a < -4/5$  и в случае, когда  $\{ a \geq -4/5, a \neq 1 \}$ .

Если  $a < -4/5$ , то уравнение (2) не имеет действительных корней; если же  $a \geq -4/5$ , то уравнение (2) имеет действительные корни; если же

$$\{ a \geq -4/5, a \neq 1 \}, \text{ то находим } x_{1;2} = \frac{-(2a+1) \mp \sqrt{5a+4}}{a-1};$$

Ответ: 1) если  $a < -4/5$ , то корней нет;

$$2) \text{ если } a = 1, \text{ то } x = -7/6; \quad 3) \text{ если } a \geq -4/5, a \neq 1, \text{ то } x_{1;2} = \frac{-(2a+1) \mp \sqrt{5a+4}}{a-1};$$

Решение задач с параметрами необходимо учащимся в наше время как при подготовке к ЕГЭ, так и к вступительным экзаменам в ВУЗы. Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики. Даже если бы эти задачи не

предлагались на выпускных и вступительных экзаменах, то все равно в школьной математике задачам с параметрами должно уделяться большое внимание. Учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются (и опыт это подтверждает) с другими задачами. Решение задач, уравнений с параметрами открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применяемых в исследованиях и на любом другом математическом материале.

Таким образом, из всего вышесказанного можно сделать вывод, что каждое занятие элективного курса – это тот же самый урок, требуемый подготовки, отличных знаний изучаемого материала, поиск дополнительных интересных сведений и фактов и др.

Итак, в этом параграфе приведены формы, методы и средства элективного курса «Задания с параметрами». Разработано примерное тематическое планирование, приведены задания на решение заданий с параметрами, рейтинговая контрольная работа по теме «задачи с параметрами». А также, основные типы задач с параметрами и методические рекомендации по теме «Задания с параметрами».

## 2.3 Эксперимент

Программа школьного курса не позволяет рассмотреть задачи с параметрами. При этом такие задачи включаются в материалы ГИА, ЕГЭ, вступительных испытаний в различные учебные заведения и вызывают у учащихся различные трудности, обусловленные необходимостью понимания закономерностей, наличия навыков анализа конкретного случая на основе известных общих свойств объекта, систематичности и последовательности в решении, умения объединять рассмотренные частные случаи в единый результат. Раскрывается возможность решения данной проблемы через введение элективного курса «Задания с параметрами». Курс формирует такие умения и навыки как логичность и самостоятельность мышления, умение обобщить и систематизировать навыки в решении задач.

Разработанный нами элективный курс «Задания с параметрами» предназначен для старшеклассников. Он, с одной стороны, поддерживает изучение основного курса алгебры, направлен на систематизацию знаний, реализацию внутриспредметных связей, а с другой – служит для построения индивидуального образовательного пути.

Данный курс предусматривает использование лекционно-практической системы, а также личностно-ориентированных педагогических технологий. При решении задач значительное место должны занимать поиски идей решения, эвристические соображения, и только затем, само решение, найденное эвристически, проводится строгим логическим рассуждением.

На всех практических занятиях должна проводиться самостоятельная работа учащихся: индивидуально, в парах, в группах – в зависимости от уровня обучаемости школьников. Такая организация способствует реализации развивающих целей курса, так как развитие способностей учащихся возможно лишь при сознательном, активном участии в работе самих учащихся.

Педагогический эксперимент проводился в 2016-2017 учебном году в 8 классах Степановской СОШ в Ирбейском районе Красноярского края и состояла из следующих этапов:

Первый этап состоял в получении данных, с помощью тестирования, которые позволили выявить уровень знаний и умений учащихся, необходимых для усвоения содержания элективных курсов.

На втором этапе осуществлялась разработка экспериментальных материалов.

Третий, завершающий этап работы, состоял в проверке гипотезы исследования. Выяснить, действительно ли разработанные нами элективные курсы и методика их реализации способствуют повышению качества знаний и интенсивности деятельности учащихся.

В соответствии с указанными этапами остановимся на описании результатов экспериментальной работы.

Первый этап экспериментальной работы носил констатирующий характер. На этом этапе проводилось тестирование. Целью данного этапа исследования явилось определение знаний и умений в решение задач с параметрами.

Учащимся предлагалось решить 4 задачи с параметрами.

1. При всех,  $a$  решить уравнение  $(2a-4)x=3a+1$ .

2. При каких значениях,  $a$  парабола  $y = ax^2 - 2x + 25$  касается оси  $x$ .

3. При каких значениях параметра,  $a$  уравнение имеет решение

$$\sqrt{8a - a^2 - 7} = a - 3.$$

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство

$$|a^2 - 2a + a| > 5$$
 не имеет решений на отрезке  $[-1;2]$ .

Результаты решения представлены в таблице 1.

Таблица 1

Оценки	Описание	8 «А» (27 чел)
5	Справились со всеми задачами.	0 (0%)
4	Не справились с одной, задачей.	5 (18%)
3	Не справились с двумя задачами.	10 (37%)
2	Не справились от трех и больше задачами.	12 (45%)

Второй этап экспериментальной работы носил поисковый характер. Этот этап был связан с уточнением тематики элективных курсов, разработкой их содержания и соответствующих методических материалов.

Разрабатываемые методические материалы включили в себя содержание элективных курсов, систему организации и методическое обеспечение и соответствующие рекомендации учителям математики в процессе реализации каждого курса.

Поэтому на данном этапе исследования осуществлялся отбор содержания и методики реализации элективных курсов в соответствии с принципами, указанными в первой главе диссертации.

Наблюдения за ходом внедрения элективных курсов, результатами их выполнения давали возможность для уточнения, улучшения содержания элективных курсов и методических рекомендаций по их использованию.

Результаты второго этапа экспериментальной работы дали возможность выделить тематику целесообразных элективных курсов, получить содержание и методику их реализации.

Третий, завершающий этап экспериментального исследования, носил обучающий (формирующий) характер и преследовал цель - проверить гипотезу исследования.

Эксперимент проводился в 8 классе. Класс был экспериментальный, в нем проводились элективные курсы. В экспериментальном классе элективные курсы были организованы на базе наших разработок в объеме 2 часа в неделю.

Общее количество учащихся в экспериментальном классе составило 25.

С целью сравнения первоначального уровня знаний учащихся и сформированности у них умений решать математические задачи осуществлялась проверка интенсивности деятельности и выявление индивидуальных особенностей учащихся.

Интенсивность деятельности учащихся проверялась в ходе наблюдения за их временными затратами при решении определенных задач.

Для этого были выделены следующие этапы деятельности учащихся:

1. Планирование работы;
2. Составление математической модели (если задача текстовая или прикладная).
3. Составление алгоритма решения задачи.
4. Реализация алгоритма решения.
5. Анализ результатов.

Больше всего времени учащиеся затрачивают на планирование своей деятельности. В экспериментальном классе у учащихся вызвали некоторые затруднения анализ результатов.

Для выявления индивидуальных особенностей учащихся пользовались методом экспертных оценок. В качестве экспертов выступали учителя математических дисциплин и классные руководители. Им было предложено заполнить карту оценки характеристики интеллекта учащегося. Результаты оценки отражены в таблице.

Таблица 2

Особенность	Экспериментальный класс		
	высокая	средняя	низкая
Сообразительность	15	6	4
Отношение к предмету	17	5	3

Логическое мышление	8	11	6
Самостоятельность	11	9	5
Темп продвижения	5	11	9
Работоспособность	15	8	2

Эти данные указывают на достаточно высокий потенциал учащихся.

На основе выше изложенного можно сделать следующие выводы:

1. Учащиеся экспериментального класса имеют достаточно высокий интеллектуальный уровень, что подтверждает результаты констатирующего эксперимента о возможности усвоения содержания предлагаемых элективных курсов. Однако, как показали наблюдения, учащиеся экспериментальной группы имеют несколько низкие показатели индивидуальных особенностей и уровня успеваемости.

2. Среднее значение темпа работы и характеристика интеллекта показывают на возможность дальнейшего сравнения качества знаний.

На этапе формирующего эксперимента осуществлялись внедрение и проверка эффективности предлагаемых курсов.

Анализ результатов усвоения у учащихся (таблица 3)

Таблица 3

Оценки	Описание	8 (27 чел)
5	Справились со всеми задачами.	2 (8%)
4	Не справились с одной задачей.	8 (32%)
3	Не справились с двумя задачами.	13 (52%)
2	Не справились от трех и больше задачами.	2 (8%)

Во время проведения занятий было выявлено, что ученики усвоили тему из школьного курса алгебры и имеют представление о том, что такое параметр. Но при выполнении предложенных заданий у школьников возникали затруднения, так как задачи требовали исследовательских

навыков, логического мышления, что, как оказалось, у них развито слабо. Это говорит о том, что школьный курс ограничен и не позволяет рассматривать задачи, требующие не только действий по алгоритму.

Самостоятельный поиск решения оказался для учеников сложным, но все же позволил школьникам проявить свои способности, заставил задуматься над задачами.

У некоторых учеников есть склонность к изучению математики, но базовый курс математики не создает условий для подтверждения выбранной траектории обучения в соответствии со склонностями, способностями и потребностями школьника и развития этих способностей.

На основе полученных данных формирующего эксперимента можно сделать выводы:

1. Предлагаемые элективные курсы могут быть использованы в подготовке учащихся.

2. Предлагаемая методика является доступной для понимания учащимися старшего звена школы.

3. Дифференцированный подход к учащимся позволил повысить интенсивность их деятельности и добиться на различных этапах однородных результатов.

4. Результаты проведенного исследования указывают на эффективность предлагаемой методики.

Согласно выдвинутой гипотезе нашего исследования в результате внедрения элективных курсов в учебный процесс общеобразовательного учебного заведения повышается развитие исследовательских умений учащихся 8 класса.

На основе полученных данных формирующего эксперимента можно сделать выводы: предлагаемые элективные курсы могут быть использованы в подготовке учащихся, разработанная методика является доступной для понимания учащимися основного звена школы, специфика дифференцированного подхода к учащимся позволила повысить

интенсивность их деятельности и добиться на различных этапах однородных результатов, из результатов проведенного исследования можно констатировать, что предлагаемая методика является эффективной.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое образование является неотъемлемой частью любого полноценного образования. Математика является одним из базовых предметов в школе. Она обеспечивает изучение других дисциплин – это относится не только к предметам физико-математического, технического и естественнонаучного циклов, но и гуманитарным дисциплинам. В современных условиях определенный объем математических знаний, владение некоторыми математическими методами стали обязательными элементами общей культуры – без математических знаний, без сформированных в ходе изучения математики технических навыков и умений (т.е. без владения вычислительными и иными алгоритмами) невозможно дальнейшее обучение, да и практическая деятельность часто оказывается затрудненной. Этим, однако, далеко не исчерпывается роль и значение математики как учебного предмета. Обучение математике выполняет чрезвычайно важные развивающие функции. При изучении математики формируются интеллектуальные умения, необходимые любому человеку вне зависимости от того, в какой сфере деятельности он будет занят в дальнейшем. Совершенствование содержания школьного математического образования связано с требованиями, которые предъявляет к математическим знаниям учащихся практика: промышленность, производство, военное дело, сельское хозяйство, социальное переустройство и т.д.

Теоретический обзор позволяет сделать следующие выводы: проведен анализ педагогической литературы по вопросам элективных курсов. Выделены дидактические принципы составления программ элективных курсов.

Рассмотрена исследовательская деятельность, которая способствует формированию мыслительных и творческих способностей, умение ставить и решать проблемы, способность ориентироваться в разных потоках

информации, умение общаться, формулировать и высказывать свое мнение; прогнозированию последствий тех или иных последствий; проведению анализов результатов. Рассмотренные понятия могут оказаться полезными для учителей, работающих над подготовкой учащихся к итоговой аттестации, а также для работы в рамках элективных курсов и в других формах работы с учащимися, проявляющими интерес к изучению математики.

Разработанный элективный курс «Задания с параметрами» направлен на реализацию концепции стандарта образования, на расширение школьного курса математики, подготовку к итоговой аттестации. Отличительной особенностью курса является систематизация и классификация квадратных уравнений с параметром и методов их решения по основным разделам курса математики 8 класса. Разделы элективного курса свободно могут перемещаться в рамках курса, без ущерба для общей цели и результата, в зависимости от основной программы.

Согласно выдвинутой гипотезе нашего исследования в результате внедрения элективных курсов в учебный процесс общеобразовательного учебного заведения повышается развитие исследовательских умений учащихся 8 класса.

На основе полученных данных формирующего эксперимента можно сделать выводы: предлагаемые элективные курсы могут быть использованы в подготовке учащихся, разработанная методика является доступной для понимания учащимися основного звена школы, специфика дифференцированного подхода к учащимся позволила повысить интенсивность их деятельности и добиться на различных этапах однородных результатов, из результатов проведенного исследования можно констатировать, что предлагаемая методика является эффективной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин. В. В., Рабцевич В. Л. Задачи с параметрами. Справочное пособие по математике. – 2-е изд. - Мн. ООО «Асар», 2002. – 464 с.; ил.
2. Бортаковский А. С., Закалюкин В. М. Задачи повышенной сложности по математике для абитуриентов, - М.: Изд-во МАИ, 2003. – 424 с.
3. Бортаковский А. С., Закалюкин В., Шапошников В. П. Экзаменационные задачи и варианты по математике: Учебное пособие. – 3-е изд. – М.: Изд-во МАИ, 2004. – 384 с.
4. Галицкий М. Л. и др. Сборник задач по алгебре для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики. – 4-е изд. – Просвещение, 1997. – 271 с.; ил.
5. Говоров В. М. и др. Математика: сборник задач с решениями для поступающих в вузы. – М.: АСТ: Астрель, 2005. – 829 с.; ил.
6. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.
7. Горбачев В.И. Методы решения уравнений и неравенств с параметрами. – Брянск, 1999.
8. Горнштейн П. И., Мерзляк А. Г., Полонский В. Б. Якир М. С. Экзамен по математике и его подводные рифы. – М.: Илекса, Харьков:Гимназия, 1998. – 236 с.
9. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. – 3-е изд. – М.; Илекса, Харьков: Гимназия, 1998, - 336 с.
10. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: ИЛЕКСА, 2005.
11. Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: «Илекса», 2005.
12. Далингер В.А. Проектирование элективных курсов по геометрии посредством локальной аксиоматизации // Современные проблемы науки и образования. – 2006. – № 3. – С. 67-70.

13. Дорофеев Г. В. и др. Математика: Для поступающих в вузы: Пособие. – 5-е изд. – М.: Дрофа, 2002. – 672 с.; ил.
14. Дятлов В.Н. Как научить решать задачи с параметром. – М.: Педагогический университет, 2014.
15. Елекенова, Л.З. Сущностная характеристика понятия «Исследовательская деятельность школьников» [Электронный ресурс] / Л.З. Елекенова // Вестник ИГУ. - № 4,- 2010.— С. 45—55. — ([http://elibrary.kz/download/zhurnal\\_st/st2681.pdf](http://elibrary.kz/download/zhurnal_st/st2681.pdf)).
16. Ершова А. П., Голобородько В. В., Ершова А. С. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре (7-11 кл)
17. Загвязинский, В.И. Теория обучения в актуальных вопросах и ответах. Какие наиболее актуальные вопросы теории обучения интересуют современных педагогов? [Текст] / В.И. Загвязинский // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. - 2010. — № 3. — С. 3-9.
18. Загвязинский, В.И. Теория обучения; современная интерпретация : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. По спец. «Педагогика и психология» и «Педагогика» [Текст] / В.И. Загвязинский. — 3-е изд., испр. - М. : Академия, 2006.
19. Карп. А. П. Сборник задач для подготовки к выпускным экзаменам по алгебре и началам анализа. – Санкт-Петербург: Оракул, 1998. – 284 с.
20. Картавов С. А. Математические термины: справ.-библиогр. словарь. – Киев: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 295 с.
21. Коджаспирова Г.М. Словарь по педагогике. – М.: ИКЦ «МарТ», 2005. – 448 с.
22. Кожухов С.К. Уравнения и неравенства с параметром. – Орел, 2013.
23. Корнетов, Г.Б. Реформаторы образования в истории западной педагогики : учебное пособие [Текст] / Г.Б. Корнетов. - М. : АСОУ, 2007.

24. Крамор В. С. Задачи с параметрами и методы их решения. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2007. – 416 с.
25. Крамор В.С. Математика. Типовые примеры на вступительных экзаменах. – М.: Аркти, 2000.
26. Крысин Л.П. Толковый словарь иноязычных слов. – М.: Эксмо, 2008. – 944 с.
27. Лебедев В. В. Решения задач репетиционного экзамена по математике 2002-2004 г. М.: «Экспресс-Полиграф-Сервис». - 2002.
28. Лебедева, О.В. Формирование исследовательских умений учащихся в ходе непрерывной подготовки [Электронный ресурс]. - (http://www.unn.ru; http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/143.pdf).
29. Лернер П.С. Соотношение базовых и элективных курсов в профильном образовании [Электронный ресурс] // Официальный сайт Бим-Бад Бориса Михайловича. – Режим доступа: [http://www.bim-bad.ru/biblioteka/article\\_full.php?aid=1177&binn\\_rubrik\\_pl\\_articles=183](http://www.bim-bad.ru/biblioteka/article_full.php?aid=1177&binn_rubrik_pl_articles=183)
30. Литвинова И. Н. Решение задач с параметрами как средство формирования исследовательских умений учащихся // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – Т. 6. – С. 11. – URL: <http://e-koncept.ru/2015/65203.htm>.
31. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Алгебра: Доп. главы к шк. и кл. с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 1997. – 224 с.; ил.
32. Математика для поступающих в вузы // Сост. А.А. Тырымов. – Волгоград: Учитель, 2000.
33. Математика. // «Первое сентября». – № 14. – 2011; №1, 2, 4, 11. – 2012; №10, 11, 12. – 2013.
34. Математика. Учимся решать задачи с параметром /под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2012.

35. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров; ред. кол.: С. И. Адян, Н. С. Бахвалов, В. И. Битюцков, А. П. Ершов, Л. Д. Кдрявцев, А. Л. Онищик, А. П. Юшкевич. – М.: Сов. энцикл., 1988. – 847 с.
36. Материалы по подготовке к ОГЭ 2001-2016.
37. Махмутов, М.И. Современный урок: вопросы теории [Текст] / М.И. Махмутов. - М. : Педагогика, 1981.
38. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. – М.: Издательств о «Экзамен», 2009. – 286 с.
39. Мордкович и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2000. – 315 с; ил.
40. Мочалов В.В., Сильвестров В.В. Уравнения и неравенства с параметрами. – Чебоксары. Издательство ЧГУ, 1997.
41. Нырко В.А., Табуева В.А. Задачи с параметрами. – Екатеринбург: УГТУ, 2001.
42. ОГЭ 2016. Математика. 30 вариантов типовых заданий / под ред. И.В. Яценко.- М.: Издательство «Экзамен», 2016.
43. Ожегов С. И. Словарь русского языка / под общ. ред. проф. Л. И. Скворцова. – 24-е изд., испр. – М.: ООО Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2004. – 896 с.
44. Оконь, В. Основы проблемного обучения [Текст] / В. Оконь. - М. : Просвещение, 1968.
45. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Учебно-методическое пособие для учащихся 10-11 кл. – М.: Экзамен, 1998. – 192 с.
46. Осколков В. А. и др. Сборник конкурсных задач по математике с решениями и ответами. – М.: МИФИ, 2003. – 92 с.
47. Острикова, Е.А. Психолого-педагогические основы формирования исследовательских умений и навыков школьников [Текст] / Е.А. Острикова // Молодой ученый. - 2012. - № 10. - С. 358-361.

48. Петряков И.С. Математические кружки. – М.: Просвещение, 1997.
49. Письмо Минобразования России от 13.11.2003г. № 14-51-277 / 13 «Об элективных курсах в системе профильного обучения на старшей ступени общего образования» [Электронный ресурс] // Официальный сайт компании «КонсультантПлюс». – Режим доступа: <http://base.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc;base=EXP;n=450589>.
50. Поддьяков А. Н. Общие представления об исследовательском поведении и его значении // Исследовательская работа школьников. – 2002. – № 1. – С. 21-23.
51. Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В. Уравнения и неравенства с параметрами. – Изд-во Московского университета, 1992. – 16 с.
52. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Уравнения и неравенства с параметрами. – М.: Издат МГУ, 1992.
53. Приходько Л. А., Грознова С. Ю. Математика: Пособие для поступающих в 10-ый лицейский класс. – М.: Изд-во Рос. экон. акад., 2002. – 69 с.
54. Программы общеобразовательных учреждений. Алгебра 7-9 классы (базовый уровень). Составитель Бурмистрова Т.А. – М.: Просвещение, 2011.
55. Рогова Г.А. Элективные курсы как содержательная основа профильного обучения [Электронный ресурс] // Электронный журнал «Вопросы Интернет-образования». – № 56. – Режим доступа – [http://vio.uchim.info/Vio\\_58/cd\\_site/articles/art\\_4\\_7.htm](http://vio.uchim.info/Vio_58/cd_site/articles/art_4_7.htm).
56. Романов П.Ю. Формирование исследовательских умений обучающихся в системе непрерывного педагогического образования: Дисс... докт. пед. наук. – Магнитогорск, 2003. – 362 с.
57. Ромашко В. Д. Параметры. – Интернет.
58. Савенков, А.И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению [Текст] / А.И. Савенков. — М. : Ось-89, 2006. — 480 с.

59. Савенков, А.И. Эффективная организация исследовательского обучения школьников [Текст] / А.И. Савенков // Школьные технологии. - 2011. — № 5. - С. 156-163.
60. Семенова, Н.А. Исследовательская деятельность учащихся [Текст] / Н.А. Семенова // Начальная школа. - 2006. - № 2. - С. 45-49.
61. Сергеев И. Н. Математика. Задачи с ответами и решениями: Пособие для поступающих в вузы. – М.:КДУ, 2005. – 3-е изд. – 360 с.; ил.
62. Середенко, П.В. Формирование исследовательских умений у младших школьников [Текст] / П.В. Середенко // Педагогическая наука. — 2007. — № 3.
63. Сканави М. И. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. – 7-е изд. – М. 1996. – 528 с.; ил.
64. Толковый словарь математических терминов / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, Н. Г. Федин. – М.: Просвещение, 1965. – 540 с.
65. Умения [Текст] / гл. ред. В.В. Давыдов // Российская педагогическая энциклопедия. - М. : Большая Российская энциклопедия, 1993. - Т. 2.
66. Фальке Л.Я. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе. – М.: Илекса, 2006.
67. Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. N 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации" (с изменениями и дополнениями от 19 декабря 2016 г. N 455-ФЗ) [Электронный ресурс] // Официальный сайт компании «КонсультантПлюс». – Режим доступа: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_140174/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/)
68. Хапугина, С.В. Развитие исследовательских умений учащихся на уроках химии [Электронный ресурс]. - (http://}s-v-hapugina.narod.m: http://s-v-hapugina.narod.rU/olderfiles/l/razvitie\_issledovatel'skih\_umenii.-doc).
69. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика для поступающих в серьезные вузы. – М.: Московский лицей, 1998. – 400 с.

70. Шарыгин И. Ф. Сборник задач по математике с решениями: Учеб. пособие для 11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: АСТ: Астрель, 2001. – 448 с.; ил.

71. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. – М. Просвещение, 1988.

72. Яценко И.В., Семенов А.В., Высоцкий И.Р. Методические рекомендации по некоторым аспектам совершенствования преподавания математики. – М.:ФИПИ, 2014. – 34 с.