МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им.В.П. АСТАФЬЕВА
Институт математики, физики и информатики
Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

КЕЙВ МАРИЯ АНАТОЛЬЕВНА

Магистерская диссертация

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ GEOGEBRA

Направление подготовки: 44 04 01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы: Информационные технологии в математическом образовании

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ КГПУ им. В.П. Астафьева ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Допускаю к защите
Заведующий кафедрой АГиМП
д.п.н., профессор Майер В.Р.

«09» 06 2017г.
дата подпись

Научный руководитель
к.ф.-м.н., профессор Ларин С.В.

«08» 06 2017г.
дата подпись

Обучающийся: Кейв М.А.

«08» 06 2017г.
дата подпись

Красноярск 2017

Реферат

Диссертационное исследование состоит из 94 страниц, 29 рисунков, 4 таблиц, введения, двух глав, заключения и библиографического списка (56 первоисточников информации).

В данной работе рассматриваются возможности использования компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике в педагогическом вузе, выявляются дидактические условия и особенности применения компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике.

Актуальность исследования определяется необходимостью повышения эффективности педагогических технологий обучения математическим дисциплинам, основанных на использовании систем компьютерной математики.

Проблемой исследования в рамках настоящей работы является поиск обоснованного ответа на вопрос о том, каковы особенности методической системы обучения дискретной математике в педагогическом вузе, на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Объект исследования: обучение дискретной математике будущих учителей математики в условиях педагогического вуза.

Предмет исследования: методика использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике.

Цель исследования: разработать методическое обеспечение дисциплины «Дискретная математика» на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Задачи исследования:

1. Обобщить и систематизировать имеющийся опыт по использованию систем компьютерной математики в математическом образовании.

2. Выделить дидактические условия использования систем компьютерной математики в профессиональной подготовке будущих учителей математики.

3. Охарактеризовать анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике.

4. Уточнить цели и содержание обучения дискретной математике в аспекте использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

5. Разработать комплекс лабораторных работ по дисциплине «Дискретная математика» на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы исследования**: изучение и анализ педагогической, психологической, методической и предметной литературы по теме исследования, анализ теоретических и эмпирических данных, изучение и обобщение педагогического опыта, сравнительный анализ.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Обоснована возможность использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике в условиях педагогического вуза.

2. Разработана методика обучения дискретной математике с использованием анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Теоретическая значимость исследования заключается в описании дидактических условий использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике.

Практическая значимость исследования заключается в разработке авторской методики обучения дискретной математике с использованием анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Апробация и внедрение результатов. Материалы исследования были представлены: на III Всероссийской научно-методической конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (Красноярск, 18-20 ноября 2014 г.); на IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (Красноярск, 18-19 ноября 2015г.); на V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (Красноярск, 16-17 ноября 2016г.).

По теме исследования опубликовано 7 работ, а именно:

1. Кейв М.А. Курс «Дискретная математика и информационные технологии» в подготовке магистрантов по программе «Информационные технологии в математическом образовании» / Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы III Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 18-20 ноября 2014 г. / отв. ред. В.Р. Майер. Краснояр. гос. пед. университет им. В.П.Астафьева. – Красноярск, 2014. - с. 33-39.

2. Кейв М.А., Ларин С.В. Аннимационно-геометрический метод моделирования последовательностей в среде GeoGebra / Информационнве технологии в математике и математическом образовании: материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 18-19 ноября 2015г. / отв. ред. В.Р. Майер. Краснояр. гос. пед. университет им. В.П.Астафьева. – Красноярск, 2015. с. 51-56.

3. Кейв М.А. Анимационно-геометрический метод моделирования задач теории графов в среде GeoGebra. / Информационные технологии в

математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2016г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016.- с.40-43.

4. Кейв М.А., Кожуховская В.А. Моделирование решений комбинаторных задач в компьютерной среде GeoGebra. / Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2016г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016.- с. 37-40.

5. Бондарева Я.А., Масленкова В.А., Кейв М.А. О технологии создания тестов по математической логике в компьютерной среде GeoGebra. / Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2016г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016.- с. 4-8.

6. Масленкова В.А., Кейв М.А., Бондарева Я.А. Анимационно - геометрический метод моделирования решений простейших тригонометрических неравенств в среде GeoGebra. / Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2016г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016.- с.61-65.

7. Кейв М.А., Капач Ю. Анимационно - геометрический метод моделирования решений простейших тригонометрических неравенств в среде GeoGebra. / Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2016г. / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; КГПУ им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016.- с. 33-37.

Оглавление

Введение

«В деле обучения и воспитания, во всем школьном деле ничего нельзя улучшить, минуя голову учителя»
(К.Д. Ушинский)

Век компьютерных технологий набирает обороты и уже, пожалуй, нет ни одной области человеческой деятельности, где они не нашли бы свое применение. Педагогические технологии не остались в стороне от всеобщего процесса компьютеризации. Использование информационных технологий в математическом образовании является одним из приоритетных направлений повышения его качества.

Сопровождение занятий компьютерными имитационными моделями и интерактивными иллюстрациями значительно облегчает и углубляет проникновение в сущность математических понятий. Средства компьютерного моделирования и мультимедиа позволяют стимулировать познавательный интерес к математике и максимально использовать потенциальные мыслительные возможности обучающихся.

Следует отметить, что федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования, задает новые требования к результатам школьного образования, среди которых «владение опытом построения и использования компьютерно-математических моделей» [ФГОС, 2012].

Формирование у учащихся опыта построения и использования компьютерно-математических моделей возможно, если в процессе их обучения математике они будут систематически вовлечены в учебную, исследовательскую, проектную деятельность, связанную с компьютерным моделированием математических объектов.

Для того чтобы вовлечь учащихся в подобную деятельность, будущий учитель математики сам должен быть компетентен в этой области. Это означает, что в рамках математической подготовки в вузе, студент должен овладевать умениями и навыками компьютерного моделирования математических объектов.

Компьютерное моделирование является важнейшей частью динамической математики. Под динамической математикой мы понимаем часть математических исследований, неотъемлемой составляющей которых являются чертежи с анимацией, участвующие в решении поставленной математической задачи, созданные на экране компьютера в некоторой компьютерной среде [Ларин С.В., 2015].

Наиболее ярким представителем компьютерной составляющей динамической математики является компьютерная среда GeoGebra. Эта среда позволяет посредством создания анимационных чертежей визуализировать математику, проводить эксперименты и исследования при решении разнообразных математических задач и при изучении математических объектов. Особенно поучительным является сам процесс создания анимационного чертежа.

Диссертационная работа посвящена исследованию *проблемы* применения компьютерных математических систем в обучении дискретной математике в педагогическом вузе.

Основная цель работы: разработать методическое обеспечение дисциплины «Дискретная математика» на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Объект исследования: обучение дискретной математике будущих учителей математики в условиях педагогического вуза.

Предмет исследования: методика использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике.

Гипотеза исследования: если в процессе обучения будущих педагогов дискретной математике использовать анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra, то это будет способствовать повышению уровня сформированности у них основ профессиональных компетенций, а именно: способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2) [ФГОС ВО, 2013].

Задачи исследования:

1. Обобщить и систематизировать имеющийся опыт по использованию систем компьютерной математики в математическом образовании.
2. Выделить дидактические условия использования систем компьютерной математики в профессиональной подготовке будущих учителей математики.
3. Охарактеризовать анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике.
4. Уточнить цели и содержание обучения дискретной математике в аспекте использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.
5. Разработать комплекс лабораторных работ по дисциплине «Дискретная математика» на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Глава 1. Теоретические аспекты обучения дискретной математике с использованием анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra

§ 1.1. Компьютерная математика

Отличительной особенностью современного этапа развития общества является его информатизация. Во всех сферах человеческой деятельности возрастает роль информационных процессов, повышается потребность в информации и в средствах для ее производства, обработки, хранения, передачи и использования, что обуславливает появление новых информационно-коммуникационных технологий (ИКТ).

Проникновение в образование информационно-коммуникационных технологий требует пересмотра методики преподавания различных математических дисциплин и изучения возможностей эффективного применения элементов ИКТ в обучении математике.

Необходимость использования возможностей информационных технологий в изучении математики связано также с тем, что требования, предъявляемые обществом к уровню математической подготовки выпускников, неуклонно растут. Это объясняется широкими возможностями практического применения математики.

Основным средством ИКТ является персональный компьютер, возможности которого определяются установленным на нем программным обеспечением, которое является инструментарием информационных технологий [Башкатова, 2000, с. 4].

Появление прикладного программного обеспечения нового поколения позволяет расширить область применения информационных технологий в учебном процессе, расширить методические горизонты при обучении математике в школе и в вузе. К этой группе программного обеспечения относятся универсальные математические пакеты символьных, численных вычислений и геометрических построений – так называемые системы компьютерной математики [Плясунова, 2004].

Компьютерная математика – это новое направление в математике, появившееся на пересечении классической математики и информатики. Оно возникло на рубеже нового столетия и связано с успехами внедрения персональных компьютеров (ПК) в практику решения математических задач.

Главным средством компьютерной математики являются системы компьютерной математики.

Под системами компьютерной математики (СКМ) будем понимать комплексные программные средства, обеспечивающие автоматизированную, технологически единую и замкнутую обработку задач математической направленности при задании их условий на специально предусмотренном языке пользователя [Зайцева, 2005, с. 40].

Системы компьютерной математики дают возможность использовать математические методы без процедуры программирования и тем самым создают любому пользователю удобную для их работы среду.

Систем компьютерной математики огромное количество. Признанными мировыми лидерами из числа универсальных математических систем являются: Matlab (Mathworks Ins., USA), Mathcad (MathSoft Ins.,USA), Mathematica (Wolfram Research Ins., USA), Derive (Corp. Texas Instruments Ins.,USA), Maple (Corp.MapleSoft, Canada). Сравнительно недавно появились компьютерные программы GeoGebra и Geometr’s Sketchpad («Живая математика»), ориентированные на визуализацию математики. Главным их достоинством являются возможности анимации.

Общими признаками систем этого класса считаются: 1) объединение аналитических и численных методов вычислений; 2) использование языков высокого уровня программирования; 3) визуализация результатов вычислений; 4) совместимость с операционными системами Windows и др.

По своему содержанию СКМ – это особый вид программ, реализуемых на ПК и предназначенных для решения широкого круга математических задач [Филиппова, 2009].

Структурную схему СКМ условно можно представить в виде совокупности пяти компонентов: ядро, интерфейс, библиотеки, пакеты решений, справочная система (рис. 1.). Основу системы компьютерной математики составляет представительный набор базовых функций и алгоритмов, так называемых встроенных функций, образующих ЯДРО системы. С помощью подготовленных программ осуществляются быстрые вычисления всех функций ядра. Для вычислений редких функций и процедур вне ядра создаются БИБЛИОТЕКИ. Наращивание вычислительных возможностей системы достигается также за счет ПАКЕТОВ РАСШИРЕНИЯ. Такие пакеты может писать сам пользователь на языке программирования системы компьютерной математики, что обеспечивает большую адаптацию системы к решаемым задачам. ИНТЕРФЕЙС дает пользователю возможность обращаться к ядру со своими запросами и получать результат решения на экране дисплея. СПРАВОЧНАЯ СИСТЕМА обеспечивает получение оперативных справок по вопросам работы с СКМ.

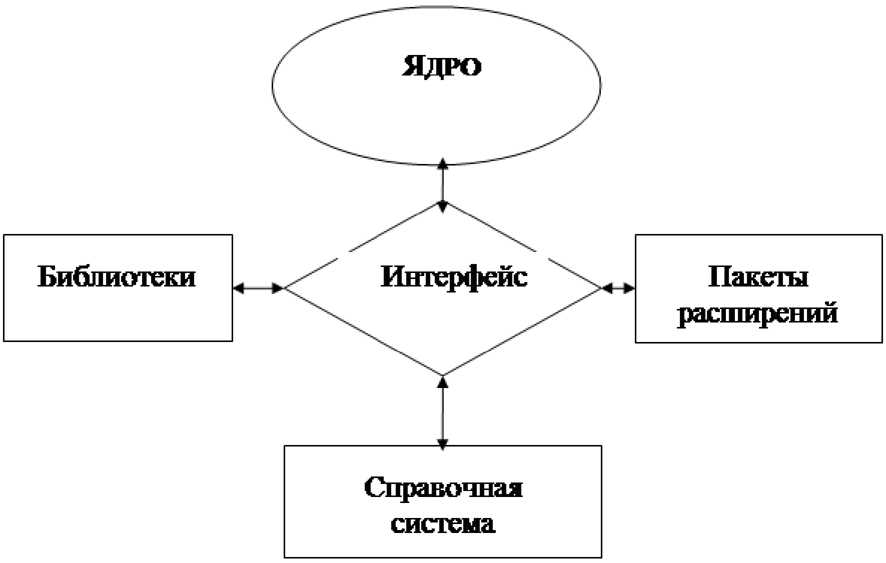


Рис. 1. Структурная схема универсальных СКМ

Любая из существующих СКМ содержит в своем составе в большей или меньшей степени огромный математический аппарат и объем знаний в области математики. Поэтому такие системы могут не только обеспечить решение прикладных задач, но и могут служить практически неисчерпаемой и быстро доступной библиотекой математических знаний, накопленных за многие века [Филиппова, 2009].

Использование компьютеров на разных этапах обучения с различной дидактической целью позволяет решать некоторые методические проблемы традиционного процесса обучения. На лекциях используются компьютерные демонстрации. На практических занятиях – компьютерное решение математических задач.

Исследования, проведенные С.А. Дьяченко [Дьяченко, 2000], показывают, что среди достоинств применения компьютера в обучении математике можно отметить следующие: возможность наглядного представления графических данных; быстроту и точность вычислений; разнообразие способов предъявления учебной информации; возможность конструирования анимационных компьютерных моделей математических объектов и проведения, на их основе, компьютерных экспериментов и исследований; расширение комплекса учебных задач; повышение информационной культуры и активизация учебно-познавательной деятельности обучающихся.

Среди трудностей при использовании компьютера в обучении математике можно отметить следующие: недостаточность научно-методических разработок и программ по математике с использованием компьютера; уровень компьютерной грамотности преподавателей и качество обучающих программ; слабая оснащенность учебных заведений вычислительной техникой и программным обеспечением.

Одним из аспектов использования СКМ в обучении математике является возможность компьютерного моделирования различных математических объектов.

Компьютерное моделирование решения математической задачи предполагает использование специализированных пакетов программ решения математических задач и графической поддержки (системы компьютерной математики) для создания компьютерной модели математических объектов, процессов и явлений, о которых идет речь в условии задачи.

Специалисты в области компьютерного моделирования (см. [Могилёв и др., 1999]) делят компьютерные математические модели на следующие три вида:

- вычислительные и аналитические модели, в основе которых лежат численные и аналитические методы решения математических задач;
- модели, визуализирующие явления и процессы графически, в динамике и с озвучиванием;
- модели «высокого уровня технологичности», использующие компьютер в сочетании с измерительной аппаратурой, датчиками, сенсорами и т.д.

Такие компьютерные модели позволяют: лучше проникнуть в условие задачи; провести наблюдение за математическими объектами; сформулировать гипотезу решения и провести ее экспериментальное доказательство; визуализировать решение задачи с помощью анимации.

Системы компьютерной математики обладают богатым набором инструментов для построения анимационных чертежей. Они удобны и просты в использовании. Для учителя СКМ представляет собой ансамбль инструментов, с помощью которых можно добиваться разнообразных педагогических целей. Для обучаемого – это среда обитания, «населенная» многочисленными разнотипными инструментами, многие из которых имеют индивидуальные настройки [Экспериментальная математика, 2016].

Анимационные чертежи (живые рисунки) делают математические понятия и утверждения наглядными, что способствует их усвоению. Особенно поучительным является самостоятельное изготовление живого рисунка, предполагающее глубокое проникновение в суть изображаемого. Живые рисунки можно использовать на разных стадиях изучения материала: как готовые наглядные пособия при изучении нового, как источник задач и сопровождения их решений, как инструмент для экспериментирования и проведения научных исследований. Попутно ученик учится использованию компьютерных технологий не только в обучении, но и при решении исследовательских задач [Ларин, 2015].

Решение математической задачи в динамической компьютерной среде проходит три этапа [Ларин, 2015]:

1) Геометрическое моделирование условия задачи на экране компьютера.

2) Решение задачи на экране с использованием возможностей анимации.

3) Построение математической модели решения, увиденного на экране.

Наиболее ярким представителем динамической компьютерной среды является компьютерная среда GeoGebra.

GeoGebra— бесплатная и свободно распространяемая (по лицензии GPL) программа, относящаяся к классу программ динамической геометрии (интерактивных геометрических систем, виртуальных лабораторий, виртуальных конструкторов) [Алферов, 2013].

История программ данного класса насчитывает более 20 лет. Первым проектом, реализующим идею динамической геометрии, был проект Cabri («Черновик для информатики»), работа над которым началась в 80-х гг. Участники проекта поставили перед собой задачу разработать среду, которая поддерживала бы экспериментальный подход к изучению геометрии. Примерно в то же время разрабатывалась программа The Geometers Sketchpad («Блокнот геометра»). Эти две программы получили наибольшее распространение в мире. Компьютерная среда «Блокнот геометра» была русифицирована Институтом новых технологий (Москва) и известна в нашей стране под названием «Живая математика». Из разработок, получивших распространение в России, можно также отметить программу «Математический конструктор» (разработчик 1С) и виртуальный конструктор для поддержки школьного курса стереометрии «Интерактивная стереометрия. Кабри 3D» (ИНТ, Москва) [Алферов, 2013].

Программы динамической геометрии различаются по отдельным параметрам, но главным элементом во всех этих программах является так называемый динамический чертеж.

Динамический чертеж можно определить как геометрическую фигуру, строящуюся в плоскости компьютерного экрана и который, в отличие от обычного чертежа, можно трансформировать с помощью мыши при сохранении фигуры [Храповецкий, 2013].

Сообщество пользователей программы GeoGebra охватывает 195 стран мира и имеет постоянно пополняемую обширную библиотеку готовых моделей на GeoGebra, которыми может воспользоваться любой желающий.

Программа создана в 2002 году. Создатель программы — австрийский математик Marcus Hohenwarter. Официальный сайт программы http://www.geogebra.org. Поддерживает 50 языков, в т.ч. русский. Программа написана на языке Java (для установки локальной версии на компьютере пользователя должен быть установлен Java) и является кроссплатформенной (платформы Windows, Linux, Mac OS X). Последний релиз программы поддерживает технологию 3D, что дает возможность решать задачи по стереометрии. Поддерживаемые форматы экспорта данных: PNG, SVG, EMF, Pdf. Программа обладает расширенным набором инструментов, позволяющих создавать различные чертежи; большим количеством встроенных команд по различным разделам математики; возможностью организации анимации и др. [Алферов, 2013].

В отличие от других программ динамической геометрии, в GeoGebra реализована идея геометрического и алгебраического представления объектов, т.е. каждый создаваемый объект существует в двух формах: в форме динамического чертежа и в аналитической форме.

Многие специалисты в области применения компьютерной системы GeoGebra выделяют следующие основные направления ее использования в образовательном процессе (см. [Алферов, 2013]):

1. *Поддержка экспериментальной составляющей математической деятельности.* В этом направлении GeoGebra используется как виртуальная лаборатория, т.е. как среда для проведения разного рода математических экспериментов с помощью динамических моделей исследовательского типа, манипуляция с которыми позволяет учащимся самостоятельно открывать новые для себя математические факты. В качестве возможных методических подходов и приемов к разработке исследовательских моделей можно выделить:

– *моделирование условий, в которых раскрывается сущность исследуемого математического объекта.* Фактически, в основе данного подхода лежит экстериоризация наглядно-чувственных идеализаций: «сжатие», «растягивание», «скольжение», составляющих мысленный эксперимент, позволяющая учащемуся в наглядной форме увидеть системообразующий принцип исследуемой геометрической конфигурации.

– *кибернетический подход* — учащимся предлагается чертеж, содержащий в себе некоторую идею, связующую различные элементы чертежа, визуально не наблюдаемую и требующую «расшифровки»; перемещая одни элементы чертежа и наблюдая за изменениями, происходящими при этом с другими элементами, учащиеся должны разгадать скрытый в чертеже «механизм».

– *численный эксперимент* — учащимся предлагается наблюдать за изменением значений числовых параметров в процессе манипуляций с элементами динамического чертежа.

– *рассмотрение геометрических объектов в различных ракурсах* — учащимся предлагается последовательно рассмотреть стереометрический чертеж с различных точек зрения, позволяющих обнаружить базовый принцип построения фигуры или решения стереометрической задачи.

– *определение граничных условий* существования объекта — учащимся предлагается исследовать поведение геометрических объектов на границах их существования.

– *исследование геометрического места точек* — учащимся предлагается исследовать специфический объект — «след», т.е. визуализированную в виде последовательности точек траекторию, возникающую при движении геометрического объекта в плоскости экрана

2. *Развитие навыков построения геометрических фигур.* В этом направлении GeoGebra используется как виртуальный инструмент, заменяющий традиционные инструменты: циркуль и линейку. Однако, в отличии от традиционных инструментов, появляются дополнительные возможности, использование которых позволяет повысить эффективность формирования навыков построения, в частности: возможность самопроверки учащимся правильности своих действий (в среде динамической геометрии самопроверка осуществляется простым и естественным путем — через исследование поведения построенного объекта, т.е. правильно построенный чертеж должен «работать» правильно); возможность выдавать подсказки на различных этапах построения; возможность вернуться к любому этапу построения, используя журнал истории действий.

3. *Создание интерактивных мультимедийный иллюстраций к изучаемому материалу.* Здесь GeoGebra используется как инструмент разработки электронных цифровых ресурсов, обеспечивающих важнейший дидактический принцип обучения — принцип наглядности. Как и при реализации выделенных выше направлений, использование GeoGebra в качества средства обеспечения наглядности обучения связано с возможностями динамических чертежей и может рассматриваться как вариант поддержки экспериментальной составляющей математической деятельности в той мере, в какой динамизация чертежа позволяет реализовать главное содержание принципа наглядности именно так, как этот принцип понимается на современном этапе развития дидактики, т.е. как педагогический инструмент формирования умственных действий на основе моделирования изучаемого объекта, отражающего существенные его характеристики.

Таким образом, компьютерная среда GeoGebra позволяет визуализировать математику, проводить эксперименты и исследования при решении математических задач.

Особенностью этой среды является возможность создания на экране чертежей, выполненных циркулем и линейкой, причем, если некоторую точку чертежа переместить (с помощью мышки) в другое место, то все зависимые элементы чертежа изменяют свое положение так, что сохраняется последовательность построения чертежа, а значит взаимная принадлежность точек и прямых и параллельность прямых. Если, к примеру, по точке X и некоторому набору параметров (длин отрезков, радиусов окружностей) с помощью инструментов, заложенных в этой системе, построена зависимая точка $f(X)$, то можно задать анимацию точки X, при которой эта точка будет перемещаться по заданной линии (например, по оси абсцисс), в то время как зависимая точка $f(X)$, оставляя след, будет вычерчивать некоторую кривую. Это позволяет помимо графиков функций вычерчивать линии, заданные динамическими определениями (эллипс, гиперболу, параболу, циклоиду, кардиоиду и др.) [Ларин, 2015].

С методической точки зрения среда GeoGebra позволяет создавать на экране компьютера чертежи, которые можно использовать на разных стадиях изучения учебного материала, от чертежей иллюстративного характера до исследовательских чертежей. Особенно поучительным является сам процесс создания анимационного чертежа [Ларин, 2015].

Анализ педагогической практики использования программы GeoGebra в образовательном процессе показывает, что данная программа может эффективно использоваться как для поддержки решения традиционных дидактических задач в целях повышения эффективности обучения, так и новых задач, связанных с экспериментальной составляющей математической деятельности.

По мнению специалистов (см. [Алферов, 2013]), использование программы GeoGebra в образовательном процессе позволяет вовлекать обучаемого в математическую деятельность в органическом единстве ее дедуктивно-аксиоматической и индуктивно-эмпирических сторон, что соответствует самой природе математических объектов и вытекающего из нее важнейшего методологического принципа обучения математике, обоснованного еще в работах таких выдающихся ученых, как Д. Пойа [Пойа,1975], И. Лакатос [Лакатос, 1967], В. И Арнольд [Арнольд, 2012].

Этот принцип предполагает, что обучение математике должно строится как процесс, включающей в себя фазу эксперимента и фазу доказательных рассуждений, что соответствует реальной структуре математической деятельности. В своей деятельности математик опирается как на строгие логические рассуждения, так и на рассуждения, носящие, по выражению Д.Пойа, правдоподобный характер, в основе которых лежат методы, характерные для естественных наук, т.е. неполная индукция, наблюдение, гипотеза и эксперимент. Такие средства обучения как GeoGebra позволяют преодолеть формализм школьной математики и посредством создания динамической наглядности, компенсировать недостаток развития способности учащихся к математическому видению. Динамическая наглядность в отличие от статической позволяет учащимся преодолеть сложившиеся стереотипы воображения, обнаружить множественность и многовариантность ситуаций, определяемых условием задачи, сделать видимой динамику реконструкции образов объекта исследования в ходе решения задачи.

§ 1.2. Дидактические условия использования систем компьютерной математики в обучении дискретной математике в педагогическом вузе

При использовании систем компьютерной математики при обучении дискретной математике в педагогическом вузе, мы опираемся на исследования в области *психологической концепции поэтапного формирования умственных действий* (П.Я. Гальперин, А.Н. Леонтьев, Н.Ф. Талызина и др.), *теории и практики вузовского обучения математике будущих учителей* (С.И. Архангельский, А.А. Вербицкий, В.А. Далингер, А.Г. Мордкович, Н.Д. Никандров, М.В. Потоцкий, В.А. Сластёнин, Г.Г. Хамов, А.И. Щербаков, Л.В. Шкерина и др.), *создания и использования средств обучения и учебно-материальной базы* (Т.С. Назарова, Е.С. Полат, Л.П. Пресман и др.), *теории методологии и практики информатизации обучения* (А. Борк, А.П. Ершов, С.В. Ларин, В.Р. Майер, И.В. Роберт, Н.И. Пак и др.).

Принципиальными вопросами теории обучения являются: *логика учебного процесса и структура процесса усвоения знаний*. Мы опираемся на них при использовании систем компьютерной математики в процессе обучения дискретной математике в педагогическом вузе.

Логика учебного процесса – это сплав логики учебного предмета и психологии усвоения студентами преподаваемого учебного материала.

В логике учебного процесса получают обоснованное решение вопросы о том, как поставить познавательную задачу перед обучающимися, чтобы она была принята ими; какой фактический материал, в каком плане и в каком объеме нужно подать, какие вопросы поставить, какие задания для наблюдения и продумывания организовать и какие самостоятельные работы предложить, чтобы учебный процесс был оптимально эффективным как в отношении усвоения знаний, так и в отношении развития обучающихся. В традиционной практике обучения утвердилась и стала фактически универсальной логика обучения от восприятия конкретных предметов и явлений к образованию представлений и от обобщения конкретных представлений к понятиям [Сластёнин, 2001.]. Это не противоречит принципиальной схеме познания: от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике, которая определяет структуру процесса усвоения знаний.

Чувственное познание (живое созерцание). Созерцание следует рассматривать в широком гносеологическом смысле как чувственное проникновение человека в сущность предмета при помощи всех органов чувств. В основе чувственного познания лежат первичные познавательные процессы: ощущение и восприятие.

Восприятие – процесс отражения в сознании человека предметов или явлений при их непосредственном воздействии на органы чувств. В отличие от ощущений, в которых отражаются лишь отдельные свойства раздражителя, восприятие отражает предмет в целом, в совокупности его свойств. Содержание восприятия зависит от поставленной перед студентом задачи, от мотивов его деятельности и установок, а также эмоций, которые могут изменять содержание восприятия. Для управления процессом восприятия существенным является факт его зависимости от особенностей личности обучаемого, его интересов, мировоззрения, убеждений и направленности в целом.

Абстрактное мышление (понимание, осмысление, обобщение). Образы и представления как результаты деятельности восприятия всегда имеют определенное смысловое значение. Это объясняется тем, что восприятие теснейшим образом связано с мышлением, с пониманием сущности воспринимаемых предметов и явлений.

Понимание сообщаемой информации осуществляется через установление первичных, в значительной мере обобщенных, связей и отношений между предметами, явлениями и процессами, выявление их состава, назначения, причин и источников функционирования. В основе понимания лежит установление связей между новым материалом и ранее изученным, что, в свою очередь, является основанием для более глубокого и разностороннего осмысления учебного материала.

Осмысление изучаемой информации требует задействования общеучебных умений и навыков, опирающихся на такие приемы умственной деятельности, в основе которых лежат сложные мыслительные операции: анализ и синтез, сравнение и сопоставление, классификация и систематизация и др. Осмысление учебного материала сопровождается формированием у студентов определенных отношений к нему, понимания его социального, в том числе практического, значения и личностной значимости. Осмысление непосредственно перерастает в процесс обобщения знаний.

Обобщение характеризуется выделением и систематизацией общих существенных признаков предметов и явлений. Оперирование научными понятиями на этапе обобщения знаний приводит к установлению связей между ними, к формированию суждений. А сопоставление суждений приводит к умозаключениям, к самостоятельным выводам и доказательствам.

Применение знаний (практика). Ценность, прочность и действенность знаний проверяется практикой. В основе применения знаний лежит процесс обратного восхождения от абстрактного к конкретному, т.е. конкретизация. Конкретизация как мыслительная операция выражается в умении применить абстрактные знания к решению конкретных практических задач, к частным случаям учебно-познавательной деятельности. В учебной практике конкретизация начинается с умения привести свой пример. В дальнейшем эта мыслительная способность выражается через умение решить более сложную задачу и т.п.

Опираясь на данный подход, можно построить систему методических приемов, соответствующих различным формам организации деятельности студентов (решение задач, выполнение практических работ и творческих заданий, самостоятельная работа и т.д.), позволяющих управлять процессом усвоения знаний студентов, исходя из функций их познавательных интересов.

Остановимся на рассмотрении этапов, которые проходит знание с момента восприятия и до момента усвоения. А для этого, обратимся к *психологической концепции поэтапного формирования умственных действий*, разработанной П.Я. Гальпериным [Гальперин, 1979], А.Н. Леонтьевым [Леонтьев, 1964], Н.Ф. Талызиной [Талызина, 1983] и др.

Данная концепция расчленяет процесс усвоения новых знаний и действий на пять этапов (рис. 20) [Талызина, 1983].

Педагоги выделили особенности использования метода планомерного формирования знаний, умений при работе со студентами, которые заключаются в следующем: некоторые из этапов формирования умственных действий и понятий (в частности материальный, а иногда и громкоречевой) могут быть пропущены или работа на них может быть существенно редуцирована; на первом этапе при формировании мотивации действия первостепенное значение приобретает актуализация профессиональных интересов студентов, включение формулируемой задачи в контекст будущей профессиональной деятельности; чаще используются самые высокие типы построения ориентировочной основы действия – когда студент самостоятельно открывает принцип осуществления ориентировки; содержательный анализ материала, проводимый преподавателем, с целью выделения ведущих идей, самого важного, компактность, систематизация и обобщение, что позволяет уменьшить объем подлежащей усвоению информации [Педагогика и психология высшей школы, 2002].

Рис. 2. Этапы усвоения знаний (П.Я.Гальперин)

Проведённые, в последние годы, исследования по педагогической психологии обнаружили целый ряд фактов, свидетельствующих о том, что умение теоретически рассуждать о той или иной системе действий далеко не всегда обеспечивает умение выполнить ту же самую систему реальных действий (Л.Н. Богоявленский, С.Е. Драпкина, Н.А. Менчинская, И.С. Якиманская и др.). В связи с этим выдвигается важное требование:

завершающим этапом в развитии мысленных операций студентов является реализация умственного действия в практической деятельности.

Одним из важных факторов профессиональной подготовки студентов, является непосредственное применение ими этих знаний в контексте будущей профессиональной деятельности. Это говорит о том, что изучение предметных знаний должно происходить в русле *знаково-контекстного обучения*, разработанного известным ученым, доктором психологических наук А.А. Вербицким [Вербицкий, 1991].

Согласно А.А. Вербицкому, одна из основных целей профессионального образования – формирование целостной структуры будущей профессиональной деятельности обучаемого в период его обучения. Это означает, что для достижения целей формирования личности специалиста в профессиональном учебном заведении необходимо организовывать такое обучение, которое обеспечивает переход, трансформацию одного типа деятельности (познавательный) в другой (профессиональный) с соответствующей сменой потребностей и мотивов, целей, действий, средств, предметов и результатов. Основной характеристикой обучения контекстного типа является моделирование предметного и социального содержания будущей профессиональной деятельности.

В контекстном обучении выделяют три базовые формы деятельности студентов и некоторое множество переходных от одной базовой формы к другой. К базовым относится:

– учебная деятельность академического типа (собственно учебная деятельность), в которой ведущая роль принадлежит академической лекции;

– квазипрофессиональная деятельноять (деловые игры и другие игровые формы);

– учебно-профессиональная деятельность (научно-исследовательские работы студентов, педагогическая практика).

В качестве переходных от одной базовой модели к другой выступают все остальные формы: практические занятия, анализ конкретных производственных ситуаций, разыгрывание ролей, спецкурсы, спецсеминары и т.д. В своем системном качестве все это составляет технологию знаково-контекстного (контекстного) обучения (рис. 3).

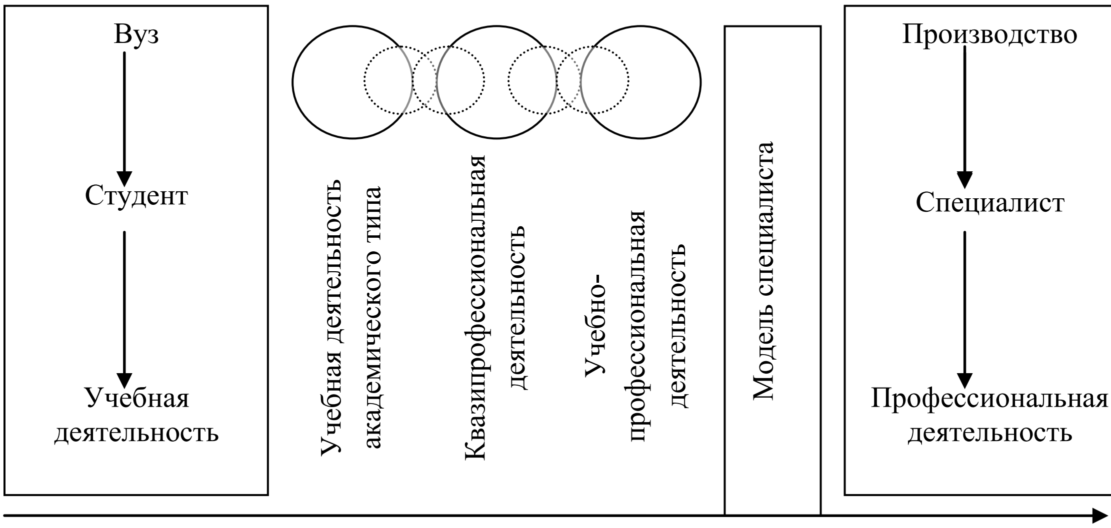


Рис. 3. Вектор времени обучения

Следует отметить, что содержание знаково-контекстного обучения должно подчиняться следующим требованиям: *семиотическим,* организующим текстовую информацию; *психолого-педагогическим,* отражающим закономерности усвоения знаний; *научным,* отражающим фундаментальные основы учебных предметов; *профессиональным,* отражающим модель специалиста [Педагогика и психология высшей школы, 2002].

Таким образом, содержание знаково-контекстного обучения отражает две важнейшие характеристики обучения данного типа:

– субъект учения с самого начала ставится в деятельностную позицию, предмет которой постепенно превращается из чисто учебного в практически профессиональный;

– требования со стороны профессиональной деятельности оказываются системообразующими, они задают контекстный принцип построения и развертывания не только отдельных учебных дисциплин, но и содержание всей подготовки специалиста в вузе.

Обучение, в котором с помощью всей системы дидактических форм, методов и средств моделируется предметное и социальное содержание будущей профессиональной деятельности специалиста, а усвоение им абстрактных знаний, как знаковых систем, наложено на канву этой деятельности, называют контекстным обучением [Педагогика и психология высшей школы, 2002].

Поскольку одним из основных качеств профессиональной подготовки будущего учителя математики, согласно требованиям новых образовательных стандартов, является способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2) [ФГОС ВО, 2013], то с позиций контекстного обучения необходимо целенаправленное и систематическое использование в процессе математической подготовки компьютерных технологий. Будущие учителя, осваивая системы компьютерной математики, приобретают опыт их применения в своей будущей профессиональной деятельности.

К специальным дидактическим условиям использования систем компьютерной математики в педагогическом вузе, многие специалисты (см. [Майер, 2001]) в этой области, относят следующие:

- *Условие адекватности*. Использование компьютерных технологий в процессе математической подготовки студента должно быть в определенном смысле адекватным их использованию в математической науке и адекватным целям и содержанию обучения. Согласно этому условию при использовании компьютерных технологий в обучении необходимо произвести критическую оценку продуктивности их использования для достижения поставленных образовательных целей и определении соответствия между возможностями компьютерных средств и содержанием обучения.
- *Условие визуализации*. Использование компьютерных технологий в процессе обучения математическим дисциплинам в педагогическом вузе

должно быть максимально ориентировано на визуальные возможности компьютера.

– *Условие использования компьютерных средств как инструментов познания.* Инструменты познания – это различные компьютерные средства, которые «поддерживают, направляют и расширяют мыслительные процессы своих пользователей» [Derry, 1990]. Инструменты познания должны быть простыми и универсальными, чтобы с их помощью можно было достигать широко поставленных целей образования. Другими словами, инструмент познания является активной средой, работая (обучаясь) в которой, пользователь сам наполняет эту среду специфическими объектами и их свойствами, соответствующими его предметной области (т.е. допускает построение в ней компьютерных и функциональных моделей) [Джонассен, 1996]. Это условие находится в полном соответствии с педагогическим принципом активности обучения, а также с теорией развивающего обучения, поскольку использование компьютерных средств в качестве инструментов познания активизирует творческую и исследовательскую деятельности обучаемого.

– *Условие профессиональной ориентации.* Использование систем компьютерной математики, в процессе предметной подготовки будущих учителей математики, должно быть профессионально ориентированным. Другими словами, в вузовском курсе необходимо моделировать ситуации, которые могут возникнуть в школе при изучении математики компьютерными средствами. Согласно данному условию, при проектировании содержания, методов и форм организации профессионального обучения будущих учителей, необходимо рассматривать вопросы использования компьютера в школьном курсе математики.

– *Условие систематичности* предполагает непрерывный и систематический характер использования компьютерных технологий в математической подготовке будущих учителей. Эпизодическое применение компьютерных технологий не позволяет в должной мере подготовить учителя математики к их использованию в школьном курсе математики. Важно показать будущим учителям математики, что компьютерные технологии можно эффективно использовать во многих разделах школьного курса математики.

§ 1.3. Анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra в обучении дискретной математике

Дискретная математика – область математики, занимающаяся изучением свойств различных математических структур, имеющих дискретный (конечный, финитный) характер.

Характер объектов, исследуемых дискретной математикой, настолько своеобразен, что методов классической математики не всегда достаточно для их изучения. Поэтому те специфические методы, которые применяются для очень широкого класса конечных (финитных) дискретных объектов, и были объединены в общее направление – дискретную математику.

Несмотря на то, что отдельные направления дискретной математики зародились в глубокой древности (поиски вычислительных алгоритмов и др.) и совершенствовались параллельно с классической математикой, наиболее интенсивно дискретная математика стала развиваться в XX столетие. Стимулом для развития многих направлений дискретной математики явились запросы теоретической кибернетики, непосредственно связанной с развитием ЭВМ (поскольку работа и функционирование компьютера – это дискретный процесс).

Использование непрерывной математики или дискретной математики как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь, и в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает: дискретную или непрерывную.

В данном параграфе остановимся на рассмотрении анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra при моделировании основных дискретных объектов, изучаемых в педагогическом вузе в рамках дисциплины «Дискретная математика», таких как: числовые последовательности и рекуррентные соотношения (комбинаторные задачи, приводимые к рекуррентным соотношениям); конечные графы.

Одними из основных объектов школьного и вузовского курса математики являются числовые последовательности. Напомним, что последовательностью называется функция натурального аргумента $y_n=f(n)$. Значения функции $y_1=f(1)$, $y_2=f(2)$, $y_3=f(3)$, … называются членами последовательности, а сама последовательность часто обозначается (y_n). Например, последовательность $(y_n)=(n^2)$. Члены этой последовательности:

$$y_1=1^2,\ y_2=2^2,\ y_3=3^2,\ \ldots,\ y_n=n^2,\ \ldots.$$

Способы задания числовых последовательностей:

- *Словесный* – заключается в словесном описании членов последовательности. Например, словесно зададим последовательность следующим образом: «Последовательность квадратов натуральных чисел».
- *Аналитический* – состоит в задании членов последовательности с помощью явной формулы от натурального аргумента. Например, последовательность задана формулой $y_n=n^2$, где $n \in N$, согласно которой можно определить члены последовательности для любого натурального n: $y_1=1^2$, $y_2=2^2$, $y_3=3^2$,… .
- *Графический* – с помощью графика функции натурального аргумента. Например, несколько первых членов последовательности квадратов натуральных чисел заданы на рис. 4 точками графика функции $y_n=n^2$, где $n \in N$.

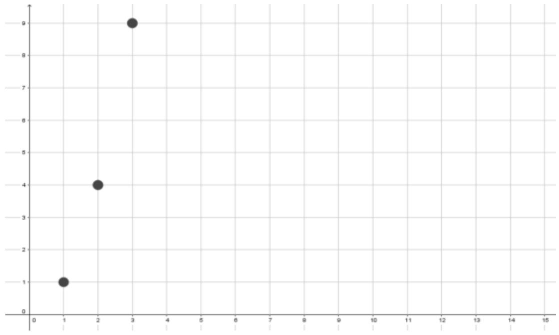


Рис.4

– *Рекуррентный* (от латинского слова *recurrere* – возвращаться) – путем задания *рекуррентного соотношения* – условия, позволяющего начиная с некоторого члена последовательности однозначно выражать его через предыдущие члены. Последовательность квадратов натуральных чисел удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$y_n=3y_{n-1}-3y_{n-2}+y_{n-3},\ y_1=1,\ y_2=4,\ y_3=9,\ n\geq 4.$$

Рекуррентные соотношения играют важную роль при составлении компьютерных программ. Многие программы основаны на так называемых рекурсивных процедурах. Процедура называется *рекурсивной*, если она обращается сама к себе, но с измененными входными данными. В каждой из них одна и та же операция последовательно применяется к возникающим с помощью этой же операции объектам. Зачастую такая операция задаётся рекуррентным соотношением (1) $a_n=f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}, n)$, где n=0, 1, 2…, – условием, позволяющим однозначно находить любой член последовательности, начиная с некоторого, по k непосредственно предшествующих ему членов. Такое соотношение называют рекуррентным соотношением k-го порядка.

Рекуррентная (возвратная) последовательность k-го порядка характеризуется тем, что каждый ее член (начиная с $(k+1)$-го) выражается через одно и то же количество k непосредственно предшествующих ему членов по формуле (1). Иными словами, для того, чтобы найти $(k+1)$ член возвратной последовательности нужно как бы вернуться к ее k предыдущим членам.

В качестве первого примера в среде GeoGebra изготовим общий анимационный чертеж для демонстрации различных последовательностей, задаваемых аналитическим выражением (формулой).

Задача 1. Построить анимационный чертёж для демонстрации различных последовательностей, задаваемых аналитическим выражением.

Построение (рис. 5).

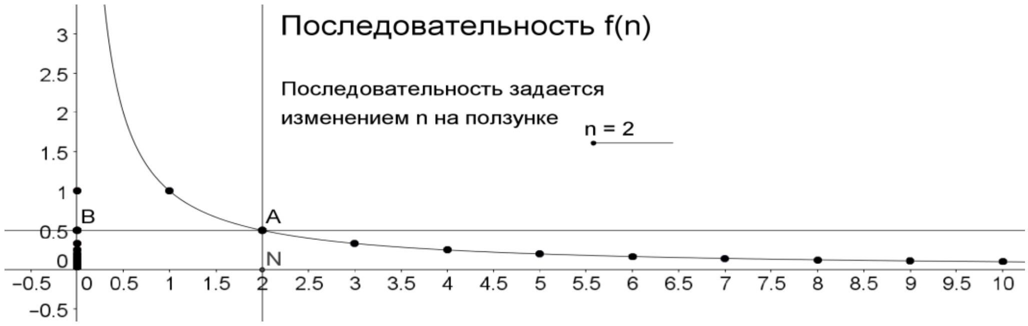


Рис. 5

1. Строим ползунок для натуральной переменной n.

2. Строкой ввода строим график функции $y = f(n)$. Например, $y = \dfrac{1}{n}$ (рис. 5).

3. Строим точку $N = (n,0)$, проводим через нее вертикаль, отмечаем точку A пересечения вертикали с графиком данной функции, проводим горизонталь через точку A и отмечаем точку B пересечения горизонтали с осью ординат. Заставляем точки A и B оставлять следы и изменяем на ползунке переменную n. В результате на оси ординат появляются члены последовательности один за другим, и одновременно точки графика данной последовательности. Теперь строкой ввода можно заменить функцию $y = f(n)$ на новую и перемещением точки на ползунке построить новую последовательность и ее график.

Перейдем к последовательностям, заданным рекуррентным соотношением.

Само понятие рекуррентного соотношения впервые было введено итальянским математиком Леонардо из Пизы (ок. 1180-1240), более известным как Фибоначчи. В книге «Liber Abaci», появившейся в 1202 году, он рассмотрел задачу о кроликах (см. задача 2).

Задача 2. Пара «взрослых» кроликов раз в месяц приносит потомство из двух крольчат (самки и самца), причём новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже сами приносят такой же приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна новорожденная пара кроликов, и в течение этого года кролики не умирают, а их воспроизводство не прекращается?

Решение: Будем считать количество пар кроликов (самца и самки) по прошествии года. Годовой промежуток времени разобьем на месячные промежутки (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), (8,9), (9,10), (10,11), (11,12), (12,13). Нас интересует количество кроликов в последнем временном промежутке, по прошествии года. Будем считать, что изменение количества пар кроликов в результате родов происходит на рубежах этих промежутков.

Представим себе три клетки: клетку A для новорожденных (до одного месяца), клетку B для месячных (до двух месяцев) и клетку C для «взрослых» кроликов (старше двух месяцев). Для промежутка времени $(i,i+1)$ количество пар кроликов в клетках A, B и C обозначим соответственно через a_i, b_i и c_i. Общее количество пар кроликов в этом временном промежутке обозначим $s_i = a_i + b_i + c_i$. Расположение пар кроликов по клеткам можно характеризовать набором (a_i, b_i, c_i). Тогда в следующий временной промежуток $(i+1, i+2)$ пары из клетки B становятся «взрослыми» и переводятся в клетку C, в которой теперь будет $b_i + c_i$ пар. Пары из A становятся одномесячными и мы их переводим в клетку B, так что в этой клетке будет a_i пар. Все пары из C приносят приплод в количестве $b_i + c_i$ пар, который помещаем в клетку новорожденных A. Расположение пар по клеткам теперь характеризуется набором $(b_i + c_i, a_i, b_i + c_i)$. Общее количество пар становится равным $s_{i+1} = (b_i + c_i) + a_i + (b_i + c_i) = a_i + 2b_i + 2c_i$. На следующем промежутке времени $(i+2, i+3)$ будем иметь распределение по клеткам, характеризуемое набором $(a_i + b_i + c_i, b_i + c_i, a_i + b_i + c_i)$, и общее количество пар будет равно $s_{i+2} = (a_i + b_i + c_i) + (b_i + c_i) + (a_i + b_i + c_i) = 2a_i + 3b_i + 3c_i$. Видим, что $s_{i+2} = s_i + s_{i+1}$. Получили рекуррентное соотношение, которое позволяет вычислить s_{i+2}, если известны s_i и s_{i+1}, для $i = 0,1,2,\ldots$ Числа, удовлетворяющие такому условию, принято называть *числами Фибоначчи*.

По условию задачи в новогоднюю ночь, ровно в полночь мы отмечаем День рождения пары кроликов, которую помещаем в клетку A, и с нее начинаем счет. В начальный временной промежуток $(0,1)$ расположение кроликов в клетках A, B, C можно характеризовать набором $(1,0,0)$. Всего пар $s_0 = 1$. Ровно через месяц наша пара подрастет и мы одномесячных переведем в клетку B. Остальные клетки не заняты и распределение по клеткам можно характеризовать набором $(0,1,0)$. Общее количество пар $s_1 = 1$. Используя рекуррентное соотношение, находим последовательно: $s_2 = s_0 + s_1 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = s_1 + s_2 = 1 + 2 = 3$, …, $s_{12} = 233$.

Ответ: после новогодней ночи следующего года будет 233 пары кроликов.

Можно усложнить задачу и спросить, сколько будет через год новорожденных пар, одномесячных и «взрослых» кроликов?

Для ответа на этот вопрос вычисляем последовательно числовые наборы (a_i, b_i, c_i) на каждом временном промежутке.

Приведем эти вычисления в виде таблицы 1:

Таблица 1

Схема подсчета количества пар кроликов (задача 2)

T	A	B	C	s
(0,1)	1	0	0	1
(1,2)	0	1	0	1
(2,3)	1	0	1	2
(3,4)	1	1	1	3
(4,5)	2	1	2	5
(5,6)	3	2	3	8
(6,7)	5	3	5	13
(7,8)	8	5	8	21
(8,9)	13	8	13	34
(9,10)	21	13	21	55
(10,11)	34	21	34	89
(11,12)	55	34	55	144
(12,13)	89	55	89	233

Здесь T обозначает столбец временных промежутков, A, B и C – столбцы соответствующих клеток, s – столбец общего количества пар кроликов. При заполнении каждой следующей строки содержимое клетки B равно содержимому клетки A предыдущей строки. Содержимое клеток A и C одинаково и равно сумме содержимого клеток B и C предыдущей строки.

Ответ: после новогодней ночи следующего года будет 89 новорожденных кроликов, столько же «взрослых» и 55 одномесячных.

Рассмотрим метод анимационно-геометрического моделирования последовательности чисел Фибоначчи в среде GeoGebra.

Для разнообразия будем считать, что накануне Нового года нам подарили одну пару кроликов в возрасте больше одного месяца и в новогоднюю ночь самец и самка впервые увидели друг друга. Тогда распределение по клеткам в начальный временной период (0,1) опишется либо набором (0,1,0), либо набором (0,0,1). В любом случае общее количество пар равно $s_0 = 1$. Во второй временной период (1,2) будем иметь набор (1,0,1) и $s_1 = 2$. Используя рекуррентное соотношение $s_{i+2} = s_i + s_{i+1}$, в этом случае получаем: $s_2 = s_0 + s_1 = 1 + 2 = 3$, и так далее, после новогодней ночи следующего года будем иметь $s_{12} = 377$ пар кроликов.

Изобразим геометрически числа Фибоначчи точками $A_i(0, s_i)$, $i = 0,1,2,\ldots$ (рис.6-7).

Алгоритм анимационно-геометрического моделирования последовательности чисел Фибоначчи в среде GeoGebra состоит из двух частей: начала алгоритма (построение точек A_0 и A_1, рис. 2 при $t = 0$) и шага алгоритма (осуществление рекурсии, рис. 4 при $t = 1$, шаг $n = 4$).

Для выполнения шага алгоритма конструируем прибор для геометрического сложения точек, расположенных на одной вертикали: *A*+*B*=*C*. Затем точку *A* совмещаем с точкой A_0, а точку *B* – с точкой A_1. Полученную, в результате геометрического сложения, точку *C* помечаем заранее заготовленной (в произвольном месте рабочего полотна), точкой A_2. Затем процедуру шага алгоритма повторяем: точку A совмещаем с точкой A_1, а точку B – с точкой A_2. Полученную, в результате геометрического сложения, точку C помечаем заранее заготовленной, точкой A_3, и т.д. (рис. 7).

Рис. 6

Для проверки точности построений последовательности Фибоначчи полезно построить последовательность этих чисел, используя формулу Бине: $s_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - (-\alpha)^{-n})$, где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (корень уравнения $x^2 - x - 1 = 0$). При этом строкой ввода вводим формулу Бине $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - (-\alpha)^{-n})$, строим точки $A = (0, f(n))$, $B = (n, f(n))$ и заставляем точки A и B оставлять следы. Передвигая точку на ползунке, получаем как точки последовательности (следы точки A), так и точки графика последовательности (следы точки B).

Рис. 7

Поиск других возможностей реализации рекурсивных процедур в среде GeoGebra при задании последовательностей можно предложить обучающимся в качестве учебно-исследовательского проекта.

Рассмотрим ещё один пример использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при решении некоторых комбинаторных задач, в ходе решения которых приходим к рекуррентному соотношению.

Главным признаком задач комбинаторного типа является вопрос задачи, который звучит как «Сколько вариантов?» или «Сколькими способами?». Решение комбинаторных задач напрямую зависит от того, понял ли решающий их смысл, сумел ли он правильно представить действие или процесс, которые были описаны в задаче.

Компьюторная среда GeoGebra предоставляет возможности для моделирования решений комбинаторных задач.

В качестве примера рассмотрим алгоритм построения компьютерной модели для решения одной из известных комбинаторных задач – задачи о ханойской башне (см. задача 3).

Задача 3. Имеется три стержня и n колец разного размера. Вначале все кольца находятся на одном из трех стержней в порядке убывающего размера, как показано на рис. 8. Нужно переместить имеющиеся кольца на другой стержень так, чтобы они остались в том же порядке. Этого нужно добиться, соблюдая следующие правила:

- на каждом шаге ровно одно кольцо перемещается с одного стержня на другой;
- кольцо большего размера нельзя помещать на меньшее;
- один из стержней можно использовать в качестве промежуточного.

Покажите, что это всегда можно сделать, и найдите, за какое наименьшее число перекладываний можно переместить k колец: а) k=2; б) k=3; в) k=4.

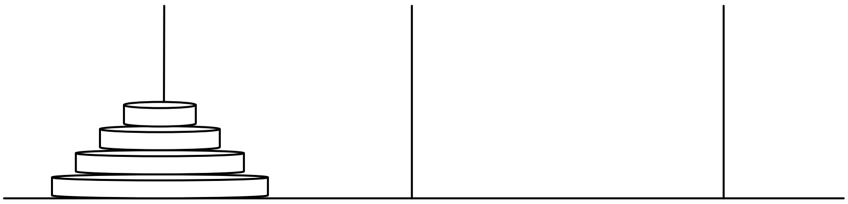


Рис. 8

Рассмотрим алгоритм построения анимационной модели для решения данной задачи при k=3 в компьютерной среде GeoGebra:

1 шаг. С помощью инструмента «Прямая» изображаем три стержня, а с помощью инструмента «Многоугольник» изображаем 3 кольца на одном из стержней. Создаем ползунок с именем n для подсчета числа перекладываний ($n \geq 0$, $n \in Z$) (рис. 9). Правой кнопкой мыши поочередно «кликаем» на каждое кольцо пирамиды и в меню «Свойства» выбираем вкладку «Дополнительно», с помощью которой задаем условия отображения для самого верхнего кольца n=0, для среднего кольца – n=0 или n=1, для самого большого кольца – n=0 или n=1 или n=2 или n=3.

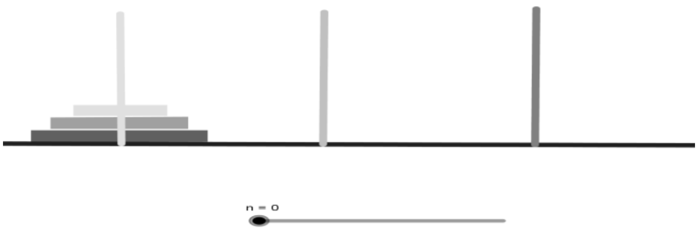


Рис. 9

2 шаг. Создаем копию верхнего кольца наименьшего размера, помещаем его на один из свободных стержней и устанавливаем для него условие отображения: n=1 или n=2.

3 шаг. Создаем копию среднего кольца и помещаем его на свободный стержень и устанавливаем для него условие отображения: n=2 или n=3 или n=4 или n=5 (рис 10).

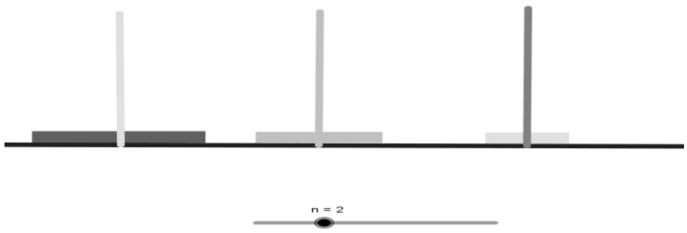


Рис. 10

4 шаг. Создаем ещё одну копию верхнего кольца наименьшего размера и помещаем его на кольцо среднего размера и устанавливаем для него условие отображения: n=3 или n=4.

5 шаг. Создаем копию самого большого кольца и помещаем его на освободившийся стержень и устанавливаем для него условие отображения: n=4 или n=5 или n=6 или n=7 (рис 11).

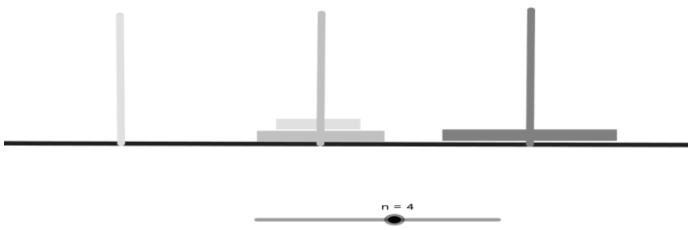


Рис. 11

6 шаг. Повторяем шаги 2, 3 и 4 – перекладываем кольца среднего и наименьшего размера на стержень с наибольшим кольцом, изменяя соответствующие условия отображения для этих объектов (рис. 12). Для ползунка n можно задать анимацию, в результате чего получиться анимационный чертеж, иллюстрирующий процесс решения задачи для k=3.

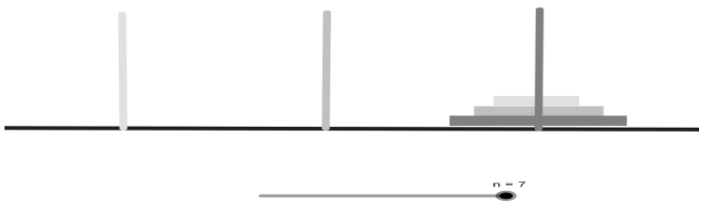


Рис. 12

С дидактической точки зрения довольно поучительным будет задание для учащихся, заключающееся в самостоятельном построении анимационных моделей для решения данной задачи при $k=4$. В процессе построения такой модели для k колец учащиеся могут заметить, что как только удалось переложить кольцо наибольшего размера с одного стержня на другой, задача сводится к уже знакомой – задаче о перекладывании $(k-1)$ верхних колец. В результате учащиеся приходят к гипотезе о том, что если наименьшее число перекладываний, за которое можно переложить k колец, обозначить P_k, то оно будет равно сумме следующих чисел: P_{k-1} – наименьшее число перекладываний верхних $(k-1)$ колец с одного стержня на другой; 1 – одно перекладывание самого нижнего большого кольца и P_{k-1} – наименьшее число перекладываний за которое можно снова переложить $(k-1)$ верхних кольца на кольцо наибольшего размера. Приходим к рекуррентному соотношению: $P_k=2\,P_{k-1}+1$.

Таким образом, компьютерная среда GeoGebra предоставляет возможности для моделирования решений комбинаторных задач.

Анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra можно использовать и в обучении элементам теории графов.

Специфика теории графов позволяет вводить ее основные понятия в предметную область не только вузовского математического образования, но и в образование школьников, методологически связывая их с практикой, показывая пути возникновения этих понятий при помощи формализации и обобщения различных сторон действительности.

Одной из особенностей теории графов, которая, собственно, и позволяет ставить вопрос о введении ее элементов в школьный курс математики, является возможность представить граф (как математическую модель или как отвлеченный образ) геометрически – в виде простого, удобного в обращении рисунка: вершины отождествляются с точками на плоскости, а ребра – с линиями, соединяющими вершины. При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием.

Теория графов предлагает модели для всякой системы с бинарными отношениями. Если в изучаемом явлении выделить непустое множество каких-то элементов и множество бинарных отношений, заданных на первом множестве, то, как только удастся разумно соотнести вершинам графа интересующие нас объекты, а ребрам – отношения между ними, полученный граф становится математической моделью изучаемого явления, а свойства графа отражают структурные свойства этого явления [Кейв, 2016].

Компьютерная среда GeoGebra позволяет с помощью создания интерактивных диаграмм графов, орграфов, мультиграфов, мультиорграфов, псевдографов и псевдоорграфов, которые возможно динамически изменять, осваивать базовые понятия и алгоритмы теории графов. Например, для лучшего восприятия и различия видов графов в системе GeoGebra можно создать видеоролик превращения графа в мультиграф, а затем в псевдограф или орграфа в мультиорграф, а затем в псевдоорграф [Большакова, 2013].

При рассмотрении понятия «изоморфные графы» студентам можно предложить, так называемое, задание «Калейдоскоп». В ходе выполнения задания «Калейдоскоп» необходимо создать диаграммы графов в системе GeoGebra, изображая вершины графа симметрично относительно пересекающихся прямых, с помощью инструмента «Отражение относительно прямой». Изменяя положение начальной вершины, симметрично меняют свое положение и другие вершины графа, в результате получаем новые изображения диаграмм исходного графа, сохраняющие симметричность вершин и напоминающие калейдоскоп [Большакова, 2013].

Простой язык теории графов позволяет решать многочисленные и разнообразные задачи практического контекста и довольно нетривиальные задачи дискретной математики.

Одной из судьбоносных для развития теории графов является задача о трех домах и трех колодцах (см. задача 4).

Задача 4. Имеются три дома и три колодца (рис.13). Каждый хозяин пользуется любым из трёх колодцев, но не любит встречаться с другими хозяевами. Можно ли проложить непересекающиеся дорожки, соединяющие каждый из домов с каждым колодцем?

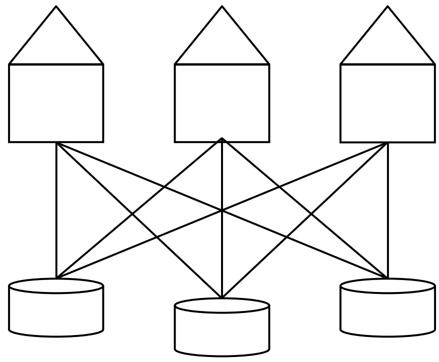


Рис. 13

Если к решению данной задачи применить язык теории графов, а именно: соотнести домам и колодцам вершины графа, дорожкам – ребра графа, то решение задачи сводится к вопросу о существовании плоской укладки двудольного графа $K_{3,3}$.

Во многих случаях не имеет значения, как изобразить граф, поскольку изоморфные графы несут одну и ту же информацию. Однако встречаются ситуации, когда важно выяснить, можно ли нарисовать граф на плоскости или на любой другой поверхности так, чтобы его ребра не пересекались, то есть, чтобы никакие два ребра не имели общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом электросхемы наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

На языке теории графов, речь идет в подобных случаях об укладке графа. Граф G укладывается в заданное пространство E, если существует изоморфизм φ графа G на граф G', находящийся в пространстве E, причём все простые кривые, соответствующие рёбрам графа G (образы ребер графа G), пересекаются только в инцидентных этим рёбрам вершинах.

С методической точки зрения, при знакомстве студентов с данным разделом теории графов, целесообразно их вовлечь в эксперимент по поиску решения задачи о трех домах и трех колодцах с помощью компьютерной среды GeoGebra.

На первом этапе решения задачи, студентам предлагается изобразить диаграмму графа $K_{3,3}$ (рис.14) в GeoGebra с помощью инструмента «Отражение относительно прямой», построив вершины, симметричные вершинам «Дом1», «Дом2», «Дом3». Изменяя положения этих вершин, получаем новые изображения графа $K_{3,3}$ – изоморфные графы.

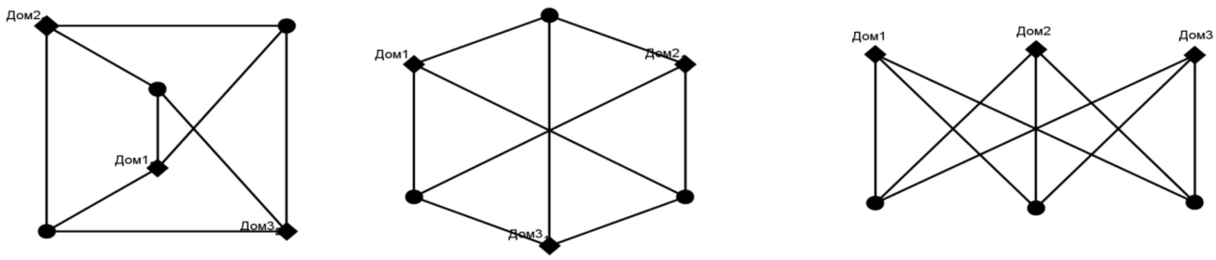


Рис. 14

Обучающиеся, в ходе компьютерного эксперимента, убеждаются, что все попытки осуществить плоскую укладку графа $K_{3,3}$ неизбежно заканчиваются неудачей. Как правило, легко нарисовать 8 непересекающихся дорожек, но девятая обязательно пересечёт хотя бы одну из этих восьми. Конечно, эти неудачи не случайны. Задача не имеет решения на плоскости.

На втором этапе решения задачи, студентам предлагается попробовать уложить граф $K_{3,3}$ на поверхности сферы. И опять все попытки заканчиваются неудачей. В ходе эксперимента, студенты убеждаются, что и на поверхности сферы задача не имеет решения (рис. 15).

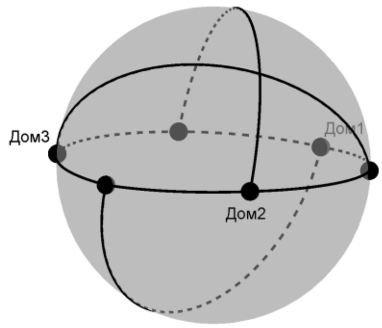


Рис. 15

Это тоже не случайно, поскольку граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарен. Доказательство этого факта можно проиллюстрировать с помощью построения в среде GeoGebra стереографической проекции графа, уложенного на сфере. Пусть граф G уложен на сфере σ, тогда на сфере можно выбрать точку N (северный полюс), не лежащую на рёбрах графа и не совпадающую ни с одной из вершин. После этого следует провести плоскость Π, касающуюся сферы в точке S (южный полюс), диаметрально противоположной N. Затем можно применить к графу G проекцию с центром в точке N (стереографическую проекцию). Так как между точками сферы σ, отличными от N, и их стереографическими проекциями на плоскость Π существует биективное соответствие, то граф G' – образ графа G – будет плоским и изоморфным G. Поэтому G – планарный граф. Обратное утверждение доказывается аналогично, исходя из того же чертежа.

В результате построения, на этом этапе, в GeoGebra стереографической проекции для графа $K_{3,3}$ обучающиеся убеждаются в непланарности этого графа (рис. 16).

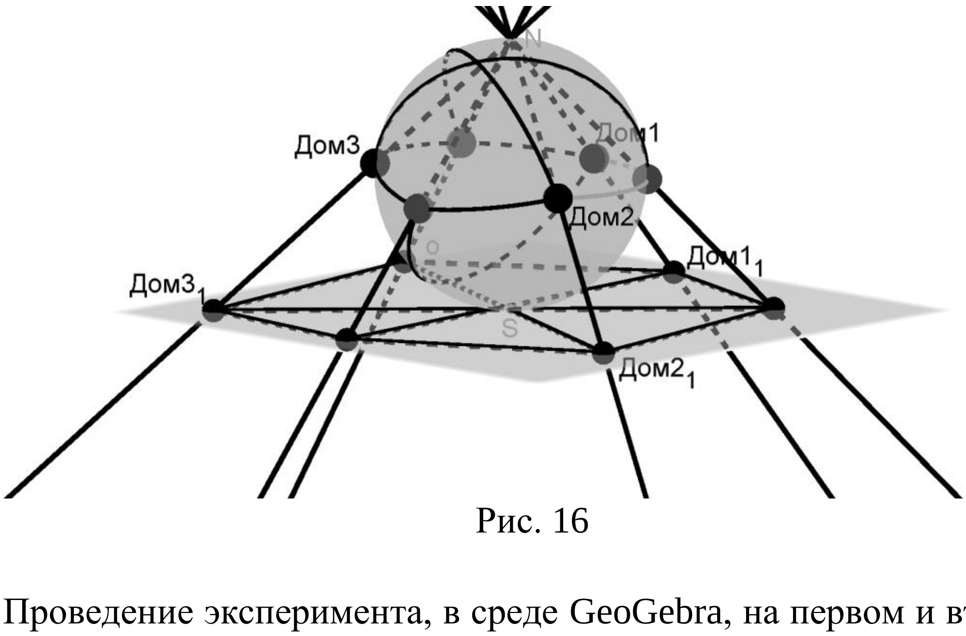


Рис. 16

Проведение эксперимента, в среде GeoGebra, на первом и втором этапе решения задачи, приводит студентов к выводу о необходимости конструирования моста или туннеля, соответствующих девятой дорожке.

На третьем этапе решения задачи предлагаем студентам изобразить в среде GeoGebra укладку графа K3,3 в трехмерном пространстве (рис.17).

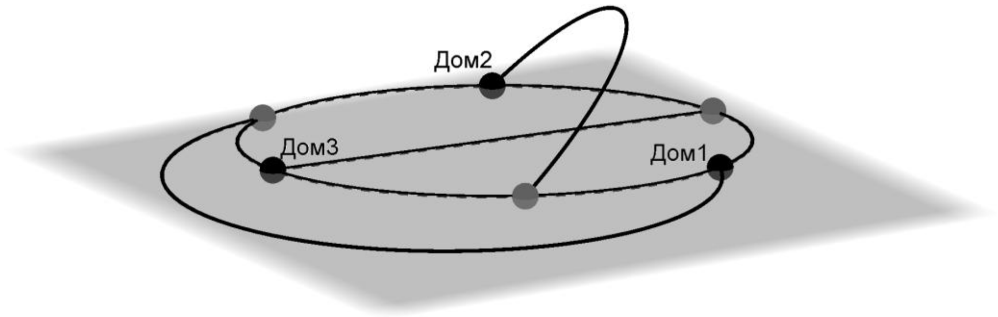


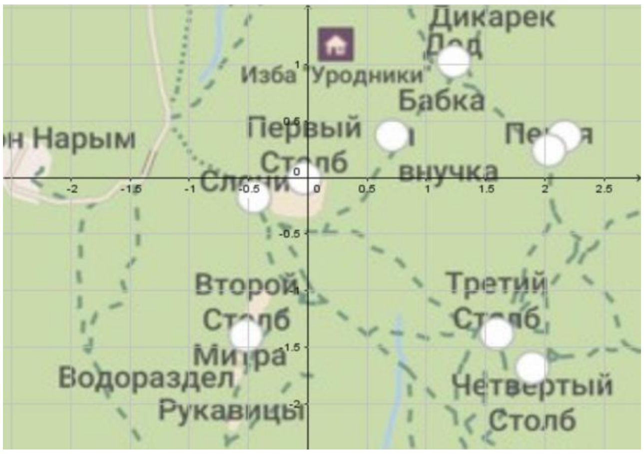
Рис. 17

После проведения описанного выше эксперимента, рассматриваем и доказываем утверждение о том, что любой граф укладывается в трёхмерное евклидово пространство.

С помощью встроенных команд «МинимальноеОстовноеДерево», «КратчайшееРасстояние» и «Коммивояжер», которые находятся в списке команд раздела «Дискретная математика» компьютерной среды GeoGebra, можно решать ряд задач практического содержания, создавая интерактивные графовые модели [Большакова, 2014].

Рассмотрим примеры решения практико-ориентированных задач на языке теории графов в компьютерной среде GeoGebra (см. задача 5-6).

Задача 5. Перед вами представлен фрагмент карты государственного природного заповедника «Столбы», в компьютерной среде GeoGebra, с выбранной условно системой координат (рис. 18).



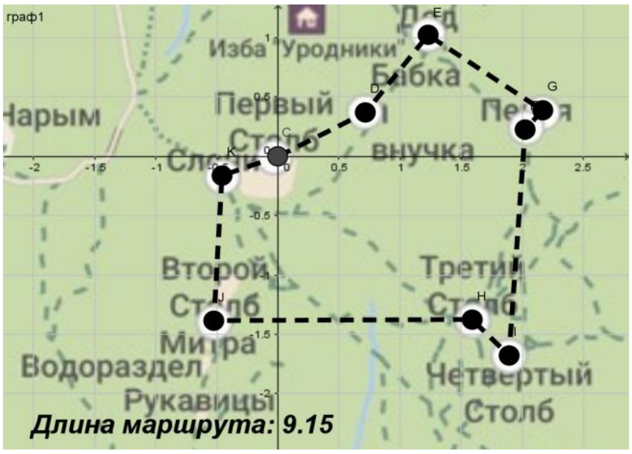


Рис. 18 Рис. 19

Свое название «Столбы» получили не случайно. Основной достопримечательностью территории Саянских отрогов стали сиенитовые скалы, по велению природы принявшие облик исполинских великанов с угадываемыми очертаниями людей, животных и мифологических существ, с уникальной структурой ходов и лазов. Почти все скалы заповедника имеют имена. Всего скал в заповеднике «Столбы» более 100 высотой до 90 метров. Самым популярным для туристов является круговой маршрут, начинающийся от Первого Столба, проходящий через скалы Внучка, Бабка, Дед, Перья, Львиные ворота, Четвертый, Третий и Второй столбы и возвращающийся назад к Первому Столбу и Слонику [Заповедник Столбы zapovednik-stolby.ru]. Составьте оптимальный замкнутый маршрут (маршрут наименьшей длины, проходящий через, выделенные белыми точками на карте Столбы, только один раз) экскурсионного тура. Вычислите, используя встроенные функции среды GeoGebra, примерную (с точностью до сотых) наименьшую длину экскурсионного маршрута.

На языке теории графов задача сводится к отысканию гамильтонова цикла наименьшей длины в графе с вершинами, соответствующими заданным Столбам.

Алгоритм решения данной задачи в компьютерной среде GeoGebra состоит из следующих шагов:

1) С помощью инструмента «Точка», возле каждого Столба на карте расставляем условно точки – вершины графа: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L.

2) Выбираем в списке команд в разделе «Дискретная математика» команду «Коммивояжер» и вставляем ее в строку ввода, перечисляя через запятую все вершины графа: «Коммивояжер[A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L]». В результате получаем гамильтонов цикл наименьшей длины (рис. 19).

3) Соединяем отрезками полученный маршрут и в строке ввода находим сумму длин отрезков. В меню «Настройки» выбираем пункт

«Округление» и устанавливаем необходимую точность вычислений, выбирая определенное число разрядов в числе после запятой.

Задача 6. Перед вами карта городов России с выбранной условно системой координат (рис. 20). Составьте оптимальную систему авиарейсов (т.е. из любого города в любой другой можно перелететь единственным авиарейсом наименьшей длины), соединяющих данные города. Вычислите, используя встроенные функции среды GeoGebra, примерную (с точностью до десятых) наименьшую длину, установленной системы авиарейсов.

Рис. 20

На языке теории графов задача сводится к отысканию минимального остовного дерева в графе с вершинами, соответствующими заданным городам.

Алгоритм решения данной задачи в компьютерной среде GeoGebra состоит из следующих шагов:

1) С помощью инструмента «Точка», возле каждого города на карте расставляем условно точки – вершины графа: A, B, C, D, E, F, G.

2) Выбираем в списке команд в разделе «Дискретная математика» команду «МинимальноеОстовноеДерево» и вставляем ее в строку ввода, перечисляя через запятую все вершины графа:

«МинимальноеОстовноеДерево[A,B,C,D,E,F,G]». В результате получаем минимальное остовное дерево для данного графа (рис. 21).

3) Соединяем отрезками полученный маршрут авиарейсов и в строке ввода находим сумму длин отрезков. В меню «Настройки» выбираем пункт «Округление» и устанавливаем необходимую точность вычислений, выбирая определенное число разрядов в числе после запятой.

Таким образом, использование компьютерной системы GeoGebra позволяет продемонстрировать решение многих практико-ориентированых задач на языке теории графов.

Рис. 21

В частности, анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra можно использовать при разработке и создании тестов по дисциплине «Дискретная математика».

В современном образовании применение тестов является необходимым компонентом обучения. Слово «тест» английского происхождения и на языке оригинала означает «испытание», «проверка». Педагогический тест – это инструмент оценивания обученности учащихся, состоящий из системы тестовых заданий, стандартизированной процедуры проведения, обработки и анализа результатов. В узком смысле тестирование в педагогике означает использование стандартизированных педагогических тестов для измерения и оценки результатов обучения. В широком же смысле тестирование – это любое испытание с целью измерения достижений обучаемого [Майоров, 2001].

Компьютерные дидактические тесты на сегодняшний день приобретают все большее распространение, что обусловлено стремлением повысить оперативность и объективность оценки качества обучения.

Тесты могут быть как контролирующими, так и обучающе-тренировочными. Первые предназначены для оценивания учебных достижений учащихся, вторые – помогают учащимся выявить и устранить существующие пробелы в их подготовке. В обучающе–тренировочных тестах предусмотрен анализ выполнения учащимся каждого тестового задания, результат которого сопровождается комментариями, разъяснениями, демонстрацией последствий, возникающих в ситуации выбранных решений, что имитирует присутствие преподавателя в процессе самостоятельного изучения материала. Применение компьютерных технологий позволяет не только оперативно моделировать наступающие последствия, но и наглядно представлять их с использованием изображения, анимации.

Технология создания тестов в компьютерной среде GeoGebra подразумевает выполнение ряда следующих действий:

1) создание ползунка, с именем n, на количество вопросов: выбрать на панели инструментов кнопку «ползунок»; задать минимальное значение – 1, максимальное значение – количество вопросов; шаг ползунка – 1;

2) оформить первый вопрос: выбрать на панели инструментов кнопку «текст»; сформулировать первый вопрос;

3) создать ползунок для выбора ответа на первый вопрос: выбрать на пали инструментов кнопку «ползунок»; задать минимальное значение – 1, максимальное значение – количество вариантов ответа; шаг ползунка – 1;

установить флажок «закрепленный» и флажок «вертикальный» (для каждого вопроса нужен свой ползунок для формирования ответа);

4) оформить меню выбора ответа: выбрать на панели инструментов кнопку «текст»; сформулировать варианты возможных ответов «в столбик» рядом с вертикальным ползунком;

5) подготовить поле для следующего вопроса, скрыв все что относится к первому вопросу: правой кнопкой мыши кликнуть на каждый объект первого вопроса и выбрать в меню вкладку «свойства»; для всех объектов во вкладке «дополнительно» отметить условие отражения объектов n=1;

6) повторяя шаги 2) – 5), создать остальные вопросы, так чтобы для получения ответа необходимо было воспользоваться возможностями программы GeoGebra;

7) создать таблицу для подсчета результатов: в строке ввода задать переменные Bi=Если[<имя ползунка ответа>==<номер правильного ответа>, 1, 0], где i – номер вопроса; для подсчета правильных ответов в строке ввода задать переменную S=$\sum_{i=1}^{n} B_i$, с помощью команды – Сумма[{Bi}], где i – номер вопроса; для отображения на экране результатов тестирования в строке ввода задать таблицу, используя команду – Таблица[{{i},{Bi},S}], где i – номер вопроса);

8) если необходимо ограничить время выполнения теста, тогда для ползунка n, отвечающего за смену вопросов на экране, нужно задать анимацию и время просмотра каждого вопроса: правой кнопкой мыши кликнуть на ползунок n и выбрать в меню вкладку «анимировать»; во вкладке «свойства» для ползунка n задать скорость анимации.

В качестве примера, представим фрагмент теста, разработанного в соответствии с описанной выше технологией в компьютерной среде GeoGebra.

На рисунке 21 проиллюстрировано как выглядят вопросы теста в компьютерной среде GeoGebra. В ходе выполнения теста, тестируемый, управляя вертикальным ползунком, выбирает вариант ответа и переходит к следующему вопросу. Если в дополнительных свойствах для объекта «Таблица результатов» не указывать условия отображения данного объекта, то тогда обучающийся может наблюдать результаты и оценку выполнения теста.

На рисунке 22 представлен результат выполнения теста: в таблице указаны баллы за ответ на каждый вопрос теста, общая сумма баллов и оценка выполнения теста.

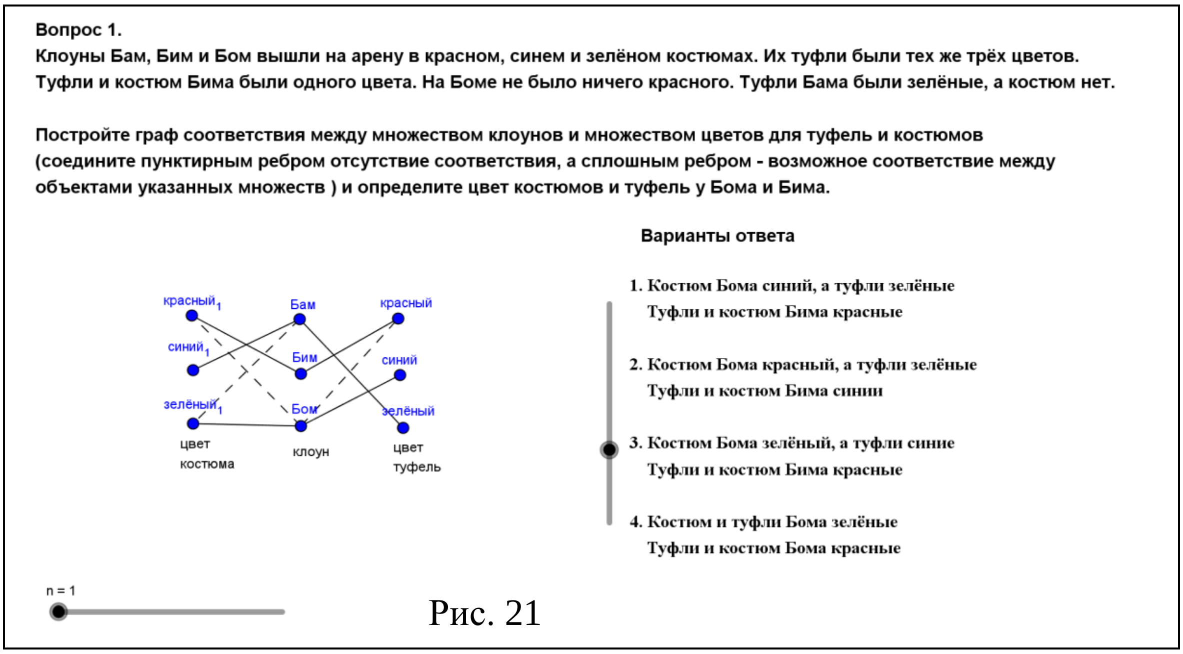


Рис. 21

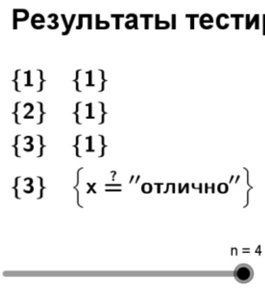


Рис. 22

Вывод: анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra позволяют наглядно представить многие дискретные объекты, изучаемые в педагогическом вузе в рамках дисциплины «Дискретная математика» и, ввести компьютерную анимацию в процесс обучения дискретной математике.

Глава 2. Методическое обеспечение дисциплины «Дискретная математика» на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra

Использование компьютерных технологий в обучении дискретной математике предполагает некоторую трансформацию всех компонентов методической системы обучения. Под методической системой обучения, следуя А.М. Пышкало [Пышкало, 1978], будем понимать педагогическую структуру, компонентами которой являются: цели, содержание, методы, формы и средства обучения.

Учитывая требования ФГОС ВО, а также выделенные в первой главе теоретические концепции и дидактические условия использования компьютерных технологий в обучении математике, необходимо: уточнить основные цели обучения дискретной математике; актуализировать и дополнить содержание обучения; выделить наиболее целесообразные методы, формы и средства обучения дискретной математике в педагогическом вузе.

§ 2.1. Цели и содержание обучения дискретной математике в педагогическом вузе в аспекте использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra

Ведущим и системообразующим звеном любой деятельности и учебно-познавательной, и учебно-профессиональной являются цели и стоящие за ними потребности, мотивы, интересы, ценности. С определения цели начинается любая деятельность. Точное указание цели обучения – главная задача, которую мы должны решить, приступая к организации процесса обучения, ибо эта организация невозможна без чёткого представления о том, что мы хотим получить в результате обучения.

Цели обучения студентов математике в педагогическом вузе структурированы в работе Н.Я. Виленкина и А.Г. Мордковича [Виленкин, 1986].

В работе Л.В. Шкериной [Шкерина, 2005], выделены следующие цели учебно-познавательной деятельности студентов в рамках профессиональной подготовки:

– усвоение определенной системы предметных, межпредметных и надпредметных знаний, умений и навыков, необходимых будущему учителю;

– развитие творческих способностей, необходимых учителю для работы в школах различного типа;

– формирование готовности студента к профессиональному самообразованию и саморазвитию;

– формирование профессиональных умений, составляющих основу профессионально-педагогической компетентности;

– формирование ценностного отношения студента к знаниям, учебно-познавательной деятельности и профессиональной деятельности будущего учителя.

При постановке целей обучения следует учитывать современный социальный заказ общества – подготовка профессионала – квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, свободно владеющего своей профессией, готового к постоянному профессиональному росту [Гос. программа развития образования, 2012]. Эта цель определена в основных документах по модернизации отечественного образования и конкретизирована в профессиональном стандарте педагога и в новых образовательных стандартах.

Квалификация педагога отражает уровень профессиональной подготовки учителя и его готовность к труду в сфере образования. Квалификация учителя складывается из его профессиональных компетенций.

Профессиональная компетенция – способность успешно действовать на основе практического опыта, умения и знаний при решении профессиональных задач [Проф. стандарт, 2013].

Согласно требованиям действующего Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО) выпускник программы бакалавриата по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование с присвоением квалификации «академический бакалавр» в соответствии с видами профессиональной деятельности, на которые ориентирована программа бакалавриата, должен быть готов решать следующие *профессиональные задачи в области педагогической деятельности:*

- изучение возможностей, потребностей, достижений обучающихся в области образования;
- обучение и воспитание в сфере образования в соответствии с требованиями образовательных стандартов;
- использование технологий, соответствующих возрастным особенностям обучающихся и отражающих специфику предметных областей;
- осуществление образовательной деятельности с учетом особых образовательных потребностей;
- организация взаимодействия с общественными и образовательными организациями, детскими коллективами и родителями, участие в самоуправлении и управлении школьным коллективом для решения задач профессиональной деятельности;
- формирование образовательной среды для обеспечения качества образования, в том числе с применением информационных технологий.

Одной из профессиональных компетенций, которой должен обладать выпускник программы бакалавриата, согласно ФГОС ВО, является:

«Способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2)» [ФГОС ВО, 2013].

Поэтому дидактические цели обучения дисциплине «Дискретная математика» необходимо, в частности, ориентировать в направлении формирования у студентов основ профессиональной компетентности ПК-2 в области использования компьютерных технологий в математическом образовании школьников. В связи с этим, уточним содержание ПК-2, как одной из основных целей обучения дискретной математике, следующим образом: «Способность использовать компьютерные технологии в обучении дискретной математике (на примере GeoGebra) (ПК-2`)».

На основе предложенного в работе [Шкерина и др., 2013] подхода к моделированию структуры профессиональных компетенций студентов – будущих учителей в структуре компетенций, описанных с позиций категории «способность», будем выделять следующие их характеристические элементы:

1) знания о круге реальных объектов, по отношению к которым вводится компетенция;

2) знания в области методов, способов и приемов деятельности в сфере данной компетенции;

3) умения, навыки и способы деятельности в сфере компетенции;

4) отношение к деятельности в сфере компетенции (проявление интереса, ориентированность на получение результата, понимание значения деятельности и ее результата) [Шкерина и др., 2013].

Представим структурно-содержательную модель компетенции ПК-2` (табл. 2).

Таблица 2

Структурно-содержательная модель профессиональной компетенции «Способен использовать компьютерные технологии в обучении дискретной математике (на примере компьютерной системы GeoGebra)» (ПК-2`)

Аспект компетенции	Элемент компетенции	Характеристика элемента компетенции студента
Когнитивный	знания в области реальных объектов, по отношению к которым вводится компетенция	знание: - основных возможностей компьютерных средств обучения дискретной математике (на примере компьютерной системы GeoGebra); - дидактических условий использования компьютерных технологий в обучении дискретной математике;
	знания в области методов, способов и приемов деятельности в сфере данной компетенции	знание: - технологии компьютерного моделирования дискретных объектов и их представления с помощью систем компьютерной математики (на примере компьютерной системы GeoGebra) - методов решения задач дискретной математики с использованием систем компьютерной математики (на примере компьютерной системы GeoGebra);
Праксиологический	умения, навыки и способы деятельности в сфере компетенции	умение: - создать компьютерную модель дискретных объектов с помощью систем компьютерной математики (на примере компьютерной системы GeoGebra); - использовать методы решения задач дискретной математики с использованием систем компьютерной математики (на примере компьютерной системы GeoGebra);
Аксиологический	отношение к деятельности в сфере компетенции (проявление интереса, ориентированность на получение результата, понимание значения деятельности и ее результата)	- осознание роли, места и значения компьютерных технологий в обучении дискретной математике; - проявление интереса и потребности в использовании компьютерных технологий при решении задачи дискретной математики.

С учётом вышесказанного и корректив, вносимых процессом использования систем компьютерной математики, выделим *приоритетные группы целей обучения дискретной математике:*

– *обеспечение усвоения предметных и межпредметных знаний, умений и навыков, необходимых будущему учителю (когнитивная группа целей обучения);*

– *развитие способностей и опыта профессиональной деятельности по применению систем компьютерной математики в обучении дискретной математике (праксиологическая группа целей);*

– *обеспечение осознания студентами места, роли и значения систем компьютерной математики в обучении дискретной математике (аксиологическая группа целей).*

Для современного учителя математики нужны разносторонние знания современной математики, одним из разделов которой является дискретная математика. В последнее время дискретная математика и связанные с нею методы исследования пронизывают на разных уровнях большинство наук: современную математику, информатику и программирование, экономику, биологию, социологию, электронику и др. Многие методы дискретной математики применяются для решения важных научных и прикладных задач. Кроме этого, некоторые понятия школьной математики (числа, суммы, прогрессии, графы и др.) имеют тесные узы с дискретной математикой.

Необходимость изучения этой дисциплины студентами педагогических вузов обусловлена тем, что в наше время мы стали свидетелями бурного развития дискретной математики, которая является сегодня не только фундаментом кибернетики, но и важным звеном математического образования. Современный учитель математики и информатики должен овладеть не только ее основными понятиями и методами, но и методикой ее преподавания в школе.

В процессе обучения дискретной математике необходимо обеспечить такой уровень математических знаний, умений и навыков, который гарантировал бы владение знаниями, составляющими фундамент современной математики, дающими возможность самостоятельно осваивать новые разделы теории; умениями применять полученные знания на практике; навыками решения математических задач различного уровня сложности, в частности, с использованием систем компьютерной математики. Возможность получения студентом не только опыта использования компьютерных технологий при решении разнообразных задач дискретной математики, но и осознания относительно мотивов, потребностей и интересов места и роли компьютерных технологий в своей будущей профессиональной деятельности.

С целью развития способностей студентов и опыта педагогической деятельности в процессе обучения дискретной математике у студентов необходимо формировать умения реализовывать основные функции деятельности педагога (аналитико-диагностические, информационные, конструктивно-проектировочные, организационные, коммуникативные, исследовательские, оценочные), умения учить и учиться и др. Такую возможность студентам представляет исследовательская, творческая квазипрофессиональная деятельность. Это означает, что в процессе обучения студент должен быть вовлечен в различные виды учебно-познавательной деятельности.

Предметные компетенции, формируемые у будущего учителя в процессе изучения дискретной математики, конкретизируют обязательные результаты обучения в виде мотивов и готовности применять знания и умения в профессиональной деятельности. Определим предметные компетенции по каждому из учебных модулей курса «Дискретная математика» в виде системы требований к уровню освоения содержания курса «Дискретная математика» в трех аспектах (табл. 3):

Таблица 3

Аспекты требований к уровню освоения содержания курса «Дискретная математика»

Когнитивный аспект	
Предметные знания	Знать, что…
Праксиологический аспект	
Процедурные знания	Знать, как…
Аксиологический аспект	
Ценностно-смысловые знания	Знать, зачем и почему…

Требования к уровню освоения содержания курса «Дискретная математика»

Модуль 1. Введение в дискретную математику. Рекуррентные соотношения. Анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra в представлении числовых последовательностей

В результате изучения этого раздела дисциплины студент должен:

Когнитивный аспект. Иметь представление о том, что изучает дискретная математика. Знать историю возникновения и развития дискретной математики и основные направления её современного развития. Иметь представление о приложениях дискретной математики. Знать определение числовой последовательности и способы её задания. Знать способы визуального представления в компьютерной среде GeoGebra числовых последовательностей, заданных аналитически и рекуррентно. Знать определения: рекуррентного соотношения (рекуррентного уравнения); решения рекуррентного уравнения (общее и частное); линейного рекуррентного соотношения и их разновидности. Знать основные методы решения рекуррентных уравнений: метод последовательного перебора; метод решения линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами; метод перехода к конечным суммам. Знать технологию использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при изучении рекуррентных соотношений и при решении на их основе комбинаторных задач.

Деятельностный аспект. Уметь применять рекуррентные соотношения к решению комбинаторных задач. Владеть методами решения линейных рекуррентных соотношений, в частности, с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra. Уметь конструировать анимационные чертежи в компьютерной среде GeoGebra, визуализирующие числовые последовательности, заданные аналитически и рекуррентно. Уметь приводить примеры и контрпримеры рекуррентных соотношений. Уметь распознавать вид рекуррентных соотношений. Уметь приводить примеры задач из школьного курса математики, связанных с рекуррентными соотношениями. Уметь распознавать задачи, приводимые к рекуррентным соотношениям. Уметь конструировать анимационные чертежи для иллюстрации решения некоторых комбинаторных задач, сводимых к рекуррентным соотношениям. Уметь конструировать и реализовывать методическую поддержку школьного курса математики по вопросам обучения школьников решению комбинаторных задач с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Ценностный аспект. Оценить историческое становление и развитие дискретной математики из потребностей жизни и практики. Осознать роль и значение знаний и методов в области дискретной математики для развития науки и общества, для личностного и профессионального развития (оценить значимость дискретной математики на объективном и субъективном уровне). Осознать возможности использования знаний по дискретной математике в практике работы учителя математики и информатики. Осознать межпредметные связи дискретной математики с другими отраслями науки, смежными дисциплинами и школьным курсом математики. Осознать роль и значение метода рекуррентных соотношений при решении комбинаторных задач. Осознать и оценить анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra в изучении рекуррентных соотношений и в решении комбинаторных задач.

Модуль 2. Теория графов. Анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra в теории графов

В результате изучения этого раздела дисциплины студент должен:

Когнитивный аспект. Знать историю возникновения и развития теории графов. Знать основные понятия теории графов: граф и его структурные элементы, виды графов (пустой, полный, *k*-дольный граф и др.); смежность и инцидентность; степень вершины графа; изоморфизм графов; операции над графами; подграф и основные виды подграфов; связность; маршрут и виды маршрутов в графе; дерево; нагруженный граф и минимальное остовное дерево; эйлеровы и гамильтоновы графы; укладка графа; правильная раскраска вершин графа. Знать о способах визуального представления основных понятий теории графов при помощи систем компьютерной математики (в частности, при помощи анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra). Знать основные алгоритмы теории графов: алгоритм поиска вершин в графе; алгоритм выделения компонент связности графа; алгоритм поиска минимального остовного дерева в графе; алгоритмы выделения эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе; алгоритм правильной раскраски вершин графа. Знать о возможностях систем компьютерной математики (в частности, при компьютерной среды GeoGebra) в реализации основных алгоритмов теории графов и в решении прикладных задач на языке теории графов. Знать о приложениях теории графов в практике работы учителя математики и информатики, в смежных дисциплинах, в различных отраслях науки и техники.

Деятельностный аспект. Уметь распознавать внутреннюю структуру графов. Уметь приводить примеры и контрпримеры графов. Уметь приводить факты использования этого понятия в различных областях науки и жизни, в смежных дисциплинах и в школьном курсе математики. Уметь применять язык теории графов при решении разнообразных задач. Уметь применять основные алгоритмы теории графов для решения разнообразных задач.

Уметь конструировать анимационные чертежи в компьютерной среде GeoGebra, визуализирующие решение задач на языке теории графов. Уметь конструировать и реализовывать методическую поддержку школьного курса математики по вопросам обучения школьников элементам теории графов с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Ценностный аспект. Осознать историю возникновения теории графов из потребностей жизни и практики. Осознать и оценить роль и значение языка теории графов для различных областей науки и техники, для смежных дисциплин и для школьного курса математики. Осознать и оценить практическую значимость основных алгоритмов теории графов для решения разнообразных задач. Осознать историю возникновения и развития гипотезы о четырех красках. Осознать возможности приложений теории графов в практике работы учителя математики и информатики, в различных отраслях науки, в смежных дисциплинах. Осознать и оценить анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra в изучении теории графов и в решении задач на языке теории графов.

Содержание обучения дисциплине «Дискретная математика»

Под содержанием обучения целесообразно понимать не только некоторый объем теоретического учебного материала, но и комплекс задач, заданий и упражнений, а также сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач.

На основании сформулированных выше целей содержание обучения дискретной математике структурируем по трем блокам: *когнитивный, праксиологический и аксиологический*.

Когнитивный блок содержания обучения включает в себя: предметные знания – знания в области дискретной математики (методология, научные основы, основные законы, положения, теоретические конструкты, их свойства и признаки); межпредметные знания (соотношения между знаниями определенных дисциплин и их обусловленность и детерминированность); исторические и автобиографические сведения, освещающие судьбы научных идей через судьбы их творцов; сведения и примеры об использовании анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra в изучении дискретной математики.

Праксиологический блок содержания состоит из комплекса задач, заданий и упражнений, направленных на отработку умений и навыков и формирование опыта применения теоретических знаний на практике.

Аксиологический блок содержания состоит из сведений о ценности теоретических и практических знаний и комплекса вопросов на выявление ценностных аспектов изучаемого материала для себя и для своей будущей профессиональной деятельности. Вопросы такого рода ориентированы на потребности и интересы личности, на проявление рефлексии, критического мышления, осуществления оценочной деятельности, и выбора ценностей.

Различные аспекты проблемы отбора содержания обучения, принципов и критериев отбора изложены в работах таких известных дидактов, как Ю.К. Бабанский, И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин, В.И. Загвязинский, Л.И. Гриценко, известных психологов Б.Г. Ананьев, В.В. Давыдов, П.Я. Гальперин и др.

Применительно к математике в работе А.Г. Мордковича [Мордкович, 1986] сформулированы критерии профессионально-педагогического подхода к составлению программ математических курсов педвузов: критерий соответствия целям обучения; критерий дидактической изоморфности (основные структурные элементы и смысловые единицы соответствующей области математики переходят в учебный процесс переосмысленными в дидактическом плане); критерий минимизации (о необходимости тщательно отбирать минимум информации).

Учитывая рассмотренные теоретические положения и сформулированные нами ранее (см. параграф 1.2.) условия построения методики обучения студентов дискретной математике, на основе использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra, выделим следующее содержание курса «Дискретная математика».

Модуль 1. Введение в дискретную математику. Рекуррентные соотношения. Анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra в представлении числовых последовательностей

Когнитивный блок

Сведения о целях изучения дискретной математики. Предмет дискретной математики. Различие между дискретной и непрерывной математикой. Счёт и перечисление (перебор) как основные методы дискретной математики. О постановке задач в области дискретной математики. История становления и развития дискретной математики. Связь дискретной математики с другими областями науки и жизни. Приложения дискретной математики. Сведения о новейших достижениях в области дискретной математики.

Сведения о целях изучения рекуррентных соотношений в педагогическом вузе. Понятие рекуррентного соотношения, примеры задач, приводящих к рекуррентным соотношениям. Методы решения рекуррентных соотношений (метод последовательного вычисления элементов решения рекуррентного соотношения, метод «раскрутки», методы решения линейных рекуррентных соотношений, метод перехода от сумм к рекуррентным соотношениям и наоборот). Возможности использования компьютерной среды GeoGebra в изучении темы «Числовые последовательности и рекуррентные соотношения».

Деятельностный блок

1. Разработка Web-страничек об истории возникновения и развития дискретной математики для школьников.

2. Создание электронного учебника для школьников по дискретной математике.

3. Проведение логико-дидактического анализа по теме «Числовые последовательности и рекуррентные соотношения» и установление соответствия между изучаемым материалом в вузовском курсе дискретной математики и школьном курсе математики:

а) сопоставить предложенный учебный материал со школьным курсом математики, проанализировать его, выявить и обосновать логику построения материала.

б) в каких классах школьного курса математики рассматриваются рекуррентные соотношения и числовые последовательности, в каком объеме и на каком уровне?

в) есть ли различия в изложении данного вопроса в курсе дискретной математики и школьном курсе математики?

г) какие факты, не изучаемые в школьном курсе математики, рассматриваются в вузовском курсе дискретной математики?

д) есть ли возможности у школьного курса математики для рассмотрения темы «Числовые последовательности и рекуррентные соотношения» в том объёме и на том уровне, на котором эта тема изучается в вузовском курсе дискретной математики?

4. Выявление анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra в изучении темы «Числовые последовательности и рекуррентные соотношения»:

1) выделить способы представления числовых последовательностей в компьютерной среде GeoGebra;

2) привести примеры построения анимационных чертежей в компьютерной среде GeoGebra для последовательностей, заданных аналитически и рекуррентно.

5. Решение линейных рекуррентных соотношений в компьютерной среде GeoGebra.

6. Конструирование анимационных чертежей в компьютерной среде

GeoGebra для иллюстрации решения задач, приводимых к рекуррентным соотношениям.

7. Разработка и реализация фрагмента факультативного занятия для школьников по теме: «Числовые последовательности и рекуррентные соотношения в компьютерной среде GeoGebra».

Ценностный блок

1) Напишите эссе на одну из следующих тем: «Предмет дискретной математики – это…», «Моя цель изучения дискретной математики», «Дискретную математику уже потому изучать нужно, что она…».

2) Проанализируйте современные аспекты обучения школьников основам дискретной математики. Какие элементы дискретной математики входят в содержание предметной области «Математика и информатика» примерной образовательной программы основного общего образования? Какие существуют возможности для включения дополнительных элементов дискретной математики в школьный курс «Математика и информатика»?

3) Проанализируйте межпредметные связи дискретной математики с другими дисциплинами. Приведите примеры.

4) Оцените прикладное значение дискретной математики и приведите примеры.

5) Оцените роль метода рекуррентных соотношений при решении комбинаторных задач. Приведите примеры таких задач.

6) Сравните различные способы решения рекуррентных соотношений (метод последовательного вычисления элементов решения рекуррентного соотношения, метод «раскрутки», метод сведения к сумме и др.). Оцените рациональность использования этих методов при решении рекуррентных задач.

7) Оцените анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra в изучении числовых последовательностей и рекуррентных соотношений.

Модуль 2. Теория графов. Анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra в теории графов

Когнитивный блок

Сведения о целях изучения теории графов. Исторические сведения о становлении и развитии теории графов. Графы и их приложения. Основные понятия теории графов: псевдограф, мультиграф, граф, ориентированный граф. Строгое и нестрогое определение понятия графа. Смежность и инцидентность. Степень вершины графа. Теорема о сумме степеней вершин графа и её следствие. Изоморфизм и гомеоморфизм графов. Внутренняя структура графа и виды графов: полный граф, пустой граф, двудольный, n-дольный и др. Матричное задание графов. Подграф. Операции над графами. Маршрут и виды маршрутов. Связность в графах. Компоненты связности графа. Поиск вершин в графе («поиск в глубину», «поиск в ширину»). Деревья. Характеризационная теорема. Остовное дерево. Нагружённый граф. Минимальное остовное дерево. Алгоритм Прима и Краскала. Эйлеровы и гамильтоновы циклы и графы. Критерий эйлеровости. Планарные графы. Укладка графа. Непланарность графов K_5 и K_{33}. Правильная раскраска вершин графа. Хроматическое число графа. Раскраска вершин планарного графа. Гипотеза четырёх красок. Исторические сведения о попытках доказательства теории четырёх красок. Теорема о пяти красках. Задачи о составлении расписаний. Возможности использования компьютерной среды GeoGebra в изучении элементов теории графов.

Деятельностный блок

1. Разработка электронного опорного конспекта «Основные понятия теории графов».

2. Разработка Web-страничек об истории возникновения и развития теории графов.

3. Проведение логико-дидактического анализа по теме «Элементы теории графов» и установление возможностей включения элементов теории

графов в математическое образование школьников.

4. Выявление анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra в изучении элементов теории графов:

1) выделить способы представления основных понятий теории графов в компьютерной среде GeoGebra;

2) привести примеры построения анимационных чертежей в компьютерной среде GeoGebra для визуализации основных понятий теории графов.

5. Решение задач на языке теории графов в компьютерной среде GeoGebra.

6. Подборка задач для школьников и конструирование анимационных чертежей в компьютерной среде GeoGebra для иллюстрации их решения с помощью графов.

7. Разработка и реализация фрагмента факультативного занятия для школьников по теме: «Графы в компьютерной среде GeoGebra».

8. Разработка тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra.

Ценностный блок

1) Напишите реферат на тему: «Графы вокруг нас: приложения теории графов».

2) Проанализируйте дидактические аспекты обучения школьников элементам теории графов. Какие существуют возможности для включения элементов теории графов в математическое образование школьников?

3) Проанализируйте межпредметные связи теории графов с другими дисциплинами. Приведите примеры.

4) Оцените прикладное значение основных алгоритмов теории графов (алгоритмы поиска маршрутов в графе, алгоритмы поиска минимального остова, алгоритмы поиска эйлеровых и гамильтоновых циклов и др.).

5) Оцените анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra в изучении теории графов и в решении задач на языке теории графов.

§ 2.2. Лабораторный практикум: решение задач дискретной математики с использованием анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra

Компьютерный лабораторный практикум по дисциплине «Дискретная математика», как разновидность практических занятий, предполагает активное использование систем компьютерной математики в учебно-познавательном процессе. В ходе выполнения лабораторных работ будущий учитель приобретает опыт применения систем компьютерной математики в будущей профессиональной деятельности.

В качестве основных этапов лабораторной работы мы выделяем следующие: ориентировочный, конструкторский, заключительный.

В рамках ориентировочного этапа целесообразно уточнить основную цель, предполагаемые результаты работы и провести актуализацию знаний, которые могут быть востребованы в ходе выполнения лабораторной работы.

В ходе конструкторского этапа осуществляется компьютерное конструирование анимационных чертежей и динамических моделей для решения задач и представления основных объектов дискретной математики.

На заключительном этапе – подведение итогов выполненной работы, обсуждение и представление полученных результатов.

В таблице 4 представим примерное учебно-тематическое планирование лабораторного практикума по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra.

Таблица 4

Учебно-тематическое планирование лабораторного практикума по дисциплине «Дискретная математика» с использованием анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra

№ п/п	*Наименование темы лабораторной работы*	*Кол-во ауд. часов*	*Основная дидактическая цель*	*Использование анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra*
1	2	3	4	5
1.	Числовые последовательности и способы их задания	2	Формирование навыков компьютерного моделирования числовых последовательностей заданных аналитически и рекуррентно с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra	Конструирование в компьютерной среде GeoGebra инструмента анимационного представления графиков числовых последовательностей заданных аналитически и рекуррентно
2.	Рекуррентные соотношения в комбинаторных задачах	2	Формирование навыков компьютерного моделирования решений некоторых комбинаторных задач с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra	Построение в компьютерной среде GeoGebra анимационных компьютерных моделей для решения комбинаторных задач, сводимых к рекуррентным соотношениям
3.	Линейные рекуррентные соотношения	2	Формирование опыта решения линейных рекуррентных соотношений с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение линейных рекуррентных соотношений с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra
4.	Основные понятия теории графов: виды графов, изоморфизм графов	2	Формирование навыков компьютерного представления основных понятий теории графов (виды графов, изоморфизм графов) с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra	Создание в компьютерной среде GeoGebra анимационной презентации различных видов графов. Конструирование анимационных чертежей для демонстрации изоморфных графов (проект «Калейдоскоп»)
5.	Связность и маршруты в графе	2	Формирование опыта в реализации алгоритмов поиска маршрутов в графе (алгоритм поиска «в ширину») с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение практико-ориентированных задач на поиск кратчайшего расстояния между вершинами в графе с использованием команды «КратчайшееРасстояние» компьютерной среды GeoGebra

1	2	3	4	5
6.	Минимальное остовное дерево	2	Формирование опыта в реализации алгоритмов поиска минимального остовного дерева в нагруженном графе (алгоритм Краскала, алгоритм Прима) с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение практико-ориентированных задач на поиск минимального остовного дерева в нагруженном графе с использованием команды «Минимальное ОстовноеДерево» компьютерной среды GeoGebra
7.	Эйлеровы и гамильтоновы графы. Задача коммивояжёра	2	Формирование опыта в реализации алгоритмов поиска эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе (задача о коммивояжёре) с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение практико-ориентированных задач на поиск гамильтонова цикла в нагруженном графе с использованием команды «Коммивояжёр» компьютерной среды GeoGebra
8.	Укладка графа	2	Формирование представлений об укладке графа на некоторой поверхности и в трёхмерном пространстве с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение задач об укладке графа на некоторой поверхности и в трёхмерном пространстве с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra
9.	Правильная раскраска вершин графа	2	Формирование опыта в реализации алгоритма правильной раскраски вершин графа с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение практико-ориентированных задач на раскраску вершин графа с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra
10.	Технология создания тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra	2	Освоение технологии создания тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra	Создание тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra
	Итого	20		

Лабораторная работа № 1

Числовые последовательности и способы их задания

Цель работы: создание в среде GeoGebra общего анимационного чертежа для демонстрации различных последовательностей, задаваемых аналитическим выражением (формулой) и рекуррентно (рекуррентным соотношением).

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Числовая последовательность – это…
2) Способами задания числовых последовательностей являются …
3) Последовательность задана аналитически, если…
4) Последовательность задана рекуррентно, если…

Познакомьтесь с технологией конструирования общего анимационного чертежа в компьютерной среде GeoGebra для демонстрации различных последовательностей, задаваемых аналитическим выражением (формулой):

1 шаг. Строим ползунок для натуральной переменной n.

2 шаг. Строкой ввода строим график функции $y = f(n)$.

3 шаг. Строим точку $N = (n,0)$, проводим через нее вертикаль, отмечаем точку A пересечения вертикали с графиком данной функции, проводим горизонталь через точку A и отмечаем точку B пересечения горизонтали с осью ординат.

4 шаг. Заставляем точки A и B оставлять следы и изменяем на ползунке переменную n. В результате на оси ординат появляются члены последовательности один за другим, и одновременно точки графика данной последовательности.

2 этап – конструкторский

Построить в компьютерной среде GeoGebra общий анимационный чертеж для демонстрации элементов и графика следующей последовательности, заданной аналитически:

а) $y = \dfrac{1}{n}$; б) $y=n^2$; в) $y=2^n$; г) $y=2n+1$.

Дополнительное задание: разработать алгоритм анимационно-геометрического моделирования последовательности чисел Фибоначчи в среде GeoGebra, заданной рекуррентно.

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 2

Рекуррентные соотношения в комбинаторных задачах

Цель работы: создание в среде GeoGebra анимационных чертежей для демонстрации решений некоторых комбинаторных задач, сводимых к рекуррентным соотношениям.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Рекурсивная процедура – это…
2) Рекуррентным соотношением k-го порядка называют …
3) Решением рекуррентного соотношения является…
4) Рекуррентное соотношение может иметь бесконечно много решений потому, что…

Познакомьтесь с технологией конструирования анимационного чертежа в компьютерной среде GeoGebra для демонстрации решения комбинаторных задач, сводимых к рекуррентным соотношениям:

1 шаг. С помощью инструментов компьютерной среды GeoGebra создаем рисунки комбинаторных объектов как начальных условий, о которых идёт речь в условии задачи. Создаем ползунок с именем n для подсчета комбинаторного числа. Правой кнопкой мыши поочередно «кликаем» на

объект и в меню «Свойства» выбираем вкладку «Дополнительно», с помощью которой задаем условия отображения для этого объекта n=0.

2 шаг. Создаем, по аналогии с первым шагом, следующие комбинаторные объекты, изменяя соответствующие условия их отображения, и стараемся подметить: к какому рекуррентному соотношению можно свести задачу. Для ползунка n можно задать анимацию, в результате чего получиться анимационный чертеж, иллюстрирующий процесс решения задачи.

2 этап – конструкторский

Построить в компьютерной среде GeoGebra анимационный чертеж иллюстрирующий решение одной из следующих задач:

1. Имеется три стержня и n колец разного размера. Вначале все кольца находятся на одном из трех стержней в порядке убывающего размера, как показано на рис. 23. Нужно переместить имеющиеся кольца на другой стержень так, чтобы они остались в том же порядке. Этого нужно добиться, соблюдая следующие правила:

– на каждом шаге ровно одно кольцо перемещается с одного стержня на другой;

– кольцо большего размера нельзя помещать на меньшее;

– один из стержней можно использовать в качестве промежуточного.

Покажите, что это всегда можно сделать, и найдите, за какое наименьшее число перекладываний можно переместить k колец: а) k=2; б) k=3; в) k=4».

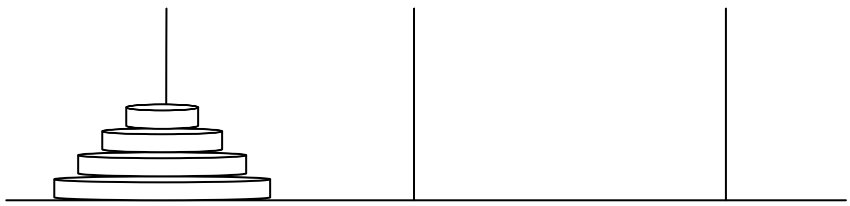


Рис. 23

2. На какое максимальное количество кусков можно разрезать пиццу n прямыми разрезами (рис.24)?

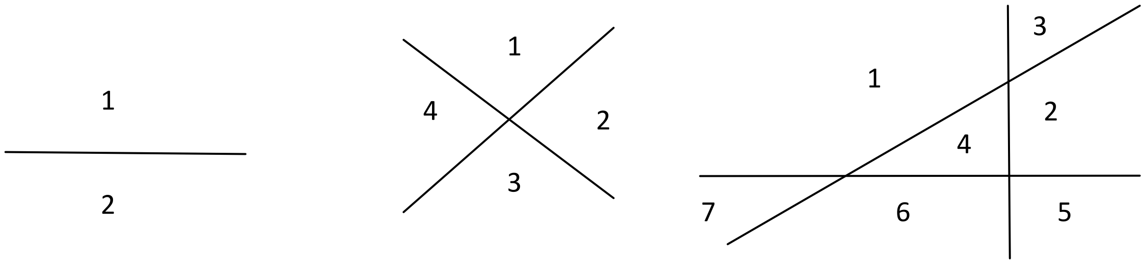


Рис.24

3. Имеется полоска клетчатой бумаги шириной в одну клетку и длиной в n клеток. На первой клетке установлена фишка (рис. 25). Одним ходом фишку можно продвигать вперед на одну или две клетки. Спрашивается, сколькими способами фишку можно продвинуть на n-ю клетку?

Рис. 25

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 3

Линейные рекуррентные соотношения

Цель работы: решение линейных рекуррентных соотношений с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Линейное рекуррентное соотношение k-го порядка имеет вид…

2) Линейное однородное рекуррентное соотношение k-го порядка имеет вид …
3) Характеристическое уравнение для однородного рекуррентного соотношения k-го порядка – это …
4) Если все корни характеристического уравнения различны, то общее решение однородного рекуррентного соотношения k-го порядка имеет вид…
5) Если s корней характеристического уравнения равны, а все остальные различны, то общее решение однородного рекуррентного соотношения k-го порядка имеет вид…

Познакомьтесь с технологией использования встроенной команды «Корень» раздела «Функции и исчисления» компьютерной среды GeoGebra для определения корней многочленов:

- Ситаксис команды: Корень[<многочлен>].
- Например: Корень[x^2+2x-3].

Как можно использовать эту команду при нахождении решения линейного рекуррентного соотношения?

2 этап – конструкторский

С помощью команды компьютерной системы GeoGebra Корень[<многочлен>] найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных соотношений:

1) $a_{n+2}-9a_{n+1}+14a_n=0;$
2) $a_{n+3}=7a_{n+1}-16a_{n+1}+12a_n;$
3) $a_n=14a_{n-1}-49a_{n-2};$
4) $a_n=-6a_{n-1}-5a_{n-2}+24\,a_{n-3}+36\,a_{n-4};$
5) $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+(10-4n)\cdot 2^n;$
6) $a_{n+2}=8a_{n+1}-16a_n+9n^2+6n+2;$
7) $a_{n+2}=6a_{n+1}-8a_n+3n+2;$
8) $a_n=-a_{n-1}+12a_{n-2}+2^n.$

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 4

Основные понятия теории графов: виды графов, изоморфизм графов

Цель работы: создание в компьютерной среде GeoGebra анимационных чертежей для демонстрации различных видов графов и изоморфных графов.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Графом G={P,Q;I} называется конечная инцидентностная структура, удовлетворяющая двум условиям: …
2) Граф называется псевдографом, если…
3) Граф называется мультиграфом, если…
4) Граф называется простым графом, если…
5) Граф называется ориентированным (орграфом), если…
6) Два графа $G_1=\{P_1,Q_1;I_1\}$ и $G_2=\{P_2,Q_2;I_2\}$ называются изоморфными, если …

2 этап – конструкторский

Задание 1. В системе GeoGebra создайте видеоролик превращения графа в мультиграф, а затем в псевдограф или орграфа в мультиорграф, а затем в псевдоорграф.

Задание 2 «Калейдоскоп». Создайте диаграммы графов в системе GeoGebra, изображая вершины графа симметрично относительно пересекающихся прямых, с помощью инструмента «Отражение относительно прямой». Изменяя положение начальной вершины, симметрично будут менять свое положение и другие вершины графа, в результате будут получаться новые изображения диаграмм исходного графа, сохраняющие симметричность вершин и напоминающие калейдоскоп.

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 5
Связность и маршруты в графе

Цель работы: решение практико-ориентированных задач на поиск кратчайшего расстояния между вершинами в графе с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Маршрутом в графе называют …
2) Расстояние между двумя вершинами равно…
3) Маршрут называется цепью, если…
4) Замкнутый маршрут называют циклом, если…
5) Цепь называют простой цепью, если…
6) Цикл называют простым циклом, если…
7) Две вершины в графе связанные, если…
8) Граф связный, если…

Сформулируйте основные шаги алгоритмов поиска вершин в графе (алгоритм поиска «в ширину», алгоритм поиска «в глубину»). Какой из данных алгоритмов позволяет определить кратчайшее расстояние между вершинами графа?

Познакомьтесь с технологией использования встроенной команды «Кратчайшее расстояние» раздела «Дискретная математика» компьютерной среды GeoGebra для поиска кратчайшего расстояния между двух заданных вершин графа:

- Ситаксис команды:

КратчайшееРасстояние[<Список отрезков>,<Начальная точка>,<Конечная точка>,<Логическое выражение для веса ребра>].

- Например: КратчайшееРасстояние[{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j},A,E,true] (рис. 26)

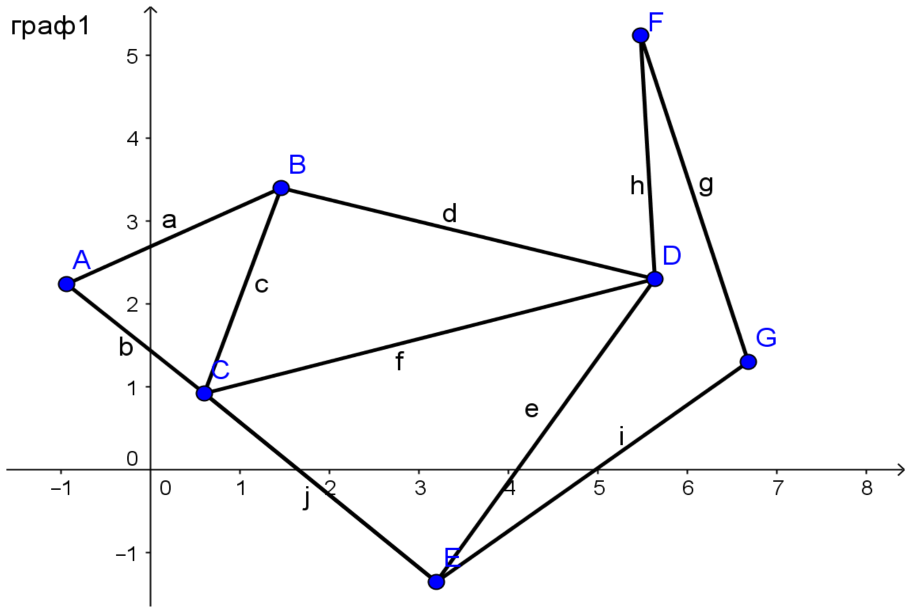


Рис. 26

2 этап – конструкторский

Придумайте условие практико-ориентированной задачи, в которой на языке теории графов необходимо найти кратчайшее расстояние между двумя заданными вершинами графа. С помощью встроенной команды «Кратчайшее расстояние» раздела «Дискретная математика» компьютерной среды GeoGebra создайте интерактивные графовые модели для решения практико-ориентированных задач, связанных с поиском кратчайшего расстояния между вершинами графа.

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 6
Минимальное остовное дерево

Цель работы: решение практико-ориентированных задач на поиск минимального остовного дерева в нагруженном графе с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Остовное дерево – это …
2) Минимальное остовное дерево – это …
3) Вес ребра – это…
4) Граф называют нагруженным, если…

Сформулируйте основные шаги алгоритмов поиска минимального осовного дерева в нагруженном графе (алгоритм Краскала, алгоритм Прима). В каком из данных алгоритмов происходит построение дерева?

Познакомьтесь с технологией использования встроенной команды «Минимальное остовное дерево» раздела «Дискретная математика» компьютерной среды GeoGebra для поиска минимального осовного дерева в нагруженном графе:

- Ситаксис команды: МинимальноеОстовноеДерево[<Список точек>].
- Например: МинимальноеОстовноеДерево[A,B,C,D,E,F,G] (рис. 27).

Рис. 27

2 этап – конструкторский

Придумайте условие практико-ориентированной задачи, в которой на языке теории графов необходимо найти минимальное осовное дерево в нагруженном графе. С помощью встроенной команды «Минимальное остовное дерево» раздела «Дискретная математика» компьютерной среды

GeoGebra создайте интерактивные графовые модели для решения практико-ориентированных задач, связанных с поиском минимального осовного дерева в нагруженном графе.

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 7

Эйлеровы и гамильтоновы графы. Задача коммивояжёра

Цель работы: решение практико-ориентированных задач на поиск гамильтонова цикла наименьшего (наибольшего) веса в нагруженном графе с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Эйлеров цикл в графе – это …
2) Граф эйлеров, если …
3) Гамильтонов цикл в графе – это …
4) Граф гамильтонов, если …

Сформулируйте критерий для определения эйлеровости графа. Существет ли критерий для определения гамильтоновости графа?

Сформулируйте основные шаги алгоритмов поиска эйлерова и гамильтонова цикла в графе.

Сформулируйте условие задачи о коммивояжёре на языке теории графов.

Познакомьтесь с технологией использования встроенной команды «Коммивояжер» раздела «Дискретная математика» компьютерной среды GeoGebra для поиска гамильтонова цикла в нагруженном графе:

- Ситаксис команды: Коммивояжер[<Список точек>].

– Например: Коммивояжер[A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L] (рис. 28-29).

Рис. 28

Рис. 29

2 этап – конструкторский

Придумайте условие практико-ориентированной задачи, в которой на языке теории графов необходимо найти гамильтонов цикл в нагруженном графе. С помощью встроенной команды «Коммивояжер» раздела «Дискретная математика» компьютерной среды GeoGebra создайте интерактивные графовые модели для решения практико-ориентированных задач, связанных с поиском гамильтонова цикла в нагруженном графе.

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 8
Укладка графа

Цель работы: решение задач об укладке графа с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Укладка графа – это…
2) Граф называют планарным, если…
3) Граф называют уложенным на поверхности, если…

Всякий ли граф укладывается в трёхмерное евклидово пространство E_3? Любой ли граф можно уложить на плоскости?

2 этап – конструкторский

Для графов K_4, K_5, $K_{3,3}$ в компьютерной среде GeoGebra осуществить их укладку: а) на плоскости; б) на сфере (и построить соответствующую стереографическую проекцию); в) в трехмерном пространстве. Сформулировать соответствующие выводы.

Дополнительное задание: Придумайте условие практико-ориентированной задачи, в которой на языке теории графов необходимо выполнить укладку графа на некоторой поверхности. С помощью возможностей компьютерной среды GeoGebra осуществите укладку графа на заданной поверхности.

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 9
Правильная раскраска вершин графа

Цель работы: решение практико-ориентированных задач с помощью правильной раскраски вершин графа в компьютерной среде GeoGebra.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Закончите следующие предложения:

1) Раскраска вершин графа – это…

2) Раскраска вершин графа правильная, если…

3) Хроматическое число графа – это…

4) Вершины окрашенные в один и тот же цвет …

Сформулируйте гипотезу о четырех красках.

Сформулируйте основные шаги алгоритма последовательной правильной раскраски вершин графа.

В чём состоит особенность практико-ориентированных задач для решения, которых, целесообразно использовать правильную вершинную раскраску графа – как модель решения задачи?

2 этап – конструкторский

Придумайте условие практико-ориентированной задачи, в которой на языке теории графов необходимо выполнить правильную раскраску вершин графа. С помощью возможностей компьютерной среды GeoGebra постройте граф – модель решения задачи и осуществите правильную раскраску его вершин. На основе построенной раскраски вершин графа сформулируйте ответ.

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Лабораторная работа № 10
Технология создания тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra

Цель работы: создание тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra.

Этапы выполнения лабораторной работы

1 этап – ориентировочный

Познакомьтесь с технологией создания тестов в компьютерной среде GeoGebra:

1) создание ползунка, с именем n, на количество вопросов: выбрать на панели инструментов кнопку «ползунок»; задать минимальное значение – 1, максимальное значение – количество вопросов; шаг ползунка – 1;

2) оформить первый вопрос: выбрать на панели инструментов кнопку «текст»; сформулировать первый вопрос;

3) создать ползунок для выбора ответа на первый вопрос: выбрать на пали инструментов кнопку «ползунок»; задать минимальное значение – 1, максимальное значение – количество вариантов ответа; шаг ползунка – 1; установить флажок «закрепленный» и флажок «вертикальный» (для каждого вопроса нужен свой ползунок для формирования ответа);

4) оформить меню выбора ответа: выбрать на панели инструментов кнопку «текст»; сформулировать варианты возможных ответов «в столбик» рядом с вертикальным ползунком;

5) подготовить поле для следующего вопроса, скрыв все что относится к первому вопросу: правой кнопкой мыши кликнуть на каждый объект первого вопроса и выбрать в меню вкладку «свойства»; для всех объектов во вкладке «дополнительно» отметить условие отражения объектов n=1;

6) повторяя шаги 2) – 5), создать остальные вопросы, так чтобы для получения ответа необходимо было воспользоваться возможностями программы GeoGebra;

7) создать таблицу для подсчета результатов: в строке ввода задать переменные Bi=Если[<имя ползунка ответа>==<номер правильного ответа>, 1, 0], где i – номер вопроса; для подсчета правильных ответов в строке ввода задать переменную S=$\sum_{i=1}^{n} B_i$, с помощью команды – Сумма[{Bi}], где i – номер вопроса; для отображения на экране результатов тестирования в строке ввода задать таблицу, используя команду – Таблица[{{i},{Bi},S}], где i – номер вопроса);

8) если необходимо ограничить время выполнения теста, тогда для ползунка n, отвечающего за смену вопросов на экране, нужно задать

анимацию и время просмотра каждого вопроса: правой кнопкой мыши кликнуть на ползунок n и выбрать в меню вкладку «анимировать»; во вкладке «свойства» для ползунка n задать скорость анимации.

2 этап – конструкторский

Создайте тест (не менее 5 вопросов) по одной из тем, изучаемых в курсе «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra.

3 этап – заключительный

Подведение итогов. Презентация результатов.

Заключение

Компьютеризация и информатизация образования сегодня отнюдь не являются внешними приметами повышения качества учебного процесса. За ними видится смена педагогической парадигмы, переход к принципиально новому типу обучения посредством организации более эффективной познавательной деятельности обучаемого.

Проникновение информационно-компьютерных технологий в социальные практики человека, занимающегося математикой или использующего математический аппарат в своей деятельности, происходит, главным образом, посредством систем компьютерной математики. Благодаря которым, повышается роль математического инструментария, и, этим самым, предоставляется больше возможностей для качественного математического анализа решаемых проблем.

Умение применять системы компьютерной математики в своей будущей профессиональной деятельности уже сегодня является одним из важнейших компонентов содержания компьютерной грамотности будущих учителей математики.

Проникновение в образование систем компьютерной математики требует пересмотра методики обучения математическим дисциплинам и, в частности, дискретной математике.

На основании проведённого анализа педагогической и методической литературы на предмет комплексного использования информационных технологий в процессе обучения математике будущих учителей установлено, что одним из перспективных направлений в области информатизации математического образования является использование систем компьютерной математики.

В качестве основных дидактических условий использования систем компьютерной математики в учебном процессе выделены следующие условия: адекватности; визуализации; использование компьютерных средств как инструментов познания; профессиональной ориентации; систематичности.

Обосновано, что компьютерная система GeoGebra обладает целым рядом анимационных возможностей в представлении дискретных объектов и ансамблем инструментов для решения задач дискретной математики.

Разработана методика использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra в процессе обучения дискретной математике в условиях педагогического вуза.

Разработано учебно-методическое обеспечение по дисциплине «Дискретная математика» на основе использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra.

Опыт обучения студентов элементам дискретной математики на основе анимационно-геометрического моделирования математических объектов в компьютерной среде GeoGebra свидетельствует об устойчивом повышении результатов обучения и интереса студентов к данному разделу математики.

Библиографический список

1) Алферов М.Ю. Дидактические возможности и особенности свободной программы динамической геометрии GeoGebra. / Научно-методическое издание: Материалы XXIV Международной конференции «Применение инновационных технологий в образовании», 26 – 27 июня 2013г. г. Москва, г.Троицк, 2013г., с.448-451.
2) Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2004.
3) Арнольд В.И. Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2012. — 108 с.
4) Башкатова Ю. В. Применение новых информационных технологий в изучении теории функций комплексной переменной. – М., 2000. 147 с.
5) Белайчук О.А., Лебедева Н.А. Математический конструктор — интерактивная творческая среда для создания учебных моделей по математике / Научно-практический электронный альмонах «Вопросы информатизации образования», URL: http://www.npstoik.ru/vio/inside.php?ind=articles&article_key=212 (25.05.2013).
6) Безумова О.Л., Котова С.Н., Шабанова Н.В. Компьютерная поддержка решения школьных алгебраических задач средствами Geogebra / Современные проблемы науки и образования (электронный журнал), URL: http://www.science-education.ru/107-8399 (25.05.2013).
7) Большакова Н.С. Применение систем динамической геометрии GeoGebra и компьютерной алгебры Maxima в обучении теории графов / Научно-методическое издание: Материалы XXIV Международной конференции «Применение инновационных технологий в образовании», 26 – 27 июня 2013г. г. Москва, г.Троицк, 2013, с. 452-455.
8) Большакова Н.С. Обучение теории графов с помощью системы динамической геометрии GeoGebra. // Материалы XXV Международной конференции «Применение информационных технологий в образовании», 25-26 июня 2014г., г. Москва, г. Троицк, 2014, с. 120-122.
9) Вербицкий, А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход. – М.: Высшая школа, 1991 – 207с.

10) Виленкин, Н.Я. Подготовка учителей математики на уровень современных требований / Н.Я. Виленкин, А.Г. Мордкович // Математика в школе. – 1986. – № 6.
11) Виленкин, Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006.
12) Виленкин, Н.Я. Алгебра и математический анализ (для школ с углубленным изучением математики) /Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1990
13) Гальперин, П.Я. Современное состояние теории поэтапного формирования умственных действий / П.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина // Вестник МГУ. – Серия 14. – 1979. – №4.
14) Государственная программа Российской Федерации «Развитие образования» на 2013-2020 годы. Утверждена распоряжением Правительства РФ от 22 ноября 2012 г. № 2148-р.
15) Грэхем, Р. Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М.: Мир, 2006. – 703 с.
16) Гуреев Е.М. Динамическое моделирование в процессе обучения математике (новые принципы обучения, средняя школа) / Библиотека Мошкова, URL: http://lit.lib.ru/g/gureew_e_m/text_0050.shtml (25.05.2013).
17) Джонассен Д.Х. Компьютеры как инструменты познания // Информатика и образование. - №4. – 1996. – с. 116-131.
18) Дубровский В.Н. Типология динамических чертежей / Материалы XV Международной конференции-выставки «Информационные технологии в образовании» («ИТО-2005»), Москва, 2005.
19) Дьяченко С.А. Использование интегрированной символьной системы Mathematica в процессе обучения высшей математике в вузе: Дисс. канд. пед. наук. Орел, 2000. – 164 с.
20) Елисеев, Е.М. Основы дискретной математики: учебное пособие / Е.М. Елисеев, М.Е. Елисеев. – Арзамас, АГПИ им. А.П. Гайдара, 2005.
21) Емеличев, В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М.: Наука, 1990.
22) Жданов, С.А. Сборник задач по дискретной математике: Учебное пособие /С.А. Жданов, В.Л. Матросов, В.А. Стеценко. – М.: МПГУ, 2005

23) Зайцева В. В. Методика преподавания высшей математики с применением новых информационных технологий. Елабуга, 2005. 140 с.
24) Кузнецов О.М. Метод построения динамических моделей плоских мозаик в программе GeoGebra — М.: МЦНМО, 2013. — 168 с.
25) Кейв М.А. Дискретная математика: учебное пособие. – Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016.
26) Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы.. —М.: Наука, 1967. . —152 с.
27) Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. – 192с. – (Мастер-класс).
28) Леонтьев, А.Н. Теория усвоения знаний и программированное обучение / А.Н. Леонтьев, П.Я. Гальперин // Советская педагогика – 1964. – №10.
29) Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: монография. – Красноярск: РИО КГПУ, 2001. – 368с.
30) Майоров А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования (как выбирать, создавать и использовать тесты для целей в образовании). М., «Интеллект - центр», 2001.
31) Мельников, О.И. Занимательные задачи по теории графов – Минск: Тетрасистемс, 2001.
32) Мельников, О.И. Незнайка в стране графов. – М.: КомКнига/URSS, 2006.
33) Мельников, О.И. Обучение дискретной математике: монография. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
34) Могилёв А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Информатика: учебное пособие. – М.: Академия. - 1999
35) Мордкович, А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: автореф. … д. пед. наук / А.Г. Мордкович. – М.: Изд. МГУ, 1986.
36) Официальный сайт программы GeoGebra. URL: http://www.geogebra.org/cms (дата обращения: 02.11.15).

37) Педагогика и психология высшей школы: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2002, 544 с.
38) Педагогический словарь библиотекаря. – Спб: РНБ, 2005-2007.
39) Плясунова У.В. Использование компьютерных математических систем в обучении математике студентов специальности «Информатика» педагогических вузов: автореферат дисс. канд. пед. наук, Ярославль, 2004.
40) Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Наука, 1975.
41) Примерная основная образовательная программа основного общего образования. URL: http://window.edu. ru/resource/594/75594 (дата обращения: 02.11.15).
42) Профессиональный стандарт «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)», 2013.
43) Пышкало А.М., Моро М.И. Методика обучения математике в 1-3 классах. – М., 1978.
44) Руцкий, А.Н. Дискретная математика: Учебное пособие. – Красноярск: РИО КГПУ, 2004.
45) Сластёнин, В.А. Психология и педагогика: учебное пособие / В.А. Сластёнин, В.П. Каширин. – М., 2001.
46) Талызина, Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся. – М.: Знание, 1983, 96 с.
47) Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования, 2012 г.
48) Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования. Уровень высшего образования «бакалавриат». Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование, 2013.
49) Филиппова Н. В. Применение систем компьютерной математики и компьютерных технологий при изучении дисциплин высшей математики как один из видов педагогических технологий // Молодой ученый. — 2009. — №7. — С. 254-259.
50) Храповецкий И.В. Конфигурационный подход / Авторский блог, URL: http://janka-x.livejournal.com/34117.html (25.05.2013).

51) Шкерина, Л.В. Обновление системы качества подготовки будущего учителя в педагогическом вузе / Л.В. Шкерина. – Красноярск: РИО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2005. – 274 с.
52) Шкерина Л.В., Багачук А.В., Кейв М.А., Шашкина М.Б. Теоретические основы и технологии измерения и оценивания профессиональных компетенций студентов – будущих учителей математики: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2013. – 312 с.
53) Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов, и др. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016.
54) Энциклопедия: Дискретная математика / Гл. ред. В.Я. Козлов. – М.: БРЭ, 2004.
55) Derry,S.J. Flexible cognitive tools for problem solving instruction. Paper presented at the annual meeting of The American Educational Research Association, Boston, MA, 1990, April, p. 16-20.
56) Raul M. Falcon, Ricardo Rios. The use of GeoGebra in Discrete Mathematics. / URL: https://www.researchgate.net/publication/271765799 (February, 2015), p. 39-50.