Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»

С.И. Калачева

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА

Учебное пособие

Электронное издание

Красноярск 2016

ББК 22.1
К17

Рецензенты:

Н.Н. Пономарева, кандидат педагогических наук, доцент, учитель высшей категории МАОУ лицей №6 «Перспектива» г. Красноярска

В.Р. Майер, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания КГПУ им. В.П. Астафьева

Калачева С.И.

К17 Сборник индивидуальных заданий по математике для студентов 1 курса педагогического вуза: учебное пособие; [Электронный ресурс] / Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz, 100Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-065-3

В учебном пособии содержится материал для организации самостоятельной работы обучающихся по дисциплинам «Математика» и «Алгебра и геометрия», рекомендации по их выполнению, справочный материал и образцы решения. В пособие вошли задания по разделам «Линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия», которые охватывают темы «Алгебра матриц», «Определители», «Системы линейных уравнений», «Линейное пространство», «Векторная геометрия».

Пособие составлено в свете требований ФГОС ВО, профессионального стандарта педагога, основных образовательных профессиональных программ бакалавриата по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (профили: «Математика», «Физика», «Технология») и 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили: «Математика и информатика», «Физика и информатика», «Физика и технология»).

ББК 22.1

Работа выполнена в рамках Программы стратегического развития КГПУ им. В.П. Астафьева № 2011-ПР-217, проект 14/12 «Университетская система оценки качества непрерывного педагогического образования в открытой образовательной среде».

ISBN 978-5-00102-065-3

Содержание

1.1. Алгебра матриц: действия над матрицами и их свойства, нахождение обратной матрицы

Определение 1: ***Матрицей*** *называется прямоугольная таблица чисел из заданного множества.* $A_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Операции над матрицами

Сложение.

Складывать можно только матрицы одинакового размера.

В результате сложения получаем матрицу такого же размера, что и слагаемые.

При сложении двух матриц складывают элементы, стоящие на одинаковых местах (как сложение векторов).

Сложение векторов коммутативно и ассоциативно.

Умножение матрицы на число.

При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.

В результате получаем матрицу такого размера, что и исходная.

Умножение матриц.

Чтобы одну матрицу умножить на другую, необходимо, чтобы длина строки первой была равна длине столбца второй, т.е. матрицу A_{mn} можно умножить на матрицу B_{kl}, если $n=k$, т.е внутренние индексы равны.

$A_{mn}\times B_{nl}=C_{ml}$ -- размерность матрицы-произведения составляется из внешних индексов сомножителей.

Умножение происходит по правилу «строка на столбец»: если строки первой обозначить $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_m$, а столбцы второй $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\dots,\bar{b}_n$, то в новой матрицепроизведении C_{ml} элемент, стоящий в i-той строке и в j-том столбце, равен скалярному произведению $\bar{a}_i\bar{b}_j$.

Умножение матриц не коммутативно, но ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения матриц.

Определение: *Матрица называется* ***квадратной****, если число ее строк равно числу столбцов. Квадратная матрица называется* ***диагональной****, если все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица называется* ***единичной,*** *если все элементы ее главной диагонали равны 1 (обозначается E).* ***Порядком квадратной матрицы*** *называется число ее строк (столбцов).*

1.2. Определитель матрицы: определение, свойства, способы вычисления определителей 2-го и 3-го порядков и определителей высших порядков

Определение: Пусть дана квадратная матрица порядка n. ***Членом определителя*** *этой матрицы называется произведение элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.* ***Определителем*** *квадратной матрицы называется сумма всех его членов с их знаками.*

Замечания. 1) Матрица – это таблица, а определитель – число.

2) Понятие определителя существует только для квадратной матрицы.

3) Не стоит путать определитель с модулем (несмотря на модульные скобки в обозначении определителя). Определитель может быть отрицательным.

Определители малых порядков (2-го и 3-го порядков)

К определителям малых порядков относят определители матриц 1-го, 2-го и 3-го порядков.

Если $A = (\alpha)$, то определитель $|A| = \alpha$.

Если $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, то определитель $|A| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$. Т.е. элементы матрицы перемножаются «крест-накрест» $|A| = \left(\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}\right)$

Если $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, то определитель $|A| = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$. Т.е. элементы перемножаются по правилу треугольников или по правилу «еврейской звездочки»

$$|A| = \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix}$$

Основные свойства определителей, необходимые для его вычисления.

1. Определитель матрицы не меняется при ее транспонировании. ***Транспонированием*** *матрицы называется ее преобразование, при котором каждая строка становится столбцом того же номера. Транспонированная матрица обозначается* A' *или* A^T.

   В силу этого свойства, всякое свойство определителя, доказанное для строк матрицы, справедливо и для столбцов.
2. Если каждый элемент некоторой строки матрицы умножить на число k, то определитель этой матрицы умножится на это число.
3. Если в матрице поменять местами две строки, то определитель матрицы изменит знак на противоположный.
4. Если каждый элемент некоторой строки данной матрицы равен 0, то определитель этой матрицы равен 0.
5. Если в матрице две строки одинаковые, то определитель матрицы равен 0.
6. Если в матрице две строки пропорциональны, то определитель этой матрицы равен 0.
7. Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица содержит строку, являющуюся линейной комбинацией

остальных строк. (Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя).

8. Определитель матрицы не изменится, если к одной строке прибавить другую, умноженную на число. (Вычислительное свойство)

Универсальные способы вычисления определителей.

1) Вычисление определителя приведением матрицы к треугольному виду.

Наиболее простым является способ вычисления определителей методом приведения данной матрицы к треугольному виду. При элементарных преобразованиях матрицы определитель либо не изменится, либо поменяет знак на противоположный, либо умножится на число. Если в результате этих преобразований получим нулевую строку, определитель данной матрицы равен нулю. Если же этого не произойдет, то получим треугольную матрицу. Определитель такой матрицы равен произведению элементов, стоящих по диагонали. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Рассмотрим два характерных примера.

Пример 1. Вычислим определитель приведением матрицы к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \overset{3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \overset{4}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} \overset{5}{=} 10 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -80.$$

Пояснения к вычислениям

1. Очень просто под единицей «делать» нули, поэтому в левом верхнем углу матрицы хотелось бы иметь 1. Этого можно добиться, поменяв местами

первый и второй столбцы матрицы, при этом знак определителя изменяется на противоположный.

2. Получаем нули в первом столбце под 1, пользуясь вычислительным свойством определителя.
3. Меняем местами вторую и третью строчки, определитель изменяет знак.
4. Делаем нули во втором столбце под -1.
5. Из второй строки выносим -1, а из третьей выносим -10.

Пример 2. Вычислим определитель n-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

Вычтем последний столбец из всех предыдущих, а затем к последней строке прибавим все предыдущие строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n+1 \end{vmatrix} = 2n+1.$$

2) Вычисления определителя с помощью алгебраических дополнений (разложением по строке или столбцу)

Определение: ***Минором элемента*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ матрицы n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из данной вычеркиванием i-той строки и j-того столбца. Обозначается M_{ij}.

Пример: Пусть дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, тогда $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3$, $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 8 = -6$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = -6$

Определение: ***Алгебраическим дополнением элемента*** $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ матрицы n-го порядка называется минор M_{ij}этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Обозначается A_{ij}.

Пример: Для матрицы из предыдущего примера $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = -3$, $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6$, $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$

Теорема: Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) квадратной матрицы на их алгебраические дополнения равна определителю этой матрицы.

Т.е. $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}A_{i1} + (-1)^{i+2}A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}A_{in} =$ $(-1)^{1+j}A_{1j} + (-1)^{2+j}A_{2j} + \cdots (-1)^{2+j}A_{2j}$ – первое равенство – разложение по i-ой строке, второе – разложение по j-му столбцу.

Пример:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 23 + 0 \cdot$$

$(-71) + (-9) + 2 \cdot (-1) = -69 - 9 - 2 = -80$ – посчитали разложив по второй строке.

Замечание: Стоит отметить, что если в задании не указан способ вычисления, то рациональнее использовать комбинирование способов (1) и (2). С помощью свойств определителя получаем в выбранной строке (столбце) максимум нулей, а потом с помощью алгебраических дополнений раскладываем по этой строке.

Пример: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$ $-(9+8-10+12+60+1) = -80$. Сначала «обнулили» второй столбец, потом разложили по этому столбцу.

1.3. Системы линейных уравнений (СЛУ)

Определение: ***Системой линейных уравнений (СЛУ)*** *называется система предложений вида:*

$$(*)\dots \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

, где α_{ij} *– коэффициенты уравнений,* β_i *– свободные члены,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *– неизвестные, переменные.*

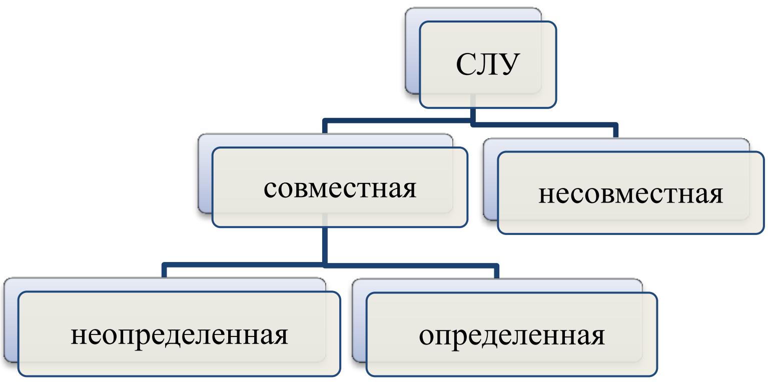
Первый индекс обозначает номер уравнения, а второй – номер коэффициента в этом уравнении.

Определение: ***Решением системы линейных уравнений*** *(*) называется такой набор значений переменных* $x_1 = \gamma_1,\ x_2 = \gamma_2, \ldots, x_n = \gamma_n$, *что при подстановке этих значений в любое уравнение системы (*) получаем верное равенство.*

Классификация СЛУ по количеству решений:

Если СЛУ имеет решение, то она называется ***совместной***.

Если СЛУ не имеет решений, то она ***несовместна***.



Если система совместна и имеет только одно решение, то она называется ***определенной***.

Если система совместна и имеет бесконечное множество решений, то она называется ***неопределенной***.

Определение: *Две СЛУ называются **эквивалентными (равносильными)**, если множества их решений совпадают. Другими словами: всякое решение первой системы является решением второй, и наоборот.*

Элементарные преобразования СЛУ позволяют из одной системы получить эквивалентную ей систему:

- Добавление в систему или удаление из нее нулевого уравнения;
- Умножение любого уравнения системы на число, отличное от нуля;
- Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на число;
- Одинаковая во всех уравнениях перемена мест неизвестных вместе с их коэффициентами.

Замечание: 4-ое преобразование применять лишь в крайнем случае во избежание ошибок по невнимательности.

Определение: *СЛУ называется **ступенчатой**, если она обладает следующим свойством: если в некотором ее уравнении первый, отличный от нуля коэффициент стоит на k-ом месте, то во всех нижеследующих уравнениях (если такие существуют) первые k коэффициентов равны нулю.*

(т.е. «длина» ступеньки может быть любой, а «высота» только в один символ).

Теорема: *Всякую СЛУ с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Методы решения СЛУ

1) Решение и исследование СЛУ методом Гаусса.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении переменных из уравнений системы. Достигается это следующим путем:

1. сначала СЛУ приводят к ступенчатому виду, выполняя преобразования сверху вниз;
2. затем, поднимаясь снизу вверх, постепенно исключают переменные.

После приведения к ступенчатому виду можно точно определить количество решений системы:

1) Если в ступенчатой СЛУ число уравнений равно числу неизвестных, то она имеет треугольный вид и является совместной определенной;
2) Если в ступенчатой СЛУ число уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет вид трапеции и является совместной неопределенной;
3) Если ступенчатая СЛУ содержит уравнение вида $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=\beta,\ \ \beta\neq 0$, т.е. противоречивое равенство, то СЛУ не имеет решения, т.е. является несовместной.

Определение 6: ***Матрицей СЛУ*** *называется матрица, составленная из коэффициентов при переменных этой системы.*

2) Решение СЛУ методом Крамера

Пусть дана квадратная СЛУ $\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2\\ \ldots\\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n=\beta_n\end{cases}$. Обозначим

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \beta_2 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta_n & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{vmatrix},\quad A_2=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1 & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \beta_2 & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \beta_n & \ldots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}$$

$$A_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \beta_n \end{vmatrix}$$

, …, , тогда решение СЛУ можно записать в виде $x_1 = \dfrac{A_1}{A},\ x_2 = \dfrac{A_2}{A}, \dots, x_n = \dfrac{A_n}{A}$.

Замечания. Этот способ применим только для квадратной СЛУ с невырожденной матрицей (определитель которой не равен нулю).

3) Решение СЛУ матричным методом

Пусть дана квадратная СЛУ

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, тогда СЛУ можно записать в виде ***матричного уравнения*** $A \cdot X = B$, а значит $X = A^{-1}B$.

Замечания. 1. Этот способ применим только для квадратной СЛУ с обратимой матрицей.

2. Нужно помнить, что умножение матриц не коммутативно, поэтому умножать на A^{-1} нужно с той стороны, с которой стоит матрица A.

Домашняя контрольная работа №1

(Матрицы, определители, системы линейных уравнений)

Задание 1. *Для матриц A и B:*

1) вычислить определитель двумя способами;

2) найти обратную матрицу и результат проверить умножением.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

8. $$A=\begin{pmatrix}3&1&2&3\\4&-1&2&4\\1&-1&1&1\\4&-1&2&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1&2&0\\5&0&-6&1\\-2&2&1&3\\-1&3&2&1\end{pmatrix}$$

9. $$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&3\\3&2&1&-1\\1&2&-1&3\\4&0&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

10. $$A=\begin{pmatrix}6&2&-10&4\\-5&-7&-4&1\\2&4&-2&-6\\3&0&-5&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&-2&4&1\\2&3&0&6\\2&-2&1&4\\3&1&-2&-1\end{pmatrix}$$

11. $$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&1&-4&3\\3&-4&-1&2\\4&3&-2&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&-2&3\\1&2&2&3\\-2&3&1&0\\2&3&-2&0\end{pmatrix}$$

12. $$A=\begin{pmatrix}-1&2&0&4\\2&-3&1&1\\3&-1&2&4\\2&0&1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&1&2&0\\-1&2&1&-1\\3&-1&2&1\\5&0&4&2\end{pmatrix}$$

13. $$A=\begin{pmatrix}4&3&-2&-1\\-2&1&-4&3\\0&4&1&-2\\5&0&1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&-5&1&2\\0&1&-9&-2\\3&1&-3&0\\1&2&-1&2\end{pmatrix}$$

14. $$A=\begin{pmatrix}2&-2&0&3\\3&2&1&-1\\1&1&-2&1\\3&4&-4&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6&0&-1&1\\2&-2&0&1\\1&1&-3&3\\4&1&-1&2\end{pmatrix}$$

15. $$A=\begin{pmatrix}-1&-2&3&4\\2&0&1&-1\\3&-3&1&0\\4&2&1&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-4&1&2&0\\2&-1&2&3\\-3&0&1&1\\2&1&-2&3\end{pmatrix}$$

16. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 0 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -4 & 0\\ 6 & 12 & -4 & 10\\ 1 & 0 & 6 & 4\\ 2 & 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 0 & 4\\ 0 & 3 & 2 & 2\\ -1 & -9 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 3 & 6\end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0 & 3\\ -2 & -2 & 6 & 5\\ 0 & 5 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3\\ 3 & 3 & -9 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 5 & 4 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -2 & -3\\ -5 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 1\\ -1 & 4 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ -2 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & -2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 4 & 10 & -8\\ -2 & -8 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -5 & 2\\ 7 & -3 & 4 & -1\end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2 & 3\\ -3 & 2 & 1 & -2\\ 7 & 0 & 4 & 9\\ -1 & 2 & -6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 3\\ 8 & -2 & -3 & 2\\ 2 & 0 & 7 & 7\\ -3 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & 3\\ -3 & -2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix}3&4&1&4\\1&-1&-1&-1\\2&2&1&2\\3&4&1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&5&-2&-1\\1&0&2&3\\2&-6&1&2\\0&1&3&1\end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix}5&1&-2&0\\0&6&-2&5\\6&0&6&4\\2&3&5&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&-1&3\\6&3&-9&0\\0&3&-4&2\\4&2&0&6\end{pmatrix}$

26. $A=\begin{pmatrix}2&2&2&1\\1&1&-1&0\\3&2&0&7\\0&5&-1&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-5&-1&-5\\3&2&1&-2\\5&3&8&3\\-2&4&-6&8\end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix}3&1&3&2\\2&4&3&0\\1&-2&2&1\\5&1&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&0&5\\4&3&5&0\\1&1&-2&3\\0&1&-3&4\end{pmatrix}$

28. $A=\begin{pmatrix}2&1&2&0\\3&3&1&2\\2&-2&0&1\\1&2&3&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&0&-2\\1&-1&2&3\\1&2&1&0\\-1&2&3&-3\end{pmatrix}$

29. $A=\begin{pmatrix}0&4&1&1\\4&2&1&3\\2&1&0&-2\\1&3&4&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-2&1&7\\4&8&1&-3\\0&1&-5&4\\-8&3&2&-1\end{pmatrix}$

30. $A=\begin{pmatrix}5&-3&7&-1\\1&2&0&2\\2&1&4&6\\3&-2&7&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-1&1&5\\0&2&-2&3\\3&4&4&2\\4&0&1&-2\end{pmatrix}$

31. $A=\begin{pmatrix}1&6&2&-3\\3&-2&0&4\\0&-3&7&-1\\3&2&7&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&1&1\\0&-2&3&2\\3&0&2&1\\3&-1&4&3\end{pmatrix}$

32. $A=\begin{pmatrix}3&1&2&3\\4&-1&2&4\\1&-1&1&1\\4&-1&2&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1&2&0\\5&0&-6&1\\-2&2&1&3\\-1&3&2&1\end{pmatrix}$

33. $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\3&2&1&-1\\1&4&1&3\\4&0&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

34. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&1&1&3\\3&1&-1&2\\4&3&-2&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&-2&3\\1&2&2&3\\2&3&1&0\\2&1&-2&0\end{pmatrix}$

35. $A=\begin{pmatrix}7&2&0&7\\2&3&1&1\\1&-1&2&1\\2&0&1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&8&0\\1&-2&1&1\\3&-1&2&1\\1&0&4&2\end{pmatrix}$

36. $A=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\2&1&7&3\\0&4&1&-8\\3&0&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&-3&1&2\\0&1&0&-2\\3&1&5&0\\1&2&-1&2\end{pmatrix}$

37. $A=\begin{pmatrix}2&1&-2&1\\1&0&-1&2\\2&1&3&3\\0&2&1&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1&4&-1\\2&-1&5&2\\0&-2&6&3\\2&1&0&-3\end{pmatrix}$

38. $A=\begin{pmatrix}1&4&0&1\\4&2&1&3\\-1&-1&2&4\\1&3&-2&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&4&1&8\\-2&2&1&3\\1&2&-5&2\\3&3&4&-1\end{pmatrix}$

39. $A=\begin{pmatrix}1&3&0&3\\3&-2&1&2\\7&0&4&3\\-1&2&-6&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&0&3&4\\-1&1&4&1\\1&2&1&1\\-5&0&2&2\end{pmatrix}$

40. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 2. *Решить СЛУ тремя способами (методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера), если это возможно.*

1. $a)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

2. $a)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -10; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -4; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 \qquad = 13; \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 = 15. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

3. $a)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33; \\ 7x_1 - 5x_2 \qquad = 24; \\ 4x_1 \qquad + 11x_3 = 39. \end{cases}$

4. $a)\ \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12; \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13; \\ 7x_1 \qquad - 5x_3 = 2; \\ 4x_1 + 11x_2 \qquad = 26. \end{cases}$

5. $a)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12; \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33; \\ 4x_1 \qquad + x_3 = -7. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6; \\ \qquad 5x_2 + 4x_3 = -20; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

6. $$a)\ \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12; \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -33; \\ x_1 + 4x_3 = -7. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 6; \\ 5x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5; \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12; \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

7. $$a)\ \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

8. $$a)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 12; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4; \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

9. $$a)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

10. $$a)\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -4; \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 36; \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = -19. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -11; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 8; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

11. $$a)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 14; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$c)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

12. $a)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 11; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 19. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16. \end{cases}$

13. $a)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15; \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

14. $a)\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16; \\ x_1 + 3x_3 = -6; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9; \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2; \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

15. $a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 5; \\ x_1 + 6x_3 = 4. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_3 = -5; \\ 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = -18; \\ 4x_1 + 2x_2 = -6. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$

16. $a)\ \begin{cases} 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 2; \\ 11x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \\ -7x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

17. $a)\ \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6; \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8; \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 - 6x_3 = -2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$

$$c)\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 11. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11; \\ 4x_1 + 11x_3 = 13; \\ 7x_1 - 5x_2 = 8. \end{cases}$$

18. $$a)\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12; \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -9. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 33; \\ 7x_1 - 5x_3 = 24; \\ 4x_1 + 11x_2 = 39. \end{cases}$$

19. $$a)\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 13; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3; \\ x_1 + 4x_3 = 5. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 8; \\ 5x_2 + 4x_3 = 18; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 12. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

20. $$a)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12; \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33; \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 11; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3; \\ 5x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9; \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 21; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 10. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5; \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 12; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

21. $$a)\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

22. $$a)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 11; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33; \\ 7x_1 - 5x_2 = 24; \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$$

23. $$a)\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5; \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = -6; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 12; \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 11. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ x_1 \quad - x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \quad = 15. \end{cases}$

24. $a)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 7x_1 - 4x_2 \quad = -1; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -4; \\ 5x_2 + 4x_3 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 11; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

25. $a)\ \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5; \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 7; \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -9; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 16; \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -14; \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -8. \end{cases}$

26. $a)\ \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - x_3 = -3; \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -7; \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 9; \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -6; \\ -6x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases}$

27. $a)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3; \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 19; \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 16; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -9; \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -8; \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

28. $a)\ \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1; \\ 11x_1 + 2x_2 - x_3 = -8; \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 1; \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 14. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2; \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$

29. $a)\ \begin{cases} 6x_1 - 7x_2 - x_3 = 13; \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \quad = -8; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 6; \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3; \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6; \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 3; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

30. $$a)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -9; \\ 6x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5; \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -9; \\ 6x_1 - 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 9. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12; \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

31. $$a)\ \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7; \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 = -5; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 1; \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

32. $$a)\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \\ 7x_1 - x_2 + 7x_3 = 4; \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -11. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 6x_3 = -2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1; \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = -5; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9; \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 28. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

33. $$a)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -5; \\ 15x_1 - x_2 + 6x_3 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -6; \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = 13; \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 32; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

34. $$a)\ \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -3; \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 5; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

35. $$a)\ \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 - x_3 = 26; \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 3; \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2; \\ 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 12; \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

$c)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 19; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -1; \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

36. $a)\ \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \qquad = -8; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 6; \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 9; \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -14; \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -8. \end{cases}$

37. $a)\ \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -9; \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 3; \\ 5x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6; \\ x_1 \qquad - x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \quad = 6. \end{cases}$

38. $a)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 13; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

39. $a)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9; \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 3; \\ 4x_1 \qquad + x_3 = 5. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5; \\ 7x_1 \qquad - 5x_3 = 2; \\ 4x_1 + 11x_2 \qquad = 15. \end{cases}$

40. $a)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 9; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -3; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

2.1. Линейное (векторное) пространство

Определение. ***Арифметическим n-мерным векторным пространством над полем P*** *называется непустое множество P^n, если на P^n определены операции сложения векторов и умножения векторов на элементы поля P.*

При этом операции на P^{n} обладают следующими свойствами:

- Сложение коммутативно.
- Умножение вектора на число ассоциативно.
- Выполняются две дистрибутивности.
- Свойство умножения на единицу $\forall \bar{a} \in V_n,\ 1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$.

Основные свойства векторного пространства.

1. Для любого вектора $\bar{a}$ и любого $n \in N$ $\quad \underbrace{\bar{a} + \bar{a} + \ldots \bar{a}}_{n} = n\bar{a}$
2. Для нулевого элемента $0 \in P$ и любого $\bar{a} \in V_n$ имеем $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$
3. Для любого $\lambda \in P$ и $\bar{0} \in V_n$ имеем $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$
4. $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \, или \; \bar{a} = \bar{0}$
5. Для любого $\lambda \in P$ и любого $\bar{a} \in V_n \quad (-\lambda)\bar{a} = \lambda(-\bar{a}) = -(\lambda\bar{a})$
6. Определим вычитание векторов формулой $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ для любых $\bar{a}, \bar{b} \in V_n$. Тогда умножение на скаляр дистрибутивно относительно вычитания векторов: $\lambda(\bar{a} - \bar{b}) = \lambda\bar{a} - \lambda\bar{b}$.

2.2. Линейная зависимость системы векторов

Определение: *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in P$ *(P – числовое множество) и* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \in V$, *тогда вектор* $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$ *называется* ***линейной комбинацией данных векторов***.

Всякий n-мерный вектор является линейной комбинацией единичных n-мерных векторов: $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n$.

Определение: *Линейную комбинацию назовем* ***тривиальной****, если все ее коэффициенты равны нулю. В случае, если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю, линейная комбинация называется* ***нетривиальной.***

Определение: *Если существует нетривиальная линейная комбинация данной системы векторов, равная* $\overline{0}$, *то такая система называется* ***линейно зависимой.***

Определение: *Система векторов называется* ***линейно независимой,*** *если только тривиальная линейная комбинация данных векторов равна* $\overline{0}$.

Основные признаки линейной зависимости системы векторов.

1. Если система векторов содержит $\overline{0}$, то она линейно зависима;
2. Если систем содержит два одинаковых вектора, то она линейно зависима;
3. Если система содержит пропорциональные векторы, то она линейно зависима;
4. Система, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима;
5. Система векторов, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда она содержит вектор, являющийся линейной комбинацией остальных векторов системы. (Второе определение линейно зависимой системы векторов)

Теорема (основная теорема о линейной зависимости): *Если система векторов линейно выражается через другую систему векторов, содержащую векторов меньше, чем первая (т.е. длинная система линейно выражается через короткую), то первая система линейно зависима.*

Следствие 1: *В арифметическом* n*-мерном векторном пространстве всякая система векторов, содержащая больше* n *векторов, линейно зависима.*

Следствие 2: *Если линейно независимая система векторов линейно выражается через другую систему векторов, то первая система векторов не длиннее второй.*

2.3. Базис и ранг системы векторов. Размерность векторного пространства

Определение: *Пусть дана некоторая система векторов S.* ***Базисом системы S*** *называется ее линейно независимая подсистема, через которую линейно выражается всякий вектор системы векторов S.*

<u>Другими словами:</u> Базис системы векторов – ее максимальная линейно независимая подсистема.

Теорема: *Если система векторов S содержит хотя бы один ненулевой вектор, то система S имеет базис. Любые два базиса системы S содержат одинаковое число векторов.*

Определение: *Две конечные системы векторов называются* ***эквивалентными****, если первая система векторов линейно выражается через вторую, а вторая - через первую.*

Элементарные преобразования конечной системы векторов (позволяют переходить от данной системы к эквивалентной ей системе):

- Перемена мест векторов системы;
- Умножение вектора на число, отличное от нуля;
- Прибавление к одному вектору другого, умноженного на число;
- Вписывание или удаление нулевого вектора.

Определение: ***Рангом*** *ненулевой системы векторов называется число векторов любого базиса этой системы.*

При элементарных преобразованиях системы ее ранг не изменяется.

2.4. Пример решения задания ДКР №2

Задание. *Найти базис системы векторов и выразить оставшиеся векторы через него. Найти другой базис системы и выразить оставшиеся векторы через новый базис.*

$\bar{a}_1 = (3,1,1)$, $\bar{a}_1 = (1,0,1)$, $\bar{a}_1 = (2,1,3)$, $\bar{a}_1 = (0,1,1)$, $\bar{a}_1 = (1,1,0)$

Решение. *Найдем линейную комбинацию данных векторов, равную* $\bar{0}$, *т.е. найдем коэффициенты комбинации* $x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 + x_4\bar{a}_4 + x_5\bar{a}_5 = \bar{0}$.

Подставим векторы в линейную комбинацию:

$x_1(3,1,1) + x_2(1,0,1) + x_3(2,1,3) + x_4(0,1,1) + x_5(1,1,0) = \bar{0}$.

$(3x_1, 1x_1, 1x_1) + (1x_2, 0x_2, 1x_2) + (2x_3, 1x_3, 3x_3) + (0x_4, 1x_4, 1x_4) + (1x_5, 1x_5, 0x_5) = \bar{0}$

$(3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 1x_5, 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5, 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 = 0 \\ 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ – ступенчатая матрица.

В ступенчатой матрице число оставшихся строк меньше числа столбцов, т.е. в системе линейных уравнений после приведения к ступенчатому виду число оставшихся уравнений меньше числа неизвестных, значит система линейных уравнений совместная и неопределенная, следовательно, имеет бесконечное множество решений, среди которых есть ненулевые. Таким образом, существует ненулевой набор значений неизвестных, удовлетворяющий линейной комбинации, записанной выше. По определению, это значит, что данная система векторов линейно зависима. *Заметим, что в первой матрице системы линейных уравнений столбцы – это данные векторы, поэтому в дальнейшем все, что делали до получения этой матрицы, можно опустить.*

Ранг r системы векторов равен 3 (числу оставшихся строк в ступенчатой матрице), значит, в базисе данной системы векторов содержится 3 вектора и, чтобы найти базис, нужно из данных векторов выбрать 3 линейно независимых. Чтобы не проверять все возможные тройки векторов на линейную зависимость, можно воспользоваться уже сделанными вычислениями. На последнем шаге преобразований системы линейных уравнений из полученной ступенчатой матрицы выбираем 3 (т.е. столько, чему равен ранг) столбца с разной «высотой» ступенек. Соответствующие этим столбцам векторы и составят базис. *В нашем примере столбцы 1, 2 и 3 с разной высотой ступенек, значит векторы* $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ *составят базис. Чтобы найти другой базис, выберем другие 3 столбца разной высоты ступенек, например 1, 2 и 4, значит базис* $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4\}$. *Для задания достаточно два базиса.*

Для каждого из выбранных базисов выразим через них векторы системы, которые не вошли в базис.

Для базиса $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ *найдем выражение векторов* $\bar{a}_4$ *и* $\bar{a}_5$, *т.е. найдем линейные комбинации базисных векторов, равные векторам* $\bar{a}_4$ *и* $\bar{a}_5$*:*

$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 = \bar{a}_4$ *и* $y_1\bar{a}_1 + y_2\bar{a}_2 + y_3\bar{a}_3 = \bar{a}_5$

Подставим в эти комбинации векторы. Выполнив необходимые действия, получим системы линейных уравнений, которые решим методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases}3y_1+1y_2+2y_3=1\\1y_1+0y_2+1y_3=1\\1y_1+1y_2+3y_3=0\end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}3&1&2&1\\1&0&1&1\\1&1&3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\3&1&2&1\\1&1&3&0\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&-2\\0&1&2&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&3&1\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}y_1 \quad +y_3=1\\ \quad y_2-y_3=-2\\ \qquad 3y_3=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}y_1=\frac{2}{3}\\ y_2=\frac{-5}{3}\\ y_3=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Из матриц этих систем видно, что столбцы левой части матриц – это компоненты базисных векторов, а в правой – искомые векторы. Зная это, в дальнейшем можно опустить запись самих систем и преобразования матриц, а сразу из последней ступенчатой матрицы, полученной при определении ранга, выписать столбцы в описанном порядке – слева базисные векторы, справа – искомый. Останется только дорешать соответствующие им системы уравнений , т.е. из приведенной записи для нахождения выражения векторов через базис нужно будет сделать только два последних шага. Покажем это на примере второго базиса.

Для базиса $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4\}$ найдем выражение векторов $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_5$, т.е. найдем линейные комбинации базисных векторов, равные векторам $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_5$:

$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_4\bar{a}_4 = \bar{a}_3$ *и* $y_1\bar{a}_1 + y_2\bar{a}_2 + y_4\bar{a}_4 = \bar{a}_5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-3&-1\\0&0&3&3\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}x_1 \quad +x_3=1\\ \quad x_2-3x_3=-1\\ \qquad 3x_3=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=2\\x_3=1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-3&-2\\0&0&3&1\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}y_1 \quad +y_3=1\\ \quad y_2-3y_3=-2\\ \qquad 3y_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1={}^2/_3\\ y_2=-1\\ y_3={}^1/_3\end{cases}$$

Ответ: базис $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$, $-2\bar{a}_2 + \bar{a}_3 = \bar{a}_4$ *и* ${}^2/_3\,\bar{a}_1 - {}^1/_5\,\bar{a}_2 + {}^1/_3\,\bar{a}_3 = \bar{a}_5$

базис $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4\}$, $2\bar{a}_2 + \bar{a}_4 = \bar{a}_3$ *и* ${}^2/_3\,\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + {}^1/_3\,\bar{a}_3 = \bar{a}_5$

Домашняя контрольная работа №2
(Векторное пространство, линейная зависимость, базис)

Задание. *Найти базис системы векторов и выразить оставшиеся векторы через него. Найти другой базис системы и выразить оставшиеся векторы через новый базис.*

Вариант 1.

1) a_1=(1;-1;2;0), a_2=(2;0;1;-1), a_3=(0;-1;2;3), a_4=(1;3;-3;3), a_5=(2;2;2;2)

2) a_1=(1;1;1;1), a_2=(1;0;1;0), a_3=(-1;-1;-1;-1), a_4=(0;1;0;1), a_5=(-1;0;-1;0)

3) a_1=(4;0;0;0), a_2=(1;4;0;0), a_3=(1;1;4;4;), a_4=(0;0;0;4), a_5=(0;0;4;1)

4) a_1=(3;2;1), a_2=(1;2;3), a_3=(2;3;1), a_4=(2;1;3), a_5=(0;0;1)

Вариант 2.

1) a_1=(1;-1;2;0), a_2=(1;0;1;0), a_3=(1;1;1;1), a_4=(2;0;1;-1), a_5=(1;0;-1;0)

2) a_1=(3;3;3;3), a_2=(3;1;3;1), a_3=(1;3;1;3), a_4=(0;0;0;3), a_5=(3;0;0;0)

3) a_1=(4;6;8;2), a_2=(0;2;0;2), a_3=(-2;0;-2;-0), a_4=(2;0;2;0), a_5=(2;4;6;8)

4) a_1=(3;0;1), a_2=(2;0;1), a_3=(4;0;1), a_4=(5;0;1), a_5=(6;0;1)

Вариант 3.

1) a_1=(1;0;1;0), a_2=(0;1;0;1), a_3=(1;1;0;0), a_4=(0;0;-1;-1), a_5=(1;1;1;1)

2) a_1=(3;3;3;3), a_2=(3;4;5;6), a_3 =(4;5;6;7), a_4=(5;6;7;8), a_5=(6;7;8;9)

3) a_1=(-2;-1;0;1), a_2=(1;2;0;0), a_3=(0;1;2;2), a_4=(2;2;2;1), a_5=(-2;-1;-2;-1)

4) a_1=(0;0;1), a_2=(9;8;7), a_3=(-9;-8;-4), a_4=(0;0;3), a_5=(6;0;1)

Вариант 4.

1) a_1=(-1;0;-1;0), a_2=(0;1;0;1), a_3=(-1;-1;-1;-1), a_4=(1;0;1;0), a_5=(1;1;1;1)

2) a_1=(0;0;1), a_2=(3;1;2), a_3=(2;3;1), a_4=(2;1;3), a_5=(3;2;1)

3) a_1=(2;1;2;3), a_2=(2;1;-1;-1), a_3=(3;2;1;0), a_4=(0;2;1;0), a_5=(2;1;1;0)

4) a_1=(3;2;1;0), a_2=(4;3;2;1), a_3=(5;4;3;2), a_4=(6;5;4;3), a_5=(7;6;5;4)

Вариант 5.

1) a_1=(-1;-1;0;0), a_2=(-1;0;-2;0), a_3=(3;-2;0;1), a_4=(2;-3;1;1), a_5=(0;0;0;-3)

2) a_1=(4;-5;-4;2), a_2=(-4;3;0;-3), a_3=(0;3;-4;1), a_4=(0;0;0;1), a_5=(4;-4;4;-4)

3) $a_1=(3;6;9;0)$, $a_2=(-3;-6;0;9)$, $a_3=(0;3;0;-9)$, $a_4=(9;3;-3;-3)$, $a_5=(0;-3;6;0)$

4) $a_1=(1;-1;2)$, $a_2=(2;1;0)$, $a_3=(1;3;2)$, $a_4=(3;2;0)$, $a_5=(-1;-1;0)$

Вариант 6.

1) $a_1=(1;0;-3;-3)$, $a_2=(2;-1;0;-4)$, $a_3=(-2;0;0;-1)$, $a_4=(4;4;4;4)$, $a_5=(-2;-2;-2;0)$

2) $a_1=(0;1;0;1)$, $a_2=(1;0;0;0)$, $a_3=(1;1;1;1)$, $a_4=(-1;-1;-1;-1)$, $a_5=(0;0;0;2)$

3) $a_1=(4;3;2;2)$, $a_2=(3;2;1;0)$, $a_3=(2;1;0;3)$, $a_4=(1;4;4;3)$, $a_5=(-5;-5;-5;-5)$

4) $a_1=(6;0;0)$, $a_2=(0;6;0)$, $a_3=(0;0;6)$, $a_4=(6;6;0)$, $a_5=(6;0;6)$

Вариант 7. $a_1 = (4,5,4,5)$

1) $a_1=(4;5;4;5)$, $a_2=(0;5;0;5)$, $a_3=(4;0;4;0)$, $a_4=(9;9;9;9)$, $a_5=(0;9;0;9)$

2) $a_1=(-1;-1;-1;-1)$, $a_2=(1;1;1;-1)$, $a_3=(1;1;-1;1)$, $a_4=(-1;1;1;1)$, $a_5=(1;-1;1;1)$

3) $a_1=(2;1;2;2)$, $a_2=(0;0;2;1)$, $a_3=(0;2;0;1)$, $a_4=(1;1;2;2)$, $a_5=(1;1;0;0)$

4) $a_1=(5;4;4)$, $a_2=(3;0;0)$, $a_3=(0;3;0)$, $a_4=(4;1;2)$, $a_5=(1;2;4)$

Вариант 8.

1) $a_1=(1;-1;0;2)$, $a_2=(4;0;3;2)$, $a_3=(1;-1;1;-1)$, $a_4=(0;3;0;1)$, $a_5=(-1;2;4;0)$

2) $a_1=(3;6;5;4)$, $a_2=(1;1;1;1)$, $a_3=(4;0;4;0)$, $a_4=(0;3;0;3)$, $a_5=(5;5;5;0)$

3) $a_1=(-2;-1;-2;1)$, $a_2=(1;2;0;0)$, $a_3=(0;0;9;9)$, $a_4=(8;8;8;8)$, $a_5=(8;9;8;9)$

4) $a_1=(0;9;0)$, $a_2=(9;0;8)$, $a_3=(8;9;9)$, $a_4=(0;8;9)$, $a_5=(0;8;0)$

Вариант 9.

1) $a_1=(1;0;1;-3)$, $a_2=(1;0;0;0)$, $a_3=(4;4;3;-6)$, $a_4=(0;3;0;1)$, $a_5=(-1;1;4;2)$

2) $a_1=(8;8;7;6)$, $a_2=(-8;7;-9;1)$, $a_3=(0;7;0;8)$, $a_4=(0;0;0;7)$, $a_5=(9;9;8;8)$

3) $a_1=(0;0;1;-1)$, $a_2=(3;-1;0;3)$, $a_3=(2;0;0;-1)$, $a_4=(1;-1;0;0)$, $a_5=(2;3;2;3)$

4) $a_1=(4;3;2)$, $a_2=(2;3;4)$, $a_3=(3;2;4)$, $a_4=(1;2;3)$, $a_5=(0;0;1)$

Вариант 10.

1) $a_1=(3;2;0;1)$, $a_2=(-1;-1;-2;4)$, $a_3=(0;4;0;0)$, $a_4=(2;0;0;1)$, $a_5=(1;0;0;0)$

2) $a_1=(3;3;3;3)$, $a_2=(4;4;4;6)$, $a_3=(6;6;6;2)$, $a_4=(7;7;7;1)$, $a_5=(0;0;0;9)$

3) $a_1=(1;1;1;-1)$, $a_2=(1;1;-1;0)$, $a_3=(-1;-1;1;1)$, $a_4=(0;0;1;1)$, $a_5=(2;2;0;0)$

4) $a_1=(0;1;-1)$, $a_2=(3;2;1)$, $a_3=(2;0;1)$, $a_4=(-2;-2;-2)$, $a_5=(1;0;1)$

Вариант 11.

1) $a_1=(2;2;2;2)$, $a_2=(2;0;1;-1)$, $a_3=(0;-1;2;3)$, $a_4=(1;3;-3;3)$, $a_5=(1;-1;2;0)$

2) $a_1=(4;0;0;0)$, $a_2=(1;4;0;0)$, $a_3=(1;1;4;4;)$, $a_4=(0;0;0;4)$, $a_5=(0;0;4;1)$

3) $a_1=(1;1;1;1)$, $a_2=(1;0;1;0)$, $a_3=(-1;-1;-1;-1)$, $a_4=(0;1;0;1)$, $a_5=(-1;0;-1;0)$

4) $a_1=(3;2;1)$, $a_2=(1;2;3)$, $a_3=(2;3;1)$, $a_4=(2;1;3)$, $a_5=(0;0;1)$

Вариант 12.

1) $a_1=(1;-1;2;0)$, $a_2=(2;0;1;-1)$, $a_3=(1;1;-1;1)$, $a_4=(1;0;1;0)$, $a_5=(1;0;-1;0)$

2) $a_1=(3;0;0;3)$, $a_2=(3;1;3;1)$, $a_3=(1;3;1;3)$, $a_4=(0;1;0;3)$, $a_5=(3;0;1;0)$

3) $a_1=(4;6;8;2)$, $a_2=(0;2;0;2)$, $a_3=(-2;0;-2;-0)$, $a_4=(2;0;2;0)$, $a_5=(2;4;6;8)$

4) $a_1=(3;0;1)$, $a_2=(2;0;1)$, $a_3=(4;0;1)$, $a_4=(5;0;1)$, $a_5=(6;0;1)$

Вариант 13.

1) $a_1=(2;0;1;0)$, $a_2=(0;1;0;1)$, $a_3=(1;1;0;0)$, $a_4=(0;0;-1;-1)$, $a_5=(1;1;-1;-1)$

2) $a_1=(3;3;0;3)$, $a_2=(5;6;7;8)$, $a_3=(4;5;6;7)$, $a_4=(3;4;5;6)$, $a_5=(6;7;8;9)$

3) $a_1=(-2;1;0;1)$, $a_2=(1;2;0;0)$, $a_3=(0;1;2;2)$, $a_4=(2;2;2;1)$, $a_5=(-2;-1;-2;0)$

4) $a_1=(0;0;1)$, $a_2=(9;8;7)$, $a_3=(-9;-8;-4)$, $a_4=(0;0;3)$, $a_5=(6;0;1)$

Вариант 14.

1) $a_1=(-1;0;-1;0)$, $a_2=(0;1;0;1)$, $a_3=(-1;-1;-1;-1)$, $a_4=(1;0;1;0)$, $a_5=(1;1;1;1)$

2) $a_1=(3;2;1;0)$, $a_2=(4;3;2;1)$, $a_3=(5;4;3;2)$, $a_4=(6;5;4;3)$, $a_5=(7;6;5;4)$

3) $a_1=(2;1;2;3)$, $a_2=(2;1;-1;-1)$, $a_3=(3;2;1;0)$, $a_4=(0;2;1;0)$, $a_5=(2;1;1;0)$

4) $a_1=(0;0;1)$, $a_2=(3;1;2)$, $a_3=(2;3;1)$, $a_4=(2;1;3)$, $a_5=(3;2;1)$

Вариант 15.

1) $a_1=(-1;1;0;3)$, $a_2=(-1;0;-2;0)$, $a_3=(3;-2;0;1)$, $a_4=(2;-3;1;1)$, $a_5=(0;0;0;-3)$

2) $a_1=(4;-5;-4;2)$, $a_2=(-4;3;0;-3)$, $a_3=(0;0;-4;1)$, $a_4=(0;0;0;1)$, $a_5=(4;-4;4;-4)$

3) $a_1=(3;6;0;0)$, $a_2=(-3;-6;0;9)$, $a_3=(0;3;0;-9)$, $a_4=(9;3;-3;-3)$, $a_5=(0;-3;6;0)$

4) $a_1=(1;-1;2)$, $a_2=(2;1;0)$, $a_3=(1;3;-2)$, $a_4=(3;2;0)$, $a_5=(-1;-1;0)$

Вариант 16.

1) $a_1=(1;-1;1;1)$, $a_2=(0;1;0;1)$, $a_3=(1;0;0;1)$, $a_4=(1;1;1;1)$, $a_5=(1;1;1;0)$

2) $a_1=(0;-1;0;-1)$, $a_2=(0;0;3;3)$, $a_3=(1;1;1;1)$, $a_4=(-1;-1;-1;-1)$, $a_5=(2;0;0;2)$

3) $a_1=(2;3;2;2)$, $a_2=(3;2;1;0)$, $a_3=(2;1;0;3)$, $a_4=(1;2;4;3)$, $a_5=(-5;-5;-5;-5)$

4) $a_1=(2;2;0)$, $a_2=(3;0;3)$, $a_3=(0;1;1)$, $a_4=(1;1;0)$, $a_5=(1;0;1)$

Вариант 17.

1) $a_1=(1;2;3;4)$, $a_2=(0;3;0;3)$, $a_3=(4;-1;4;-1)$, $a_4=(2;0;2;0)$, $a_5=(0;9;0;9)$

2) a_1=(-1;-1;0;-1), a_2=(1;1;1;-1), a_3=(1;1;-1;1), a_4=(-1;-1;1;1), a_5=(1;-1;1;1)

3) a_1=(-2;1;1;2), a_2=(1;1;2;1), a_3=(1;2;1;1), a_4=(1;1;2;2), a_5=(1;1;0;0)

4) a_1=(-2;-2;4), a_2=(3;0;0), a_3=(0;3;0), a_4=(0;1;1), a_5=(1;2;4)

Вариант 18.

1) a_1=(2;-1;0;2), a_2=(2;1;3;2), a_3=(1;1;1;-1), a_4=(0;3;0;1), a_5=(-1;2;4;0)

2) a_1=(0;-3;3;0), a_2=(1;1;1;1), a_3=(4;0;4;0), a_4=(0;-3;0;-3), a_5=(5;5;5;0)

3) a_1=(-2;-1;2;1), a_2=(1;-2;0;-2), a_3=(0;5;0;5), a_4=(8;8;8;8), a_5=(8;9;8;9)

4) a_1=(0;9;0), a_2=(2;0;-8), a_3=(8;9;9), a_4=(0;8;9), a_5=(0;4;4)

Вариант 19.

1) a_1=(1;0;1;1), a_2=(1;3;3;0), a_3=(4;4;3;2), a_4=(0;3;0;1), a_5=(1;1;1;2)

2) a_1=(0;8;1;6), a_2=(9;7;9;1), a_3=(0;7;0;8), a_4=(0;0;0;-7), a_5=(-9;-9;7;7)

3) a_1=(0;0;1;1), a_2=(3;3;0;3), a_3=(2;0;0;-1), a_4=(1;-1;0;0), a_5=(2;3;2;3)

4) a_1=(0;3;2), a_2=(2;1;4), a_3=(3;2;), a_4=(1;2;3), a_5=(0;0;1)

Вариант 20.

1) a_1=(0;2;0;1), a_2=(-1;0;2;4), a_3=(3;4;0;0), a_4=(2;0;0;1), a_5=(1;1;0;0)

2) a_1=(1;1;1;1), a_2=(4;4;4;6), a_3=(1;6;1;2), a_4=(7;7;7;1), a_5=(0;1;0;9)

3) a_1=(2;-1;1;1), a_2=(1;1;-1;-1), a_3=(-1;-1;1;1), a_4=(0;0;1;1), a_5=(2;2;0;0)

4) a_1=(1;1;-1), a_2=(0;2;1), a_3=(2;0;1), a_4=(-2;-2;0), a_5=(1;0;1)

Вариант 21.

1) a_1=(2;0;-2;2), a_2=(2;0;1;-1), a_3=(0;-1;2;3), a_4=(1;3;-3;3), a_5=(0;-1;2;0)

2) a_1=(4;0;0;0), a_2=(1;4;0;0), a_3=(1;1;-4;-4;), a_4=(0;0;0;4), a_5=(0;0;4;1)

3) a_1=(1;1;1;1), a_2=(1;0;1;0), a_3=(-1;1;1;-1), a_4=(0;1;0;1), a_5=(-1;0;-1;0)

4) a_1=(3;2;-1), a_2=(1;2;3), a_3=(2;3;1), a_4=(0;1;3), a_5=(0;0;1)

Вариант 22.

1) a_1=(1;-1;0;0), a_2=(2;0;1;1), a_3=(1;1;-1;1), a_4=(1;0;1;0), a_5=(1;0;-1;0)

2) a_1=(3;0;3;3), a_2=(3;1;3;1), a_3=(1;3;1;3), a_4=(0;1;0;3), a_5=(3;0;1;0)

3) a_1=(4;6;8;2), a_2=(0;2;0;2), a_3=(-2;0;-1;-0), a_4=(2;0;2;0), a_5=(2;4;6;8)

4) a_1=(3;0;-1), a_2=(2;0;-1), a_3=(4;0;1), a_4=(5;0;1), a_5=(6;0;1)

Вариант 23.

1) a_1=(2;2;1;0), a_2=(0;1;0;1), a_3=(1;1;0;0), a_4=(0;0;-1;-1), a_5=(1;1;1;1)

2) $a_1=(3;0;0;3)$, $a_2=(5;6;7;8)$, $a_3=(4;0;4;0)$, $a_4=(3;4;5;6)$, $a_5=(1;1;1;1)$

3) $a_1=(2;1;2;1)$, $a_2=(1;2;0;0)$, $a_3=(0;1;2;2)$, $a_4=(2;-2;2;1)$, $a_5=(-2;-1;-2;0)$

4) $a_1=(0;0;1)$, $a_2=(9;0;7)$, $a_3=(-9;0;0)$, $a_4=(0;0;3)$, $a_5=(-3;0;1)$

Вариант 24.

1) $a_1=(1;0;1;0)$, $a_2=(0;1;0;1)$, $a_3=(-1;-1;-1;-1)$, $a_4=(1;0;1;0)$, $a_5=(1;1;1;1)$

2) $a_1=(-3;2;1;0)$, $a_2=(4;-3;2;1)$, $a_3=(5;4;3;2)$, $a_4=(6;5;4;3)$, $a_5=(7;6;5;4)$

3) $a_1=(2;1;2;0)$, $a_2=(2;1;-1;-1)$, $a_3=(3;2;-1;0)$, $a_4=(0;2;1;0)$, $a_5=(2;1;1;0)$

4) $a_1=(0;0;1)$, $a_2=(-3;1;2)$, $a_3=(2;3;1)$, $a_4=(2;1;3)$, $a_5=(3;2;1)$

Вариант 25.

1) $a_1=(1;-1;2;0)$, $a_2=(2;0;1;-1)$, $a_3=(0;-1;2;3)$, $a_4=(1;3;-3;3)$, $a_5=(2;2;2;2)$

2) $a_1=(1;1;1;1)$, $a_2=(1;0;1;0)$, $a_3=(-1;-1;-1;-1)$, $a_4=(0;1;0;1)$, $a_5=(-1;0;-1;0)$

3) $a_1=(4;0;0;0)$, $a_2=(1;4;0;0)$, $a_3=(1;1;4;4;)$, $a_4=(0;0;0;4)$, $a_5=(0;0;4;1)$

4) $a_1=(3;2;1)$, $a_2=(1;2;3)$, $a_3=(2;3;1)$, $a_4=(2;1;3)$, $a_5=(0;0;1)$

Вариант 26.

1) $a_1=(1;0;2;0)$, $a_2=(1;0;1;0)$, $a_3=(1;1;1;1)$, $a_4=(2;0;1;-1)$, $a_5=(1;0;-1;0)$

2) $a_1=(1;1;3;3)$, $a_2=(3;1;3;1)$, $a_3=(1;3;1;3)$, $a_4=(0;0;0;3)$, $a_5=(3;0;0;0)$

3) $a_1=(4;0;0;2)$, $a_2=(0;2;0;2)$, $a_3=(-2;0;-2;-0)$, $a_4=(2;0;2;0)$, $a_5=(2;4;6;0)$

4) $a_1=(1;0;1)$, $a_2=(6;0;1)$, $a_3=(4;0;1)$, $a_4=(2;2;1)$, $a_5=(2;0;1)$

Вариант 27.

1) $a_1=(3;0;3;3)$, $a_2=(0;1;0;1)$, $a_3=(1;1;0;0)$, $a_4=(0;0;-1;-1)$, $a_5=(1;1;1;1)$

2) $a_1=(1;1;0;0)$, $a_2=(3;4;5;0)$, $a_3=(4;5;-1;7)$, $a_4=(5;6;7;-4)$, $a_5=(6;0;4;9)$

3) $a_1=(-2;-1;0;1)$, $a_2=(1;2;0;0)$, $a_3=(0;1;2;2)$, $a_4=(2;2;2;1)$, $a_5=(-2;-1;-2;-1)$

4) $a_1=(-1;0;1)$, $a_2=(-1;8;7)$, $a_3=(-9;-8;-4)$, $a_4=(0;1;3)$, $a_5=(6;1;1)$

Вариант 28.

1) $a_1=(-1;0;-1;0)$, $a_2=(0;1;0;1)$, $a_3=(-1;1;-1;1)$, $a_4=(1;0;1;0)$, $a_5=(1;2;1;2)$

2) $a_1=(1;0;1)$, $a_2=(5;1;2)$, $a_3=(2;0;1)$, $a_4=(2;1;-5)$, $a_5=(5;2;1)$

3) $a_1=(2;1;2;1)$, $a_2=(2;1;-1;-1)$, $a_3=(1;2;1;0)$, $a_4=(0;2;1;0)$, $a_5=(2;1;1;0)$

4) $a_1=(2;1;0)$, $a_2=(3;2;1)$, $a_3=(5;3;2)$, $a_4=(6;4;3)$, $a_5=(6;5;4)$

Вариант 29.

1) $a_1=(1;1;0;0)$, $a_2=(-1;1;-2;0)$, $a_3=(3;2;0;1)$, $a_4=(2;0;1;1)$, $a_5=(0;0;0;-3)$

2) $a_1=(4;1;4;2)$, $a_2=(-2;3;0;-3)$, $a_3=(0;3;-4;1)$, $a_4=(1;0;0;1)$, $a_5=(4;4;4;4)$

3) $a_1=(3;6;3;0)$, $a_2=(-3;-2;0;9)$, $a_3=(0;3;0;-9)$, $a_4=(9;0;-3;-3)$, $a_5=(0;-3;6;0)$

4) $a_1=(0;-1;2)$, $a_2=(-2;1;0)$, $a_3=(1;0;2)$, $a_4=(-1;2;0)$, $a_5=(-1;-1;0)$

Вариант 30.

1) $a_1=(1;0;3;-3)$, $a_2=(2;2;0;-4)$, $a_3=(2;0;0;1)$, $a_4=(2;4;2;4)$, $a_5=(-2;-2;-2;0)$

2) $a_1=(1;1;0;1)$, $a_2=(0;1;0;1)$, $a_3=(1;1;1;1)$, $a_4=(-1;-1;-1;-1)$, $a_5=(0;0;0;2)$

3) $a_1=(-1;3;2;2)$, $a_2=(3;2;1;0)$, $a_3=(3;1;0;3)$, $a_4=(1;1;1;3)$, $a_5=(5;5;5;5)$

4) $a_1=(1;0;0)$, $a_2=(0;6;0)$, $a_3=(0;0;6)$, $a_4=(6;6;0)$, $a_5=(1;0;1)$

Вариант 31.

1) $a_1=(4;5;4;5)$, $a_2=(0;5;0;5)$, $a_3=(4;0;4;0)$, $a_4=(9;9;9;9)$, $a_5=(0;9;0;9)$

2) $a_1=(-1;-1;-1;-1)$, $a_2=(1;1;1;-1)$, $a_3=(1;1;-1;1)$, $a_4=(-1;1;1;1)$, $a_5=(1;-1;1;1)$

3) $a_1=(2;1;2;2)$, $a_2=(0;0;2;1)$, $a_3=(0;2;0;1)$, $a_4=(1;1;2;2)$, $a_5=(1;1;0;0)$

4) $a_1=(5;4;4)$, $a_2=(3;0;0)$, $a_3=(0;3;0)$, $a_4=(4;1;2)$, $a_5=(1;2;4)$

Вариант 32.

1) $a_1=(1;1;0;2)$, $a_2=(1;0;3;2)$, $a_3=(1;-1;1;-1)$, $a_4=(0;3;0;1)$, $a_5=(-1;2;4;0)$

2) $a_1=(3;6;5;4)$, $a_2=(1;1;1;1)$, $a_3=(4;0;4;0)$, $a_4=(0;3;0;3)$, $a_5=(5;5;5;0)$

3) $a_1=(0;-1;0;1)$, $a_2=(1;2;0;0)$, $a_3=(0;0;9;9)$, $a_4=(8;8;8;8)$, $a_5=(8;9;8;9)$

4) $a_1=(0;9;0)$, $a_2=(9;0;8)$, $a_3=(8;9;9)$, $a_4=(0;8;9)$, $a_5=(0;8;0)$

Вариант 33.

1) $a_1=(1;0;1;-3)$, $a_2=(1;0;0;1)$, $a_3=(4;4;3;-6)$, $a_4=(0;3;0;1)$, $a_5=(-1;1;4;2)$

2) $a_1=(8;8;7;6)$, $a_2=(-8;7;-9;1)$, $a_3=(0;7;0;8)$, $a_4=(0;0;0;7)$, $a_5=(9;9;8;8)$

3) $a_1=(0;0;1;-1)$, $a_2=(3;-1;0;3)$, $a_3=(2;0;0;-1)$, $a_4=(1;-1;0;0)$, $a_5=(2;3;2;3)$

4) $a_1=(4;3;2)$, $a_2=(2;3;4)$, $a_3=(3;2;4)$, $a_4=(1;2;3)$, $a_5=(1;0;0)$

Вариант 34.

1) $a_1=(0;2;0;1)$, $a_2=(-1;-1;-2;4)$, $a_3=(0;4;0;0)$, $a_4=(2;0;0;1)$, $a_5=(1;0;0;0)$

2) $a_1=(3;3;3;3)$, $a_2=(4;4;4;6)$, $a_3=(6;6;6;2)$, $a_4=(7;7;7;1)$, $a_5=(0;0;0;9)$

3) $a_1=(1;1;1;-1)$, $a_2=(1;1;-1;0)$, $a_3=(-1;-1;1;1)$, $a_4=(0;0;1;1)$, $a_5=(2;2;0;0)$

4) $a_1=(0;1;-1)$, $a_2=(3;2;1)$, $a_3=(2;0;1)$, $a_4=(-2;-2;-2)$, $a_5=(1;0;1)$

Вариант 35.

1) $a_1=(2;2;2;2)$, $a_2=(2;0;1;1)$, $a_3=(0;-1;2;0)$, $a_4=(1;3;-3;3)$, $a_5=(1;-1;2;0)$

2) a_1=(4;0;0;0), a_2=(1;4;0;0), a_3=(1;1;4;4;), a_4=(0;0;0;4), a_5=(0;0;4;1)

3) a_1=(1;1;1;1), a_2=(1;0;1;0), a_3=(-1;-1;-1;-1), a_4=(0;1;0;1), a_5=(-1;0;-1;0)

4) a_1=(2;2;1), a_2=(1;2;3), a_3=(2;2;1), a_4=(2;1;3), a_5=(0;0;1)

Вариант 36.

1) a_1=(1;-1;2;0), a_2=(2;0;1;-1), a_3=(1;1;-1;1), a_4=(1;0;1;0), a_5=(1;0;-1;0)

2) a_1=(3;3;3;3), a_2=(3;1;3;1), a_3=(1;3;1;3), a_4=(0;1;0;3), a_5=(3;0;1;0)

3) a_1=(4;6;8;2), a_2=(0;2;0;2), a_3=(-2;0;-2;-0), a_4=(2;0;2;0), a_5=(1;2;3;4)

4) a_1=(3;1;0), a_2=(2;1;0), a_3=(4;1;0), a_4=(5;1;0), a_5=(6;1;0)

Вариант 37.

1) a_1=(2;-1;1;0), a_2=(1;0;0;1), a_3=(0;1;0;0), a_4=(0;0;-1;-1), a_5=(1;1;1;1)

2) a_1=(3;3;0;3), a_2=(5;-2;7;0), a_3 =(4;5;-1;7), a_4=(3;4;5;6), a_5=(6;7;8;9)

3) a_1=(-2;1;0;1), a_2=(1;2;0;1), a_3=(0;1;2;2), a_4=(0;2;2;1), a_5=(-2;-1;-2;0)

4) a_1=(0;0;1), a_2=(5;8;7), a_3=(-5;-8;-4), a_4=(0;0;3), a_5=(6;0;1)

Вариант 38.

1) a_1=(1;0;1;0), a_2=(2;1;0;1), a_3=(1;1;0;-1), a_4=(0;0;1;1), a_5=(1;1;1;1)

2) a_1=(3;3;0;3), a_2=(5;2;0;1), a_3 =(4;5;0;-1), a_4=(3;-2;5;0), a_5=(-3;7;-3;3)

3) a_1=(-2;1;0;1), a_2=(1;2;0;0), a_3=(0;1;2;2), a_4=(2;2;2;1), a_5=(-2;-1;-2;0)

4) a_1=(3;0;1), a_2=(0;3;-1), a_3=(-1;-2;-4), a_4=(0;0;3), a_5=(3;0;3)

Вариант 39.

1) a_1=(4;1;0;3), a_2=(-1;0;0;1), a_3=(3;4;0;1), a_4=(2;-3;-3;1), a_5=(0;0;0;-3)

2) a_1=(4;0;-4;2), a_2=(-4;1;0;-1), a_3=(0;0;-4;1), a_4=(0;0;0;1), a_5=(4;-4;4;-4)

3) a_1=(3;-6;0;0), a_2=(3;6;0;9), a_3=(0;3;0;9), a_4=(9;3;-3;-3), a_5=(0;-3;6;0)

4) a_1=(2;1;2), a_2=(2;1;2), a_3=(1;0;-2), a_4=(0;2;0), a_5=(-1;-1;0)

Вариант 40.

1) a_1=(1;0;-3;-3), a_2=(2;-1;0;-4), a_3=(-2;0;0;-1), a_4=(4;2;4;2), a_5=(2;2;2;0)

2) a_1=(0;1;-1;1), a_2=(0;0;2;0), a_3=(1;1;1;1), a_4=(1;-1;1;-1), a_5=(-2;0;0;2)

3) a_1=(-5;5;2;2), a_2=(3;2;1;0), a_3=(2;1;0;3), a_4=(1;4;4;3), a_5=(1;5;1;5)

4) a_1=(6;0;6), a_2=(0;1;0), a_3=(0;0;1), a_4=(6;6;0), a_5=(6;0;6)

3.1. Линейные операторы. Матрица линейного оператора

Определение: *Отображение* $\varphi: V_n \to V_n$ *линейного пространства* V_n *над полем P в пространство* V_n *(само в себя) называется* ***линейным оператором*** *(линейным преобразованием), если выполняется свойство сохранения операций: для любых* $\bar{a}_1$ *и* $\bar{a}_2$ *из* V_n $\varphi(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \varphi(\bar{a}_1) + \varphi(\bar{a}_2)$ *и* $\varphi(\lambda\bar{a}_1) = \lambda\varphi(\bar{a}_1)$.

Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ - некоторый базис n-мерного линейного пространства V_n и φ – линейный оператор на V_n, $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$ - образы базисных векторов. Разложим векторы системы $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$ по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$:

$$\begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = \alpha_{11}\bar{e}_1 + \alpha_{21}\bar{e}_2 + \dots + \alpha_{n1}\bar{e}_n \\ \varphi(\bar{e}_2) = \alpha_{12}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2 + \dots + \alpha_{n2}\bar{e}_n \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(\bar{e}_1) = \alpha_{1n}\bar{e}_1 + \alpha_{2n}\bar{e}_2 + \dots + \alpha_{nn}\bar{e}_n \end{cases} \text{ Тогда } M_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ –}$$

транспонированная матрица этого разложения и есть матрица линейного оператора φ.

Если $\bar{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - произвольный вектор пространства V_n, $\bar{b} = \varphi(\overline{a}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – образ этого вектора при операторе φ, то $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = M_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, т.е. $\varphi(\bar{a}) = M_\varphi \cdot \bar{a}$.

3.2. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Определение: *Ненулевой вектор* $\bar{a}$ *из линейного пространства* V_n *над полем P называется* ***собственным вектором линейного оператора φ*** *пространства* V_n*, если существует такое число* λ *из P, что* $\varphi(\bar{a}) = \lambda\bar{a}$*. При этом число* λ ***называется собственным значением оператора φ****.*

Пусть $M_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора φ.

Теорема 1. *Число λ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда λ является корнем* ***характеристического уравнения*** $\left|M_\varphi - \lambda E\right| = 0$, *где E – единичная матрица.* Т.е.
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель из характеристического уравнения представляет собой многочлен n-ой степени от λ и называется ***характеристическим многочленом***.

Каждый линейный оператор имеет собственные значения.

Теорема 2. *Матрица линейного оператора φ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ имеет диагональный вид* $M_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 0 \cdots \; 0 \\ 0 \; \lambda_2 \cdots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \;\; 0 \cdots \lambda_n \end{pmatrix}$ *тогда и только тогда, когда векторы данного базиса являются собственными векторами оператора φ, соответствующими собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.*

Теорема 3. *Собственные векторы линейного оператора, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Эта теорема дает один из способов составления базиса пространства V_n из собственных векторов линейного оператора φ. Если оператор обладает простым спектром (все собственные значения оператора различны), то достаточно взять по одному вектору из каждого множества собственных векторов каждого собственного значения. Отсюда

Следствие из теоремы 3. *Если характеристический многочлен оператора φ линейного пространства V_n над полем P имеет* n *различных действительных корней, т.е. φ обладает простым спектром, то в некотором базисе матрица этого оператора имеет диагональный вид.*

3.3. Пример решения ДКР №3

Задание 1. *Найти матрицу линейного оператора φ, при котором базис (a) переходит в базис (b).*

$$(a):\begin{cases}\bar{a}_1=(1,0,2)\\ \bar{a}_2=(0,1,3)\\ \bar{a}_3=(1,1,0)\end{cases}\qquad (b):\begin{cases}\bar{b}_1=(1,3,1)\\ \bar{b}_2=(1,3,3)\\ \bar{b}_3=(3,1,4)\end{cases}$$

Решение.

$\varphi(\bar{a}_1)=\bar{b}_1, \varphi(\bar{a}_2)=\bar{b}_2, \varphi(\bar{a}_3)=\bar{b}_3$. Найдем разложение базиса (b) по базису (a). (Приведем упрощенный вариант записи решения, опустив шаги, связанные с получением систем линейных уравнений. Этот вариант записи достаточен и для оформления решения задания в ДКР.) Для этого запишем расширенную матрицу по правилу: в левой части столбцами записаны векторы базиса (a), а в правой – базиса (b). Затем с помощью элементарных преобразований, как при решении системы линейных уравнений методом Гаусса, приводим матрицу к такому виду, чтобы слева оказалась единичная матрица Е. При этом справа окажется искомая матрица M_φ.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&1&3&3&1\\2&3&0&1&3&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&1&3&3&1\\0&3&-2&-1&1&-2\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&1&3&3&1\\0&0&-5&-10&-8&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&1&3&3&1\\0&0&1&2&8/5&1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-3/5&2\\0&1&0&1&7/5&0\\0&0&1&2&8/5&1\end{array}\right)\Rightarrow\quad M_\varphi=\begin{pmatrix}-1&-3/5&2\\1&7/5&0\\2&8/5&1\end{pmatrix}$$

Задание 2. *Привести матрицу к диагональному виду с помощью линейного оператора. Указать базис, в котором данная матрица имеет диагональный вид.* $\begin{pmatrix}3&3&0\\0&1&1\\0&2&0\end{pmatrix}$

Решение.

1) Будем данную матрицу считать матрицей M_φ оператора φ. Найдем собственные значения линейного оператора φ. Для этого решим характеристическое уравнение $|M_\varphi - \lambda E| = 0$. $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} =$ $(3-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 2(3-\lambda) = (3-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-2) =$ $(3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$. Отсюда $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

Для каждого собственного значения найдем собственные векторы оператора φ.

2) для $\lambda_1 = 3$.

Пусть $\bar{b} = (x_1, x_2, x_3)$ – искомый собственный вектор, соответствующий данному собственному значению. Тогда из определения собственного вектора получаем $\varphi(\bar{b}) = \lambda\bar{b} \Rightarrow \varphi(\bar{b}) - \lambda\bar{b} = \bar{0} \Rightarrow$ т.к. $\varphi(\bar{b}) = M_\varphi \bar{b}$, то $(M_\varphi \cdot \bar{b} - \lambda\bar{b}) = \bar{0} \Rightarrow (M_\varphi - \lambda E)\bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ при $\lambda = 3$ $\begin{cases} (3-3)x_1 + 3x_2 = 0 \\ (1-3)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 3x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $B_1 = \{(t; 0; 0) | t \in Z, t \neq 0\}$ – множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 3$.

3) для $\lambda_2 = 2$.

Пусть $\bar{b} = (x_1, x_2, x_3)$ – искомый собственный вектор, соответствующий данному собственному значению. Тогда $\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ при $\lambda = 2$

$$\begin{cases} (3-2)x_1 + 3x_2 = 0 \\ (1-2)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad B_2 = \{(-3l; l; l) | t \in Z, t \neq 0\}$ – множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_2 = 2$.

4) для $\lambda_3 = -1$.

Пусть $\bar{b} = (x_1, x_2, x_3)$ – искомый собственный вектор, соответствующий данному собственному значению. Тогда $\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ при

$\lambda = -1 \quad \begin{cases} (3+1)x_1 + 3x_2 = 0 \\ (1+1)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = (-3/4)x_2 \\ x_3 = -2x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x_1 = -3/4\, x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \Longrightarrow \quad B_3 = \{((-3/4)k; k; -2k) | k \in Z, k \neq 0\}$ - множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_3 = -1$.

5) Из каждого из найденных множеств B_1, B_2, B_3 собственных векторов возьмем по одному, придавая параметрам произвольные ненулевые значения. Например, из B_1 возьмем вектор $\bar{b}_1 = (1,0,0)$, из B_2 возьмем вектор $\bar{b}_2 = (-3,1,1)$, из B_3 возьмем вектор $\bar{b}_3 = (-3,4,-8)$. В базисе $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ матрица M_φ примет диагональный вид $M_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание 3. *Привести квадратичную форму к диагональному виду.* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xy + 6yz$

Решение. Решение этой задачи сводится к предыдущей, если коэффициенты данной квадратичной формы записать в виде матрицы 3 на 3 по следующему правилу: $\begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{2}xy & \frac{1}{2}xz \\ \frac{1}{2}xy & y^2 & \frac{1}{2}yz \\ \frac{1}{2}xz & \frac{1}{2}yz & z^2 \end{pmatrix}$, где вместо переменных должны стоять коэффициенты при соответствующих произведениях.

В нашем примере это будет матрица $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-2) & 0 \\ \frac{1}{2}(-2) & 1 & \frac{1}{2}6 \\ 0 & \frac{1}{2}6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Дальше нужно, как в предыдущей задаче, привести эту матрицу к диагональному виду без нахождения собственных векторов.

Домашняя контрольная работа №3

(Линейная алгебра: линейные операторы)

Задание 1. *Найти матрицу линейного оператора φ, при котором базис (a) переходит в базис (b).*

1. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,1) \\ \bar{a}_2 = (0,1,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $\quad (b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (3,1,1) \end{cases}$

2. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (3,1,1) \\ \bar{a}_2 = (1,3,1) \\ \bar{a}_3 = (0,0,1) \end{cases}$ $\quad (b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,1,0) \\ \bar{b}_3 = (1,0,0) \end{cases}$

3. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,3,5) \\ \bar{a}_2 = (2,2,2) \\ \bar{a}_3 = (1,0,1) \end{cases}$ $\quad (b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (0,1,3) \\ \bar{b}_2 = (1,3,0) \\ \bar{b}_3 = (3,0,1) \end{cases}$

4. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (-1,1,1) \\ \bar{a}_2 = (1,-1,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $\quad (b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (7,0,7) \\ \bar{b}_2 = (1,1,0) \\ \bar{b}_3 = (0,-1,7) \end{cases}$

5. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (3,1,2) \\ \bar{a}_2 = (2,0,3) \\ \bar{a}_3 = (0,1,3) \end{cases}$ $\quad (b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,2,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (2,1,2) \end{cases}$

6. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (4,2,0) \\ \bar{a}_2 = (0,1,2) \\ \bar{a}_3 = (3,0,3) \end{cases}$ $\quad (b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,0) \\ \bar{b}_2 = (1,1,3) \\ \bar{b}_3 = (5,1,1) \end{cases}$

7. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (2,3,4) \\ \bar{a}_2 = (4,0,5) \\ \bar{a}_3 = (0,5,6) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,1,0) \\ \bar{b}_2 = (4,0,2) \\ \bar{b}_3 = (0,2,4) \end{cases}$

8. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (3,6,9) \\ \bar{a}_2 = (9,0,1) \\ \bar{a}_3 = (0,1,3) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (0,3,2) \\ \bar{b}_2 = (3,0,2) \\ \bar{b}_3 = (1,1,3) \end{cases}$

9. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (2,1,1) \\ \bar{a}_2 = (1,0,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,3) \\ \bar{b}_2 = (7,0,1) \\ \bar{b}_3 = (1,7,0) \end{cases}$

10. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,7,7) \\ \bar{a}_2 = (7,1,7) \\ \bar{a}_3 = (0,0,7) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (5,1,5) \\ \bar{b}_2 = (5,0,1) \\ \bar{b}_3 = (0,0,5) \end{cases}$

11. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (3,1,3) \\ \bar{a}_2 = (0,5,0) \\ \bar{a}_3 = (0,0,1) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,0,0) \\ \bar{b}_2 = (0,0,5) \\ \bar{b}_3 = (1,1,0) \end{cases}$

12. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (5,6,7) \\ \bar{a}_2 = (7,0,7) \\ \bar{a}_3 = (0,1,0) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,0,5) \\ \bar{b}_2 = (5,0,6) \\ \bar{b}_3 = (0,6,0) \end{cases}$

13. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (4,1,0) \\ \bar{a}_2 = (0,1,5) \\ \bar{a}_3 = (5,0,6) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (7,1,3) \\ \bar{b}_2 = (0,3,1) \\ \bar{b}_3 = (8,0,8) \end{cases}$

14. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (6,2,5) \\ \bar{a}_2 = (3,0,8) \\ \bar{a}_3 = (8,2,3) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (8,-1,0) \\ \bar{b}_2 = (0,1,1) \\ \bar{b}_3 = (-1,3,-1) \end{cases}$

15. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (8,9,0) \\ \bar{a}_2 = (0,1,-1) \\ \bar{a}_3 = (6,0,9) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,8,-1) \\ \bar{b}_2 = (-2,1,6) \\ \bar{b}_3 = (4,0,0) \end{cases}$

16. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,3) \\ \bar{a}_2 = (3,1,4) \\ \bar{a}_3 = (4,2,0) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (2,0,3) \\ \bar{b}_2 = (3,4,0) \\ \bar{b}_3 = (0,8,1) \end{cases}$

17. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,5,6) \\ \bar{a}_2 = (6,1,0) \\ \bar{a}_3 = (0,1,7) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,3,1) \\ \bar{b}_2 = (0,3,1) \\ \bar{b}_3 = (3,0,2) \end{cases}$

18. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (7,7,1) \\ \bar{a}_2 = (0,8,8) \\ \bar{a}_3 = (2,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (3,1,1) \end{cases}$

19. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,1) \\ \bar{a}_2 = (0,1,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,0,0) \\ \bar{b}_2 = (0,0,5) \\ \bar{b}_3 = (1,1,0) \end{cases}$

20. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (8,9,0) \\ \bar{a}_2 = (0,1,-1) \\ \bar{a}_3 = (6,0,9) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (3,1,1) \end{cases}$

21. $(a): \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,3,1) \\ \bar{b}_2 = (0,3,1) \\ \bar{b}_3 = (3,0,2) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,0,0) \\ \bar{b}_2 = (0,0,5) \\ \bar{b}_3 = (1,1,0) \end{cases}$

22. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,1) \\ \bar{a}_2 = (0,1,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,1,0) \\ \bar{b}_3 = (1,0,0) \end{cases}$

23. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,3,5) \\ \bar{a}_2 = (2,2,2) \\ \bar{a}_3 = (1,0,1) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (7,0,7) \\ \bar{b}_2 = (1,1,0) \\ \bar{b}_3 = (0,-1,7) \end{cases}$

24. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (3,6,9) \\ \bar{a}_2 = (9,0,1) \\ \bar{a}_3 = (0,1,3) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,2,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (2,1,2) \end{cases}$

25. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,1) \\ \bar{a}_2 = (0,1,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (3,1,1) \end{cases}$

26. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,1) \\ \bar{a}_2 = (0,1,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (3,1,1) \end{cases}$

27. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (4,2,0) \\ \bar{a}_2 = (0,1,2) \\ \bar{a}_3 = (3,0,3) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,1,0) \\ \bar{b}_2 = (4,0,2) \\ \bar{b}_3 = (0,2,4) \end{cases}$

28. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (5,6,7) \\ \bar{a}_2 = (7,0,7) \\ \bar{a}_3 = (0,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,0,0) \\ \bar{b}_2 = (0,0,5) \\ \bar{b}_3 = (1,1,0) \end{cases}$

29. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (3,1,3) \\ \bar{a}_2 = (0,5,0) \\ \bar{a}_3 = (0,0,1) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (3,1,1) \end{cases}$

30. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,7,7) \\ \bar{a}_2 = (7,1,7) \\ \bar{a}_3 = (0,0,7) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,3,1) \\ \bar{b}_2 = (0,3,1) \\ \bar{b}_3 = (3,0,2) \end{cases}$

31. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (2,1,1) \\ \bar{a}_2 = (1,0,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (2,0,3) \\ \bar{b}_2 = (3,4,0) \\ \bar{b}_3 = (0,8,1) \end{cases}$

32. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (3,6,9) \\ \bar{a}_2 = (9,0,1) \\ \bar{a}_3 = (0,1,3) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,8,-1) \\ \bar{b}_2 = (-2,1,6) \\ \bar{b}_3 = (4,0,0) \end{cases}$

33. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (2,3,4) \\ \bar{a}_2 = (4,0,5) \\ \bar{a}_3 = (0,5,6) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (8,-1,0) \\ \bar{b}_2 = (0,1,1) \\ \bar{b}_3 = (-1,3,-1) \end{cases}$

34. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (4,2,0) \\ \bar{a}_2 = (0,1,2) \\ \bar{a}_3 = (3,0,3) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (7,1,3) \\ \bar{b}_2 = (0,3,1) \\ \bar{b}_3 = (8,0,8) \end{cases}$

35. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,1) \\ \bar{a}_2 = (0,1,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,0,5) \\ \bar{b}_2 = (5,0,6) \\ \bar{b}_3 = (0,6,0) \end{cases}$

36. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (7,7,1) \\ \bar{a}_2 = (0,8,8) \\ \bar{a}_3 = (2,1,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,0,0) \\ \bar{b}_2 = (0,0,5) \\ \bar{b}_3 = (1,1,0) \end{cases}$

37. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,5,6) \\ \bar{a}_2 = (6,1,0) \\ \bar{a}_3 = (0,1,7) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (5,1,5) \\ \bar{b}_2 = (5,0,1) \\ \bar{b}_3 = (0,0,5) \end{cases}$

38. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,3) \\ \bar{a}_2 = (3,1,4) \\ \bar{a}_3 = (4,2,0) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,3) \\ \bar{b}_2 = (7,0,1) \\ \bar{b}_3 = (1,7,0) \end{cases}$

39. $(a): \begin{cases} \bar{a}_1 = (8,9,0) \\ \bar{a}_2 = (0,1,-1) \\ \bar{a}_3 = (6,0,9) \end{cases}$ $(b): \begin{cases} \bar{b}_1 = (0,3,2) \\ \bar{b}_2 = (3,0,2) \\ \bar{b}_3 = (1,1,3) \end{cases}$

40. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (6,2,5) \\ \bar{a}_2 = (3,0,8) \\ \bar{a}_3 = (8,2,3) \end{cases}$ $\quad (b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (3,1,0) \\ \bar{b}_2 = (4,0,2) \\ \bar{b}_3 = (0,2,4) \end{cases}$

Задание 2. *Привести матрицу к диагональному виду с помощью линейного оператора. Указать базис, в котором данная матрица имеет диагональный вид.*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 3 & -8 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 3 & -8 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3. *Привести квадратичную форму к диагональному виду.*

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy + 6yz$
2. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz$
3. $f(x,y,z) = x^2 + z^2 + 4xy + 2xz$
4. $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2 - 2xy + 6xz$
5. $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + z^2 + 4xy - 2yz$
6. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 8xy - 2yz$
7. $f(x,y,z) = x^2 - 2z^2 - 2xz + 6yz$
8. $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy - 6xz$
9. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz$
10. $f(x,y,z) = y^2 + z^2 + 6xy + 6yz$
11. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 6yz$
12. $f(x,y,z) = 2x^2 + 3z^2 - 2xz + 6yz$
13. $f(x,y,z) = 4x^2 + z^2 - 2xy + 2xz$
14. $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 4yz$
15. $f(x,y,z) = 2y^2 + z^2 - 2xz + 6yz$
16. $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy + 2yz$
17. $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 16xz$
18. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 6yz$
19. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy$
20. $f(x,y,z) = x^2 - 5z^2 - 2xz$
21. $f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 8yz$
22. $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 10xz + 2yz$
23. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy$
24. $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy + 6yz$

25. $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$

26. $f(x,y,z) = y^2 + 3z^2 - 4xy + 6yz$

27. $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 6yz$

28. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 14yz$

29. $f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 - 24xy + 2yz$

30. $f(x,y,z) = 2y^2 + z^2 + 6xy - 8yz$

31. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xz + 6yz$

32. $f(x,y,z) = x^2 + 5z^2 + 2xy + 14yz$

33. $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4xz - 6yz$

34. $f(x,y,z) = -7x^2 + z^2 + 2xy + 4yz$

35. $f(x,y,z) = -x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$

36. $f(x,y,z) = -y^2 + z^2 - 2xy - 18xz$

37. $f(x,y,z) = -3x^2 + y^2 + z^2 + 6xz$

38. $f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 6yz$

39. $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 + 6xy + 6yz$

40. $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 + 12xz + 6$

4.1. Нелинейные операции над векторами

1. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или $\bar{a}\bar{b}$. $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$

Свойства скалярного произведения:

1) коммутативность $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;
2) смешанная ассоциативность $\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}$;
3) дистрибутивность $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$;
4) $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$;
5) Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$. И наоборот, если $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, $\bar{a}\perp\bar{b}$.

Вычисление скалярного произведения через координаты векторов.

Если $\bar{a}=(x_{a,},y_a,z_a)$ и $\bar{b}=(x_{b,},y_b,z_b)$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b$.

Некоторые приложения скалярного произведения.

1) Определение угла между ненулевыми векторами.

Если $\bar{a}=(x_{a,},y_a,z_a)$ и $\bar{b}=(x_{b,},y_b,z_b)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$, то $\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}$

2) Нахождение проекции на заданное направление.

$np_b\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}\qquad np_a\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$

2. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\bar{a}\cdot\bar{b}$, т.е. $\bar{c}\perp\bar{a}$ и $\bar{c}\perp\bar{b}$;
2) имеет длину, равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах;
3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$.

Из определения векторного произведения следует соотношение между ортами: $\bar{\imath} \times \bar{\jmath} = \bar{k}, \bar{\jmath} \times \bar{k} = \bar{\imath}, \bar{k} \times \bar{\imath} = \bar{\jmath}$.

Свойства векторного произведения:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;
2) смешанная ассоциативность $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$;
3) дистрибутивность $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$;
4) если $\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}$, то $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Вычисление векторного произведения через координаты векторов.

Если $\bar{a} = (x_{a,}, y_a, z_a)$ и $\bar{b} = (x_{b,}, y_b, z_b)$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$.

Некоторые приложения векторного произведения.

1) Установление коллинеарности векторов (свойство (4)).
2) Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

$S_{пар} = |\bar{a} \times \bar{b}|$, $S_\Delta = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$

3. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное произведению $(\overline{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}) \cdot \bar{\boldsymbol{c}}$.

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «-», если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения:

1) смешанное произведение не меняется при циклической перестановке сомножителей, т.е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$;
2) местоположение знака умножения не влияет на результат $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$, а значит в записи знаки умножения и скобки можно опустить, т.е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$;

3) смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух сомножителей $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$;

4) если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

Вычисление смешанного произведения через координаты векторов.

Если $\bar{a} = (x_{a,}, y_a, z_a)$, $\bar{b} = (x_{b,}, y_b, z_b)$ и $\bar{c} = (x_{c,}, y_c, z_c)$, то $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$.

Некоторые приложения смешанного произведения.

1) Определение взаимной ориентации векторов: если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая тройка, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - левая тройка.

2) Установление компланарности векторов (свойство (4)).

3) Определение объема параллелепипеда и треугольной пирамиды: $V_{пар} = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$, $V_{пир} = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

4.2. Уравнения прямой на плоскости

1) $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом;

2) $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой;

3) $y - y_0 = k(x - x_0)$ −уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k;

4) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$;

5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ - уравнение прямой в отрезках, где a и b – длины отрезков, отсекаемых данной прямой на координатных осях;

6) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$−уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B)$, называемому нормальным вектором прямой;

7) $r(cos\varphi - \alpha) = p$ – уравнение прямой в полярных координатах, где α - угол между полярной осью и перпендикуляром к прямой, проходящей через точку О;

8) $x \cdot cos\alpha + y \cdot cos\alpha - p = 0$ - нормальное уравнение прямой

Основные задачи на прямую на плоскости

1) Нахождение угла между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Если k_1 и k_2 – угловые коэффициенты данных прямых, α - угол между этими прямыми, то $tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Данные прямые параллельны $\Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Данные прямые перпендикулярны $\Leftrightarrow \; k_1 \cdot k_2 = -1$.

2) Расстояние от точки до прямой.

Если $Ax + By + C = 0$ – прямая, $\bar{n} = (A, B)$ – её нормальный вектор, $M(x_0, y_0)$ – некоторая точка плоскости, то расстояние d от M до данной прямой находится по формуле: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|\bar{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

4.3. Уравнения плоскости в пространстве

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ и перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B, C)$;

2) $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости;

3) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$;

4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости в отрезках, где a, b и c – длины отрезков, отсекаемых данной плоскостью на координатных осях;

5) $x \cdot cos\alpha + y \cdot cos\alpha + z \cdot cos\gamma - p = 0$ – нормальное уравнение плоскости.

Основные задачи на плоскость

1) Нахождение угла между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Пусть даны плоскости α_1 и α_2.

α_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

α_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Если φ - угол между ними, $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы данных плоскостей, то $cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Если $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$, следовательно, $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$.

Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$, следовательно, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

2) Расстояние от точки до плоскости.

3) Если $Ax + By + Cz + D = 0$ – плоскость, $\bar{n} = (A, B, C)$ – её нормальный вектор, $M(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая точка пространства, то расстояние d от M до данной плоскости находится по формуле: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\bar{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4.4. Уравнения прямой в пространстве

1) $\bar{r} = \overline{r_0} + t\bar{s}$ - векторное уравнение прямой, где $\overline{r_0}$ - радиус-вектор некоторой точки M_0 прямой, $\bar{s}$ - направляющий вектор прямой;

2) $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой, где (x_0, y_0, z_0) – координаты точки M_0 прямой, (m, n, p) - координаты направляющего вектора;

3) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ - канонические уравнения прямой, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка прямой, (m, n, p) - координаты направляющего вектора;

4) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$;

5) Общее уравнение прямой: $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ - как линия пересечения двух плоскостей.

Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве

1) Нахождение угла между прямыми в пространстве – находится так же, как и в плоскости, а значит и условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве такие же, как и на плоскости.

2) Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.

Две прямые L_1: $\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1}$ и L_2: $\frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2}$ лежат в одной плоскости, то $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0.$

3) Нахождение угла между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Углом φ между прямой L: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью α: $Ax+By+Cz+D=0$ называется угол между прямой L и ее проекцией на плоскость α.

$\bar{n}=(A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости α, $\bar{s}=(m,n,p)$ направляющий вектор прямой L. Тогда $\alpha \parallel L \Leftrightarrow \bar{s}\cdot\bar{n}=0$ и $\alpha \parallel L \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

4) Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости.

Пусть L: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ - прямая α: $Ax+By+Cz+D=0$ - плоскость. Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, удобно записать уравнение прямой в параметрическом виде:

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t.$ Тогда $\begin{cases}\frac{x-x_0}{m}=t\\ \frac{y-y_0}{n}=t,\\ \frac{z-z_0}{p}=t\end{cases}$ отсюда $\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt.\\ z=z_0+pt\end{cases}$

Полученные выражения подставим в уравнение плоскости, найдем t и по найденному t найдем (x,y,z) – координаты искомой точки пересечения.

Домашняя контрольная работа №4
(Векторная алгебра, аналитическая геометрия)

Задание 1. *Проверить, являются ли векторы* $\bar{c}_1$ *и* $\bar{c}_2$ *коллинеарными, если*

1. $\bar{c}_1=2\bar{a}-9\bar{b}$ и $\bar{c}_2=9\bar{a}+2\bar{b}$, где $\bar{a}(2;-2;3)$, $\bar{b}(3;-2;2)$

2. $\bar{c}_1=7\bar{a}+4\bar{b}$ и $\bar{c}_2=7\bar{a}-3\bar{b}$, где $\bar{a}(8;-4;0)$, $\bar{b}(0;-1;4)$

3. $\bar{c}_1=4\bar{a}-7\bar{b}$ и $\bar{c}_2=3\bar{a}+4\bar{b}$, где $\bar{a}(2;-4;4)$, $\bar{b}(1;-3;2)$

4. $\bar{c}_1=6\bar{a}-5\bar{b}$ и $\bar{c}_2=4\bar{a}+2\bar{b}$, где $\bar{a}(2;-4;7)$, $\bar{b}(1;-6;6)$

5. $\bar{c}_1=5\bar{a}+6\bar{b}$ и $\bar{c}_2=2\bar{a}-\bar{b}$, где $\bar{a}(2;-1;2)$, $\bar{b}(3;-1;2)$

6. $\bar{c}_1=3\bar{a}+8\bar{b}$ и $\bar{c}_2=\bar{a}-5\bar{b}$, где $\bar{a}(2;-6;8)$, $\bar{b}(1;-4;6)$

7. $\bar{c}_1=2\bar{a}-3\bar{b}$ и $\bar{c}_2=4\bar{a}+2\bar{b}$, где $\bar{a}(1;-3;0)$, $\bar{b}(2;2;-3)$

8. $\bar{c}_1=3\bar{a}-2\bar{b}$ и $\bar{c}_2=4\bar{a}-3\bar{b}$, где $\bar{a}(4;2;-3)$, $\bar{b}(2;1;1)$

9. $\bar{c}_1=8\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{c}_2=\bar{a}+2\bar{b}$, где $\bar{a}(3;3;-6)$, $\bar{b}(-2;0;3)$

10. $\bar{c}_1=7\bar{a}-4\bar{b}$ и $\bar{c}_2=2\bar{a}-3\bar{b}$, где $\bar{a}(0;-3;5)$, $\bar{b}(2;-1;3)$

11. $\bar{c}_1=-5\bar{a}+2\bar{b}$ и $\bar{c}_2=6\bar{a}-3\bar{b}$, где $\bar{a}(2;-5;4)$, $\bar{b}(7;-2;0)$

12. $\bar{c}_1=\bar{a}+2\bar{b}$ и $\bar{c}_2=4\bar{a}-2\bar{b}$, где $\bar{a}(-4;1;-7)$, $\bar{b}(1;2;3)$

13. $\bar{c}_1=-\bar{a}+2\bar{b}$ и $\bar{c}_2=4\bar{a}+9\bar{b}$, где $\bar{a}(4;6;6)$, $\bar{b}(2;2;-4)$

14. $\bar{c}_1=4\bar{a}-2\bar{b}$ и $\bar{c}_2=6\bar{a}-2\bar{b}$, где $\bar{a}(8;-5;5)$, $\bar{b}(3;-2;3)$

15. $\bar{c}_1=3\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{c}_2=4\bar{a}+\bar{b}$, где $\bar{a}(4;5;1)$, $\bar{b}(1;2;-2)$

16. $\bar{c}_1=2\bar{a}+8\bar{b}$ и $\bar{c}_2=2\bar{a}+2\bar{b}$, где $\bar{a}(2;2;3)$, $\bar{b}(-2;-2;3)$

17.$\bar{c}_1 = 7\bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 4\bar{a} - 6\bar{b}$, где $\bar{a}(-3;0;6)$, $\bar{b}(2;1;3)$

18.$\bar{c}_1 = -\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 3\bar{a} + 9\bar{b}$, где $\bar{a}(4;-7;2)$, $\bar{b}(5;2;0)$

19.$\bar{c}_1 = 7\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = -4\bar{a} + \bar{b}$, где $\bar{a}(4;7;-4)$, $\bar{b}(2;5;3)$

20.$\bar{c}_1 = \bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 4\bar{a} - 3\bar{b}$, где $\bar{a}(9;-4;6)$, $\bar{b}(5;-2;3)$

21.$\bar{c}_1 = 2\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = -\bar{a} + 3\bar{b}$, где $\bar{a}(4;5;6)$, $\bar{b}(2;-1;1)$

22.$\bar{c}_1 = 7\bar{a} + 5\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 8\bar{a} - 4\bar{b}$, где $\bar{a}(7;-2;6)$, $\bar{b}(2;-4;3)$

23.$\bar{c}_1 = 6\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = \bar{a} + 8\bar{b}$, где $\bar{a}(4;-3;3)$, $\bar{b}(2;-4;6)$

24. $\bar{c}_1 = 9\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 3\bar{a} + 2\bar{b}$, где $\bar{a}(1;-5;5)$, $\bar{b}(4;2;3)$

25. $\bar{c}_1 = 5\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 8\bar{a} - 2\bar{b}$, где $\bar{a}(6;-5;-6)$, $\bar{b}(2;2;1)$

26. $\bar{c}_1 = 5\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 5\bar{a} - 2\bar{b}$, где $\bar{a}(4;5;0)$, $\bar{b}(4;-8;3)$

27. $\bar{c}_1 = 3\bar{a} + 5\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = -7\bar{a} + \bar{b}$, где $\bar{a}(-2;5;1)$, $\bar{b}(2;2;4)$

28. $\bar{c}_1 = 7\bar{a} - 3\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = \bar{a} - 4\bar{b}$, где $\bar{a}(3;-4;2)$, $\bar{b}(2;3;3)$

29. $\bar{c}_1 = 6\bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 3\bar{a} - 2\bar{b}$, где $\bar{a}(-4;5;6)$, $\bar{b}(2;2;-3)$

30. $\bar{c}_1 = -2\bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 5\bar{a} + 2\bar{b}$, где $\bar{a}(6;-7;2)$, $\bar{b}(2;-9;3)$

31. $\bar{c}_1 = 3\bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 8\bar{a} - \bar{b}$, где $\bar{a}(4;2;-1)$, $\bar{b}(0;2;-3)$

32. $\bar{c}_1 = \bar{a} + 6\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = -4\bar{a} + \bar{b}$, где $\bar{a}(4;5;2)$, $\bar{b}(2;8;3)$

33. $\bar{c}_1 = 2\bar{a} + 9\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 4\bar{a} - 6\bar{b}$, где $\bar{a}(6;0;6)$, $\bar{b}(-2;-2;3)$

34. $\bar{c}_1 = 6\bar{a} - 9\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 8\bar{a} + 2\bar{b}$, где $\bar{a}(4;4;6)$, $\bar{b}(2;-7;3)$

35. $\bar{c}_1 = 5\bar{a} + 8\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 7\bar{a} - 6\bar{b}$, где $\bar{a}(4;1;6)$, $\bar{b}(2;9;3)$

36. $\bar{c}_1 = 6\bar{a} - 7\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 3\bar{a} + 2\bar{b}$, где $\bar{a}(4;6;6)$, $\bar{b}(-3;2;3)$

37. $\bar{c}_1 = 2\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = \bar{a} - 2\bar{b}$, где $\bar{a}(6;-5;-6)$, $\bar{b}(2;2;1)$

38. $\bar{c}_1 = -7\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = \bar{a} + 4\bar{b}$, где $\bar{a}(4;5;0)$, $\bar{b}(4;-8;3)$

39. $\bar{c}_1 = -3\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{c}_2 = -7\bar{a} + \bar{b}$, где $\bar{a}(2;-4;1)$, $\bar{b}(2;2;4)$

40. $\bar{c}_1 = 7\bar{a} + 8\bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 3\bar{a} - 4\bar{b}$, где $\bar{a}(3;4;-6)$, $\bar{b}(3;2;3)$

Задание 2. *Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти:*

а) длину ребра AB;

b) *угол между ребрами* AB *и* AD;

c) *угол между ребром* AD *и гранью* ABC;

d) *площадь грани* ABC;

e) *объем пирамиды;*

f) *уравнение прямой* AD;

g) *уравнение высоты, опущенной из вершины* D *на грань* ABC.

1. 1) $A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;9;9), D(6;4;8)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;8)$

2. 1) $A(3;5;-4), B(5;8;3), C(1;9;8), D(6;4;-4)$

2) $A(-1;0;1), B(5;3;3), C(1;7;2), D(1;5;6)$

3. 1) $A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;7;9), D(6;5;5)$

2) $A(-1;-2;1), B(5;-3;3), C(1;2;2), D(6;4;5)$

4. 1) $A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;9;0), D(3;3;6)$

2) $A(3;8;1), B(5;9;3), C(1;3;2), D(6;-4;8)$

5. 1) $A(-3;5;6), B(5;-7;3), C(1;9;4), D(6;4;-3)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;1;8)$

6. 1) $A(3;2;-4), B(5;6;3), C(1;0;9), D(6;7;-7)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;-3;3), C(1;7;2), D(6;4;-5)$

7. 1) $A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;3;2), D(6;6;6)$

2) $A(0;3;8), B(5;3;1), C(1;9;2), D(6;4;-4)$

8. 1) $A(6;8;6), B(3;3;3), C(1;9;0), D(-5;4;5)$

2) $A(3;3;5), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;8)$

9. 1) $A(2;8;5), B(5;8;3), C(1;9;1), D(9;9;9)$

2) $A(4;1;1), B(5;1;3), C(1;9;2), D(6;-4;8)$

10. 1) $A(3;2;4), B(5;-7;3), C(1;9;9), D(6;4;-2)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;8)$

11. 1) $A(3;5;4), B(5;-4;3), C(1;-9;9), D(6;4;3)$

2) $A(-1;-1;-1), B(5;3;6), C(3;9;2), D(1;4;8)$

12. 1) $A(0;7;4), B(-5;1;3), C(1;9;9), D(6;6;6)$

2) $A(1;0;1), B(5;3;3), C(1;-6;2), D(6;4;-5)$

13. 1) $A(-1;4;4), B(5;8;3), C(1;1;-9), D(-6;4;8)$

2) $A(9;9;9), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;2)$

14. 1) $A(3;8;4), B(5;8;3), C(1;9;9), D(6;4;-3)$

2) $A(7;7;1), B(5;-3;3), C(1;1;2), D(3;3;8)$

15. 1) $A(3;-1;4), B(5;7;3), C(1;2;1), D(-5;4;-3)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;8)$

16. 1) $A(3;-1;4), B(5;3;3), C(-1;7;9), D(-6;4;5)$

2) $A(1;2;2), B(5;3;6), C(1;-7;2), D(6;4;4)$

17. 1) $A(3;-5;4), B(5;5;3), C(-2;9;8), D(5;4;3)$

2) $A(-1;2;-1), B(5;5;5), C(1;9;9), D(1;1;9)$

18. 1) $A(3;5;4), B(6;5;3), C(-1;9;0), D(6;-4;-4)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;3)$

19. 1) $A(0;5;4), B(5;2;3), C(1;9;9), D(6;-3;3)$

2) $A(-1;0;1), B(5;-3;3), C(1;-4;2), D(5;-1;5)$

20. 1) $A(3;5;4), B(2;6;3), C(1;1;1), D(6;-4;2)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(9;7;2), D(6;4;8)$

21. 1) $A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;7;9), D(6;-4;2)$

2) $A(-1;0;1), B(5;-3;3), C(-1;7;2), D(6;0;8)$

22. 1) $A(3;5;4), B(5;0;3), C(1;5;5), D(6;4;3)$

2) $A(-2;2;2), B(5;3;3), C(1;3;2), D(6;4;9)$

23. 1) $A(3;5;4), B(5;6;3), C(4;4;9), D(6;4;6)$

2) $A(-5;1;1), B(5;9;3), C(1;1;2), D(6;4;-3)$

24. 1) $A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;9;9), D(6;4;8)$

2) $A(-1;0;-1), B(3;3;3), C(1;-3;2), D(6;4;0)$

25. 1) $A(3;-5;4), B(5;8;3), C(3;9;9), D(7;4;-5)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;8)$

26. 1) $A(3;5;4), B(5;-2;3), C(1;7;9), D(6;-2;1)$

2) $A(-1;3;1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(-4;4;-7)$

27. 1) $A(3;5;4), B(5;-3;3), C(1;0;9), D(6;4;-2)$

2) $A(-1;4;1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;2;-3)$

28. 1) $A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;9;9), D(6;4;8)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;8)$

29. 1) $A(3;1;-4), B(5;4;-3), C(1;4;-9), D(6;5;-8)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;9;2), D(6;4;8)$

30. 1) $A(3;1;4), B(5;8;-3), C(1;0;0), D(6;5;-8)$

2) $A(1;1;1), B(-5;0;3), C(1;7;2), D(6;-4;-1)$

31. 1) $A(3;0;-4), B(5;6;3), C(1;6;9), D(6;2;-3)$

2) $A(-1;0;1), B(5;-3;3), C(1;9;2), D(6;2;8)$

32. 1) $A(3;-4;2), B(5;5;3), C(1;-9;1), D(6;-4;8)$

2) $A(2;2;1), B(5;3;3), C(1;7;-2), D(1;-4;3)$

33. 1) $A(3;3;-4), B(5;-8;3), C(1;9;0), D(6;4;-8)$

2) $A(-1;0;3), B(5;-3;1), C(1;4;2), D(6;4;0)$

34. 1) $A(3;-5;4), B(5;3;3), C(1;1;1), D(6;4;8)$

2) $A(-1;0;1), B(5;-1;-3), C(1;0;2), D(6;4;2)$

35. 1) $A(3;-1;4), B(5;8;3), C(1;9;9), D(6;4;8)$

2) $A(-1;0;-1), B(5;3;3), C(1;2;2), D(0;4;8)$

36. 1) $A(4;2;-1), B(3;0;4), C(0;0;4), D(5;-1;-3)$

2) $A(3;-5;-2), B(-4;2;3), C(1;5;7), D(-2;-4;5)$

37. 1) $A(7;4;9), B(1;-2;-3), C(-5;-3;0), D(1;-3;4)$

2) $A(-4;-7;-3), B(-4;-5;7), C(2;-3;3), D(3;2;1)$

38. 1) $A(-4;-5;-3), B(3;2;1), C(5;7;-6), D(6;-1;5)$

2) $A(5;2;4), B(-3;5;-7), C(1;-5;8), D(9;-3;5)$

39. 1) $A(-6;4;5), B(5;-7;3), C(4;2;-8), D(2;8;-3)$

2) $A(-1;0;1), B(5;-1;-3), C(1;9;9), D(6;4;2)$

40. 1) $A(3;-1;4), B(5;8;3), C(2;-3;3), D(6;4;8)$

2) $A(-1;0;-1), B(3;2;1), C(1;2;2), D(0;4;8)$

Задание 3. *Даны координаты вершин треугольника ABC. Необходимо:*

a) *Составить канонические уравнения сторон треугольника;*

b) *Вычислить величины всех углов треугольника;*

c) *Составить параметрические уравнения биссектрис всех его углов;*

d) *Составить канонические уравнения всех медиан и высот треугольника.*

1. $A(1;6), B(0;-1), C(3;-4)$

2. $A(3;5), B(-12;-3), C(0;-2)$

3. $A(1;6), B(0;-5), C(3;4)$

4. $A(3;5), B(9;-3), C(7;-2)$

5. $A(4;-6), B(10;-1), C(3;4)$

6. $A(-3;5), B(2;-3), C(0;2)$

7. $A(1;-3), B(4;5), C(3;-4)$

8. $A(3;5), B(9;-8), C(2;-2)$

9. $A(1;6), B(3;-1), C(-3;-9)$

10. $A(3;5), B(5;-7), C(-10;-2)$

11. $A(-1;6), B(7;-1), C(3;4)$

12. $A(3;5), B(5;-3), C(-9;8)$

13. $A(1;-6), B(8;1), C(3;4)$

14. $A(-3;5), B(-1;-3), C(9;-2)$

15. $A(1;-5), B(17;-1), C(9;4)$

16. $A(3;5), B(4;-3), C(-6;2)$

17. $A(1;6), B(6;-6), C(3;4)$

18. $A(-3;5), B(2;-3), C(10;-2)$

19. $A(5;6), B(-6;-1), C(3;-4)$

20. $A(3;-7), B(9;-3), C(0;-2)$

21. $A(1;-6), B(8;-1), C(3;-4)$

22. $A(-3;5), B(7;-3), C(-6;5)$

23. $A(1;6), B(8;-1), C(-3;-4)$

24. $A(2;7), B(-8;-3), C(0;5)$

25. $A(1;6), B(0;-1), C(-3;-4)$

26. $A(3;5), B(3;-3), C(0;9)$

27. $A(1;0), B(0;-1), C(-3;-4)$

28. $A(-3;5), B(7;-3), C(0;-2)$

29. $A(-1;8), B(0;-1), C(3;7)$

30. $A(3;5), B(-12;-3), C(0;-2)$

31. $A(-1;6), B(0;-1), C(4;-4)$

32. $A(3;-5), B(-2;-3), C(9;-2)$

33. $A(3;2), B(6;-3), C(0;-2)$

34. $A(1;6), B(0;-8), C(3;4)$

35. $A(1;6), B(0;-1), C(3;-4)$

36. $A(3;7), B(-1;3), C(5;-2)$

37. $A(1;6), B(0;-1), C(3;-4)$

38. $A(5;5), B(-12;-3), C(5;-2)$

39. $A(1;4), B(0;-7), C(3;-4)$

40. $A(9;5), B(5;-3), C(0;6)$

Задание 4. *Написать уравнение плоскости, проходящей через точку А перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{BC}$.

1. $A(-2;0;-5), B(2;7;-3), C(1;10;-1)$
2. $A(2;0;-5), B(2;0;3), C(4;6;-1)$
3. $A(-2;0;5), B(2;-7;4), C(1;9;-1)$
4. $A(-2;8;5), B(2;-1;3), C(-4;4;1)$
5. $A(2;2;5), B(2;-9;3), C(1;1;1)$
6. $A(3;3;-1), B(2;3;3), C(-4;1;6)$

7. $(-2;0;-5), B(2;7;3), C(1;5;-1)$

8. $A(-2;0;-5), B(2;4;-3), C(1;10;-1)$

9. $A(-2;4;5), B(2;-9;3), C(1;10;5)$

10. $A(4;4;5), B(2;-5;3), C(1;8;-1)$

11. $A(2;4;-6), B(2;-6;-3), C(1;1;9)$

12. $A(-2;0;-5), B(2;7;3), C(5;4;-1)$

13. $A(-2;0;5), B(0;-7;-3), C(7;-1;-1)$

14. $A(-2;5;5), B(2;-7;3), C(1;1;-1)$

15. $A(-2;0;-5), B(2;7;3), C(1;9;-1)$

16. $A(1;1;-5), B(2;0;-3), C(1;7;-1)$

17. $A(-2;0;-5), B(1;7;-3), C(-3;4;-1)$

18. $A(2;0;-5), B(2;4;-3), C(1;10;-1)$

19. $A(2;4;5), B(2;-2;-3), C(-1;9;-1)$

20. $A(-2;1;5), B(5;5;3), C(1;1;-3)$

21. $A(-2;3;-5), B(2;2;-3), C(2;1;-1)$

22. $A(2;7;-5), B(2;-6;3), C(1;0;-1)$

23. $A(-2;-3;8), B(2;7;-3), C(1;2;-2)$

24. $A(-2;1;5), B(2;3;-3), C(1;4;-1)$

25. $A(-1;1;-5), B(2;1;-3), C(-1;10;2)$

26. $A(-2;0;-5), B(2;7;-3), C(1;1;-1)$

27. $A(-3;8;-5), B(2;7;-3), C(2;3;-1)$

28. $A(2;4;-5), B(2;-7;-3), C(5;-5-1)$

29. $A(-6;6;-5), B(2;7;2), C(1;10;-1)$

30. $A(-2;3;5), B(2;7;6), C(4;4;-1)$

31. $A(-2;0;5), B(2;9;-3), C(1;10;-1)$

32. $A(-2;0;-5), B(2;7;3), C(1;5;-1)$

33. $A(2;3;-5), B(2;7;-3), C(1;4;1)$

34. $A(-2;10;-5), B(2;8;-3), C(1;1;-1)$

35. $A(-2;0;-5), B(2;7;-3), C(1;0;1)$

36. $A(-2;3;-5), B(2;-7;-3), C(1;10;-1)$

37. $A(2;3;-3), B(-2;-3;-5), C(1;4;1)$

38. $A(-2;0;-5), B(2;8;-3), C(1;-1;-1)$

39. $A(-2;0;-5), B(2;-7;3), C(1;0;1)$

40. $A(-2;3;-5), B(2;7;3), C(1;10;-1)$

Задание 5. *Написать канонические уравнения прямой.*

1. $2x + y + z - 2 = 0,\ 2x - y - 3z + 6 = 0$

2. $x - 3y + 2z + 2 = 0,\ x + 3y + z + 14 = 0$

3. $x - 2y + z - 4 = 0,\ 2x + 2y - z - 8 = 0$

4. $x + y + z - 2 = 0,\ x - y - 2z + 2 = 0$

5. $2x + 3y + z + 6 = 0,\ x - 3y - 2z + 3 = 0$

6. $3x + y - z - 6 = 0,\ 3x - y + 2z = 0$

7. $x + 5y + 2z + 11 = 0,\ x - y - z + 1 = 0$

8. $3x - 4y - 2z + 1 = 0,\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0$

9. $5x + y - 3z + 4 = 0,\ x - y + 2z + 2 = 0$

10. $x - y - z - 2 = 0,\ x - 2y + z + 4 = 0$

11. $4x + y - 3z + 2 = 0,\ 2x - y + z - 8 = 0$

12. $3x + 3y - 2z - 1 = 0,\ 2x - 3y + z + 6 = 0$

13. $6x - 7y - 4z - 2 = 0,\ x + 7y - z - 5 = 0$

14. $8x - y - 3z - 1 = 0,\ x + y + z + 10 = 0$

15. $6x - 5y - 4z + 8 = 0,\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0$

16. $x + 5y - z - 5 = 0,\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0$

17. $2x - 3y + z + 6 = 0,\ x - 3y - 2z + 3 = 0$

18. $5x + y + 2z + 4 = 0,\ x - y - 3z + 2 = 0$

19. $4x + y + z + 2 = 0,\ 2x - y - 3z - 8 = 0$

20. $2x + y - 3z - 2 = 0,\ 2x - y + z + 6 = 0$

21. $x + y - 2z - 2 = 0,\ x - y + z + 2 = 0$

22. $x + 5y - z + 11 = 0,\ x - y + 2z - 1 = 0$

23. $x - y + z - 2 = 0,\ x - 2y - z + 4 = 0$

24. $6x - 7y - z - 2 = 0,\ x + 7y - 4z - 5 = 0$

25. $x + 5y + 2z - 5 = 0,\ 2x - 5y - z + 5 = 0$

26. $x - 3y + z + 2 = 0,\ x + 3y + 2z + 14 = 0$

27. $2x + 3y - 2z + 6 = 0,\ x - 3y + z + 3 = 0$

28. $2x - 3y - 2z + 7 = 0,\ x + 5y - 2z + 3 = 0$

29. $x - 5y - 2z + 7 = 0,\ 7x + y + z + 1 = 0$

30. $x + 5y - 2z + 1 = 0,\ 2x - y + z - 5 = 0$

31. $5x - 2y + z + 11 = 0,\ 12x + 4y + 2z + 1 = 0$

32. $2x + 5y + 3z + 4 = 0,\ 3x - y - 2z - 4 = 0$

33. $-4x - y + z - 8 = 0,\ x - 2y + 3z + 5 = 0$

34. $x - 3y - 2z + 6 = 0,\ x - 3y + z + 4 = 0$

35. $2x + 3y - 2z + 6 = 0,\ x - 3y - z + 8 = 0$

36. $x + y + 5z + 7 = 0,\ 5x + y - 3z + 1 = 0$

37. $2x + y + 4z + 4 = 0,\ 2x + y + 2z - 1 = 0$

38. $4x - 7y + z + 1 = 0,\ 2x - 4y + z + 4 = 0$

39. $6x + y - 3z + 5 = 0,\ 3x + 3y - z + 2 = 0$

40. $4x - 6y + z - 2 = 0,\ 2x - y + 3z + 1 = 0$

Задание 6. *Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3*

1. $M_1(-3,4,-7), M_2(1,5,-4), M_3(-5,-2,0), M_0(-12,7,-1)$

2. $M_1(-1,2,-3), M_2(4,-1,0), M_3(2,1,-2), M_0(-1,-6,-5)$

3. $M_1(-3,-1,1), M_2(-9,1,-2), M_3(3,-5,4), M_0(-7,0,-1)$

4. $M_1(1,-1,1), M_2(-2,0,3), M_3(2,-1,-1), M_0(-2,4,2)$

5. $M_1(1,2,0), M_2(1,-1,2), M_3(0,1,-1), M_0(2-1,4)$

6. $M_1(1,0,2), M_2(1,2,-1), M_3(2,-2,-1), M_0(-5,-9,1)$

7. $M_1(1,2,-3), M_2(1,0,1), M_3(-2,-1,6), M_0(3,-2,-9)$

8. $M_1(3,10,-1), M_2(-2,3,-5), M_3(-6,0,-3), M_0(-6,7,-10)$

9. $M_1(-1,2,4), M_2(-1,-2,-4), M_3(3,0,-1), M_0(-2,3,5)$

10. $M_1(0,-3,1), M_2 2, M_3(2,-1,5), M_0(-3,4,-5)$

11. $M_1(1,3,0), M_2(-4,-1,2), M_3(3,0,1), M_0(4,3,0)$

12. $M_1(-2,-1,1), M_2(0,3,2), M_3(3,1,-4), M_0(-21,20,-16)$

13. $M_1(-3,-5,6), M_2(2,1,-4), M_3(0,-3,-1), M_0(3,6,8)$

14. $M_1(2,-4,-3), M_2(5,-6,0), M_3(-1,3,-3), M_0(2,-10,8)$

15. $M_1(1,-1,2), M_2(2,1,2), M_3(1,1,4), M_0(-3,2,7)$

16. $M_1(1,3,6), M_2(2,2,1), M_3(-1,0,1), M_0(5,-4,5)$

17. $M_1(-4,2,6), M_2(2,-3,0), M_3(-10,5,8), M_0(-12,1,8)$

18. $M_1(7,2,4), M_2(7,-1,-2), M_3(-5,-2-1), M_0(-10,1,8)$

19. $M_1(2,1,4), M_2(3,5,-2), M_3(-7,-3,2), M_0(-3,1,8)$

20. $M_1(-1,-5,2), M_2(-6,0,-3), M_3(3,6,-3), M_0(-10,-8,-7)$

21. $M_1(0,-1,-1), M_2(-2,3,5), M_3(1,-5,-9), M_0(-4,-13,6)$

22. $M_1(5,2,0), M_2(2,5,0), M_3(1,2,4), M_0(-3,-6,-8)$

23. $M_1(2,-1,-2), M_2(1,2,1), M_3(5,0,-6), M_0(-14,-3,6)$

24. $M_1(-2,0,-4), M_2(-1,7,1), M_3(4,-8,-4), M_0(-6,5,5)$

25. $M_1(14,4,5), M_2(-5,-3,2), M_3(-2,-6,-3), M_0(-1,-8,7)$

26. $M_1(1,2,0), M_2(3,0,-3), M_3(5,2,-6), M_0(-13,-8,16)$

27. $M_1(2,-1,2), M_2(1,2,-1), M_3(3,2,1), M_0(-5,3,7)$

28. $M_1(1,1,2), M_2(-1,1,3), M_3(2,-2,4), M_0(2,3,8)$

29. $M_1(2,3,1), M_2(4,1,-2), M_3(6,3,7), M_0(-5,-4,8)$

30. $M_1(1,1,-1), M_2(2,3,1), M_3(3,2,1), M_0(-3,-7,6)$

31. $M_1(1,5,-7), M_2(-3,6,3), M_3(-2,7,3), M_0(1,-1,2)$

32. $M_1(2,4,1), M_2(2,-6,1), M_3(2,1,-3), M_0(-2,8,2)$

33. $M_1(1,-5,3), M_2(3,-5,-1), M_3(2,0,-1), M_0(-2,1,0)$

34. $M_1(-3,-3,5), M_2(3,1,-1), M_3(-1,1,7), M_0(0,-2,7)$

35. $M_1(1,5,5), M_2(3,0,-2), M_3(2,-1,-3), M_0(-1,-1,2)$

36. $M_1(-1,-5,0), M_2(1,2,-3), M_3(1,-1,3), M_0(5,6,6)$

37. $M_1(1,2,2), M_2(3,1,3), M_3(0,2,-6), M_0(-3,-8,6)$

38. $M_1(2{,}10{,}2), M_2(1,-2{,}1), M_3(-3{,}2{,}1), M_0(5{,}3{,}0)$

39. $M_1(-1,-1{,}2), M_2(1{,}11{,}0), M_3(2{,}2{,}4), M_0(2{,}3,-1)$

40. $M_1(-2{,}6{,}1), M_2(0{,}1{,}2), M_3(-1{,}1{,}7), M_0(-5{,}4{,}8)$

Задание 7. *Найти точку пересечения прямой и плоскости.*

1. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4},\ \ x+2y+3z-14=0$

2. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5},\ \ x+2y-5z+20=0$

3. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2},\ \ x-3y+7z-24=0$

4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2},\ \ 2x-y+4z=0$

5. $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0},\ \ 3x+y-5z-12=0$

6. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2},\ \ x+3y-5z+9=0$

7. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1},\ \ x-2y+5z+17=0$

8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1},\ \ x-2y+4z-19=0$

9. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1},\ \ 2x-y+3z+23=0$

10. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0},\ \ 2x-3y-5z-7=0$

11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3},\ \ 4x+2y-z-11=0$

12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1},\ \ 3x-2y-4z-8=0$

13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2},\ \ x+2y-z-2=0$

14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3},\ \ 5x-y+4z+3=0$

15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3},\ \ x+3y+5z-42=0$

16. $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5},\ \ 2x+3y+7z-52=0$

17. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2},\ \ 7x+3y+7z-47=0$

18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2},\ \ 3x+4y+7z-16=0$

19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1},\ \ 2x-5y+4z+24=0$

20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12},\ \ x-2y-3z-18=0$

21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0},\ \ x+7y+3z+11=0$

22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2},\ 3\,x+7y-5z-11=0$

23. $\frac{x-1}{-7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1},\ \ 4x+y-6z-5=0$

24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0},\ \ 5x+9y+4z-25=0$

25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3},\ \ x+4y+13z-23=0$

26. $\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3},\ \ 3x-2y+5z-3=0$

27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2},\ \ 3x-y+4z=0$

28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2},\ \ x+2y-5z+16=0$

29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2},\ \ 3x-7y-2z+7=0$

30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11},\ \ 5x+7y+9z-32=0$

31. $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2},\ \ 2x+y+7z-3=0$

32. $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{1},\ \ x+2y+3z-2=0$

33. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{0},\ \ x+y-z+2=0$

34. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2},\ 2\,x-y+4z-9=0$

35. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{3},\ \ x+y-z=0$

36. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{0},\ \ x+y-5z-2=0$

37. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12},\ \ \ x+2y-5z+16=0$

38. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2},\ \ \ 4x+y-6z-5=0$

39. $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5},\ 7x+3y+7z-47=0$

40. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2},\ 2x-5y+4z+24=0$

Учебное издание

Светлана Ивановна Калачева

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА

Учебное пособие

Электронное издание

Редактор М.А. Исакова

Корректор А.П. Малахова

Верстка Н.С. Хасаншина

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.

Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,

Т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 19.12.2016

Формат 60×84 1/8

Усл. печ. л. 8,75