МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева»

(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики

(полное наименование института/факультета)

Выпускающая кафедра математического анализа и методики обучения математике в вузе

(полное наименование кафедры)

Гиматдинова Галия Нурулловна

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема **Формирование содержательно-методической линии уравнений и неравенств в курсе математики 5 – 11 классов**

Направление подготовки/специальность 44.04.01 Педагогическое образование

(код и наименование направления)

Магистерская программа «Инновационное математическое образование»

(наименование программы)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой

Доктор пед. наук, профессор каф. матем. анализа и МОМ в вузе, Шкерина Л.В.

(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

25.05.2016

(дата, подпись)

Руководитель магистерской программы

Доктор пед. наук, профессор каф. матем. анализа и МОМ в вузе, Шкерина Л.В.

(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

25.05.2016

(дата, подпись)

Научный руководитель

канд. пед. наук, доцент каф. матем. анализа и МОМ в вузе, Шашкина М.Б.

(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

25.05.2016

(дата, подпись)

Обучающийся Гиматдинова Г.Н.

(фамилия, инициалы)

25.05.2016

(дата, подпись)

Красноярск 2016

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Математика занимает особое место в науке, культуре и общественной жизни, являясь одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека. Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе. Действительно, практически любая сфера жизни общества не обходится без математических знаний. Одной из задач развития математического образования является модернизация содержания учебных программ математического образования на всех уровнях (с обеспечением их преемственности), исходя из потребностей обучающихся и потребностей общества во всеобщей математической грамотности. Современные образовательные программы по математике, составленные на основе Федерального государственного образовательного стандарта, ориентированы на становление личностных характеристик учащегося. Выпускник школы должен быть креативным и критически мыслящим, активно и целенаправленно познающим мир; владеть основами научного метода познания окружающего мира; готовым к сотрудничеству, способным осуществлять проектную и информационно-познавательную деятельность; мотивированным на образование и самообразование в течение всей своей жизни. Перечисленные характеристики сыграют большую роль в реализации каждого учащегося не только в будущей профессиональной деятельности, но и в жизни.

Содержательно-методическая линия уравнений и неравенств является одной из ведущих в школьном курсе математики. Она богата по содержанию, способам и приемам решения, возможностям применения.

Можно констатировать тот факт, что на изучение уравнений и неравенств уделяется достаточно времени, вопросы решения определенных видов уравнений и неравенств в школьном курсе математики освещены достаточно полно. Однако практика показывает, что учащиеся основной и старшей школы не в полной мере владеют знаниями, умениями и способами деятельности в рамках данного раздела.

В основной школе, начиная с пятого класса, учащиеся постепенно осваивают стандартные приемы решения заданий этой линии, а также пополняют свой математический опыт новыми видами уравнений и неравенств. Но у большинства школьников складывается впечатление о немалом количестве методов решения. Многие думают, что существует отдельные теории решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств. Такое заблуждение приводит к возникновению системных ошибок при решении, что в дальнейшем оказывает негативное влияние на результаты ЕГЭ по математике как на базовом, так и на профильном уровне, а также на предметную составляющую готовности к продолжению математического образования на следующих ступенях.

Образовательные программы по математике предусматривают систематизацию и обобщение различных методов и приемов решения уравнений и неравенств, но, как правило, это происходит в конце 11 класса, большинство учителей и вовсе пропускают эту тему, начиная в четвертой четверти подготовку к ЕГЭ.

Особенности изучения уравнений и неравенств отражены в работах, посвященных частной методике обучения математике в школе: А.Я. Блоха, Е.Н. Ермолаевой, С.Е. Ляпина, Н.И. Мерлиной, Н.Г. Миндюк, В.И. Мишина, Т.Л. Трухана, Г.А. Ястребинецкого и др. Существуют учебные пособия для подготовки к ЕГЭ, для поступающих в вузы, где основные методы решения уравнений и неравенств систематизированы. Но их, как правило, не используют систематически на уроках во время прохождения учебной программы. А в школьных учебниках в рамках содержательно-методической линии уравнений и неравенств методы решения либо не обобщаются, либо это делается не вовремя.

Как отмечают авторы, анализирующие типичные ошибки, допускаемые при решении заданий ЕГЭ, PISA (Е.П. Богомолова, А.В. Иванов, М.Б. Шашкина, М.Ш. Якименко и др.), основные затруднения, которые испытывают экзаменуемые при решении уравнений и неравенств, происходят из-за низкого уровня базовых знаний, умений и способов деятельности, формируемых в курсе основной школы. При решении трансцендентных уравнений и неравенств учащиеся не видят элементарных моментов: возможности замены переменной, вариантов группировки и вынесения общего множителя за скобки, приведения уравнения (неравенства) к виду $f(x) \cdot g(x) * 0$, ограничения ОДЗ переменной и т.п. Уже несколько лет на ЕГЭ по математике задание № 13 (в предыдущих версиях 15, С1) представляет собой типовое тригонометрическое уравнение базового уровня, предполагающее применение пары простейших тригонометрических формул (формул приведения, основного тригонометрического тождества либо синуса (косинуса) двойного угла) и сводящееся к квадратному:

$$\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Задание 15 (в предыдущих версиях 17, С3) представляет собой показательное или логарифмическое неравенство, как правило, несложное, путем замены переменной приводящееся к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} * 0$, решается методом интервалов:

$$\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}.$$

Однако по статистике 2015 г., к решению задания 13 приступают не более 60 % экзаменуемых, а баллы, отличные от нуля (то есть 1 или 2), получают из них не более 30 %. Абсолютно верно выполнили данное задание в Красноярском крае всего около 19 % учащихся от общего числа экзаменуемых. И лишь около 8 % учащихся Красноярского края на ЕГЭ в 2015 г. верно выполнили задание 15.

Можно констатировать, что существует нарушение целостности единой содержательно-методической линии уравнений и неравенств школьного курса математики при переходе от основной к старшей школе. Нарушается преемственность способов, методов, приемов решения, содержательной и деятельностной составляющей данной линии. Таким образом, существует научно-методическая **проблема**: как преодолеть разрыв между линией алгебраических уравнений и неравенств, изучаемых в 5–9 классах и линией трансцендентных уравнений и неравенств, изучаемых в 10–11 классах?

Цель исследования: описать стратегию формирования содержательно-методической линии уравнений и неравенств в курсе математики 5–11 классов и на ее основе разработать методику формирования данной линии в старшей школе.

Объект исследования: процесс обучения математике учащихся 5–11 классов.

Предмет исследования: особенности формирования содержательно-методической линии уравнений и неравенств в курсе математики 5–11 классов.

В основу нашего исследования положена **гипотеза**: если обобщить и систематизировать основные методы решения уравнений и неравенств в 10 классе, это позволит повысить уровень математической подготовки старшеклассников в рамках содержательно-методической линии уравнений и неравенств, снизить количество системных ошибок.

Для реализации поставленной цели и проверки гипотезы исследования решались следующие **задачи**:

1) на основе анализа психолого-педагогической и методической литературы охарактеризовать особенности содержательно-методической линии уравнений и неравенств школьного курса математики;
2) провести дидактический анализ содержательно-методической линии уравнений и неравенств в различных учебных пособиях для учащихся;
3) систематизировать и обобщить виды уравнений и неравенств, основные методы и приемы их решения;
4) разработать и апробировать методическое обеспечение процесса формирования линии уравнений и неравенств в 10–11 классах, включающее в себя элективные курсы «Уравнения и неравенства в профильной подготовке выпускников».

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы** исследования: теоретический анализ психолого-педагогической и методической литературы; сравнение и выбор; прогнозирование; наблюдение; эксперимент.

Научная новизна исследования состоит в том, что в нем предложена методическая идея систематизации и обобщения основных методов решения уравнений и неравенств в начале 10 класса как основа формирования содержательно-методической линии уравнений и неравенств в старшей школе.

Теоретическая значимость исследования заключается в обобщении методов и приемов решения различных типов уравнений и неравенств, в том числе нестандартных.

Практическая значимость проведенного исследования определяется тем, что разработанное методическое обеспечение, элективные курсы «Уравнения и неравенства в профильной подготовке выпускников» реализуются в образовательном процессе и могут быть использованы в практике работы учителей математики, а также на курсах повышения квалификации.

Структура магистерской диссертации: работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и трех приложений.

Во **Введении** обоснована актуальность данного исследования, сформулирована его цель, объект, предмет, гипотеза и задачи; раскрыта научная новизна, теоретическая и практическая значимость, охарактеризованы методы исследования.

В первой главе на основе проведенного анализа психолого-педагогической и методической литературы охарактеризованы особенности содержательно-методической линии уравнений и неравенств, проведен анализ содержания данной линии в различных учебно-методических комплектах по математике, систематизированы и обобщены основные методы и приемы решения различных типов уравнений и неравенств.

Во второй главе представлена разработка методического обеспечения содержательно-методической линии уравнений и неравенств в старшей школе, включающее элективные курсы «Уравнения и неравенства в профильной подготовке выпускников», а также результаты экспериментальной проверки эффективности реализации методической идеи.

ГЛАВА 1. СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ 5–11 КЛАССОВ

1.1. Содержание линии уравнений и неравенств

Одной из основных целей изучения курса школьной математики является усвоение учащимися аппарата уравнений и неравенств как средства математического моделирования прикладных задач.

Истоки алгебраических методов решения практических задач связаны с наукой древнего мира. Как известно из истории математики, значительная часть задач математического характера, решаемых египетскими, шумерскими, вавилонскими писцами – вычислителями (XX–VI до н.э.), имела расчетный характер. Однако уже тогда время от времени возникали задачи, в которых искомое значение величины задавалось некоторыми косвенными условиями, требующими составления уравнения или системы уравнений. Первоначально для решения таких задач применялись арифметические методы. В дальнейшем стали формироваться начала алгебраических представлений. Например, вавилонские вычислители умели решать задачи, сводящиеся с точки зрения современной классификации к уравнениям второй степени. Таким образом, был создан метод решения текстовых задач, послуживший в дальнейшем основой для выделения алгебраического компонента и его независимого изучения.

Это изучение осуществлялось уже в другую эпоху сначала арабскими математиками (VI–X вв. н.э.), выделившими характерные действия, посредством которых уравнения приводились стандартному виду (приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую с переменой знака), а затем европейскими математиками Возрождения, в итоге длительного поиска создавшими язык современной алгебры (использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т.д.).

На рубеже XVI–XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики. В этом процессе все яснее становилась важность роли, которую играло понятие уравнения в системе алгебраических понятий.

Открытие координатного метода (Декарт, XVII в.) и последовавшее за ним развитие аналитической геометрии позволили применить алгебру не только к задачам, связанным с числовой системой, но и к изучению различных геометрических фигур. Эта линия развития алгебры упрочила положение уравнения как ведущего алгебраического понятия, которое связывалось теперь уже с тремя главными областями своего возникновения и функционирования: а) уравнение как средство решения текстовых задач; б) уравнение как особого рода формула, служащая в алгебре объектом изучения; в) уравнение как формула, которой косвенно определяются числа или координаты точек плоскости (пространства), служащие его решением. Каждое из этих представлений оказалось в том или ином отношении полезным.

Таким образом, уравнение как математическое понятие, многоаспектно: материал школьной математики, касающийся уравнений, обширен и является частью содержательно-методической линии уравнений и неравенств. Поэтому данному понятию соответствует три основные направления развертывания линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики:

1. Прикладная направленность линии уравнений и неравенств раскрывается при изучении алгебраического метода решения текстовых задач;
2. Теоретико-математическая направленность линии уравнений прослеживается при изучении различных классов уравнений и неравенств, а также обобщенных понятий и методов решения уравнений;
3. Направленность на установление следующих связей с остальным содержанием курса математики:
   - связь с числовой линией, идея которой проявляется в последовательном расширении числовой системы;
   - связь с функциональной линией, в частности, функциональные представления служат основой графической интерпретации решения и исследования уравнений, неравенств и их систем;
   - связь с линией тождественных преобразований, без которых невозможно решение уравнений [Харьковская, 1996].

В ФГОС ООО изучение линии уравнений и неравенств в основной школе предполагает овладение умениями:

- решать линейные, квадратные уравнения и рациональные уравнения, сводящиеся к ним, системы двух линейных уравнений и несложные нелинейные системы;
- решать текстовые задачи алгебраическим методом, интерпретировать полученный результат, проводить отбор решений, исходя из формулировки задачи;

– решать линейные и квадратные неравенства с одной переменной и их системы;

– применять графические представления при решении уравнений, систем, неравенств [ФГОС, 2011].

В стандарте среднего (полного) общего образования изучение линии уравнений и неравенств в старшей школе на базовом уровне предполагает овладение умениями:

– решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, *простейшие иррациональные и тригонометрические уравнения, их системы*;

– составлять уравнения и *неравенства* по условию задачи;

– использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;

– изображать на координатной плоскости множества решений простейших уравнений и их систем.

На профильном уровне:

– решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, иррациональные и тригонометрические уравнения, их системы;

– доказывать несложные неравенства;

– решать текстовые задачи с помощью составления уравнений, и неравенств, интерпретируя результат с учетом ограничений условия задачи;

– изображать на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

– находить приближенные решения уравнений и их систем, используя графический метод;

– решать уравнения, неравенства и системы с применением графических представлений, свойств функций, производной [ФГОС, 2012].

Образовательное и развивающее значение линии уравнений и неравенств в школе велико. Понятия уравнения и неравенства имеют методологический аспект, поскольку введение этих понятий на символическом и графическом языках позволяет представить математические модели реальных процессов. Создавая схематизированные модели в виде уравнений и неравенств, отражающие реальные процессы, мы получаем реальные знания о самой действительности. Учение об уравнениях и неравенствах способствует развитию алгоритмической культуры, лежащей в основе методов решения уравнений и неравенств. Будучи тесто связанным с понятием функции, изучение уравнений способствует развитию функционального мышления, что помогает учащимся глубже осознать зависимость между величинами, характеризующимся различного рода явления реального мира, и способы выражения этих зависимостей. При изучении тождественных преобразований, функций и других фундаментальных тем программы уравнения и неравенства могут быть использованы как эффективное средство повторения, закрепления, углубления и расширения теоретических знаний для развития творческой математической деятельности. Метод уравнений и неравенств играет значительную роль в решении задач формально-логического и жизненного содержания, связанных с основами современной экономики, с производством, со смежными дисциплинами. Это способствует развитию у учащихся гибкости и самостоятельности мышления при поиске рациональных способов решения задач методом уравнений и подтверждает большое прикладное значение курса математики, ее связь с жизнью.

Современные программы начальной и основной школы достаточное место отводят изучению уравнений.

В 1–6 классах осуществляется начально-пропедевтический этап знакомства с уравнениями и неравенствами, обоснования носят эмпирический индуктивный характер. Метод решения уравнений основан на нахождении неизвестного компонента действий. Уравнения в этот период в основном типовые, они отличаются только степенью сложности тождественных преобразований, сводящих уравнение к простейшей арифметической зависимости.

Начало систематического изучения уравнений и неравенств происходит в курсе 7 класса. Здесь дается определение и теоретическое обоснование свойств уравнений и неравенств, проводится дедуктивное обоснование процесса решения уравнений без явного использования понятия равносильности.

В 7 классе на теоретическую основу поставлено изучение линейных уравнений и систем двух уравнений с двумя неизвестными. При этом решениям систем уравнений дается графическая интерпретация.

В 8 классе начинается изучение темы «Неравенства», где ставится задача выработки навыков решения неравенств первой степени с одним неизвестным и их систем. Особое внимание здесь уделяется прочному усвоению свойств неравенств, алгоритму решения неравенств, геометрической иллюстрации решений, осмысленному, обоснованному выбору ответа. Программой предусмотрено также изучение квадратных, рациональных и иррациональных уравнений и квадратных неравенств.

Основными образовательными целями этих тем являются:

- глубокое усвоение понятия квадратного уравнения и квадратного неравенства, их определений, видов квадратных уравнений;

- формирование умений решать квадратные уравнения и квадратные неравенства различными методами (аналитически, графически, методом интервалов и др.)

- формирование умения решать задачи с помощью квадратных уравнений и расширение теоретической базы при выработке умения решать квадратные уравнения с комплексными неизвестными (раньше этот материал изучался в 10–11 классах).

В курсе 9 класса совершенствуются навыки решения квадратных, рациональных и иррациональных уравнений. Они выступают уже как средство достижения цели при решении других математических задач.

Изучение степенной функции в курсе 9 класса дает возможность, используя ее свойства, поставить на теоретическую основу новый вид уравнений и неравенств – это уравнения и неравенства, содержащие степень с рациональным показателем, а также иррациональные уравнения. Особое внимание здесь уделяется понятию равносильности, возможности появления посторонних корней и необходимости проверки найденных.

Таким образом, проведенный анализ содержания программы доказывает необходимость последовательного расширения представлений учащихся об уравнениях и неравенствах, соблюдения единой методической линии в различных определениях уравнений, активной работы по воспитанию культуры символики и графики, выработки системности знаний о классе уравнений и неравенств. В 10–11 классах продолжается расширение и углубление знаний об уравнениях и неравенствах. Здесь изучаются показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства. Различные виды уравнений и неравенств, изучаемые в школе представлены на следующих рисунках (рис. 1–8).

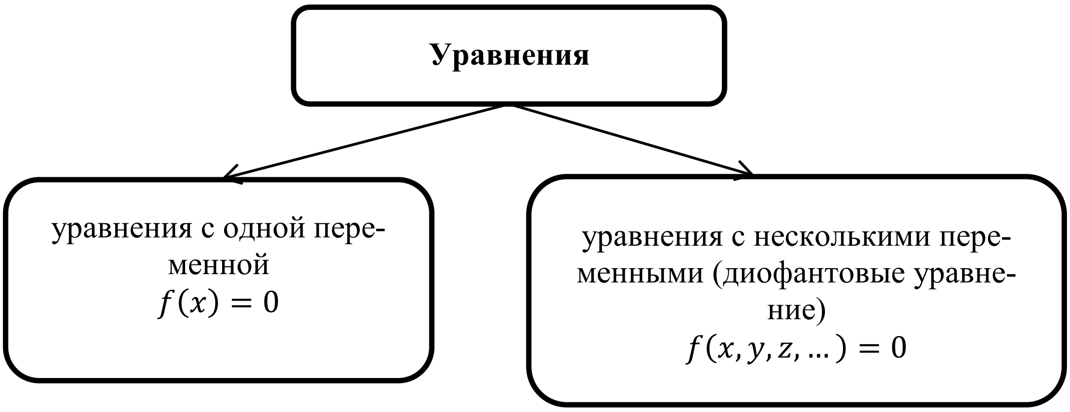


Рис. 1. Виды уравнений в зависимости от количества переменных

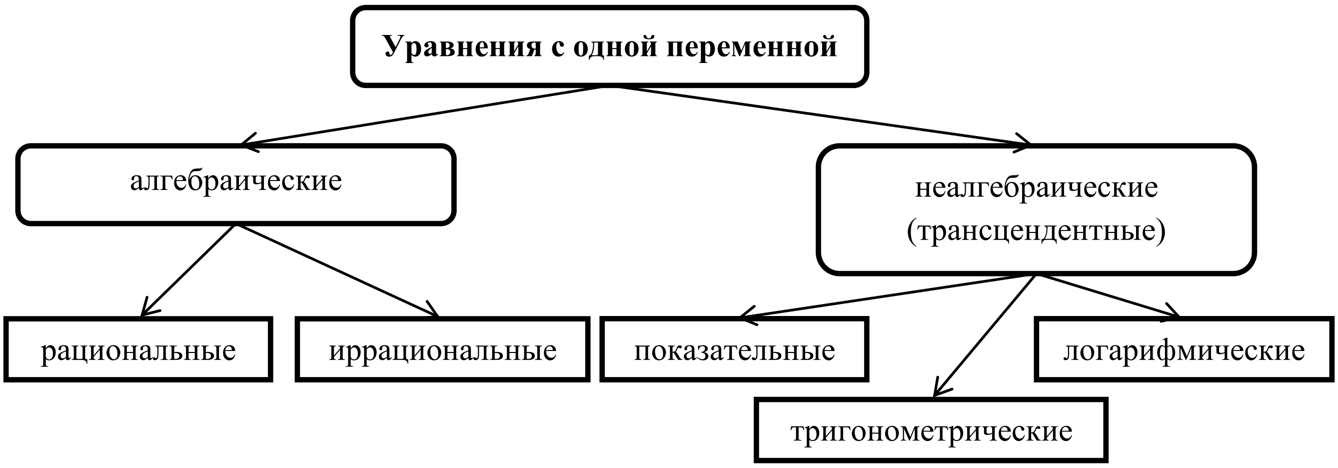


Рис. 2 . Виды уравнений с одной переменной

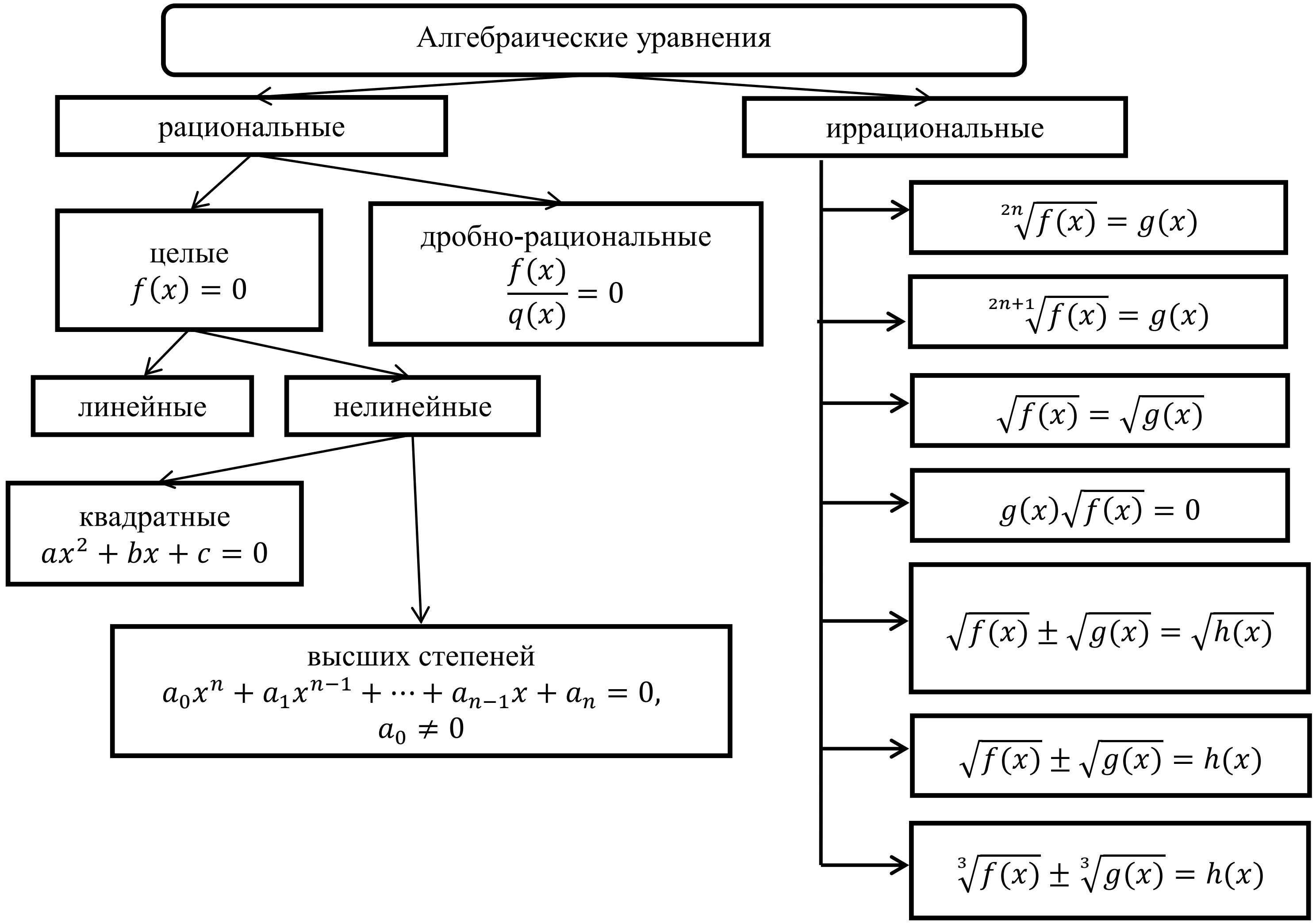


Рис. 3. Виды алгебраических уравнений

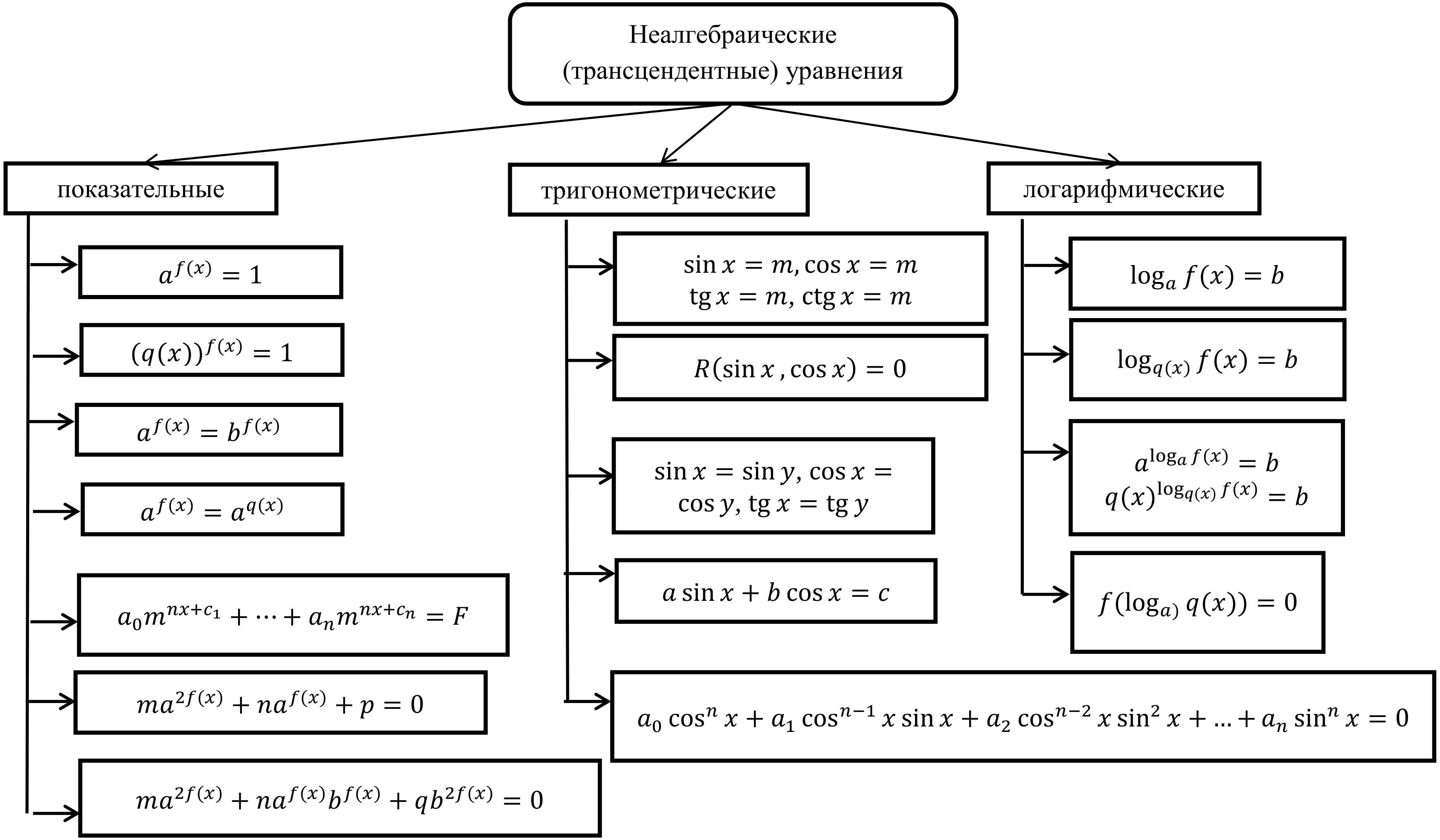


Рис. 4. Виды неалгебраических (трансцендентных) уравнений

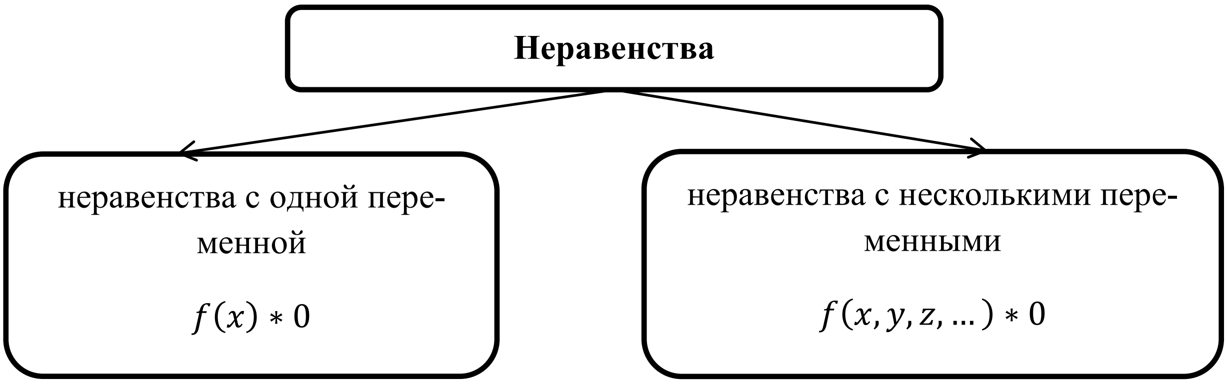


Рис. 5. Виды неравенств в зависимости от количества переменных

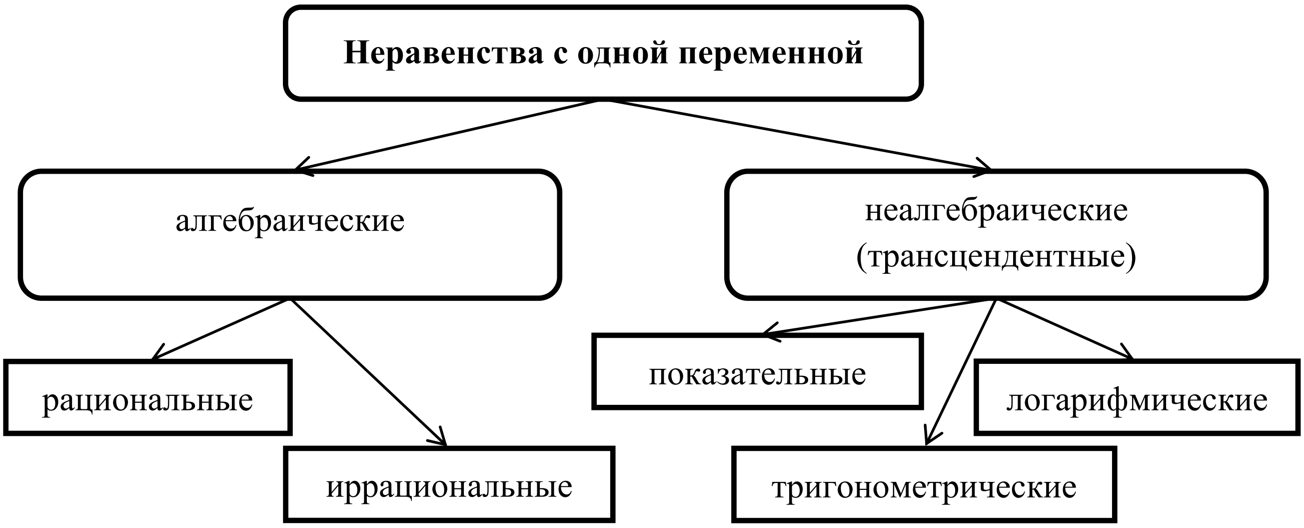


Рис. 6. Виды неравенств с одной переменной

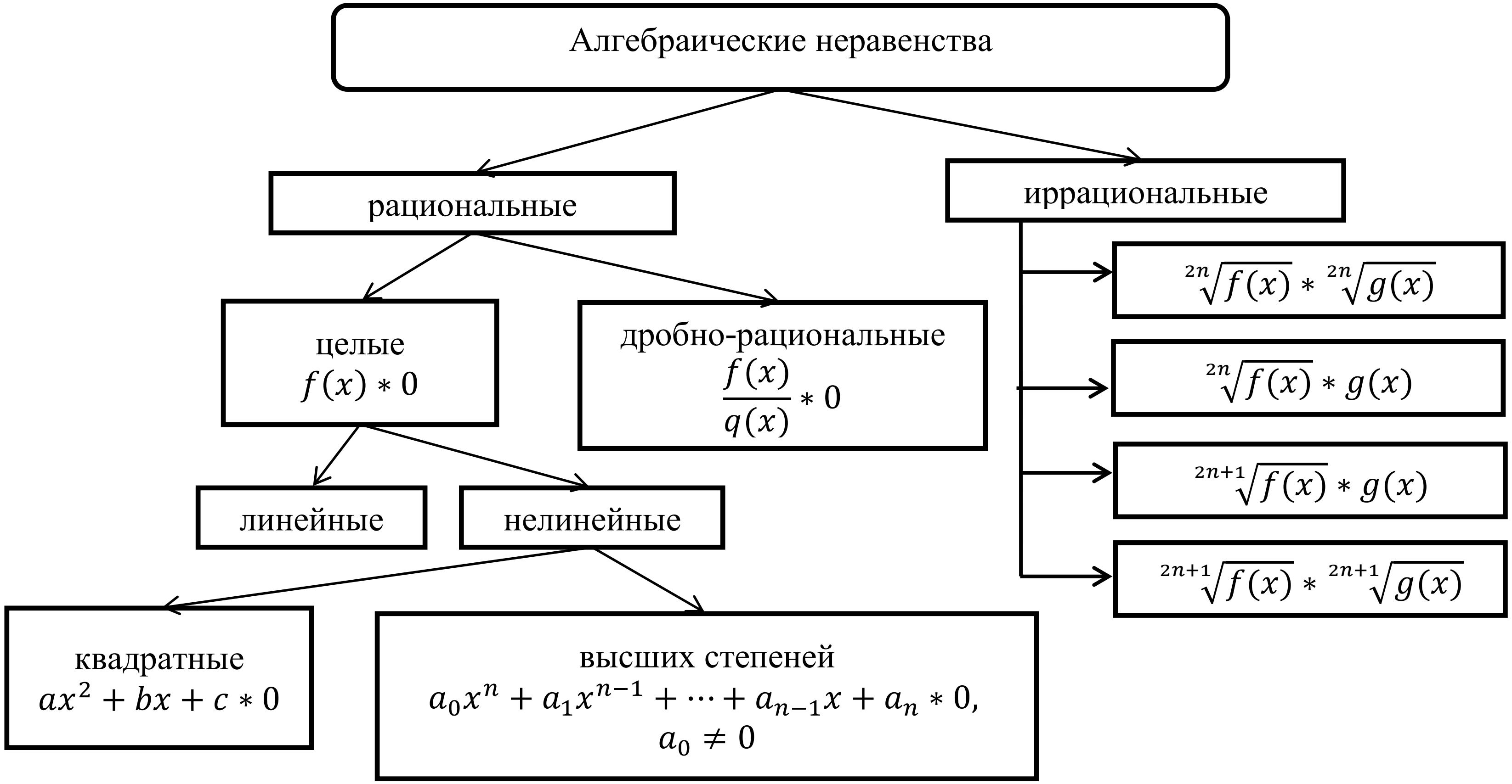


Рис. 7. Виды алгебраических неравенств

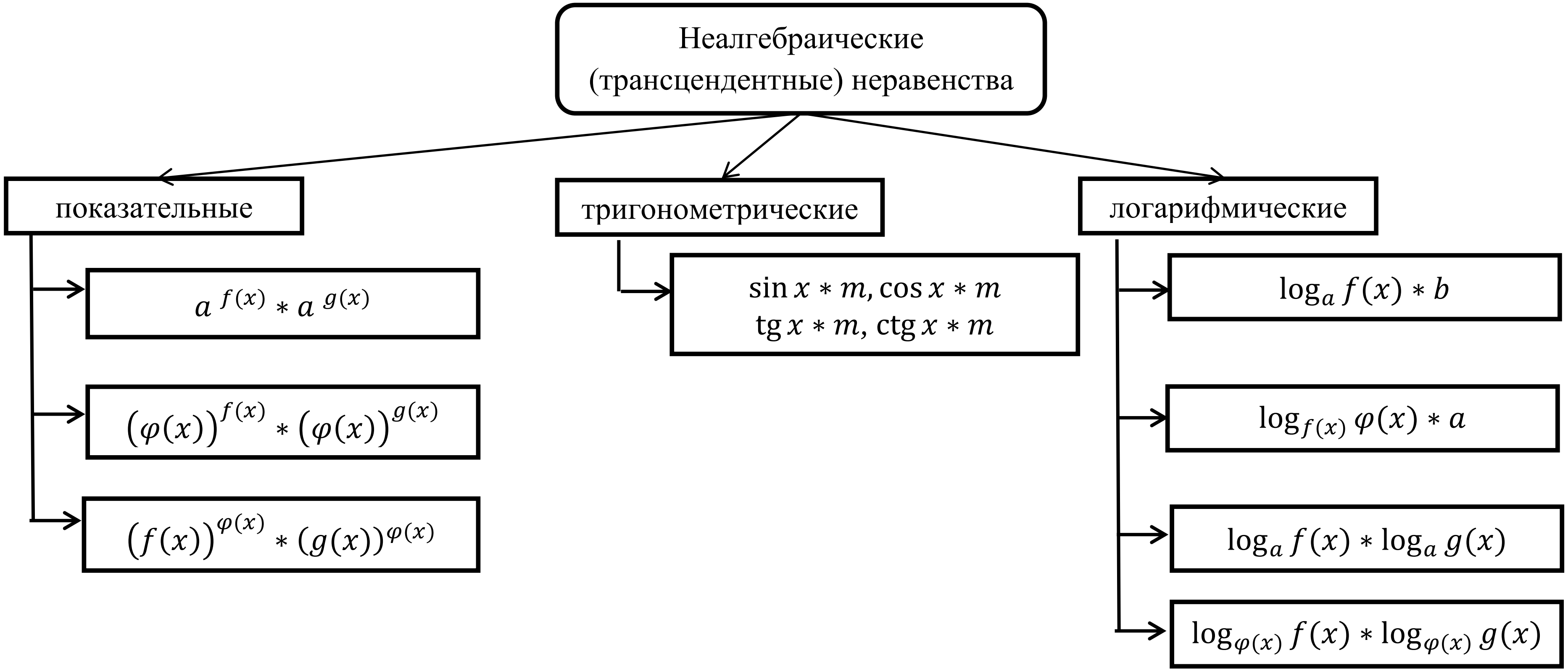


Рис. 8. Виды неалгебраических (трансцендентных) неравенств

Далее рассмотрим содержание примерной программы относительно содержательно-методической линии «Уравнения и неравенства» для 5–9 классов, которая была подготовлена в рамках проекта «Разработка, апробация и внедрение федеральных государственных стандартов общего образования второго поколения». В ней указаны требования к образовательным результатам, а также представлено два варианта тематического планирования. В первом варианте приведено минимальное количество часов, необходимое для изучения рассматриваемой линии. Второй вариант примерного тематического планирования предназначен для классов, нацеленных на повышенный уровень математической подготовки. В этом случае в основное программное содержание включаются вопросы, способствующие расширению математического кругозора, освоению более продвинутого математического аппарата, развитию математических способностей. Дополнительные вопросы в примерном тематическом планировании даны в квадратных скобках. При работе по второму варианту на изучение математики рекомендуется отводить не менее 6 часов в неделю. Учебные часы, приведенные в примерном тематическом планировании, даны в минимальном объеме (из расчета 6 часов в неделю).

Основное содержание по темам линии уравнений и неравенств для двух вариантов тематического планирования, а также характеристика основных видов деятельности ученика приведены в таблице 1 [Примерные программы по учебным предметам…, 2011.].

Таблица 1

Примерное тематическое планирование для учащихся 5–9 классов

Содержание	Виды деятельности учащихся
(первый вариант)	
Элементы алгебры	
Уравнение, корень уравнения. Нахождение неизвестных компонентов арифметических действий.	Составлять уравнения по условиям задач. Решать простейшие уравнения на основе зависимостей между компонентами арифметических действий.
Уравнения с одной переменной	
Уравнение с одной переменной. Корень уравнения. Свойства числовых равенств. Равносильность уравнений. Линейное уравнение. Решение уравнений, сводящихся к линейным. Квадратное уравнение. Неполные квадратные уравнения. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение уравнений, сводящихся к квадратным. Биквадратное уравнение. Примеры решения уравнений третьей и четвертой степени разложением на множи-	Распознавать линейные и квадратные уравнения, целые и дробные уравнения. Решать линейные, квадратные уравнения, а также уравнения, сводящиеся к ним; решать дробно-рациональные уравнения. Исследовать квадратные уравнения по дискриминанту и коэффициентам. Решать текстовые задачи алгебраическим способом: переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путем составления уравнения; решать составленное уравнение; интерпретировать результат.

Продолжение табл. 1

тели. Решение дробно-рациональных уравнений. Решение текстовых задач алгебраическим способом.	
Неравенства	
Числовые неравенства и их свойства. Неравенство с одной переменной. Равносильность неравенств. Линейные неравенства с одной переменной. Квадратные неравенства. Системы линейных неравенств с одной переменной	Формулировать свойства числовых неравенств, иллюстрировать их на координатной прямой, доказывать алгебраически; применять свойства неравенств при решении задач. Распознавать линейные и квадратные неравенства. Решать линейные неравенства, системы линейных неравенств. Решать квадратные неравенства на основе графических представлений.
(второй вариант)	
Элементы алгебры	
Использование букв для обозначения чисел, для записи свойств арифметических действий. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения. Уравнение, корень уравнения. Нахождение неизвестных компонентов арифметических действий.	Читать и записывать буквенные выражения, составлять буквенные выражения по условиям задач. Вычислять числовое значение буквенного выражения при заданных значениях букв. Составлять уравнения по условиям задач. Решать простейшие уравнения на основе зависимостей между компонентами арифметических действий.
Уравнения с одной переменной	
Уравнение с одной переменной. Корень уравнения. Свойства числовых равенств. Равносильность уравнений. Линейное уравнение. [Исследование линейного уравнения.] Решение уравнений, сводящихся к линейным. Квадратное уравнение. Неполные квадратные уравнения. Формула корней квадратного уравнения, теорема Виета. Решение уравнений, сводящихся к квадратным. Биквадратные уравнения. Примеры решения уравнений третьей и четвертой степени с использованием методов разложения на множители [замены переменной). Решение дробно-рациональных уравнений. Решение текстовых задач алгебраическим способом	Проводить доказательные рассуждения о корнях уравнения с опорой на определение корня, функциональные свойства выражений. Распознавать линейные и квадратные уравнения, целые и дробные уравнения. Решать линейные, квадратные уравнения, а также уравнения, сводящиеся к ним; решать дробно-рациональные уравнения. Определять наличие корней квадратных уравнений по дискриминанту и коэффициентам. [Исследовать квадратные уравнения с буквенными коэффициентами.] Решать текстовые задачи алгебраическим способом: переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путем составления уравнения; решать составленное уравнение; интерпретировать результат/
Неравенства	
Числовые неравенства и их свойства. [Доказательство неравенств.]	Формулировать свойства числовых неравенств, обосновывать их, опираясь на коор-

Окончание табл. 1

Неравенство с одной переменной. Равносильность неравенств. Линейные неравенства с одной переменной. Квадратные неравенства. [Примеры решения дробно-рациональных неравенств.] Системы неравенств с одной переменной. [Неравенство с двумя переменными. Графическая интерпретация неравенств и систем неравенств с двумя переменными.]	динатную прямую, и доказывать алгебраически; применять свойства неравенств в ходе решения задач. [Доказывать неравенства.] Распознавать линейные и квадратные неравенства. Решать линейные неравенства, системы линейных неравенств. Решать квадратные неравенства. [Изображать на координатной плоскости множества точек, задаваемые неравенствами с двумя переменными и их системами. Описывать алгебраически области координатной плоскости.]

Далее рассмотрим примерную программу для 10–11 классов, рекомендованную Российской академией образования. Учебный предмет «Математика» является интегрированным учебным предметом и изучается только на базовом уровне. Он ориентирован преимущественно на общекультурную подготовку выпускников. Учебный предмет «Алгебра и начала математического анализа» изучается на базовом или на профильном уровнях, в зависимости от образовательных потребностей обучающихся. Отличия заключаются в том, что на базовом уровне материал служит средством развития личности обучающихся, а на углубленном уровне – развития математических способностей обучающихся и сохранения традиционно высокого уровня российского математического образования.

Приведем в таблице 2 основное содержание линии уравнений и неравенств как для предмета «Математика», так и для предмета «Алгебра» на базовом и профильном уровнях, а также основные виды деятельности учащихся. В квадратных скобках отмечены темы углубленного уровня [Седова, Пчелинцев, Мищенко и др., 2012].

Таблица 2

Примерное тематическое планирование для учащихся 10–11 классов

Содержание	Виды деятельности учащихся
Интегрированный курс «Математика»	
Многочлены	
Применение теории многочленов к решению алгебраических уравнений	Применение различных приёмов решения целых алгебраических уравнений (не выше четвёртой степени): - подбор целых корней; - отщепление корня; - разложение на множители; - понижение степени; - подстановка (замена переменной).

Окончание табл. 2

Измерения и вычисления	
Решение уравнений, содержащих радикалы, степенные, логарифмические и показательные функции. Решение показательных и логарифмических неравенств. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа, решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.	Решение простейших иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений. Решение простейших показательных, логарифмических и тригонометрических неравенств.
Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень)	
Многочлены	
Применение теории многочленов к решению алгебраических уравнений	Применение различных приёмов решения целых алгебраических уравнений (не выше четвёртой степени): подбор целых корней: отщепление корня; разложение на множители; понижение степени; подстановка (замена переменной)
Элементарные функции	
Решение уравнений, содержащих радикалы, степенные, логарифмические и показательные функции. Решение простейших показательных и логарифмических неравенств. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа, решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.	Решение простейших иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений. Решение простейших показательных, логарифмических и тригонометрических неравенств. Высказывание гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих элементарные функции, проверка гипотезы.
Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень)	
Многочлены	
Применение теории многочленов к решению алгебраических уравнений	Применение различных приёмов решения целых алгебраических уравнений: подбор целых корней; отщепление корня: разложение на множители (включая метод неопределённых коэффициентов); понижение степени; подстановка (замена переменной). Нахождение числовых промежутков, содержащих корни алгебраических уравнений. Применение сочетания точных и приближённых методов для решения вопросов о числе корней уравнения (на отрезке)
Элементарные функции	
Решение уравнений и неравенств, содержащих степенную, логарифмическую и показательную функции. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы	Решение иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений, неравенств и их систем. Выдвижение гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих элементарные функции, проверка гипотезы.

Как мы видим, программа в рамках рассматриваемой содержательно-методической линии предусматривает постепенное накопление как видов уравнений и неравенств, так и «фонда» методов и приемов их решения. Считаем, что в процессе обучения необходимо не только систематизировать методы решения, но и формировать у учащихся обобщенные приемы решения уравнений и неравенств. Обобщение – один из сложных приемов мышления и учебной работы, в процессе осуществления которого умственная деятельность учащихся направлена на выявление общих и существенных сторон изучаемых предметов или явлений, установление между ними определенных связей и отношений и формирование на этой основе общих положений, правил, определений, понятий и т.д. Развитие приемов обобщения осуществляется тогда, когда учащиеся делают выводы о признаках сравнения, анализируют ход решения определенных задач, а также выполнения различных обобщающих задач, в которых предусмотрено применение знаний в новых ситуациях. Обобщенные приемы решения уравнений и неравенств позволяют наиболее экономным образом хранить их в памяти и эффективно применять при решении задач.

Прежде чем рассматривать теоретические основы содержательно-методической линии уравнений и неравенств, необходимо провести сравнительный анализ изложения материала в учебниках 5−11 классов.

1.2. Дидактический анализ линии уравнений и неравенств в различных учебных комплектах

Для выявления содержательных особенностей изложения материала содержательно-методической линии уравнений и неравенств в современном курсе математики 5–11 классов нами были проанализированы учебники под редакцией А.Г. Мордковича и С.М. Никольского, рекомендованные Министерством образования и науки РФ (на момент написания работы 2014–2016 гг.).

Зубарева И.И., Мордкович А.Г., Математика. 5 класс, Математика. 6 класс

В учебнике [Зубарева, Мордкович, 2009] § 14 посвящен изучению уравнений. Формулируется понятие «уравнение» и правило деление на 0. В этом параграфе имеется небольшое количество заданий на отработку навыков решения уравнений, причем только на такие арифметические действия как умножение и деление. Далее можно встретить типичные уравнения на нахождение неизвестного множителя, делимого или делителя (§ 15, 23, 45, 46), но предварительно приведя подобные слагаемые.

В 6 классе учащиеся знакомятся с уравнениями с модулями (§ 3) [Зубарева, Мордкович, 2009]. Но задачный материал слишком мал для отработки навыков решения уравнений с модулем. В дальнейшем встречаются типичные уравнения на нахождение неизвестного множителя, делимого или делителя, предварительно приведя подобные слагаемые (§ 16, 18). В § 19 автор рассматривает метод решения линейного уравнения за счет переноса слагаемых из одной части в другую и преобразование уравнения к виду $ax = b$, причем имеется алгоритм решения уравнений. Далее представлены практически в каждом параграфе уравнения, уровень сложности которых меняется за счет раскрытия скобок, переноса слагаемых из одной части в другую и т.д. Достоинством данного учебника является наличие § 11 «Числовые промежутки». Данная тема способствует подготовке учащихся к решению неравенств в будущем.

В учебниках дополнительной информации для учащихся нет. Принцип построения теоретического материала в учебниках этих авторов отличается от других. Хотелось бы отметить, что объяснительный текст после поставленных автором вопросом является неоспоримым «плюсом» для тех учащихся, которые изучают материал самостоятельно. Но в ходе проведения урока он может и помешать учащимся. Учитель объясняет материал в соответствии с учебником и ставит вопрос, на который имеется готовый практически ответ. Данный факт может воспрепятствовать учащимся самостоятельно думать и рассуждать на уроке. [Зубарева, 2008]

На наш взгляд, в учебники для 5 и 6 классов объяснительный текст можно было бы дополнить правилами нахождения неизвестных компонентов, а также задачный материал учебника – уравнения, решаемые с помощью правила нахождения неизвестных компонентов в 5-м классе и переноса слагаемых из одной части уравнения в другую в 6-м. Заметим, что в учебниках сделан акцент на задачи, решаемые алгебраическим способом, чем просто на решение уравнений.

<u>Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс, Алгебра. 8 класс, Алгебра. 9 класс</u>

В учебнике для 7 класса [Мордкович, 2009] сформулированы необходимые понятия теории решения линейных уравнений с одной переменной, алгоритм решения уравнений вида $ax = b$ и $ax + b = cx + d$, этапы решения задач алгебраическим способом. В §38 рассматривается графический метод решения уравнений.

В задачнике для 7 класса [Мордкович, 2009] в достаточном количестве представлены задания на отработку умений решать линейные уравнения с одной переменной, графическое решение уравнений, задачи, решаемые алгебраическим способом.

В 8 классе [Мордкович, 2010] автор впервые вводит понятие рационального уравнения, знакомит с методом введения новой переменной, сформулированы необходимые определения, формулы, теоремы и алгоритмы для решения квадратных уравнений, Также рассматривается понятие иррационального уравнения и один из основных методов его решения – метод возведения в квадрат, решение линейных уравнений с модулем.

Если в 7 классе учащиеся могли решать неравенства только графически, то ближе к концу 8 класса они учатся решать аналитически линейные неравенства, квадратные неравенства через геометрическую модель. Впервые упоминается о равносильности уравнений и неравенств.

В задачнике для 8 класса [Мордкович, 2010] представлены задания на формирование умений решать рациональные, квадратные и иррациональные уравнения, линейные уравнения с модулем. Одним из несомненных достоинством является наличие заданий с параметрами и задач, решаемые с помощью изучаемых уравнений.

В 9 классе [Мордкович, 2010] автор особое внимание уделяет решению линейных, квадратных и рациональных неравенств, неравенств с модулем, вводится понятие метода интервалов.

Заметим, что учебник состоит из двух частей: часть учебника и задачника. Достоинством такого разделения является то, что учебник содержит достаточный теоретический материал, с большим количеством примеров с подробными решениями. Явно выделены необходимые для запоминания правила, алгоритмы, определения и др., а также в конце каждой главы подведены основные результаты. Небольшим минусом может являться тот факт, что учебник и задачник отделены друг от друга и учащиеся могут игнорировать первую часть. Бесспорным достоинством рассматриваемых задачников является избыточная по объему система упражнений, обеспечивающая достаточный материал для работы в классе и дома. Во всех параграфах упражнения сгруппированы по двум блокам. Первый блок содержит устные (полуустные) и задания средней трудности, второй – задания выше среднего и повышенной трудности.

<u>Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10–11 классы</u>

Структура учебника сохраняется, он также состоит из двух частей. Учебник базового уровня предназначен для учащихся 10 и 11 классов. Это очень удобно для тех учащихся, которые могли подзабыть материал и вернуться к определенной теме. В 10 классе рассматриваются простейшие тригонометрические уравнения, основные методы решения тригонометрических уравнений – введение новой переменной, метод разложения на множители; однородные тригонометрические уравнения (формулируется алгоритм их решения, приводятся примеры). Заметим, что в задачнике помимо тригонометрических уравнений предлагаются задания на решение тригонометрических неравенств как простейшие, так и повышенной трудности.

В 11 классе рассматриваются показательные и логарифмические уравнения и неравенства, выделяются основные методы их решения. В учебнике приводится достаточное количество примеров решения уравнений и неравенств. Лишь в конце 11 класса рассматривается равносильность уравнений и неравенств с общих позиций, общие методы решения уравнений и неравенств с одной переменной, а также уравнения и неравенства с двумя переменными. Отметим, что для базового уровня предусмотрено рассмотрение ряда достаточно простых уравнений и неравенств с параметрами, дающие некоторые представления о рассуждении при их решении. В учебнике для 10–11 класса сохраняется избыточность по объему система упражнений, обеспечивающий достаточный материал для работы в классе и дома [Мордкович, 2009].

Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). 10–11 классы

Для профильного уровня учебники разделены по классам: для 10 и для 11 класса. В 10 классе [Мордкович, 2009] дается представление о простейших тригонометрических уравнений и способах их решения, рассматриваются основные методы решения тригонометрических уравнений. В задачнике предлагается материал как базового уровня, так и повышенного уровня сложности, позволяющий отточить умение решать тригонометрические уравнения различными способами, а также тригонометрические неравенства, имеются задания с параметром и модулем. Также рассматривается такой метод решения тригонометрических уравнений как метод введения вспомогательного аргумента.

В отличие от учебника базового уровня в учебнике профильного уровня для 11 класса [Мордкович, 2007]рассматриваются уравнения высших степеней, приводится достаточное количество примеров на некоторые виды уравнений высших степеней.

Система заданий, посвященная решению показательных и логарифмических уравнений и неравенств в задачнике профильного уровня намного разнообразнее. Имеются задания с параметрами и модулями, что является неоспоримым плюсом для тех учащихся, которые собираются сдавать ЕГЭ по математике профильного уровня и поступать в вуз по профилю.

Также как и в учебнике базового уровня в самом конце рассматривается равносильность уравнений и неравенств с общих позиций. В отдельности обобщается и систематизируется материал по решению уравнений и неравенств с модулями, иррациональных уравнений и неравенств, доказательству неравенств, уравнений и неравенств с двумя переменными, задачи с параметрами. В задачнике имеется достаточно хорошая система упражнений по рассматриваемому блоку.

Никольский С.М., Потапов М.К. «Математика. 5 класс», «Математика. 6 класс»

Автор относит изучение уравнений на вторую половину 6 класса, поэтому в учебнике для 5 класса [Никольский, Потапов и др., 2012] уравнений нет. В 6 классе [Никольский, Потапов и др., 2012] автор рассматривает параграф, посвященный уравнениям (§3.9). Вводятся понятия уравнения, корня уравнения, на примерах объясняется правило решения уравнений с помощью переноса слагаемых из одной части в другую. Заметим, что при решении уравнений не используется понятие «подобные члены уравнения», но предполагается использование законов умножения для раскрытия скобок и вынесения общего множителя за скобки. В дальнейшем рассматривается применение уравнений для решения текстовых задач [Потапов, 2010].

Никольский С.М., Потапов М.К. «Алгебра. 7 класс», «Алгебра. 8 класс»,«Алгебра. 9 класс»

В 7 классе [Никольский, Потапов и др., 2005] изучаются линейные уравнения. При этом автор отдельно расставляет акценты на уравнения первой степени с одним неизвестным, понятие линейного уравнения, алгоритм решения линейного уравнения и решение задач с помощью линейного уравнения. Считаем, что материала для отработки вводимых понятий и навыков решения линейного уравнения достаточно и рассчитан на ученика со средней успеваемостью, для более продвинутых учащихся потребуется дополнительный материал. Текстовых задач, решаемых с помощью линейного уравнения недостаточно. Стоит отметить, что именно для таких учащихся автор предлагает дополнительную информацию о линейных диофантовых уравнениях, предлагаются исторические задачи [Потапов, 2010].

В 8 классе [Никольский, Потапов и др., 2006] автор вводит понятие квадратного уравнения и отдельно рассматривает виды квадратных уравнений: неполное, общего вида, приведенное; формулирует теорему Виета; предлагает задачи, решаемые с помощью квадратного уравнения. Считаем, что заданий для отработки навыков умения решать квадратные уравнения мало, учителю потребуется использовать дополнительный материал. Хотя представленные задания в учебнике по своей структуре разнообразные. Имеются задания с параметром, что является неоспоримым плюсом данного учебника.

После изучения квадратных уравнений вводится понятие рационального уравнения, рассматриваются по отдельности такие темы, как биквадратные уравнения, распадающиеся уравнения, уравнения, одна часть которого алгебраическая дробь, а другая – нуль и только после этого предлагаются к решению рациональные уравнения, требующие преобразования к стандартному виду. Имеются задачи, решаемые с помощью рационального уравнения. Количество практического материала для отработки навыков решения рациональных уравнений недостаточно, учителю потребуется воспользоваться дополнительным материалом. Отметим, что в дополнение к материалу учебника имеется теория по таким темам, как разложение многочленов на множители и решение уравнений, решение уравнений в целых числах (является продолжением материала о диофантовых уравнениях 7 класса).

9 класс [Никольский, Потапов и др., 2006] начинается с изучения неравенств. Поэтапно рассматриваются линейные неравенства, неравенства второй степени и рациональные неравенства с одним неизвестным. Вводится понятие неравенства первой степени и рассматривается их решение с помощью графиков, после вводится понятие линейного неравенства. Стоит отметить, что, как и раньше автор разделяет случаи решения неравенства второй степени, в зависимости от знака дискриминанта, потом предлагает неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени. При изучении рациональных неравенств также рассматриваются метод интервалов и нестрогие рациональные неравенства [Потапов, 2013].

Считаем, что практического материала по данной теме вполне достаточно для отработки умений решать рациональные неравенства. В качестве дополнительной информации имеется материал, посвященный доказательству числовых неравенств, а также историческая справка.

<u>Никольский С.М., Потапов М.К. «Алгебра и начала математического анализа. 10–11 класс»</u>

Учебники под редакцией С.М. Никольского, М.К. Потапова для учащихся 10–11 классов содержат материал как для базового, так и для профильного уровня. Учебник нацелен на подготовку учащихся к поступлению в вузы.

В 10 классе [Никольский, Потапов и др., 2009] перед обобщением материала о решении рациональных уравнений автор предлагает учащимся ознакомиться с теорией многочленов: рациональные выражения, формулы бинома Ньютона, деление многочленов с остатком и алгоритм Евклида, теорема Безу, корень многочлена (последние три темы предназначены для углубленного изучения). После рассматривается общий способ решения неравенств методом интервалов, в отдельности предлагаются к решению строгие и нестрогие рациональные неравенства и неравенства, сводимые к ним.

Стоит отметить, что в отличие от учебника под редакцией А.Г. Мордковича в рассматриваемом учебнике показательные и логарифмические уравнения и неравенства изучаются в 10 классе. Имеется справка о развитии теории уравнений.

Далее рассматриваются тригонометрические уравнения и неравенства. При этом автор предлагает для изучения основные тригонометрические уравнения: простейшие уравнения; уравнения, сводящиеся к простейшим с помощью замены; однородные уравнения. Тригонометрические неравенства предназначены для профильного обучения учащихся. Рассматриваются простейшие неравенства для синуса, косинуса, тангенса и котангенса, а также неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного. Для профильного обучения предусмотрены такие темы, как введение вспомогательного угла и замена неизвестного $t = \sin x + \cos x$.

Считаем, что в учебнике недостаточно практического материала для отработки умения решать рациональные, логарифмические, показательные и тригонометрические уравнения и неравенства. У учителя возникнет необходимость воспользоваться дополнительным материалом. Хотя при небольшом количестве заданий, они являются неоднообразными и призваны реализовать разные поставленные цели.

В 11 классе [Никольский, Потапов и др., 2009] обобщается и систематизируется теоретический материал по решению уравнений и неравенств. Формулируются теоремы о равносильности уравнений и неравенств, рассматриваются преобразования, приводящие к уравнению-следствию, а также равносильность уравнений и неравенств системам.

Автор уделяет внимание таким темам, как равносильность уравнений и неравенств на множествах. При этом изучение этих тем подразумевается на базовом уровне, но и для профильного изучения имеются дополнительные темы из этого раздела. В обязательном порядке рассматривается метод промежутков для уравнений и неравенств: уравнения и неравенства с модулями, метод интервалов для непрерывных функций.

Дополнительными разделами являются использование свойств функций при решении уравнений и неравенств и уравнения и неравенства с параметрами. Такие разделы – неоспоримый плюс для тех учащихся, которые изучают математику на профильном уровне и собираются поступать в вузы по профилю.

В учебниках для 10 и 11 класса имеются задания для базового и профильного уровня, для устной работы и повышенной трудности. Считаем, что в учебнике не хватает материала для отработки умений работать с уравнениями и неравенствами базового уровня.

Таким образом, считаем, что рассматриваемые комплекты обладают как рядом достоинств, так и рядом недостатков. К первым, например, можно отнести то, что задачники под редакцией А.Г. Мордковича для учащихся 7–11 классов имеют хорошо подобранную систему заданий, а под редакцией С.М. Никольского – дополнительные разделы для углубленного изучения материала, исторические справки. Ко вторым, на наш взгляд, относится то, что в учебниках для 10–11 класса авторы дают возможность переосмысления методов решения уравнений и неравенств, но лишь в конце изучения школьного курса математики, т.е. в самом конце 11 класса, перед сдачей ЕГЭ, когда времени остается слишком мало. Однако наличие сформированной единой концепции методов решения уравнений и неравенств, в отличие от других авторов, является достоинством рассматриваемых учебников.

1.3. Формирование обобщенных приемов решения уравнений

В школе, изучая математику, учащиеся постоянно решали уравнения и неравенства. Постепенно осваивались стандартные приемы решения алгебраических, а позже и трансцендентных уравнений и неравенств. К каждому типу уравнений и неравенств предлагались различные способы решения. У большинства школьников создалось впечатление о наличии огромного числа методов решения. Многие думают, что существует отдельные теории решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств. Такое заблуждение приводит к возникновению ошибок при решении уравнений и неравенств [Гиматдинова, 2015].

На самом деле есть несколько общих идей, общих методов, которые должен знать каждый учащийся на достаточно хорошем уровне. [Мордкович, 1995].

Прежде чем говорить об общих идеях решения уравнений и неравенств, важно понимать принципиальные вопросы, связанные с равносильностью уравнений и неравенств. Начнем с равносильности уравнений.

Равносильность уравнений

Определение. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют равносильными, если множества их корней совпадают. [Мордкович, 1995]

Определение. Если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ является в то же время корнем уравнения $p(x) = h(x)$, то уравнение $p(x) = h(x)$ называют следствием уравнения $f(x) = g(x)$.

Решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа.

Первый этап – *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) → (2) → (3) → (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап – *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап – *проверка*. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Если проверка показывает, что найденный корень последнего уравнения цепочки не удовлетворяет исходному уравнению, его называют посторонним корнем и в ответ, естественно, не включают.

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести теоремах о равносильности. Первые три теоремы – «спокойные», они гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Следующие три теоремы — «беспокойные», они работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений. Прежде чем формулировать теоремы 4–6, напомним еще об одном понятии, связанном с уравнениями.

Определение. Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной х, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$;

нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному в его ОДЗ.

Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения $f(x) = g(\text{x})$ неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение$(f(x))^n = (g(x))^n$, равносильное данному в его ОДЗ.

Теорема 6. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, X – решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(\text{x})$.

Наиболее часто встречающиеся *причины расширения области определения уравнения* являются:

1. Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.
2. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени.
3. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Итак, исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, обязательна проверка всех найденных корней, если:

1) произошло расширение области определения уравнения;
2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;
3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Укажем две причины потери корней при решении уравнений:

1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);
2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения [Мордкович, 1995]

Далее рассмотрим более подробно общие методы решения уравнений. Этих общих методов три: метод разложения на множители, введения новых переменных, функционально-графический метод (рис. 9).

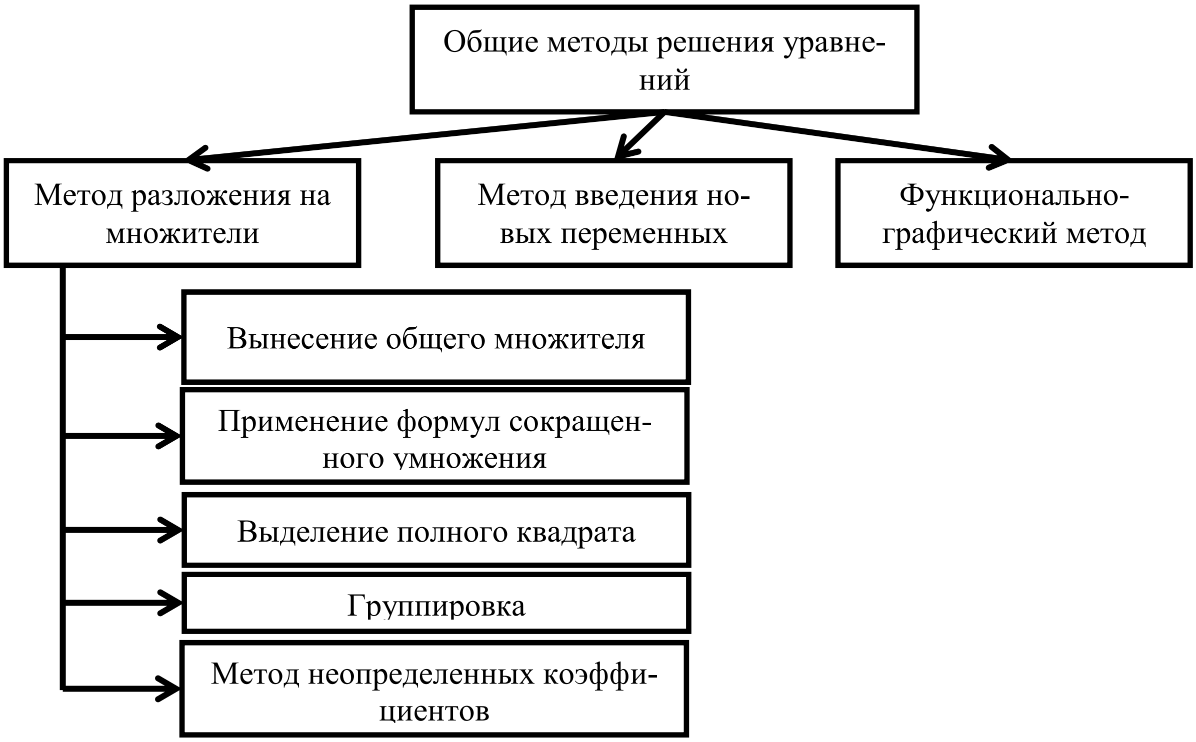


Рис. 9. Общие методы решения уравнений

Общие методы решения уравнений

Метод разложения на множители

Суть применения метода разложения на множители состоит в следующем. Пусть нужно решить уравнение

$$f(x) = 0$$

и пусть

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x).$$

Тогда уравнение $f(x) = 0$ можно заменить совокупностью более простых уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x) = 0 \end{array}\right.$$

Найдя корни уравнений этой совокупности и отобрав из них те, что принадлежи области определения уравнения $f(x) = 0$, мы получим корни уравнения $f(x) = 0$ [Мордкович, 1995].

При решении алгебраических уравнений часто приходится разлагать многочлен на множители.

Разложить многочлен на множители – это значит представить его в виде произведения двух или нескольких многочленов. Приведем некоторые методы разложения многочленов в произведение множителей первой и второй степени, поскольку знаний такого разложения достаточно для решения алгебраических уравнений и неравенств.

Вынесение общего множителя. Если все члены многочлена имеют общий множитель, то, вынося его за скобки, получим разложение многочлена на множители.

Пример. Разложить на множители многочлен $3x^3 - 13x^2 + 5x$.

Решение. Все члены данного многочлена содержат общий множитель x. Вынося его за скобки, получим разложение данного многочлена на множители $3x^3 - 13x^2 + 5x = x(3x^2 - 13x + 5)$.

Применение формул сокращенного умножения. Иногда многочлен можно разложить на множители, используя формулы сокращенного умножения:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$,

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$,

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^{3b} + a^{2b^2} + ab^3 + b^4)$,

...

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + + b^{n-1})$, $n \in N$.

Пример. Разложить на множители многочлен $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2$.

Решение. Применяя формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, имеем

$$(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = (x^2 + 2x - x - 1)(x^2 + 2x + x + 1) =$$
$$= (x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 1).$$

Выделение полного квадрата. Иногда многочлен можно разложить на множители, если воспользоваться сначала методом выделения полного квадрата, а затем, как правило, формулой разности квадратов.

Пример. Разложить на множители многочлен $x^4 + 6x^2 - 10$.

Решение. Выделяя полный квадрат, а затем, применяя формулу разности квадратов, имеем

$$x^4 + 6x^2 - 10 = (x^2)^2 + 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 3^2 - 3^2 - 10 = (x^2 + 3)^2 - 19 =$$
$$= (x^2 + 3)^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2 = (x^2 + 3 - \sqrt{19})(x^2 + 3 + \sqrt{19})$$

Группировка. Этот способ применяется чаще всего в сочетании со способом вынесения за скобки общего множителя. Суть его состоит в перегруппировке слагаемых в многочлене и дальнейшем объединении в группы таким образом, чтобы после вынесения (если это можно) общего множителя из каждого слагаемого в данной группе в скобке получилось выражение, являющееся в свою очередь общим множителем уже для каждой группы.

Пример. Разложить на множители многочлен $x^4 + 5x^2 + x^3 - 5x$.

Решение. Объединим в одну группу первое и второе слагаемые, а в другую – третье и четвертое слагаемые. Тогда имеем $x^4 + 5x^2 + x^3 - 5x = = (x^4 - 5x^2) + +(x^3 - 5x)$. Вынося из первой скобки множитель x^2, а из второй скобки x, получаем $(x^4 - 5x^2) + (x^3 - 5x) = x^2(x^2 - 5) + x(x^2 - 5)$. Наконец, вынося за скобку общий множитель $x^2 - 5$, получаем $x^2(x^2 - 5) + + x(x^2 - 5) = (x^2 - 5)(x^2 + x)$, и, наконец, вынося за скобки множитель x, получим, что$x^4 + 5x^2 + x^3 - 5x =$
$= (x^2 - 5)(x + 1)x$.

Метод неопределенных коэффициентов. Суть этого метода состоит в том, что заранее предполагается вид множителей – многочленов, на которые разлагается данный многочлен. Этот метод опирается на следующие утверждения:

1) два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x;

2) любой многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратного множителей;

3) любой многочлен четвертой степени разлагается в произведение двух многочленов второй степени.

Пример. Разложить на множители многочлен $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

Решение. Будем искать многочлены $x - \alpha$ и $\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$ такие, что справедливо тождественное равенство

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - \alpha)(\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3).$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$\beta_1 x^3 + (\beta_2 - \alpha\beta_1)x^2 + (\beta_3 - \alpha\beta_2)x - \alpha\beta_3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получаем систему равенств для нахождения α, β_1, β_2, β_3:

$$\begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 - \alpha\beta_1 = -5, \\ \beta_3 - \alpha\beta_2 = 7, \\ \alpha\beta_3 = 3. \end{cases}$$

Легко видеть, что этим равенствам удовлетворяют числа $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -2$, $\beta_3 = 1$, $\alpha = 3$, а это означает, что $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 3)(x^2 - 2x + 1)$ [Олехник, Потапов, Пасиченко, 1998].

Метод введения новых переменных

Суть метода крайне проста: если уравнение $f(x) = 0$ удалось преобразовать к виду $p\big(g(x)\big) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, решить уравнение $p(u) = 0$, а затем рассмотреть совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = u_1, \\ g(x) = u_2, \\ \quad \dots \\ g(x) = u_n, \end{array}\right.$$

где $u_1, u_2, ..., u_n$ – корни уравнения $p(u) = 0$.

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}.$$

Решение. Положив $y = x^2 - x$, получим

$$\sqrt{y + 2} + \sqrt{y + 7} = \sqrt{2y + 21}.$$

Далее имеем последовательно:

$$y + 2 + y + 7 + 2\sqrt{(y + 2)(y + 7)} = 2y + 21,$$

$$\sqrt{y^2 + 9y + 14} = 6,$$

$$y^2 + 9y + 14 = 36,$$

$$y^2 + 9y - 22 = 0,$$

$$y_1 = 2; y_2 = -11.$$

Проверка найденных значений подстановкой в уравнение $\sqrt{y + 2} + \sqrt{y + 7} = \sqrt{2y + 21}$ показывает, что $y_1 = 2$ удовлетворяет этому уравнению, а $y_2 = -11$ – нет, это посторонний корень. Возвращаясь к переменной x, получаем уравнение $x^2 - x = 2$, откуда находим $x_1 = 2, x_2 = -1$.

Ответ: 2; –1 [Мордкович, 1995].

Замечание. Во-первых, если вы ввели новую переменную, то решите полученное уравнение относительно новой переменной, как говорят, до самого конца, т.е. до проверки корней (в случае, если это необходимо), и только потом возвращайтесь к исходной переменной. Во-вторых, в качестве примера мы взяли иррациональное уравнение, но принципы решения такого вида уравнений рассмотрим чуть позже.

Функционально-графический метод

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста и понятна: нужно построить графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и найти точки их пересечения; абсциссы точек пересечения и будут корнями уравнения. Графический метод позволяет определить число корней уравнения, найти точные значения корней (хоть и редко, но это все-таки удается), угадать значение корня.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Решение. Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$ пересекаются в двух точках: (1; 1) и (4; 2) (рис. 10). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ [Мордкович, 1995].

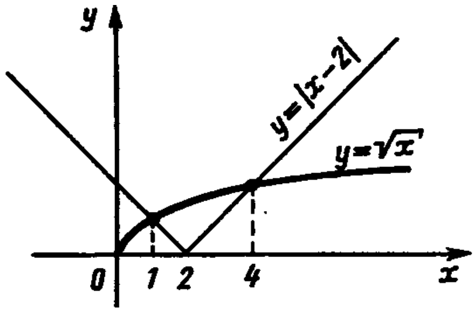


Рис. 10. Графическое решение уравнения $\sqrt{x} = |x - 2|$

Способы решения алгебраических уравнений

Рассмотрим алгебраические уравнения степени n, т.е. уравнения вида

$$P_n(x) = 0 \qquad (1)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, т.е.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0 \qquad (2)$$

Линейные уравнения

В случае $n = 1$ уравнение (1) обычно записывается в виде $ax + b = 0$, $a \neq 0$ (3) и называется уравнением первой степени или линейное уравнение.

Линейное уравнение может иметь либо один корень, либо не иметь решений, либо иметь корнем любое число (рис. 11)

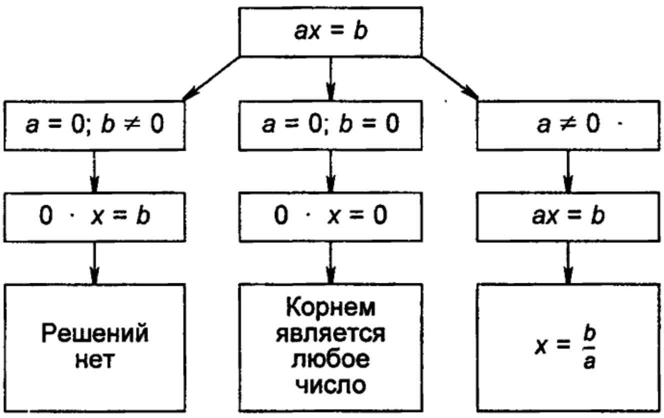


Рис. 11. Решение линейных уравнений

Квадратные уравнения

В случае $n = 2$ уравнение (1) обычно записывается в виде $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ (4) и называется уравнением второй степени или квадратное уравнение.

На рисунке 12 приводится алгоритм решения квадратного уравнения.

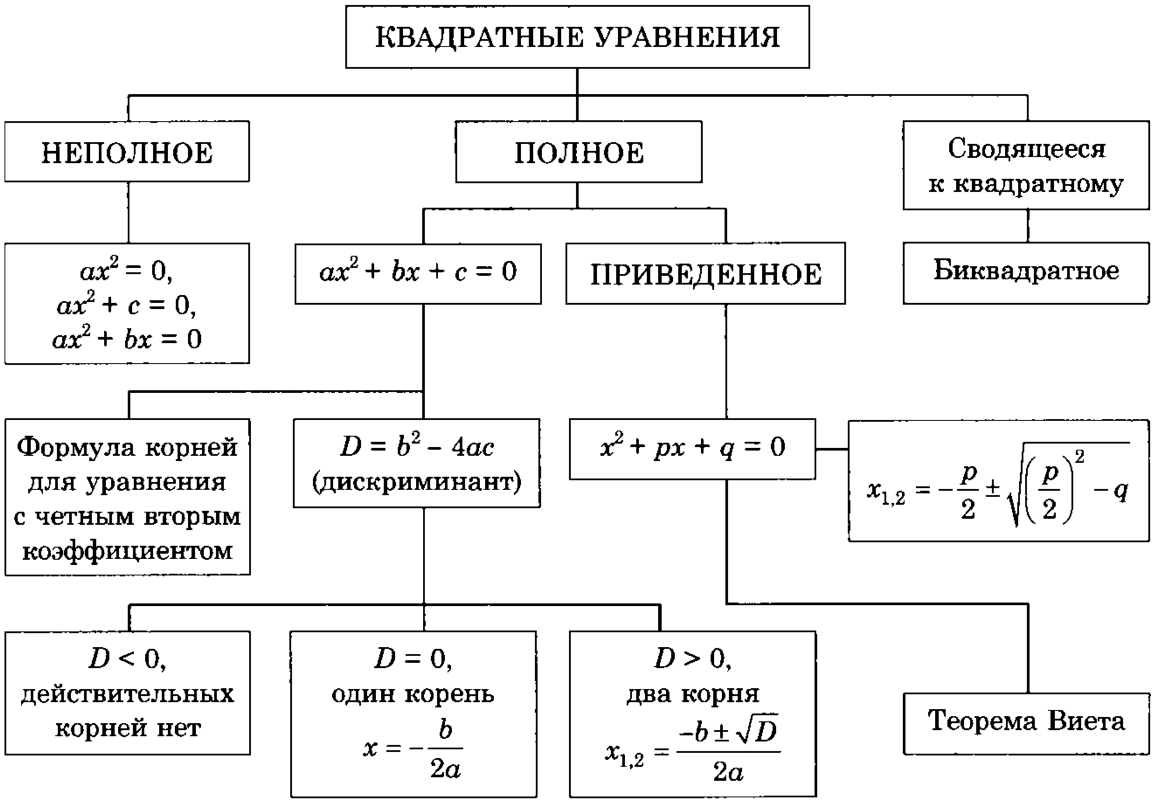


Рис. 12. Решение квадратных уравнений

Заметим, что для решения приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ удобно использовать Теорему Виета: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Далее на рисунке 13 рассмотрим алгоритм решения неполного квадратного уравнения.

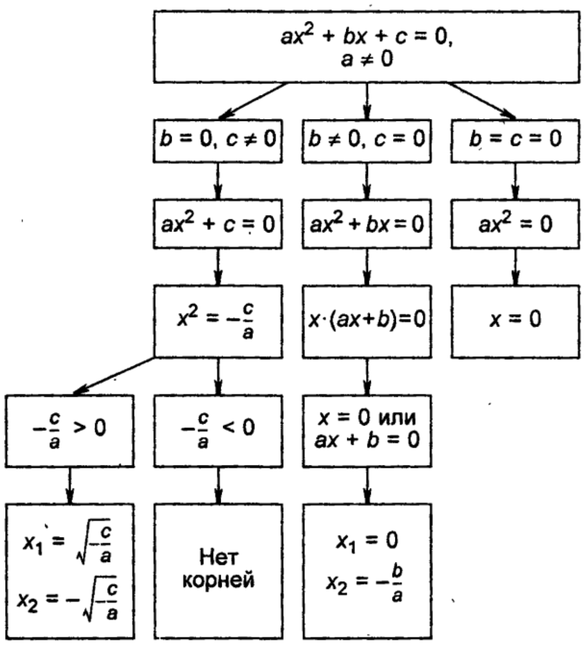


Рис. 13. Решение неполных квадратных уравнений

Уравнения высших степеней

Достаточно часто приходится решать алгебраические уравнения степени большей, чем два. При $n = 3$ и $n = 4$ существуют формулы для нахождения корней алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней, однако в силу их громоздкости они применяются редко.

В общем случае не существует формул для нахождения корней любого алгебраического уравнения более высокой степени, чем четыре.

Если многочлен $P_n(x)$ записан в виде произведения многочленов первой и второй степени, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений первой и второй степени, формулы, решения которых приведены выше.

Если многочлен $P_n(x)$ имеет степень большую, чем 2, и не разложен на множители первой и второй степени, то его сначала надо каким-либо способом разложить на такие множители, а затем заменить уравнение (1) равносильной ему совокупностью уравнений [Олехник, Потапов, Пасиченко, 1998].

Рассмотрим несколько частных случаев решения уравнений третьей и четвертой степени (рис. 14, рис. 15).

Уравнение третьей степени

$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, a \neq 0$
симметрическое уравнение

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ ax^2 + (b - a)x + a = 0 \end{array}\right.$$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где
a, b, c, d–целые числа, $a \neq 0$

1. Выпишите все делители свободного члена d.
2. Выберите среди этих делителей то число x_1, которое является корнем уравнения (если такого числа нет, то алгоритм неприменим).
3. Разделите $ax^3 + bx^2 + cx + d$ на $(x - x_1)$, получите в частном квадратный трехчлен $ax^2 + b_1x + c_1$.
4. Найдите корни x_2, x_3уравнения $ax^2 + b_1x + c_1 = 0$.
5. Запишите ответ: x_1, x_2, x_3–корни уравнения.

Теорема Виета для кубического уравнения

Если x_1, x_2, x_3–корни уравнения, то

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a};$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a};$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Рис. 14.Частные случаи решения уравнений третьей степени

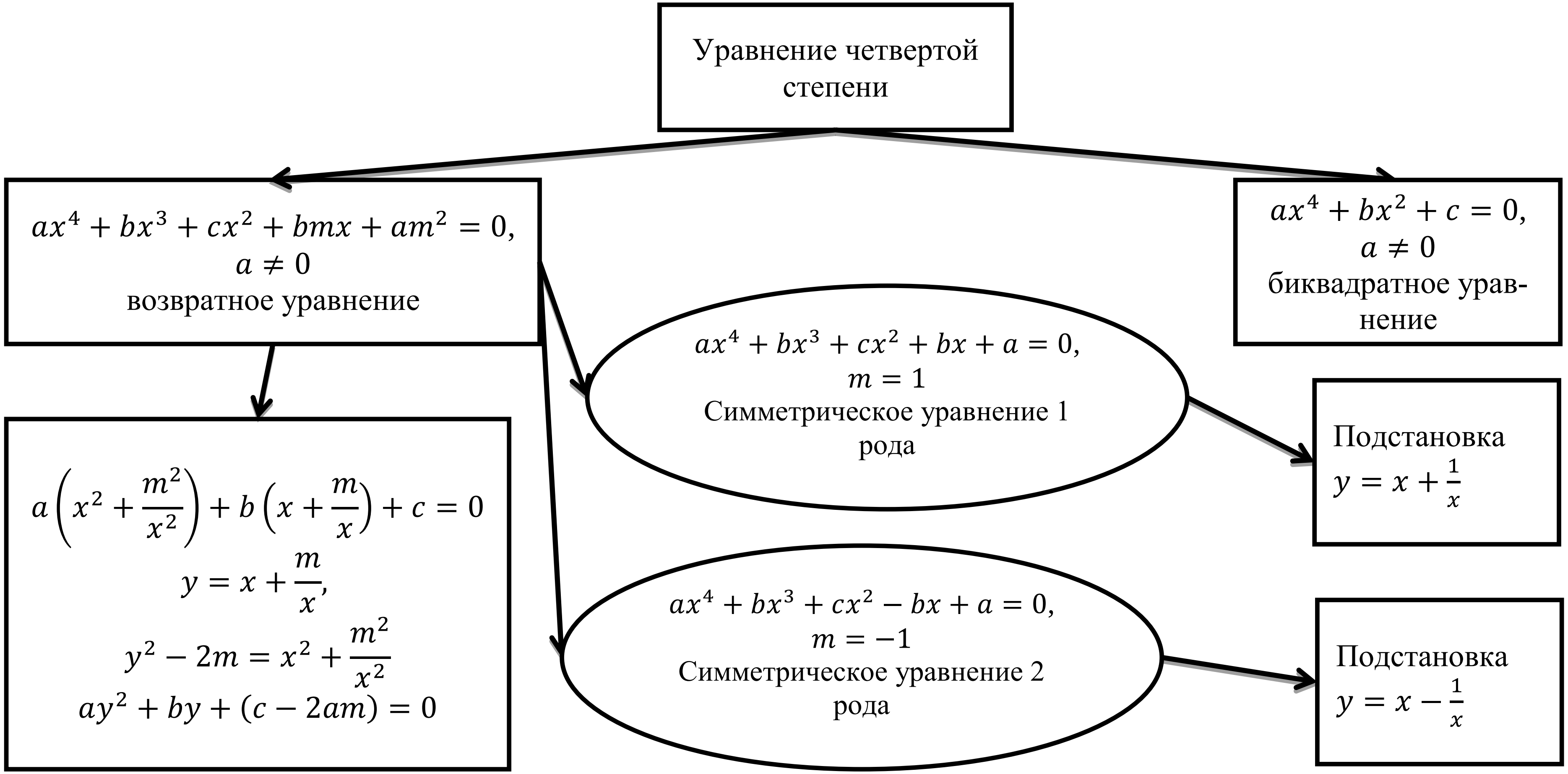


Рис. 15. Частные случаи решения уравнений четвертой степени

Дробно-рациональные уравнения

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения вида $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$.

1. Перенести все члены уравнения в одну часть.
2. Преобразовать эту часть уравнения к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$. Дробь $\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) \neq 0 \end{cases}$.
3. Решить полученную систему.
4. Полученные корни системы являются ответом.

Пример. Решить уравнение $\frac{x^2-5x}{2x-6} = 1$.

Решение. $\frac{x^2-5x}{2x-6} = 1$;

1) $\frac{x^2-5x}{2x-6} - 1^{\backslash 2x-6} = 0$;

2) $\frac{x^2-5x}{2x-6} - \frac{2x-6}{2x-6} = 0$;

$\frac{x^2-5x-2x+6}{2x-6} = 0$; $\frac{x^2-7x+6}{2x-6} = 0$;

3) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ 2x - 6 \neq 0; \end{cases}$

$x^2 - 7x + 6 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = 6$; $2x - 6 \neq 0; x \neq 3$;

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \\ x \neq 3 \end{cases} \rightarrow \ x_1 = 1, x_2 = 6.$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 6$.

Иррациональные уравнения

Рассмотрим более подробно некоторые виды иррациональных уравнений, способы их решения (табл. 3).

Таблица 3

Решение некоторых видов иррациональных уравнений

Вид иррационального уравнения		Правило решения	Пример
Простейшие уравнения	$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$	1) Возвести обе части уравнения в степень $2n$. 2) Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases}$	Решить уравнение $\sqrt{7-3x} = x+7$. 1) $\left(\sqrt{7-3x}\right)^2 = (x+7)^2$; 2) Уравнение $\sqrt{7-3x} = x+7$ равносильно системе $\begin{cases} x+7 \geq 0, \\ 7-3x = (x+7)^2 \end{cases}$ Решим неравенство системы $x+7 \geq 0$. Имеем $x \geq -7$. Решим уравнение системы $7-3x = (x+7)^2$; $7-3x = x^2+14x+49$; $x^2+17x+42=0$; $x_1 = -3$; $x_2 = -14$. $\begin{cases} x_1 = -3;\ x_2 = -14 \\ x \geq -7 \end{cases} \to x = -3.$ Ответ. -3.
	$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$	1) Возведем обе части уравнения в степень $2n+1$. 2) Решить уравнение $f(x) = g^{2n+1}(x)$.	Решить уравнение $\sqrt[3]{10-x} = x$. 1) $\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^3 = x^3$; 2) Решим уравнение $10-x = x^3$; $x^3+x-10=0$; $x_1 = 2$. Разделим многочлен x^3+x-10 на двучлен $x-2$, имеем $x^3+x-10 = (x-2)(x^2+2x-5)$. Решением уравнения $x^2+2x-5=0$ являются $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{6}$. Ответ. $2, -1 \pm \sqrt{6}$.

	$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	Решим следующую систему: $$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$	Решить уравнение $\sqrt{8 - x^2} = \sqrt{2 - x}$. Составим и решим следующую систему: $$\begin{cases} 8 - x^2 = 2 - x, \\ 8 - x^2 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ 8 - x^2 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x^2 \leq 8, \\ x \leq 2. \end{cases}$$ $$\begin{cases} x_1 = 3 \;\; x_2 = -2, \\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \\ x \leq 2. \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$ Ответ. -2.
	$g(x)\sqrt{f(x)} = 0$	Решим следующую систему: $$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$	Решить уравнение $(x - 1)\sqrt{2x - 5} = 0$. Составим и решим следующую систему: $$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 2x - 5 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2{,}5 \\ x = 2{,}5 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2{,}5.$$ Ответ. 2,5.

Окончание табл. 3

$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$	1) Составим систему для нахождения ОДЗ: $\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \\ h(x)\geq 0. \end{cases}$ 2) Воспользуемся методом «изоляции» квадратного корня. $\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^2=\left(\sqrt{h(x)}\right)^2$ $2\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)-f(x)-g(x)$ 3) Сделать проверку	Решить уравнение $\sqrt{7+5x}-\sqrt{5+4x}=\sqrt{x+2}$. ОДЗ: $\begin{cases} 7+5x\geq 0, \\ 5+4x\geq 0, \\ x+2\geq 0. \end{cases} \Rightarrow \quad x\geq -1{,}25$ $\left(\sqrt{7+5x}-\sqrt{5+4x}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}\right)^2;$ $7+5x+5+4x-2\sqrt{(7+5x)(5+4x)}=x+2;$ $2\sqrt{35+53x+20x^2}=10x+8;$ $\sqrt{35+53x+20x^2}=5x+4;$ $\left(\sqrt{35+53x+20x^2}\right)^2=(5x+4)^2;$ $35+53x+20x^2=25x^2+40x+16;$ $4x^2+13x+10=0;$ $x_1=-1{,}25;\ \ x_2=-2.$ Учитывая ОДЗ и выполнив проверку, имеем $x=-1{,}25$. Ответ. $-1{,}25$.
$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$	1) Составим систему для нахождения ОДЗ: $\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \\ h(x)\geq 0. \end{cases}$ 2) Воспользуемся методом «изоляции» квадратного корня. $\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)^2=\left(\sqrt{h(x)}\right)^2$ $2\sqrt{f(x)g(x)}=f(x)+g(x)-h(x)$ 3) Сделать проверку	

Способы решения неалгебраических (трансцендентных) уравнений

Показательные уравнения

Показательными уравнениями называются уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Простейшим показательным уравнением называется уравнение вида: $a^{f(x)} = b$.

При решении показательных уравнений необходимо помнить, что решение любого показательного уравнения сводиться к решению простейших показательных уравнений.

Выделим следующие методы решения показательных уравнений:

- метод уравнивания показателей;
- метод введения новой переменной;
- метод вынесения общего множителя за скобки;
- функционально-графический метод;
- метод почленного деления;
- метод группировки.

Рассмотрим основные виды показательных уравнений и идеи их решения.

- $a^{f(x)} = 1$

Если $a = 1$, то уравнение имеет бесконечное множество корней, так как $1^{f(x)} = 1$ и x – любое число из области определения функции $f(x)$.

Очевидно, что $a \neq 0$. При всех остальных $aa^{f(x)} = a_0$, откуда $f(x) = 0$.

Пример. Решить уравнение $2^{x^2} \cdot 3^{x^2} = 1$.

Решение.

Так как $2^{x^2} \cdot 3^{x^2} = 6^{x^2}$, уравнение равносильно уравнению $6^{x^2} = 6^0$, откуда $x^2 = 0$ и $x = 0$ – корень исходного уравнения.

Ответ: 0.

- $(q(x))^{f(x)} = 1$

Если $q(x) = 1$, то корни этого уравнения являются корнями данного уравнения, если входят в область определения функции $f(x)$.

Если $q(x) \neq 1$, то $f(x) = 0$, при этом необходимо помнить, что при найденных значениях x выражение $(q(x))^{f(x)}$ должно быть определено.

Пример. Решить уравнение $(x^2 - 4)^{2x+3} = 1$.

Решение.

Если $x^2 - 4 = 1$, то $x = \pm\sqrt{5}$ – корни данного уравнения.

Если $x^2 - 4 \neq 1$, то $2x + 3 = 0$ и $x = -1{,}5$. Найденное значение удовлетворяет неравенству $x^2 - 4 \neq 1$, и выражение $(x^2 - 4)^{2x+3}$ определено.

Ответ: $\pm\sqrt{5}$; $-1{,}5$.

- $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Уравнение данного типа решается методом почленного деления. Разделив обе части данного уравнения на $b^{f(x)}$, получим $\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = 1$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0}$, откуда $f(x) = 0$. При проведении рассуждений предполагалось, что $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ и $b \neq 1$.

<u>Пример</u>. Решить уравнение $2^{4-5x} = 3^{4-5x}$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на $3^{4-5x} > 0$, получим $\left(\frac{2}{3}\right)^{4-5x} = 1$;
$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-5x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$, откуда $4 - 5x = 0$ и $x = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

- $a^{f(x)} = a^{q(x)}$

Уравнение данного типа решается методом уравнивания показателей, который основан на теореме 3.

Здесь левая и правая части приведены к одному основанию. В силу монотонности функции $y = a^{t}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ заключаем, что решением этого уравнения будут корни уравнения $f(x) = q(x)$.

Замечание. Исходное уравнение можно делением обеих частей на $a^{q(x)}$ привести к виду $a^{f(x)-q(x)} = 1$; $a^{f(x)-q(x)} = a^{0}$, откуда $f(x) - q(x) = 0$; $f(x) = q(x)$.

<u>Пример</u>. Решить уравнение $6^{0{,}5x^2-x} = \sqrt[8]{6^{-3}}$.

Решение.

Поскольку $\sqrt[8]{6^{-3}} = 6^{-\frac{3}{8}}$, то $0{,}5x^2 - x = -\frac{3}{8}$; $4x^2 - 8x + 3 = 0$.

Отсюда $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$.

Ответ: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$.

- $a_0 m^{nx+c_1} + \dots + a_n m^{nx+c_n} = F$

В уравнениях подобного вида в степени перед x стоит один и тот же коэффициент. Для решения этого вида можно вынести за скобки m^{nx}, но лучше выносить за скобки m^{nx+c_k}, где c_k — наименьшее из чисел c_i, $i = 1, 2, \dots, n$, тогда в скобках останется постоянное число, которое обозначим через A, тогда $m^{nx+c_k} \cdot A = F$. Если $\frac{F}{A} \leq 0$, то уравнение корней не имеет. Если $F = A$, то $nx + c_k = 0$. Если $\frac{F}{A} > 0$ и $\frac{F}{A} = m^{e}$, то $nx + c_k = m^{e}$. Если $\frac{F}{A} \neq m^{e}$, то уравнение решается логарифмированием обеих его частей по любому положительному основанию отличному от 1.

<u>Пример</u>. Решить уравнение

$$3^{\sqrt{x}+1} - 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}-1} = 6.$$

Решение.

$$3^{\sqrt{x}-1}\left(\frac{3^{\sqrt{x}+1}}{3^{\sqrt{x}-1}} - \frac{2 \cdot 3^{\sqrt{x}}}{3^{\sqrt{x}-1}} - 1\right) == 6;$$

$$3^{\sqrt{x}-1}(9 - 6 - 1) = 6;$$

$$3^{\sqrt{x}-1} = 3;$$

$$\sqrt{x} - 1 = 1;$$

$$\sqrt{x} = 2;$$

$$x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

- $ma^{2f(x)} + na^{f(x)} + p = 0$

Это уравнение называют трехчленным показательным уравнением. Подстановка $y = a^{f(x)}$, $y > 0$ дает обыкновенное квадратное уравнение $my^2 + ny + p = = 0$. Найдя его корни y_1 и y_2 и выбрав те из них, которые больше нуля, решают уравнения $y_1 = a^{f(x)}$, $y_2 = a^{f(x)}$. Если же $y_1 \leq 0$ и $y_2 \leq 0$, то уравнение корней не имеет.

<u>Пример</u>. Решить уравнение

$$9^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1} = \frac{4}{9}.$$

Решение.

Используя свойства степеней, представим исходное уравнение в виде

$$3^{2x} \cdot 9 - \frac{5}{3} \cdot 3^x - \frac{4}{9} = 0.$$

Полагая далее $3^x = t, t > 0$, приходим к уравнению $9t^2 - \frac{5}{3}t - \frac{4}{9} = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} + 16}}{18} = \frac{\frac{5}{3} \pm \frac{13}{3}}{18}$$

$t_1 = \frac{1}{3}$; $t_2 < 0$.

Значит, $3^x = \frac{1}{3}$ и $x = -1$.

Ответ: -1.

- $ma^{2f(x)} + na^{f(x)}b^{f(x)} + qb^{2f(x)} = 0$

Считая, что $m \neq 0$, $n \neq 0$, будем решать уравнения делением обеих его частей на $a^{2f(x)} \neq 0$ или на $b^{2f(x)} \neq 0$. В первом случае получаем

$$m + n\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} + q\left(\frac{b}{a}\right)^{2f(x)} = 0,$$

далее выполняем подстановку $\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} = t$, где $t > 0$, и получаем обычное квадратное уравнение, решение которого не составляет затруднения.

Пример. Решить уравнение

$$9^{x+0,5} + 4^{x-0,5} = 10 \cdot 6^{x-0.5}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $9 \cdot 9^{x-0,5} + 4^{x-0,5} = 10 \cdot 6^{x-0,5}$ и разделим его на $4^{x-0,5} > 0$, получим $9 \cdot 1,5^{2(x-0,5)} + 1 = 10 \cdot 1,5^{x-0,5}$.

Полагая $1,5^{x-0,5} = a$, где $a > 0$, получаем $9a^2 - 10a + 1 = 0$, откуда $a = 1$ и $a = \frac{1}{9}$. Далее решаем уравнения $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-0,5} = 1$и $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-0,5} = \frac{1}{9}$.

Таким образом, $x = 0,5$, $x = 0,5 + \log_{\frac{2}{3}} 9$.

Ответ: $0,5$; $0,5 + \log_{\frac{2}{3}} 9$[Севрюков, 2008].

Логарифмические уравнения

Уравнения, содержащие неизвестные под знаком логарифма или в основании, называются логарифмическими. Иными словами, логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду [Мордкович, 2007].

Выделим следующие методы решения логарифмических уравнений:

- функционально-графический метод;
- метод введения новой переменной;
- метод потенцирования;
- метод логарифмирования.

Рассмотрим основные виды логарифмических уравнений и идеи их решения.

- $\log_a f(x) = b$

Уравнение $\log_a f(x) = b$, где a — отличное от единицы положительное число, равносильно уравнению $f(x) = a^b$. Поскольку $a^b > 0$, при x_0 таком, что $f(x_0) = a^b$, будет $f(x_0) > 0$, то при решении уравнений рассматриваемого вида находить область допустимых значений (область определения уравнения) или выполнять проверку нет необходимости.

Пример. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 5x + 6) = 1$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 5x + 6 = 2;$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4 [Севрюков, 2008].

- $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Решение уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основывается на теореме 6.

От уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ переходят к уравнению $f(x) = g(x)$ (такой переход называют потенцированием), решают уравнение $f(x) = g(x)$, а затем проверяют его корни по условиям $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ определяющим область допустимых значений переменной x. Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Пример. Решить уравнение $\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$.

Решение. Потенцируя, получаем:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$

$$x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_1 = 4; x_2 = -3.$$

Проверим найденные корни по условиям

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = 4$ не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что $x = 4$ не удовлетворяет второму неравенству системы), т.е. $x = 4$ – посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x = -3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -3$ – корень заданного уравнения.

Ответ: –3 [Мордкович , 2007].

- $\log_{q(x)} f(x) = b$

Уравнение $\log_{q(x)} f(x) = b$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = q^b(x), \\ q(x) > 0, \\ q(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Поэтому можно решить уравнение $f(x) = q^b(x)$ и проверить при найденных корнях выполнение неравенств $q(x) > 0$ и $q(x) \neq 1$. Выполнять проверку неравенства $f(x) > 0$ нет необходимости, поскольку$f(x) = q^b(x) > 0$.

Естественно, можно найти область определения уравнения, решив систему неравенств $\begin{cases} q(x) > 0, \\ q(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Можно решить уравнение $f(x) = q^b(x)$ и проверить найденные корни непосредственной подстановкой их значений в уравнение $\log_{q(x)} f(x) = b$. При этом следует помнить о необходимости выполнения трёх неравенств $\begin{cases} q(x) > 0, \\ q(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Пример. Решить уравнение $\log_{2-x}(x^2 + 3x - 6) = 1$

Решение. Область определения уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} 2 - x > 0, \\ 2 - x \neq 1, \\ x^2 + 3x - 6 > 0. \end{cases}$

Из данного уравнения следует, что

$$x^2 + 3x - 6 = 2 - x;$$

$$x^2 + 4x - 8 = 0;$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}.$$

Оба корня удовлетворяют неравенствам $x < 2$, $x \neq 1$ и, очевидно, последнему неравенству системы.

Ответ: $-2 \pm 2\sqrt{3}$.

- $a^{\log_a f(x)} = b$

$q(x)^{\log_{q(x)} f(x)} = b.$

При решении уравнений вида $a^{\log_a f(x)} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, получаем равносильное ему уравнение $f(x) = b$.

При решении уравнений вида $q(x)^{\log_{q(x)} f(x)} = b$, $b > 0$ необходимо либо выполнять непосредственную проверку, либо проверить выполнение неравенств $q(x) > 0$, $q(x) \neq 1$ ($f(x) > 0$ можно не проверять, так как $f(x) = b > 0$).

Пример. Решить уравнение $4^{\log_2(x-2)} = 9$.

Решение. Область определения уравнения задается неравенством $x - 2 > 0$, откуда $x > 2$.

$$4^{\log_2(x-2)} = \left(2^{\log_2(x-2)}\right)^2 = (x-2)^2.$$

Значит, $(x-2)^2 = 9$;

$x - 2 = 3$ и $x = 5$ – корень данного уравнения,

$x - 2 = -3$; $x = -1$ – посторонний для данного уравнения корень.

Ответ: 5.

Пример. Решить уравнение $(x^2 + x)^{\log_{x^2+x}(x^2-2x)} = 3$.

Решение. Область определения уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x \neq 1, \\ x^2 - 2x > 0. \end{cases}$

Уравнение дает $x^2 - 2x = 3$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = -1$, $x = 3$. Первый корень не удовлетворяет неравенству $x^2 + x > 0$ и является посторонним для данного уравнения корнем. При $x = 3$ уравнение обращается в верное равенство.

Ответ: 3.

- $f(\log_a q(x)) = 0$

При решении таких уравнений выполняется замена $\log_a q(x) = t$, тогда $\log_a q(x) = t_i$ где t_i – корни уравнения $f(t) = 0$. Необходимо помнить, что $a > 0$, $a \neq 1$. Аналогично решаются уравнения вида $f\left(\log_{m(x)} q(x)\right) = 0$, однако здесь, в отличие от уравнения $f(\log_a q(x)) = 0$, необходимо учитывать область определения или выполнять проверку, так как уравнения $\log_{m(x)} q(x) = y$ и $m^y(x) = q(x)$ не равносильны. Очевидно, что уравнения $\log_x(x^2 - 6) = 1$ и $x^2 - x - 6 = 0$ не являются равносильными, поскольку второе уравнение имеет корни $x = 3$ и $x = -1$, а первое – только $x = 3$.

Пример. Решить уравнение $2\log_2^2 x - \log_2 x^3 + 1 = 0$.

Решение. Заменяем уравнение на равносильное $2\log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 = 0$ и полагаем $\log_2 x = y$, получаем уравнение $2y^2 - 3y + 1 = 0$, корни которого $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Значит, данное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\log_2 x = 1$ и $\log_2 x = \frac{1}{2}$, корни которых $x = 2$ и $x = \sqrt{2}$.

Ответ: 2; $\sqrt{2}$ [Севрюков, 2008].

Тригонометрические уравнения

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций.

К их числу, прежде всего, относятся простейшие тригонометрические уравнения, т. е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$,$\operatorname{ctg} x = a$, где a — действительное число [Мордкович, 2007].

Выделим следующие методы решения тригонометрических уравнений:

- метод введения новой переменной;
- метод разложения на множители;
- функционально-графический метод;
- методы искусственных преобразований;
- метод экстремальных значений;
- метод, основанный на скалярном произведении.

Рассмотрим основные виды тригонометрических уравнений.

Простейшие: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Если $|a| \leq 1$, то уравнение $\sin x = a$ имеет две серии решений:

$$x = \arcsin a + 2\pi k, x = \pi - \arcsin a + 2\pi k; k \in Z.$$

или

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z.$$

Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет решений.

Если $|a| \leq 1$, то уравнение $\cos x = a$ имеет решения:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k; k \in Z.$$

Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет решений.

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ при любом действительном a имеет вид $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$.

Аналогично, решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$при любом действительном a имеет вид$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$ [Мордкович, 2007].

- $R(\sin x, \cos x) = 0$

Рассмотрим тригонометрические уравнения, рациональные относительно тригонометрических функций.

Так как все тригонометрические функции рационально выражаются через $\sin x$ и $\cos x$, то в общем случае рациональное уравнение относительно тригонометрических функций одного аргумента можно представить в виде

$$R(\sin x, \cos x) = 0$$

где R - рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Общий прием решения уравнений такого типа заключается в следующем: данное уравнение приводится к алгебраическому относительно тригонометрической функции одинакового аргумента. Затем, решая получившееся алгебраическое уравнение относительно этой функции, приводят данное уравнение к нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, из которых находят значения неизвестного и проверяют, какие из них являются решениями данного уравнения.

Если $x \neq (2n + 1)\pi$, где $n \in Z$, то любое тригонометрическое уравнение вида $R(\sin x, \cos x) = 0$ рациональное относительно всех входящих в него тригонометрических функций, можно привести к рациональному уравнению относительно неизвестного $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Однако, решая уравнение таким методом, можно потерять корни вида $x = (2n + 1)\pi$, где $n \in Z$, для которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла. Поэтому необходимо проверить, являются ли числа $x = (2n + 1)\pi$, где $n \in Z$, корнями исходного уравнения.

Если уравнение $R(\sin x, \cos x) = 0$ или приводимое к нему при замене x на $\pi - x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\sin x$.

Если уравнение $R(\sin x, \cos x) = 0$ или приводимое к нему при замене x на $-x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\cos x$.

Если уравнение $R(\sin x, \cos x) = 0$ или приводимое к нему при замене x на $\pi + x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\operatorname{tg} x$.

Сказанное выше проиллюстрируем примером.

Пример. Решить уравнение $5\sin 2x - 5\cos 2x = \operatorname{tg} x + 5$ (*).

Решение. Применив формулы $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ и $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, представим заданное уравнение в виде

$$5\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - 5\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x + 5 \quad (**)$$

Выясним, равносильны ли уравнения (*) и (**). Функции $\sin 2x$ и $\cos 2x$ определены для $x \in R$, а подставленные вместо них правые части определены лишь для $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Значит, в результате подстановки исключены из рассмотрения значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Однако ни одно из этих значений x не является решением исходного уравнения (*), поскольку его правая частьдля $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ не определена. Отсюда следует, что каждоерешение уравнения (*) является решением уравнения (**). Очевидно, верно и обратное. Таким образом, уравнения (*) и (**) равносильны.

Обозначив в уравнении (**) $\operatorname{tg} x = t$, запишем $\frac{10t}{1+t^2} - \frac{5-5t^2}{1+t^2} = t + 5$. После приведения к общему знаменателю и несложных преобразований придем к уравнению $t^3 - 9t + 10 = 0$, равносильному предыдущему. Один из делителей свободного члена, а именно $t_1 = 2$, является корнем этого уравнения. Разложив теперь левую часть на множители, получим$(t-2)(t^2 + 2t - 5) = 0$. Решив квадратное уравнение $t^2 + 2t - 5 = 0$, найдем еще двазначения $t_2 = \sqrt{6} - 1$, $t_3 = -\sqrt{6} - 1$. Таким образом, исходное уравнение (*) равносильно совокупности трех уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 2, \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{6} - 1 \;, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{6} - 1, \end{array}\right.$$

которые имеют, соответственно, решения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi m, m \in Z, \\ x_2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} - 1) + \pi l, l \in Z, \\ x_3 = -\operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 1) + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 2 + \pi m, m \in Z$; $\operatorname{arctg}(\sqrt{6} - 1) + \pi l, l \in Z$; $-\operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 1) +$ $+\pi k, k \in Z$.

- $a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \cdots + +a_n \sin^n x = 0$ – однородные тригонометрические уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Тригонометрическое уравнение вида

$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \cdots + a_n \sin^n x = 0$ (5)

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные числа, а n - натуральное число, называется однородным уравнением относительно функций $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней у $\sin x$ и $\cos x$ во всех членах такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородности уравнения или показателем однородности.

Уравнение (5) является частным случаем уравнения $R(\sin x, \cos x) = 0$ и делением обеих своих частей на $\cos^n x \neq 0$ (или на $\sin^n x \neq 0$) приводится к целому рациональному относительно $\operatorname{tg} x$ (или $c\operatorname{tg} x$):

$a_n \operatorname{tg}^n x + a_{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x + a_{n-2} \operatorname{tg}^{n-2} x + \cdots + a_0 = 0$

(или $a_n \operatorname{ctg}^n x + a_{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x + a_{n-2} \operatorname{ctg}^{n-2} x + \cdots + a_0 = 0$);

при этом область определения уравнения сужается на значения: $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ (или на $x = \pi n$), где $n \in Z$.

<u>Пример</u>. Решить уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.

Решение. Рассмотрим такие значения x, для которых $\cos x = 0$. Из уравнения следует, что тогда и $\sin x = 0$, а это невозможно. Следовательно, среди этих значений x решений нет. Рассмотрим значения x, для которых $\cos x \neq 0$. Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$, равносильное исходному. Решив его как квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, найдем

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 2, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n = \dfrac{\pi}{4}(4n + 1), n \in Z, \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(4n + 1)$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi m$, где $\{n, m\} \in Z$.

Умножением на тригонометрическую единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, где $k \in N$, можно привести к однородному некоторые уравнения, не являющиеся однородными. Так, к уравнению вида (5) сводится уравнение

$$a_0 \cos^{2n} x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \cdots + a_n \sin^n x = b.$$

Для этого нужно умножить b на тригонометрическую единицу:
$b = b(\sin^2 x + \cos^2 x)^n, n \in Z$.

Пример. Решить уравнение $2\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 2{,}5$.

Решение. Сведем уравнение к однородному, заменив в правой части уравнения 2,5 на $2{,}5(\cos^2 x + \sin^2 x)$ и воспользовавшись формулой синуса двойного угла $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. При этом уравнение принимает вид:
$\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$.

Далее поступаем как в предыдущем примере.

Замечание. Рассмотрим последнее уравнение как квадратное относительно $\sin x$, тогда

$$\sin x = 2\cos x \pm \sqrt{4\cos^2 x - 3\cos^2 x} = 2\cos x \pm \cos x\,;$$
$$\sin x = 3\cos x \text{ или } \sin x = \cos x.$$

Решение каждого из двух однородных уравнений первой степени дает ответ.

- $a\sin \omega x + b\cos \omega x = c$

Уравнение вида $a\sin \omega x + b\cos \omega x = c$ $(a^2 + b^2 \neq 0, \omega \neq 0)$ является частным случаем уравнения $R(\sin x, \cos x) = 0$, следовательно, его можно решать с помощью универсальной подстановки, а также приводить к однородному.

Укажем еще один способ решения этого уравнения, так называемый способ введения вспомогательного угла. Пусть $a\sin \omega x + b\cos \omega x = c$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

Разделим обе его части на$\sqrt{a^2 + b^2}$, тогда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos \omega x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пусть φ - одно из решений системы$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$

Воспользовавшись этими равенствами, запишем уравнение в виде

$$\sin \omega x \cos\varphi + \cos \omega x \sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Применив формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, получим уравнение $\sin(\omega x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, которое равносильно исходному уравнению.

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$, т.е. $a^2 + b^2 \geq c^2$, то уравнение имеет решение

$\omega x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n$ или $x = \frac{(-1)^n}{\omega}\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\varphi}{\omega} + \frac{\pi n}{\omega}, n \in Z$.

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, т.е. $a^2 + b^2 > c^2$, то уравнение решений не имеет. Ясно, что для окончательного ответа необходимо найти φ, что будет показано при решении конкретного примера.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$, получим $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$. Заменим $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на $\cos(-\frac{\pi}{6})$ и $(-\frac{1}{2})$ на $\sin(-\frac{\pi}{6})$; тогда исходное уравнение примет вид $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Решив последнее уравнение, найдем

$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, или $x = (1 + (-1)^n)\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $(1 + (-1)^n)\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

- $\sin x = \sin y, \cos x = \cos y, \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$

Если $\sin x = \sin y$, то $x = (-1)^k \arcsin(\sin y) + \pi k,\ k \in Z$, откуда $x = \pi k +$ $+(-1)^k y$. Если $k = 2n$, то $x - y = 2\pi n$, если $k = 2n + 1$, то $x + y = (2n + 1)\pi$, где $\pi \in Z$.

Если $\cos x = \cos y$, то $x = \pm\arccos(\cos y) + 2\pi k,\ k \in Z, x = \pm y + 2\pi k$, $k \in Z$ и $x \pm y = 2\pi k, k \in Z$.

Если $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$, то $x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) + \pi k,\ k \in Z;\ x = y + \pi k,\ k \in Z$ и $x - y = \pi k, k \in Z$.

Эти условия можно использовать для решения уравнений вида $\sin nx = \sin mx$; $\cos nx = \cos mx$; $\operatorname{tg} nx = \operatorname{tg} mx$; $\sin nx = \cos mx$; $\operatorname{tg} nx = \operatorname{ctg} mx$.

В последних двух уравнениях достаточно одну из функций по формулам приведения заменить на сходную функцию (например, синус на косинус).

Пример. Решить уравнение $\cos 3x = \sin x$.

Решение. Записав уравнение в виде $\cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, получаем

$3x \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\pi k, k \in Z.$

$2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi l,\ l \in Z; x = -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in Z;$

$4x - \frac{\pi}{2} = 2\pi n, n \in Z; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in Z; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ [Севрюков, 2008].

О методах искусственных преобразований, решении тригонометрических уравнений методом экстремальных значений и с помощью скалярного произведения векторов можно ознакомиться в приложении 1.

В следующем пункте рассмотрим формирование обобщенных приемов решения неравенств. Отметим, что некоторый материал опирается на теорию решения уравнений.

1.4. Формирование обобщенных приемов решения неравенств

Равносильность неравенств.

Напомним, что решением неравенства $f(x) > g(x)$ называют всякое значение переменной x, которое обращает заданное неравенство с переменной в верное числовое неравенство. Иногда используют термин частное решение. Множество всех частных решений неравенства называют общим решением или просто решением неравенства. Таким образом, термин решение используют в трех смыслах: как общее решение, как частное решение и как процесс, но обычно по смыслу бывает ясно, о чем идет речь.

Определение. Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(\mathrm{x}) > h(x)$ называют равносильными, если их решения (т.е. множества частных решений) совпадают. Заметим, что использование в определении знака $>$ непринципиально.

Определение. Если общее решение неравенства $f(x) > g(x)$ содержится в общем решении неравенства $p(\mathrm{x}) > h(x)$, то неравенство $p(\mathrm{x}) > h(x)$ называют следствием неравенства $f(x) > g(x)$.

Решение неравенств в школьном курсе алгебры основано на шести теоремах о равносильности, в определенном смысле аналогичных соответствующим теоремам о равносильности уравнений.

Теорема 7. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 8. Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 9. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно:

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$,

если $0 < a < 1$.

Теорема 10. а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства $f(x) > g(x)$, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.

б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех x из области определения неравенства $f(x) > g(x)$, изменив при этом знак неравенства на противоположный ($>$ на $<$), то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.

Теорема 11. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же четную степень n получится неравенство того же смысла $\left(f(x)\right)^n > \left(g(x)\right)^n$, равносильное данному в его ОДЗ.

Теорема 12. Пусть X — решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда логарифмическое неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно на множестве X:

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$ [Мордкович, 2007].

Общие методы решения неравенств

Прежде чем перейти к решению неравенств конкретного типа, необходимо рассмотреть общие методы решения неравенств.

Можно выделить следующие методы решения неравенств: алгебраический, функционально-графический и геометрический (рис. 16).

Алгебраический метод решения

При решении неравенств используются различные преобразования (возведение в четную или нечетную степень, логарифмирование, потенцирование), которые позволяют привести неравенство к более простому виду. В процессе преобразований множество решений исходного неравенства либо не меняется, либо расширяется (можно получить посторонние решения), либо сужается (можно потерять решения). Необходимо знать, какие преобразования являются равносильными, и при каких условиях они выполняются.

Алгебраический метод решения неравенств включает в себя следующее: сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем, метод замены или разбиение области определения неравенства на подмножества.

Схемы сведения некоторых стандартных определенного вида к равносильной системе или совокупности систем будут описаны ниже.

Раскроем более подробно суть метода замены переменных. Если неравенство $F(x) * 0$ приводится к виду $f\left(g(x)\right) * 0$, то можно ввести новую переменную $g(x) = a$, решить неравенство $f(a) * 0$ относительно переменной a и затем решить полученные неравенства с первоначальной переменной x [Прокофьев, Корянов, 2014].

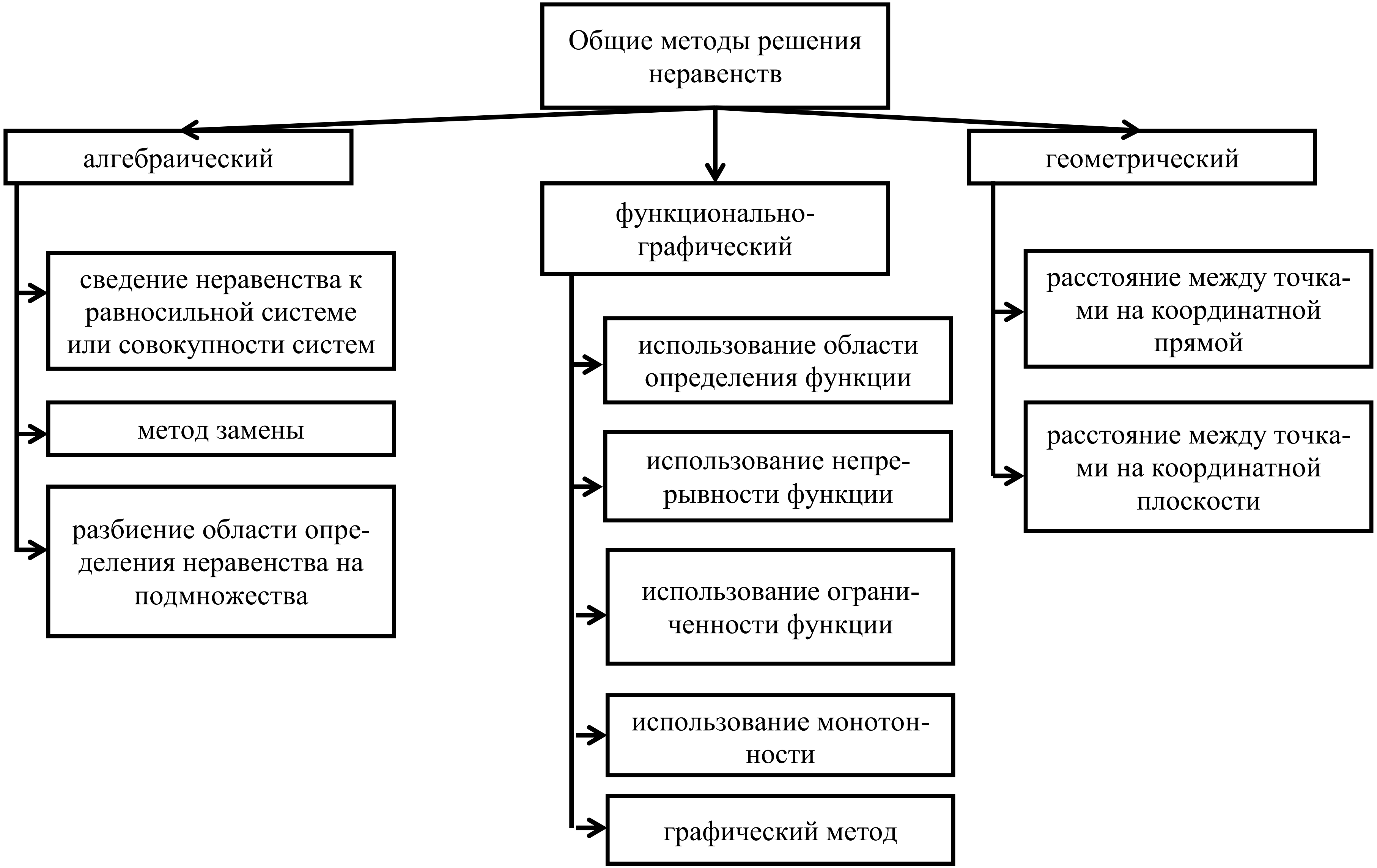


Рис. 16. Общие методы решения неравенств

Пример. Решить неравенство $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4\le 0$.

Решение. Пусть $\frac{x^2+x-5}{x}=a$, тогда получаем неравенство

$$a+\frac{3}{a}+4\le 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+4a+3}{a}\le 0.$$

Используя метод интервалов в последнем неравенстве, находим его решения $a\le -3$ или $-1\le a<0$. Возвращаемся к первоначальной переменной и решаем неравенства $\frac{x^2+x-5}{x}\le -3$ и $-1\le \frac{x^2+x-5}{x}<0$.

Первое неравенство приводим к виду $\frac{x^2+4x-5}{x}\le 0$ и находим решения $x\le -5$ или $0<x\le 1$.

Двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+x-5}{x}\ge -1,\\ \dfrac{x^2+x-5}{x}<0.\end{cases}$$

Отсюда получаем $-1-\sqrt{6}\le x<\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ или $-1+\sqrt{6}\le x<\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$. Объединяя полученные решения с найденными выше, записываем ответ.

Ответ: $x\le -5$; $-1-\sqrt{6}\le x<\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $0<x\le 1$; $-1+\sqrt{6}\le x<\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ [Лысенко, Кулабухов, 2013].

Функциональной-графический метод решения

Функционально-графический метод решения неравенств включает в себя следующее: использование области определения функции, использование непрерывности функции, использование ограниченности функции, использование монотонности, графический метод.

Область применения свойств функции при решении неравенств очень широка. Наличие свойств (ограниченность, монотонность и т.д.) функций, входящих в неравенства, позволяет применить нестандартные методы решения к стандартным по формулировке задачам – неравенствам.

Рассмотрим метод решения неравенств, основанный на свойстве непрерывности функций.

Сформулируем свойство непрерывных функций: *если функция $f(x)$ непрерывна на интервале и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак*.

На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов.

Пусть дана функция $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$. Она равна нулю в единственной точке $x_0 = -\frac{b}{a}$. В силу монотонности непрерывная функция $f(x) = ax + b$ принимает на промежутках $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ значения разного знака. Согласно свойству чередования знака линейного двучлена $ax + b$, $(a \neq 0)$: при переходе через значение $x_0 = -\frac{b}{a}$ знак значения выражения $ax + b$ меняется на противоположный.

Рассмотрим функцию $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ (6), где $f_i(x) = a_i x + b_i$, причем $\frac{b_i}{a_i} \neq \frac{b_j}{a_j}$, $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$, $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Функции (6) соответствует разбиение числовой прямой на $n + 1$ интервалов точками $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как при переходе через каждую точку x_i в выражении (6) меняет знак только один множитель $a_i x + b_i$, то получаем следующее свойство чередования знака функции (6): при переходе через точку $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ из одного интервала в смежный знак значения функции (6) меняется на противоположный.

Решение неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ методом интервалов, где $f(x)$ – функция вида (6), заключается в следующем. На числовой прямой расставляют числа $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ и заем для одного из образовавшихся промежутков с помощью пробной точки этого промежутка определяют знак данной функции. В остальных промежутках знаки расставляем согласно свойству знакочередования функции (6). Тогда объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «плюс», представляет решение неравенства $f(x) > 0$, а объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «минус», есть решение неравенства $f(x) < 0$. Для решения нестрогих неравенств необходимо к решениям строго неравенства добавить корни уравнения $f(x) = 0$.

Далее рассмотрим рациональные неравенства и соответствующие им функции $f(x)$, для которых при переходе из одного интервала в смежный интервал знак функции $f(x)$ может и не меняться.

Пусть дана функция вида $f(x) = f_1^{k_1}(x) \cdot f_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot f_n^{k_n}(x)$ (7), где $f_i(x) = a_i x + b_i$, причем $\frac{b_i}{a_i} \neq \frac{b_j}{a_j}$, $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$, $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – фиксированные натуральные числа.

Для решения неравенства $f(x) * 0$, где выражение имеет вид (7), используется обобщенный метод интервалов, который опирается на следующее правило чередования знаков выражения: при переходе через точку $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ из одного интервала в смежный знак значения функции (7) меняется на противоположный, если k_i – четное число.

Пример. Решить неравенство $(x-3)^2(x-\sqrt{7})\left(x-2\frac{16}{25}\right) \le 0.$

Решение.

1) Рассмотрим функцию $f(x) = (x-3)^2(x-\sqrt{7})\left(x-2\frac{16}{25}\right).$

2) $D(f) = 0.$

3) Найдем нули функции $f(x)$ из уравнения

$$(x-3)^2(x-\sqrt{7})\left(x-2\frac{16}{25}\right) = 0.$$

Отсюда корни уравнения: 3; $\sqrt{7}$ и 2,64. Сравним полученные числа. Так как $7 < 9$, то $\sqrt{7} < \sqrt{9}$ и $\sqrt{7} < 3$.

Аналогично из неравенства $7 > 2{,}64^2 = 6{,}9696$получаем $\sqrt{7} > \sqrt{2{,}64^2}$, $\sqrt{7} > 2{,}64$.

4) Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Так как $f(0) > 0$, то на интервале $(-\infty; 2{,}64)$ функция $f(x)$ положительна. На других промежутках расставляем знаки, учитывая кратность корней, как показано на рисунке 17.

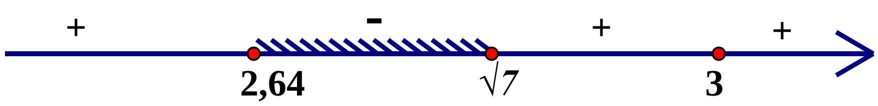


Рис. 17. Решение неравенства $(x-3)^2(x-\sqrt{7})\left(x-2\frac{16}{25}\right) \le 0.$

Отсюда $f(x) \le 0$ при всех значениях $x \in \left[2{,}64;\ \sqrt{7}\right] \cup \{3\}$.

Ответ: $\left[2{,}64;\ \sqrt{7}\right] \cup \{3\}$.

Чтобы расширить возможности применения метода интервалов при решении неравенств, можно использовать идею рационализации неравенств.

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете рациональное), при которой неравенство $G(x) > 0$ ($G(x) < 0$) равносильно неравенству $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$) в области определения выражения $F(x)$. В этом случае будем говорить, что выражение $G(x)$ является рационализацией (или рационализирующим выражением) для выражения $F(x)$ [Лысенко, Кулабухов, 2013].

Идея метода рационализации состоит в использовании свойств монотонности функции.

Теорема 13. Если $p(x)$ – функция, монотонная на промежутке M, и $E(p)$ – множество ее значений на этом промежутке, то для любого числа $c \in E(p)$ существует и притом единственный корень $x_0 \in M$ уравнения $p(x) = c$.

Следствие 1. Если $p(x)$ – возрастающая функция на промежутке M, то для любых чисел $x_1, x_2 \in M$ неравенства $p(x_1) \geq p(x_2)$ и $x_1 \geq x_2$ равносильны, или $p(x_1) - p(x_2) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geq 0$ (аналогично $p(x_1) - p(x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 > 0$).

Следствие 2. Если $p(x)$ – убывающая функция на промежутке M, то для любых чисел $x_1, x_2 \in M$ неравенства $p(x_1) \geq p(x_2)$ и $x_1 \leq x_2$ равносильны, или $p(x_1) - p(x_2) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \leq 0$ (аналогично $p(x_1) - p(x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$) [Прокофьев, Корянов, 2014].

Заметим, что любое неравенство приводимо к виду

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k} * 0, \qquad (8)$$

где символу «*» соответствует один из знаков «<», «>», «≤», «≥» (а на самом деле ещё и знак «=»).

Приведем возможную последовательность действий при решении неравенств методом рационализации.

1. Выписать условия, задающие ОДЗ (необязательно их преобразовывать и решать).
2. Привести исходное неравенство к виду (8), то есть справа должен стоять 0, а все возможные слагаемые в левой части необходимо привести к общему знаменателю (если среди этих слагаемых встречаются дроби).
3. Явно указать ОДЗ исходного неравенства. Для знаменателя условия $v_k \neq 0$ можно пока не преобразовывать.
4. По возможности заменить все выражения u_n и v_k на более простые, совпадающие по знаку с исходными. Каждый множитель следует заменять несколько раз – до тех пор, пока это возможно.
5. Решить полученное неравенство. Например, методом интервалов.
6. Записать ответ исходного неравенства, учитывая ОДЗ.

Рассмотрим часто встречающиеся замены, где $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$ – выражения, зависящие от x; $p(x)$, $q(x)$ – произвольные выражения, зависящие от x (либо константы) (табл. 4).

Жирными выделены те замены, которые можно встретить чаще всего. С обоснованием корректности замен, предложенных в таблице, можно ознакомиться в следующих источниках [Лысенко, Кулабухов, 2013; Прокофьев, Корянов, 2014].

Таблица 4

Часто встречающие замены при методе рационализации

№	Исходное выражение ($F(x)$)	Выражение после замены ($G(x)$)
1	$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$ ($h(x) \neq 1$)	$(h(x) - 1)(f(x) - g(x))$
2	$\log_{h(x)} f(x) - 1$ ($h(x) \neq 1$)	$(h(x) - 1)(f(x) - h(x))$
3	$\log_{h(x)} f(x)$ ($h(x) \neq 1$)	$(h(x) - 1)(f(x) - 1)$
4	$\log_{f(x)} h(x) - \log_{g(x)} h(x)$ ($f(x) \neq 1, g(x) \neq 1$)	$(f(x) - 1)(g(x) - 1)\times$ $\times(h(x) - 1)(g(x) - f(x))$
5	$h(x)^{p(x)} - h(x)^{q(x)}$	$(h(x) - 1)(p(x) - q(x))$
6	$h(x)^{p(x)} - 1$	$(h(x) - 1)p(x)$
7	$f(x)^{p(x)} - g(x)^{p(x)}$	$(f(x) - g(x))p(x)$
8	$\lvert p(x)\rvert - \lvert q(x)\rvert$	$(p(x) - q(x))\times$ $\times(p(x) + q(x))$
9	$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, здесь $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$	$f(x) - g(x)$
10	$\lvert p(x)\rvert - \sqrt{g(x)}$, здесь $g(x) \geqslant 0$	$p^2(x) - g(x)$

Пример. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 20} - \sqrt{x^2 - 3x} \geq 0.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2 - 12x + 20 \geq 0, \\ x^2 - 3x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 2(x-3)^2 + 2 \geq 0, \\ x(x-3) \geq 0; \end{cases}$

$x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Воспользуемся девятой строчкой таблицы замен, получим, что на ОДЗ данное неравенство можно заменить на $(2x^2 - 12x + 20) - (x^2 - 3x) \geq 0$, то есть $x^2 - 9x + 20 \geq 0$. Корни уравнения $x^2 - 9x + 20 = 0$ легко найти, их значения $x_1 = 4$ и $x_2 = 5$. Тогда неравенство примет вид $(x - 4)(x - 5) \geq 0$, откуда $x \in (-\infty; 4] \cup [5; +\infty)$. С учетом ОДЗ получим решение исходного неравенства: $x \in (-\infty; 0] \cup [3; 4] \cup [5; +\infty)$ (рис. 18)

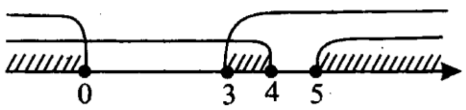


Рис. 18. Решение неравенства $\sqrt{2x^2 - 12x + 20} - \sqrt{x^2 - 3x} \geq 0$

Этот пример ярко показывает и удобство метода рационализации, и то, что при замене какого-либо множителя его аналогом по знаку, нельзя забывать про ОДЗ исходного выражения.

Способы решения алгебраических неравенств

Рассмотрим алгебраические уравнения степени n, т.е. уравнения вида

$$P_n(x) = 0 \qquad (1)$$

и алгебраические неравенства степени n, т.е. неравенства вида

$$P_n(x) > 0$$

и

$$P_n(x) < 0,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, т.е.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \;\; a_0 \neq 0 \qquad (2)$$

Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать только неравенства вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n > 0 \qquad (9)$$

и

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n < 0 \qquad (10)$$

где $a_0 > 0$.

Линейные неравенства. В случае $n = 1$ неравенства (9) и (10) обычно записываются в виде

$$ax + b > 0, \quad a > 0, \qquad (11)$$

$$ax + b < 0, \quad a > 0, \qquad (12)$$

и называют неравенствами первой степени или линейные неравенства.

Множество решений неравенства (11) есть промежуток $(-\frac{b}{a};\ +\infty)$, множество решений неравенства (12) есть промежуток $(-\infty;\ -\frac{b}{a})$.

Квадратные неравенства. В случае $n = 2$ неравенства (9) и (10) обычно записывают в виде

$$ax^2 + bx + c > 0, \; a > 0, \qquad (13)$$

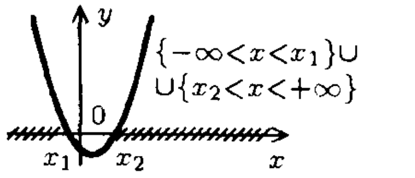
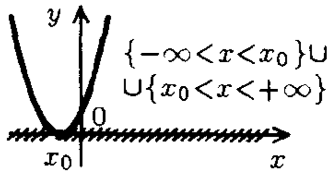
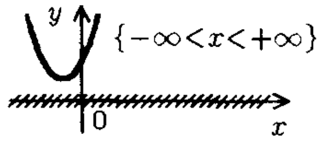
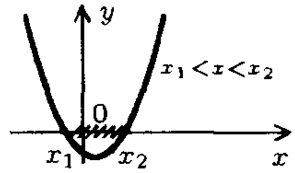
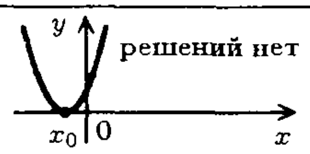
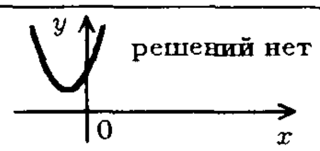
$$ax^2 + bx + c < 0, \; a > 0 \qquad (14)$$

и называют квадратными неравенствами.

Решения неравенств (13) и (14) зависят от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и приведены в таблице 5 [Олехник, Потапов, Пасиченко, 1998].

Таблица 5

Решение квадратных неравенств

Неравенство	Дискриминант D и корни	Множество решений и график квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$
$ax^2 + bx + c > 0$, $a > 0$	$D > 0$, $x_1 < x_2$	
	$D = 0$, $x_0 = x_1 =$ $= x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	
	$D < 0$, корней нет	
$ax^2 + bx + c < 0$, $a > 0$	$D > 0$, $x_1 < x_2$	
	$D = 0$, $x_0 = x_1 =$ $= x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	
	$D < 0$	

Таким образом, алгоритм решения квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ $(ax^2 + bx + c < 0)$ выглядит следующим образом:

1. Найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.
2. Отметить найденные корни на оси x и определить, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$; сделать набросок графика.
3. С помощью полученной геометрической модели определить, на каких промежутках оси x ординаты графика положительны (отрицательны); включить эти промежутки в ответ [Мордкович, 2010].

Неравенства высших степеней. В случае $n >$ 3 многочлен (2) надо сначала разложить на множители и затем либо заменить неравенство равносильной ему совокупностью систем неравенств, либо применить изложенный ниже метод интервалов.

Отметим, что при разложении на множители, конечно, можно пользоваться всеми теми же методами, которые были изложены при решении уравнений.

Дробно-рациональные неравенства.

Пусть дробно-рациональное неравенство представлено в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} * 0$, где $*= \{<, \leq, >, \geq\}$, $P(x)$ и $Q(x)$- рациональные выражения.

Областью определения дробно-рационального выражения вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$ является $D\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right): Q(x) \neq 0$.

Заменим каждое дробно-рациональное неравенство вида $\frac{P(x)}{Q(x)} * 0$, соответственно равносильным неравенством вида $P(x) \cdot Q(x) * 0$.

1. $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0$;
2. $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0$;
3. $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0; \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$
4. $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0; \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Таким образом, решение дробно-рациональных неравенств можно свести к решению рациональных неравенств методом интервалов.

<u>Пример.</u> Решить неравенство $\frac{(x^2-5x+6)(4-x)}{x^2+3x+2} < 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно $(x^2 - 5x + 6)(4 - x)(x^2 + 3x + 2) < 0$.

Перепишем это неравенство в виде

$$(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x + 1)(x + 2) > 0.$$

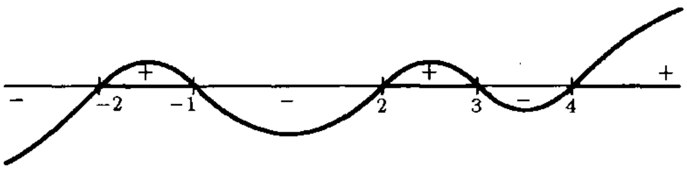


Рис. 19. Решение неравенства $\frac{(x^2-5x+6)(4-x)}{x^2+3x+2} < 0$

Применяя метод интервалов (рис. 19), получим, что решениями последнего неравенства, а значит, и решениями исходного неравенства, являются все x из трех промежутков $-2 < x < -1$, $2 < x < 3$, $4 < x < +\infty$.

Ответ: $(-2;\ -1) \cup (2; 3) \cup (4;\ +\infty)$.

Иррациональные неравенства

Приведем некоторые стандартные схемы, позволяющие решать иррациональные неравенства, в которых используют возведение в натуральную степень обеих частей неравенства (при условии $n \in N$).

1. $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

3. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

4. $\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

5. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$

6. $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$

7. $\sqrt[2n+1]{f(x)} * \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) * g(x);$

8. $\sqrt[2n+1]{f(x)} * g(x) \Leftrightarrow f(x) * g^{2n+1}(x).$

<u>Пример</u>. Решить неравенство $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x-2} = t$, где $t \geq 0$. Тогда выразим $x = t^2 + 2$ и приведем данное неравенство к виду $\sqrt{2t^2+7} > t + 2$.

Так как $t + 2 > 0$, то получаем равносильное неравенство $2t^2 + 7 > t^2 + 4t + 4$ или $t^2 - 4t + 3 > 0$ при $t \geq 0$. Отсюда получаем $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<1, \\ t>3, \end{array}\right. \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq t < 1, \\ t > 3. \end{array}\right.$

Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{x-2} < 1, \\ \sqrt{x-2} > 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x-2 < 1, \\ x-2 > 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq x < 3, \\ x > 11. \end{array}\right.$$

Ответ: $2 \leq x < 3$; $x > 11$ [Прокофьев, Корянов, 2014].

Способы решения неалгебраических (трансцендентных) неравенств.

Показательные неравенства

Показательными неравенствами называются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Решение неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ основано на теореме 9.

Пример. Решить неравенство $2^x < \frac{1}{8}$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то $2^x < 2^{-3}$, т.к. 2>1, функция $y = 2^t$ – возрастает. Следовательно, $x < -3$.

Для того чтобы решить неравенство вида $a^{f(x)} > b,\ a > 0$ необходимо рассмотреть два случая:

1) $b \leq 0$, тогда $a^{f(x)} > b \ \leftrightarrow x \in D(f)$

2) $b > 0$, тогда $a^{f(x)} > b \ \leftrightarrow f(x) > \log_a b$ при $a > 1$;

$a^{f(x)} > b \ \leftrightarrow f(x) < \log_a b$ при $0 < a < 1$.

При $a = 1$ исходное неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно числовому неравенству $1 > b$ при $x \in D(f)$.

Пример. Решить неравенство $2^x > 5$.

Решение.

$$2^x > 5,$$

$$2^x > 2^{\log_2 5},$$

$$x > \log_2 5.$$

Ответ: $x \in (\log_2 5\,;\ +\infty)$.

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b. Учитывая свойства показательной функции, получаем:

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \ \leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b$, если $a > 1$;

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \ \leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b$, если $0 < a < 1$.

Пример. Решить неравенство $2^x \geq 3^{x^2}$.

Решение.

$$2^x \geq 3^{x^2}$$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2. Тогда имеем:

$$\log_2(2^x) \geq \log_2\left(3^{x^2}\right),$$

$$x \geq x^2 \log_2 3,$$

$$x - x^2 \log_2 3 \geq 0,$$

$$x(1 - x\log_2 3) \geq 0,$$

$$x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right] \text{ или } x \in [0; \log_3 2].$$

Ответ: $x \in [0; \log_3 2]$.

Далее приведем некоторые стандартные схемы для решения показательных неравенств, в которых используется логарифмирование обеих частей неравенства.

1. $(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>g(x), \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x), \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right.$

2. $(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq g(x), \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x), \\ 0<\varphi(x)<1, \end{cases} \\ \varphi(x)=1. \end{array}\right.$

В частности:

Если число $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$; если число $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

3. $(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>g(x)>0, \\ \varphi(x)>0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x)>0, \\ \varphi(x)<0. \end{cases} \end{array}\right.$ [Прокофьев, Корянов, 2014].

Логарифмические неравенства

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где a – положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду [Мордкович, 2007].

Приведем некоторые стандартные схемы для решения логарифмических неравенств, в которых используют потенцирование обеих частей неравенства.

1. $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>g(x)>0, \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x)>0, \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right.$

В частности:

Если число $a > 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$. Если число $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0$.

2. $\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq g(x)>0, \\ \varphi(x)>1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geq f(x)>0, \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right.$

В частности:

Если число $a > 1$, то $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$. Если число $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) >= \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) \geq f(x) > 0$.

Пример. Решить неравенство $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$.

Решение. Так как основание 0,1 логарифмов, стоящих в обеих частях неравенства, удовлетворяет условию $0 < 0,1 < 1$, то получаем, что данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 < x + 3, \\ x^2 + x - 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0, \\ (x - 1)(x + 2) > 0. \end{cases}$$

Сделаем графическую интерпретацию получения решения последней системы неравенств (рис. 20).

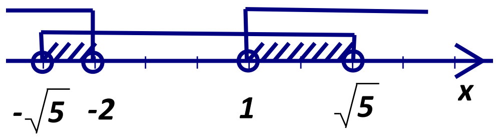


Рис. 20. Решение неравенства $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$

Ответ: $(-\sqrt{5};\ -2) \cup (1; \sqrt{5})$[Прокофьев, Корянов, 2014].

Выводы по первой главе

Резюмируя анализ психолого-педагогической литературы, сформулируем основные результаты проведенного исследования:

1. Материал школьного курса математики, касающийся уравнений и неравенств, обширен и составляет целую содержательно-методическую линию – линию уравнений и неравенств. Эта линия развивается в трех основных направлениях: прикладная направленность, теоретико-математическая направленность, направленность на установление связей с числовой, функциональной линиями и линией тождественных преобразований.

2. Анализ содержания программы по математике и требований к образовательным результатам доказывает необходимость последовательного расширения представлений учащихся об уравнениях и неравенствах, соблюдения единой методической линии в различных определениях уравнений, активной работы по воспитанию культуры символики и графики, выработки системности знаний о классе уравнений и неравенств, развитию алгоритмической культуры учащихся.

3. В школьных учебниках по математике 5–11 классов некоторых авторов нет сформированной единой концепции методов решения уравнений и неравенств. Другие авторы дают возможность переосмысления методов решения уравнений и неравенств, но лишь в конце изучения школьного курса математики.

4. В основной школе, начиная с пятого класса, учащиеся постепенно осваивают стандартные приемы решения, а также пополняют свой математический опыт новыми видами уравнений и неравенств. Но у большинства школьников складывается впечатление о немалом количестве методов решения. Многие думают, что существует отдельные теории решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств. Такое заблуждение приводит к возникновению ошибок при решении уравнений и нера-

венств, что в дальнейшем оказывает негативное влияние на результаты ЕГЭ по математике как на базовом, так и на профильном уровне.

Далее в своем исследовании обратимся к описанию методической идеи, позволяющей сформировать у учащихся обобщенные приемы и методы решения уравнений и неравенств с общих позиций с десятого класса на двух элективных курсах, которые взаимосвязаны друг с другом.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ 10–11 КЛАССА

2.1. Методические идеи формирования линии уравнений и неравенств в 10–11 классах

В Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования отмечается, что реализация идеи профилизации обучения на старшей ступени общего образования ставит выпускника перед необходимостью совершения ответственного выбора – предварительного самоопределения в отношении профилирующего направления собственной деятельности [Концепция профильного обучения…, 2002].

В связи с этим предпрофильная подготовка представляет собой систему педагогической, психологической, информационной и организационной поддержки учащихся основной школы, содействующую их самоопределению по завершению основного общего образования.

Это решение, безусловно, одно из важнейших в жизни каждого человека, и задача педагогов общеобразовательной школы – помочь учащимся этот выбор сделать осознанно, т.е. объективно оценить свои силы и возможности, способности, интересы и склонности.

В профильном обучении на решение этой задачи направлены элективные курсы.

Согласно ФГОС среднего общего образования, изучение дополнительных учебных предметов, курсов по выбору обучающихся должно обеспечить:

- удовлетворение индивидуальных запросов обучающихся;
- общеобразовательную, общекультурную составляющую при получении среднего общего образования;
- развитие навыков самообразования и самопроектирования;
- углубление, расширение и систематизацию знаний в выбранной области научного знания или вида деятельности;
- совершенствование имеющегося и приобретение нового опыта познавательной деятельности, профессионального самоопределения обучающихся.

Результаты изучения дополнительных учебных курсов, курсов по выбору обучающихся должны отражать:

1) развитие личности обучающихся средствами предлагаемого для изучения учебного предмета, курса: развитие общей культуры обучающихся, их мировоззрение, ценностно-смысловых установок, развитие познавательных, регулятив-

ных и коммуникативных способностей, готовности и способности к саморазвитию и профессиональному самоопределению;

2) овладение систематическими знаниями и приобретение опыта осуществления целесообразной и результативной деятельности;

3) развитие способности к непрерывному самообразованию, овладение ключевыми компетентностями, составляющими основу умения: самостоятельному приобретению и интеграции знаний, коммуникации и сотрудничеству, эффективному решению (разрешению) проблем, осознанному использованию информационных и коммуникационных технологий, самоорганизации и саморегуляции;

4) обеспечение академической мобильности и (или) возможности поддерживать избранное направление образования;

5) обеспечение профессиональной ориентации обучающихся [Федеральный государственный стандарт…, 2012].

Элективные курсы – обязательные курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы (реализуются за счет школьного компонента учебного плана).

На ступени среднего (полного) общего образования могут быть организованы следующие виды элективных учебных курсов профильного обучения:

– предметно-ориентированные, направленные на формирование у учащихся предметных компетенций;

– межпредметные курсы, направленные на развитие у учащихся основ метапредметных компетенций;

– внепредметные элективные курсы, способствующие развитию у учащихся специфических личностных качеств и удовлетворению их познавательных интересов в различных областях деятельности человека.

Программа элективного курса или курса по выбору должна:

– соответствовать концептуальным положениям профильного обучения и требованиям ФГОС общего образования;

– иметь практическую направленность;

– обладать логикой построения и подачи учебного материала;

– быть хорошо структурированной и связной по содержанию;

– быть реалистичной по времени и затраченным ресурсам;

– предполагать активные методы обучения, дающие учащимся осознанно и объективно сделать выбор для продолжения образования;

– иметь определенную степень новизны;

– обладать некоторой степенью обобщенности содержания, что позволяет развивать общеучебные и предметные умения и навыки.

В соответствии с ФГОС среднего (полного) общего образования, программы отдельных учебных предметов, курсов должны содержать:

1) пояснительную записку, в которой конкретизируются общие цели среднего (полного) общего образования с учетом специфики учебного предмета;

2) общую характеристику учебного предмета, курса;

3) описание места учебного предмета, курса в учебном плане;

4) личностные, метапредметные и предметные результат освоения конкретного учебного предмета, курса;

5) содержание учебного предмета, курса;

6) планируемые результаты изучения учебного предмета, курса;

7) тематическое планирование с определением основных видов учебной деятельности обучающихся;

8) описание учебно-методического и материально-технического обеспечения образовательного процесса [Федеральный государственный стандарт, 2012].

Примерная структура программы включает в себя несколько компонентов:

1. Титульный лист.
2. Пояснительная записка (аннотация).
3. Учебно-тематический план.
4. Содержание курса по темам.
5. Учебно-методическое обеспечение.

Пояснительная записка включает в себя: сведения об актуальности курса – роль, место и значение курса в системе профильного обучения; указание типа элективного курса; продолжительность по времени и количество часов в неделю; формулировка целей и задач курса с учетом типа курса и его функций; сведения о методах и формах организации занятий элективного курса (виды деятельности, предлагаемые учащимся); критерии, позволяющие оценить успехи учащихся; возможные пробы и ожидаемый результат.

Учебно-тематическое планирование, как правило, оформляется в виде таблицы с указанием наименований основных модулей, тем и разделов, теоретических и практических часов, ожидаемых образовательных результатов, предполагаемой деятельности учащихся и возможными формами контроля.

В содержании курса по выбору или элективного курса необходимо указать основные дидактические единицы учебной информации, способы и методы, а также типы задач, которые будут предложены участникам курса. При проектировании программы курса необходимо учесть, что содержание курса должно знакомить учащихся со способами деятельности; включать оригинальный материал, не дублировать содержание предметов, обязательных для изучения; помогать учащимся оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы; ранее недоступный для изучения материал должен стать открытым для обсуждения; модульное построение содержания, поскольку возможны переходы учащихся с курса на курс.

Учебно-методическое обеспечение курса представляет собой некий кластер учебно-методических ресурсов, который может быть полезен как учащимся, изучающим курс, так и педагогу, реализующему его. В него могут входить:

– методические рекомендации (список литературы и методические рекомендации для учащегося, список литературы и методические указания педагогу по реализации программы, глоссарий и другая полезная информация);

– учебные ресурсы (учебные пособия, справочники, энциклопедии, электронные образовательные ресурсы: электронные учебники, сайты, электронные издания, Интернет-ресурсы и др.);

– фонд оценочных средств (диагностические карты, карты рейтинга, модель портфолио, тесты, контрольные вопросы, темы проектов и заданий и др.).

В приложениях к программе может содержаться материал, дополняющий учебно-методическое обеспечение: тексты информационных материалов для лекций, семинаров, самостоятельной работы учеников; каталог заданий для самостоятельной работы и методические рекомендации по их выполнению; индивидуальные и дифференцированные задания, в том числе задания в тестовой форме; программы учебных практик и методические рекомендации по их проведению; тематика исследовательских работ и проектов; программы выполнения проектной и исследовательской деятельности, методические рекомендации по ее организации; образцы проектных и исследовательских работ и др. [Кейв, Власова, 2015].

Таким образом, учащимся 10–11 классов можно предложить элективные курсы, в рамках которых будет проводиться поддержка систематического курса математики за счет систематизации основных методов и приемов решения уравнений и неравенств, а также подготовка к сдаче ЕГЭ на профильном уровне и к поступлению в вуз. Теоретический материал об основных видах уравнений и неравенств, и обобщенных приемах их решения, предложенный в главе 1, будет использоваться для реализации сформулированной методической идеи, предложенной в следующем параграфе.

2.2. Методическое обеспечение линии

В связи с переходом системы общего образования на ФГОС второго поколения особую актуальность приобрел системно-деятельностный подход. Соответствующие этому подходу технологии призваны научить ребенка учиться, а не накапливать запас знаний, умений и навыков. Полученные знания в школе через некоторое время устаревают, становятся неактуальными и требуют коррекции. В связи с этим, в ФГОС среднего полного общего образования в качестве главных результатов были выделены не только предметные, но и личностные и метапредметные универсальные учебные действия. Важнейшей задачей современной системы образования является формирование универсальных учебных действий, обеспечивающих школьникам умение учиться, способность к саморазвитию и самосовершенствованию.

В качестве основного методического средства формирования линии уравнений и неравенств в 10–11 классах мы предлагаем элективные курсы «Уравнения и неравенства в профильной подготовке выпускников».

Программа элективных курсов дополняет изучение содержательно-методической линии уравнений и неравенств школьного курса математики 10−11 класса, подготавливает учащихся к дальнейшему изучению математики в средних и высших профессиональных учебных заведениях.

Пояснительная записка

Рабочая программа элективных курсов по математике «Уравнения и неравенства в профильной подготовке выпускников» для учащихся 10–11 классов разработана на основе:

1. Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 23.07.2013) «Об образовании в Российской Федерации».

2. Федерального компонента государственного стандарта общего образования. Приказ Минобразования РФ от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования».

3. Приказа Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) Приказом от 31 марта 2014 г. № 253 «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования».

Основная задача обучения математике в школе – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Данная программа предназначена для реализации во внеучебной деятельности учащихся 10–11 классов по математике и ориентирована на их подготовку к освоению вузовского курса математики.

Курсы предусматривают систематизацию методов решения уравнений и неравенств, формирование обобщенных приемов их решения, расширение и углубление знаний учащихся по решению тригонометрических, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств, изучению методов решения уравнений в целых числах. Программа разбита на два раздела по 34 часа, первый раздел имеет два модуля, второй – три модуля. Первый раздел изучается в 10 классе, второй раздел – в 11 классе.

Целевой компонент

Согласно ФГОС среднего (полного) общего образования, основными результатами освоения программы данных элективных курсов являются:

Личностные:

– Готовность и способность к творческой и ответственной деятельности;

– Готовность и способность к самостоятельному решению уравнений и неравенств;

– Готовность и способность к поиску необходимой информации;

– Навыки сотрудничества со сверстниками и взрослыми на уроках и в результате выполнения проектной деятельности;

– Готовность и способность к самообразованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни.

Метапредметные:

– Умение самостоятельно определять цель деятельности и составлять планы деятельности

– Умение самостоятельно решать уравнения и неравенства, контролировать решение и корректировать решение.

– Использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности.

– Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности.

– Владение навыками познавательной и проектной деятельности.

– Способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач с помощью уравнений и неравенств, применению различных методов познания.

– Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников.

– Готовность и способность моделировать реальные ситуации.

– Умение использовать информационные и коммуникационные средства.

– Владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

Предметные:

– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;

– сформированность знаний основных теорем, формул для решения уравнений и неравенств и умения их применять;

– сформированность умения находить нестандартные способы решения уравнений и неравенств;

– владение алгоритмами решения уравнений и неравенств, умение их применять в ходе решения уравнений и неравенств;

– владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

– сформированность умений моделировать реальные ситуации с помощью уравнений и неравенств, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат.

Программа элективных курсов содержит:

1) пояснительную записку, в которой конкретизируются общие цели среднего (полного) общего образования;

2) общую характеристику курса;

3) личностные и метапредметные результаты освоения курса деятельности;

4) содержание курса деятельности;

5) тематическое планирование с определением основных видов деятельности обучающихся;

6) описание учебно-методического и материально-технического обеспечения курса деятельности.

Таблица 6

Структурная модель требований к результатам подготовки как целевой вектор ОП

Модуль	**Компоненты**	**Предметные**	**Метапредметные**	**Личностные**
Обобщение и систематизация курса основной школы	знаниевый	Алгоритмы решения алгебраических уравнений; алгоритмы решения алгебраических неравенств	Алгоритм моделирования реальных ситуаций с помощью алгебраических уравнений и неравенств	Воспитание познавательной активности, формирование положительной мотивации к обучению.
	деятельностный	Умеет решать алгебраические уравнения и неравенства	Умеет контролировать решение и корректировать его	
Тригонометрические уравнения и неравенства	знаниевый	Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, $a \sin x + b \cos x = c$; формулы для решения тригонометрических неравенств вида $\sin x * 0$, $\cos x * 0$, $\operatorname{tg} x * a$, $\operatorname{ctg} x * a$.	Умение определять цель деятельности и составлять планы деятельности; умеет сопоставлять неравенства и их решения	Формирование внимания; Интерес к изучению тригонометрических уравнений и неравенств; Развитие памяти путем изучения алгоритмов решения уравнений и неравенств.
	деятельностный	Умеет решать тригонометрические уравнения и неравенства	Умеет контролировать решение и корректировать его	
Уравнения в целых числах	знаниевый	Алгоритм решения линейных уравнений в целых числах	Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию,	Готовность и способность к поиску необходимой информации; Готовность и способность к самообразованию.

			получаемую из различных источников	
	деятельностный	Умеет решать уравнения в целых числах	Умеет использовать информационные и коммуникационные средства	
Логарифмические и показательные уравнения и неравенства	знаниевый	Алгоритм решения логарифмических и показательных уравнений	Алгоритм моделирования реальных ситуаций с помощью логарифмических уравнений и неравенств	Интерес к изучению логарифмических и показательных уравнений и неравенств; Развитие памяти путем изучения алгоритмов решения уравнений и неравенств.
	деятельностный	Умеет решать логарифмические и показательные уравнения и неравенства;	Умеет контролировать решение и корректировать его	
Проектная деятельность	знаниевый	Этапы выполнения проекта; алгоритмы решения линейных и квадратных уравнений.	Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников.	Воспитание настойчивости для достижения конечных результатов Воспитание ответственности и аккуратности Формирование навыков сотрудничества со сверстниками и взрослыми в результате выполнения проектной деятельности
	деятельностный	Умеет решать линейные и квадратные уравнения с параметром	Умение самостоятельно определять цель деятельности и составлять планы деятельности; умение использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; владение навыками познавательной и проектной деятельности.	

Содержательный компонент

Содержательный компонент образовательной программы составлен на основе принципов:

- соответствие целям (при отборе учебного материала, направленного на получение нового результата математической подготовки учащихся 10 – 11 классов, ориентируемся на структуру целевого компонента, обеспечиваем предмет учебной деятельности составляющими, адекватными составу предметных, метапредметных и личностных результатов целевого компонента);
- дидактическая достаточность (объем учебного материала должен быть достаточен для достижения требуемого результата каждому учащемуся);
- преемственность (содержание курса базируется на курсе математики 5–9 классов, развивая его в формате ФГОС, каждый последующий модуль логично взаимосвязан с предыдущими в содержательном и организационном аспектах);
- принцип профессиональной направленности (учебный материал программы ориентирован на подготовку учащихся к освоению вузовского курса математики).

Содержание программы

Содержание программы 10 класса:

Модуль 1. Обобщение и систематизация курса основной школы

- Линейные, квадратные уравнения и уравнения высших степеней.
- Рациональные уравнения.
- Иррациональные уравнения.
- Равносильность уравнений. Основные методы решения уравнений.
- Нетиповые алгебраические уравнения.
- Равносильность неравенств. Метод интервалов.
- Линейные, квадратные неравенства и неравенства высших степеней.
- Рациональные неравенства.
- Иррациональные неравенства.
- Нетиповые алгебраические неравенства

Модуль 2. Тригонометрические уравнения и неравенства

- Решение простейших уравнений вида $\sin x = a, \cos x = a$
- Решение простейших уравнений вида $\operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$
- Тригонометрические уравнения. Виды тригонометрических уравнений.
- Нетиповые тригонометрические уравнения.

– Тригонометрические неравенства вида $\sin x * 0$, $\cos x * 0$, $\operatorname{tg} x * 0$, $\operatorname{ctg} x * 0$ и сводимые к ним неравенства.

– Нетиповые тригонометрические неравенства

Содержание программы 11 класса:

Модуль 3. Уравнения в целых числах

– Уравнения в целых числах. Методы решения линейных уравнений в целых числах.

– Методы решения нелинейных уравнений и целых числах.

– Решение уравнений в целых числах.

Модуль 4. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

– Показательные уравнения

– Показательные неравенства

– Логарифмические уравнения

– Логарифмические неравенства

– Равносильность уравнений и неравенств

– Нетиповые показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Модуль 5. Проектная деятельность

– Постановка и выявление проблемы, на решение которой направлены проекты

– Составление плана работы над проектом

– Реализация плана

– Рефлексия

– Оформление

– Защита проекта

Технологический компонент

В рамках указанных курсов решаются следующие задачи:

– овладеть системой математических знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучении смежных дисциплин;

– способствовать интеллектуальному развитию, формировать качества личности, необходимые человеку для полноценной жизни в современном обществе, свойственные математической деятельности: ясности и точности мысли, интуиции, логического мышления, пространственных представлений, способности к преодолению трудностей;

– формировать представления об идеях и методах математики как универсального языка науки и техники, средствах моделирования явлений и процессов;

– воспитывать культуру личности, отношение к математике как к части общечеловеческой культуры, играющей особую роль в общественном развитии.

Контроль уровня обученности

Для оценки достижений обучающегося используются следующие виды и формы контроля: устный опрос, система контрольных работ, дифференцированный зачет, взаимоконтроль, самоконтроль.

Критерии выставления дифференцированного зачета:

60-72 - «3» - базовый;

73-85 - «4» - продуктивный;

86-100 – «5» - высокий.

– Для определения метапредметных и предметных результатов используются следующие работы.

Модуль 1. Обобщение и систематизация курса основной школы

(Метапредметные результаты проверяют задания 3, 4, 7, 8)

1. Запишите алгоритм решения уравнения $x = \frac{8x-35}{x-4}$.
2. Запишите алгоритм решения неравенства $x^2 + 10x - 24 \leq 0$.
3. Учащемуся предложили решить задание:

«Найдите корень уравнения: $\sqrt{15-2x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Учащийся решил это уравнение следующим образом:

$$\sqrt{15-2x} = x$$

$$15 - 2x = x^2$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = -5, \qquad x = 3.$$

$$\text{Ответ: } -5.$$

Таблица 7

Технологическая карта

Модуль	Количество часов	Результат обучения	Методы, формы обучения	Форма контроля
Модуль 1. Обобщение и систематизация курса основной школы	**18**	**Предметные:** – владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных уравнений и неравенств; – сформированность знаний основных формул для решения уравнений и неравенств и умения их применять; – владение алгоритмами решения уравнений и неравенств, умение их применять в ходе решения уравнений и неравенств; – сформированность умения находить способы решения нетиповых алгебраических уравнений и неравенств. **Метапредметные:** – умение моделирования реальных ситуаций с помощью алгебраических уравнений и неравенств; – умение контролировать решение и корректировать его.	**Формы**: коллективная (урок, семинар), групповая, индивидуальная **Методы**: беседа, работа со справочной литературой, учебная дискуссия, упражнения	**Устно:** фронтальный опрос **Письменно:** контрольная работа
1.1. Линейные, квадратные уравнения и уравнения высших степеней.	2			
1.2. Рациональные уравнения.	2			
1.3. Иррациональные уравнения.	1			
1.4. Равносильность уравнений. Основные методы решения уравнений.	1			
1.5. Нетиповые алгебраические уравнения.	3			
1.6. Равносильность неравенств. Метод интервалов.	1			
1.7. Линейные, квадратные неравенства и неравенства высших степеней.	1			
1.8. Рациональные неравенства.	2			
1.9. Иррациональные неравенства.	2			
1.10. Нетиповые алгебраические неравенства.	3			

Продолжение табл. 7

Модуль 2. Тригонометрические уравнения и неравенства.	**16**	**Предметные:** – владение стандартными приёмами решения тригонометрических уравнений и неравенств; – сформированность знаний основных формул для решения тригонометрических уравнений и неравенств и умения их применять; – владение алгоритмами решения тригонометрических уравнений и неравенств, умение их применять в ходе решения уравнений и неравенств; – сформированность умения находить способы решения нетиповых тригонометрических уравнений и неравенств. **Метапредметные:** – умение определять цель деятельности и составлять планы деятельности; – умение сопоставлять неравенства и их решения; – умение контролировать решение и корректировать его.	**Формы**: коллективная (урок, семинар, зачетный урок, лекция), групповая, индивидуальная **Методы**: беседа, работа со справочной литературой, учебная дискуссия, упражнения, веб-квест «Загадка уравнений»	**Устно:** фронтальный опрос **Письменно:** контрольная работа
2.1. Решение простейших уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$.	2			
2.2. Решение простейших уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.	2			
2.3. Тригонометрические уравнения. Виды тригонометрических уравнений.	3			
2.4. Нетиповые тригонометрические уравнения.	3			
2.5. Тригонометрические неравенства вида $\sin x * 0$, $\cos x * 0$, $\operatorname{tg} x * 0$, $\operatorname{ctg} x * 0$ и сводимые к ним неравенства.	2			
2.6. Нетиповые тригонометрические неравенства.	4			

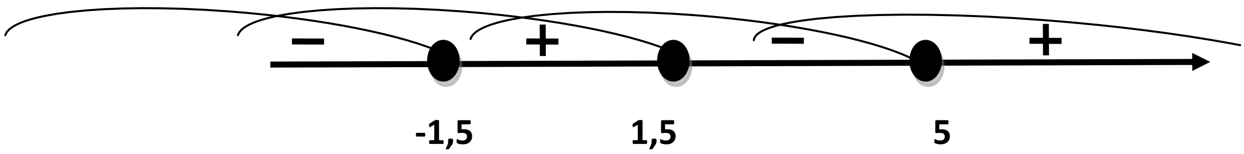
Продолжение табл. 7

Модуль 3. Уравнения в целых числах.	**9**	**Предметные:** – сформированность знаний основных формул для решения уравнений в целых числах и умения их применять; – владение алгоритмами решения уравнений в целых числах. **Метапредметные:** – готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников; – умение использовать информационные коммуникационные средства.	**Формы**: коллективная (урок, семинар), групповая, индивидуальная **Методы**: беседа, работа со справочной литературой, учебная дискуссия, упражнения, лекция	**Устно:** фронтальный опрос, доклады **Письменно:** контрольная работа
3.1. Уравнения в целых числах. Методы решения линейных уравнений в целых числах.	2			
3.2. Методы решения нелинейных уравнений и целых числах.	3			
3.3. Решение уравнений в целых числах.	4			
Модуль 4. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.	**16**	**Предметные:** – владение стандартными приёмами решения логарифмических и показательных уравнений и неравенств; – сформированность знаний основных формул для решения уравнений и неравенств и умения их применять; – владение алгоритмами решения уравнений и неравенств, умение их применять в ходе решения уравнений и неравенств; – сформированность умения находить спо-	**Формы**: коллективная (урок, урок-квн, математический бой, семинар), групповая, индивидуальная **Методы**: беседа, работа со справочной литературой, учебная дискуссия, упражнения	**Устно:** фронтальный опрос **Письменно:** контрольная работа
4.1. Показательные уравнения.	2			
4.2. Показательные неравенства.	3			
4.3. Логарифмические уравнения.	2			

4.4. Логарифмические неравенства.	3	собы решения нетиповых показательных и логарифмических уравнений и неравенств. **Метапредметные:** – умение моделирования реальных ситуаций с помощью логарифмических уравнений и неравенств; умение контролировать решение и корректировать его.		
4.5. Равносильность уравнений и неравенств.	2			
4.6. Нетиповые показательные и логарифмические уравнения и неравенства	4			
Модуль 5. Проектная деятельность.	**9**	**Предметные:** – владение приемами решения линейных и квадратных уравнений с параметром **Метапредметные:** – готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников; – умение самостоятельно определять цель деятельности и составлять планы деятельности; – умение использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; – владение навыками познавательной и проектной деятельности.	**Формы**: коллективная (урок, консультация, зачетные занятия), групповая, индивидуальная **Методы**: беседа, работа с различными информационными источниками (поиск, анализ, систематизация и обобщение материала)	защита проекта

4. А) Предложено решение неравенства $4x^3 - 20x^2 - 9x + 45 \leq 0$. Проверьте решение неравенства, при необходимости исправьте ошибки.

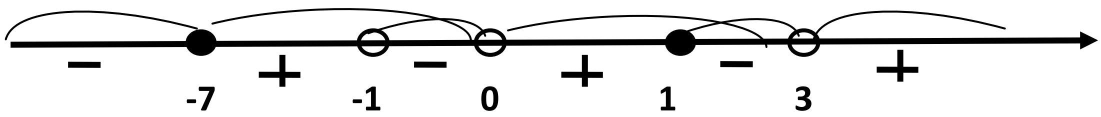
$$4x^3 - 20x^2 - 9x + 45 \leq 0$$
$$x\,(4x^2 - 9) - 5(4x^2 - 9) \leq 0$$
$$(x - 5)(2x - 3)(2x + 3) \leq 0$$
$$(x - 5)(2x - 3)(2x + 3) = 0$$
$$x_1 = 5;\ x_2 = 1{,}5;\ \ x_3 = -1{,}5.$$



$$x \in (-\infty; 1{,}5] \cup [1{,}5; 5]$$

Б) Предложено решение неравенства $\frac{2-x}{x^3+x^2} \geq \frac{1-2x}{x^3-3x^2}$. Проверьте решение неравенства, при необходимости исправьте ошибки.

$$\frac{2 - x}{x^3 + x^2} \geq \frac{1 - 2x}{x^3 - 3x^2}$$
$$\frac{2 - x}{x^2(x + 1)} \geq \frac{1 - 2x}{x^2(x - 3)}$$
$$\frac{2 - x}{x^2(x + 1)} - \frac{1 - 2x}{x^2(x - 3)} \geq 0$$
$$\frac{(2 - x)(x - 3) - (1 - 2x)(x + 1)}{x^2(x + 1)(x - 3)} \geq 0$$
$$\frac{2x - 6 - x^2 + 3x - x - 1 + 2x^2 + 2x}{x^2(x + 1)(x - 3)} \geq 0$$
$$\frac{x^2 + 6x - 7}{x^2(x + 1)(x - 3)} \geq 0$$
$$\frac{x^2 + 6x - 7}{x^2(x + 1)(x - 3)} = 0$$
$$x^2 + 6x - 7 = 0\ \ \Rightarrow x = 1, x = -7.$$
$$x^2(x + 1)(x - 3) = 0\ \ \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 3.$$



$$x \in [-7;\ -1) \cup (0; 1] \cup (3;\ +\infty)$$

5. А) Найдите корень уравнения $\frac{3}{22}x = 4\frac{4}{11}$.

Б) Найдите корень уравнения $5x^2 + 7x - 6 = 0$.

В) Решите уравнение $(3x+1)^2 = (3x-4)^2$

Г) Найдите корень уравнения $-x = \frac{x+9}{-7x-3}$. Если уравнение имеет больше одного корня, то укажите больший из них.

Д) Найдите корень уравнения $\left(\sqrt{5-x} - 4\right)\left(\sqrt{7-x} - 2\right) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите наибольший из них.

6. А) Решите неравенство $\sqrt{x+18} < 2 - x$.

   Б) Решите неравенство $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 \leq 0$.

   В) Решите неравенство $(2x^2 - 5x + 3)\left(\sqrt[3]{3} - x\right) \leq 0$

   Г) Решите неравенство $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$.

7. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур дается выражением $T(t) = T_o + at + bt^2$, где $T_o = 1100$ К, $a = 36$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя выше 2000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

8. Вертикально вверх брошен мяч. Высота, на которой он может находиться, описывается по формуле $h(t) = 5t^2 - 39t$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Найдите, сколько секунд мяч будет находиться на высоте 8 метров.

Модуль 2. Тригонометрические уравнения и неравенства.

(Метапредметные результаты проверяют задания 4, 5, 6, 9)

1. Решением уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ является:

   a) $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

   b) $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

   c) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

   d) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

2. Решением уравнения $\operatorname{ctg} x = 0$ является:

   a) $x = \pi k, k \in Z$

   b) $x = \pi + \pi k, k \in Z$

   c) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

d) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

3. Решением уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ является:

a) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

b) $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

c) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

d) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

4. Предложено решение уравнения $2\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$. Проверьте правильность решения уравнения, при необходимости исправьте ошибку.

$$2\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\cos x\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\cos x = 0 \qquad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pi k, k \in Z \qquad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = \pi k,\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

5. Предложено решение уравнения $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$. Проверьте правильность решения уравнения, при необходимости исправьте ошибку.

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$$

$$2\left(\sin x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$$

$$\sin x + \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n, x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z.$

6. Соотнесите неравенства и их решения.

1) $\cos t > \frac{1}{2}$

2) $\cos t < \frac{1}{2}$

3) $\sin t > \frac{1}{2}$

4) $\sin t < \frac{1}{2}$

a) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in Z$

b) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in Z$

c) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in Z$

d) $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in Z$

7. Решите уравнение:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$;

b) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

8. Решите неравенство:

a) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$;

b) $\operatorname{ctg} x > -1$;

c) $\sin\frac{x}{2} > -1$;

d) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. Составьте план решения следующего задания.

Сколько корней имеет заданное уравнение на заданном промежутке.

$$\sin x = 0{,}6; \quad x \in \left(\frac{\pi}{4}; 3\pi\right).$$

Модуль 3. Уравнения в целых числах

(Метапредметные результаты проверяют задания 1, 2)

Задание 1. Распределитесь по группам (группы могут быть с разным количеством человек, в зависимости от количества предложенных заданий). Вам предложены методы решения нелинейных диофантовых уравнений. Используя различные источники информации, в том числе и предложенные, раскройте суть выбранного вами метода и решите задания.

Метод разложения на множители

1) Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$ – вынесение общих множителей за скобку.

2) Найти все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55. – применение формул сокращенного умножения.

3) Решить в целых числах уравнение $xy + 3x - y = 6$. – способ группировки.

4) Решить в целых числах уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 11$. – разложение квадратного трехчлена.

5) Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$. – использование параметра.

Метод решения относительно одной переменной.

6) Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$. – выделение целой части.

7) Решить в целых числах уравнение $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$. – использование дискриминанта (неотрицательность).

8) Решить в целых числах уравнение $x^2 - xy + y^2 = x + y$. – использование дискриминанта (полный квадрат).

Метод оценки

9) Решить в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. – использование известных неравенств.

10) Решить в целых числах уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$. – приведение к сумме неотрицательных выражений.

Метод остатков

11) Решить в целых числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$. – метод остатков.

Метод «спуска»

12) Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$. – метод конечного «спуска».

13) Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 5y^2 = z^2$. – метод бесконечного «спуска».

Список источников:

– Базылев Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения. – Мн.: НТЦ «АПИ», 1999.
– Балаян Э.Н. Математика. Задачи типа С6. — Ростов н/Д: Феникс, 2014.
– Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных) [Электронный ресурс]. URL: http://alexlarin.net/ege/2011/C62011.pdf (дата обращения 15.05.2016).

Задание 2.

А) Составьте план решения следующего задания: «Какое наименьшее число банок по 0,5 л и 0,4 л понадобится маме, чтобы разложить 3 л варенья?»

Б) Составьте план решения следующего задания: «Решить в целых числах уравнение $21x + 35y = 17$.»

Задание 3.

1. Решите в целых числах уравнение $25x - 18y = -1$.
2. Решить в натуральных числах уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$, где $x \geq y$.
3. Решите в целых числах уравнение: $x^2 = y^2 + 6y + 21$.
4. Решите в целых числах уравнение $(x + y)(x - 2y) = 7$.

Модуль 4. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

(Метапредметные результаты проверяют задания 1, 4, 5, 6, 7)

1. Укажите, на каком шаге решения допущена ошибка.

$$\log_5(3x - 9) = 2\log_5 6$$

1 шаг	$\log_5(3x - 9) = \log_5 2^6$
2 шаг	$3x - 9 = 64$
3 шаг	$3x = 73$
4 шаг	$x = 24\frac{1}{3}$

Ответ: $x = 24\frac{1}{3}$.

Укажите, на каком шаге решения допущена ошибка.

$$2^{14-2x} = \frac{1}{8}$$

1 шаг	$2^{14-2x} = 2^{-3}$
2 шаг	$14 - 2x = -3$
3 шаг	$-2x = -17$
4 шаг	$x = 8{,}5$

Ответ: $x = 8{,}5$.

2. Запишите алгоритм решения уравнения:

a) $2^{8-2x} = 2^{x^2}$

b) $\ln\frac{12}{x-4} = \ln(x + 7)$

3. Найдите корень уравнения

a) $5^{2x+4} = \frac{1}{25}$

b) $\log_2(4x - 13) = 3$

c) $3^{5x-17} = \frac{1}{27}$

d) $\log_4(x + 4)^2 = \log_4(5x + 20)$

4. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $v = 40$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}3$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма.

При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = a\nu T\ \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $a = 3{,}5$ – постоянная, $T = 300$ К – температура воздуха, p_1 (атм) – начальное давление, а p_2 (атм) – конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 126 000 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

5. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{п} = 25°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду с начальной температурой $T_{н} = 65°C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T (°C), причем $x = a\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_{н}-T_{п}}{T-T_{п}}$ (м), где $c = 4200\frac{Дж}{кг\cdot°C}$ - теплоемкость воды, $\gamma = 21\frac{Вт}{м\cdot°C}$ - коэффициент теплообмена, а $a = 0{,}7$ – постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 28 м?
6. Предложено решение неравенства $\log_{0,4}(7 - x) \geq 2\log_{0,4} 7$. Проверьте правильность решения неравенства, при необходимости исправьте ошибку.

$$\log_{0,4}(7 - x) \geq 2\log_{0,4} 7$$
$$ОДЗ: x \leq 7$$
$$7 - x \geq 7$$
$$x \leq 0$$
$$\text{Учитывая ОДЗ, имеем } x \leq 0.$$

Ответ: $x \leq 0$.

7. Предложено решение неравенства $3^{x-4} \leq 27$. Проверьте правильность решения неравенства, при необходимости исправьте ошибку.

$$3^{x-4} \leq 27$$
$$x - 4 \leq 3$$
$$x \leq -1$$

Ответ: $x \leq -1$.

Модуль 5. Проектная деятельность

1. В зависимости от значений параметра a решить уравнение
$$(a^2 - 1)x = 2a^2 + a - 3.$$
2. Решить уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$.
3. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\frac{a+x}{x^2-5x-6} = 0$.

4. При каких значениях параметра b уравнение $ax - b = 2a + 3x$ имеет решение для любого a?
5. Найти значения параметра m, при которых уравнение
$$m^{2x} - m^2 + 6 = 4x + m$$
   а). имеет единственное решение;
   б). не имеет решений;
   в). имеет бесконечное множество решений.
6. В зависимости от значений параметра k решить уравнение $\frac{2}{kx+2} = \frac{1}{2x+k}$.
7. В зависимости от значений параметров a и b решить уравнение
$$\frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x+1} - \frac{a(x^2+1)}{x^2-1} = 0.$$
8. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\frac{a+2x}{1+ax} = 1$.
9. Определить, при каких значениях параметра a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют: а) один общий корень; б) два общих корня.
10. При каких значениях параметра a отношение корней уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ равно 2?
11. В уравнении $3x^2 - 7x + c = 0$ найти значение параметра c, если корни уравнения удовлетворяют соотношению $\left(x_1 + \frac{2}{3}\right)(x_2 - 1) = 1$.
12. Найти все значения параметра p, при которых корни уравнения $(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$ действительны и положительны.
13. Решить относительно x уравнение $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$.
14. Даны уравнения $x^2 - 5x + k = 0$, $x^2 - 7x + 2k = 0$. Определить значения k, при которых один из корней второго уравнения вдвое больше одного из корней первого уравнения.

Для контроля личностных результатов используется анкета.

№1. Анкета для учащихся

Фамилия, имя_________________

Класс________________________

Год__________________________

1. Назовите 10 наиболее привлекательных для вас профессий, расположите их по степени значимости:

1/.____________________

2/.____________________ и т.д.

2. Кем вы хотите стать? Какую профессию вы выбрали?______________

3. Назовите преимущества вашей будущей профессии:__________

4. Назовите минусы вашей будущей профессии:_________________

5. Назовите качества характера, необходимые для того, чтобы состояться в выбранной вами профессии:_____________
6. Назовите качества характера, которые могут вам помешать приобрести любимую профессию:___________________
7. Что или кто повлиял на выбор вашей будущей профессии:
– родители
– родственники
– педагоги
– друзья
– знакомые
– книги
– фильмы
– жизненные обстоятельства
– способности
8. Как относятся ваши родители к избранной вами профессии? _____________

№ 2. Час общения "Игра в будущее"
Анкета

1. На сколько процентов ты уверен в том, что добьешься успехов на избранном пути?____
2. Кто подсказал тебе, что делать в жизни?___________________
3. Какую зарплату ты выбираешь?___________________
4. Назови профессии, должности, звания, которые больше всего тебя привлекают?___________________
5. Оцени состояние своего здоровья по 10– бальной шкале______________
6. Если ты не поступишь в ВУЗ – это очень страшно?______________
7. Подготовила ли тебя школа к успешному вхождению в жизнь?_________
8. Как часто ты будешь встречаться со своими одноклассниками после окончания школы?______________________
9. Если бы ты открыл свою фирму, кого из ребят своего класса ты пригласил бы к себе на работу и на какие должности?___________________
10.Напиши свои 10 главных умений:__________________
11.Раздели лист пополам и напиши слева все свои основные достоинства, а справа – свои недостатки.
12.Составь, пожалуйста, свой словесный портрет, а затем выбери человека в классе, которому ты больше всего доверяешь, чтобы он тоже составил твой словесный портрет.

№ 3. Анкета

1. С каким настроением ты посещаешь уроки математики?
   2 - с радостью
   1 - моё настроение не зависит от урока
   0 - с неохотой и раздражением
2. Всегда ли ты доволен своим результатом работы на уроке?
   2 - иногда недоволен, но стараюсь улучшить
   1 - всегда
   0 - часто недоволен, но мне это безразлично
3. Интересуют ли тебя работы одноклассников?

2 - всегда
1 – иногда
0 – никогда

4. Хотел бы ты заниматься дополнительно на элективном курсе по математике?
   2 - да
   1 - не знаю
   0 – нет
5. Как часто ты завершаешь работу дома?
   2 - часто, чтобы улучшить
   1 - иногда, когда в классе не успеваю
   0 - никогда, даже если работа незакончена
6. Всегда ли ты готов к уроку?
   2 - всегда
   1 - иногда бываю не готов
   0 - часто не готов
7. Тебе важны отметки ?
   2 - да
   1 - лишь бы не «2»
   0 - лучше бы их не было
8. Ради чего ты стремишься получить высокую отметку?
   2 - приятно самому
   1 - порадовать родителей
   0 - чтобы не портить успеваемость
9. Как родители относятся к твоим успехам?
   2 - интересуются, помогают
   1 - хвалят за хорошие отметки, ругают - за плохие
   0 - им всё равно
10. Стремишься ли ты участвовать в конкурсах, олимпиадах?
   2 - да
   1 - иногда
   0 - нет
11. Чего ты ждёшь от участия в конкурсах, олимпиадах?
   2 - чтобы мою работу увидели другие
   1 - получить приз
   0 – ничего
12. В чём для тебя польза уроков?

2 - дают знания, которые пригодятся в жизни
1 - можно просто порисовать
0 - можно отдохнуть, расслабиться

Подсчёт результатов

16-24 – высокий показатель
5-15 – средний
Менее 5 – низкий

Описание материально-технического обеспечения образовательного процесса

Для учащихся:

1. Базылев Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения.Мн.: НТЦ «АПИ», 1999.
2. Балаян Э.Н. Математика. Задачи типа С6. Ростов н/Д: Феникс, 2014.
3. Колесникова С.И. Иррациональные уравнения. ЕГЭ. Математика. Москва: ООО «Азбука-2000», 2010.
4. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных). URL: http://alexlarin.net/ege/2011/C62011.pdf (дата обращения: 15.05.2016).
5. Лаппо Л.Д. ЕГЭ 2016. Математика. Эксперт в ЕГЭ. М.: Экзамен, 2016.
6. Лысенко Ф.Ф., Кулабухов С.Ю. Математика. ЕГЭ – 2016. Тематический тренинг. 10 – 11 классы: учебно-методическое пособие. Ростов н/Д: Легион, 2015.
7. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2009.
8. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2009.
9. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2007.
10. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2009
11. Мордкович А.Г. Математика: полный справочник. М.: АСТ: Астрель, 2016.
12. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2009.
13. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2009.

14. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Учебно-методическое пособие для учащихся 10–11 классов. М.: Экзамен, 1998.
15. Севрюков П.Ф. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие.М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2008.
16. Севрюков П.Ф. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие. М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009.

Для учителя:

1. Асмолов А.Г. Системно-деятельностный подход к разработке стандартов нового поколения. М.: Педагогика, 2009.
2. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя/под ред. А.Г. Асмолова. М.: Просвещение, 2012. - 159 с.
3. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1989.
4. Гунашева М.Г. Обучение учащихся решению уравнений и неравенств с параметрами при подготовке к ЕГЭ.// Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2011. № 1.
5. Данилюк А.Я., Кондаков А.М., Тишков В.А.. Концепция духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России. М.: Просвещение, 2009. - 24 с.
6. Жаров С.Ю. Метод решения сложных логарифмических уравнений и неравенств в задании С3 ЕГЭ по математике. // Наука и современность. 2014. № 29. С. 75–80.
7. Иванов К.П. Ускоренный курс математики для сдачи ЕГЭ: учеб. пособие. СПб.: Невский Диалект, 2010.
8. Кожухов С.К. Уравнения и неравенства с параметром. Учебно-методическое пособие для учителей математики, студентов математических специальностей педагогических вузов, абитуриентов. Орел, 2013.
9. Коропец З.Л., Коропец А.А., Алексеева Т.А. Математика. Нестандартные методы решения неравенств и их систем. Орел: ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК», 2012.
10. Мордкович А.Г. Решаем уравнения. М.: Школа-Пресс, 1995.

11. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 29.12.2010 № 189 ≪Санитарноэпидемиологические требования к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях≫ (СанПиН 2.4.2.2621–10).
12. Приказ Министерства образования и науки РФ от 24.11.2011 № МД 1552/03 ≪Рекомендации по оснащению общеобразовательных учреждений учебным и учебно-лабораторным оборудованием, необходимым для реализации ФГОС основного общего образования, организации проектной деятельности, моделирования и технического творчества обучающихся≫.
13. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа. М.: Просвещение, 2011.
14. Примерные программы внеурочной деятельности / Под ред. В.А. Горского. М.: Просвещение, 2010.
15. Примерные программы по математике. М.: Просвещение, 2012.
16. Садовничий Ю.В. ЕГЭ. Практикум по математике: Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. М.: Экзамен, 2015.
17. Семенов А.В. Оптимальный банк заданий для подготовки к ЕГЭ. ЕГЭ 2015. Математика. Учебное пособие. М.: Интеллект-Центр, 2015.
18. Система гигиенических требований к условиям реализации основной образовательной программы основного общего образования.URL:http://standart.edu.ru (дата обращения: 15.05.2016)
19. Федеральный государственный образовательный стандарт основного (полного) общего образования. М.: Просвещение, 2010.
20. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации≫.
21. Фундаментальное ядро содержания общего образования. М.: Просвещение, 2011.
22. Чернокнижникова Л.М. Нестандартные уроки. Математика. 5–10 класс: Учебно-методическое пособие. М.: АРКТИ, 2010.
23. Ястребинецкий Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1972.

Дополнительная литература:

1. Асмолов А.Г. Как будем жить дальше? Социальные эффекты образовательной политики // Лидеры образования. 2007. № 7.
2. Звавич Л.И., Рязановский А.Р. Алгебра в таблицах. 7-11 классы: Справочное пособие М.: Дрофа, 1999

3. Калбергенов Г.Е. Математика в таблицах и схемах. М.: «Лист», 1997
4. Математика в школе. Научно-теоретический и методический журнал
5. Поливанова К.А. Проектная деятельность школьников. М.: Просвещение, 2008.
6. Соломоник В.С., Милов П.Н. Сборник вопросов и задач по математике. М.: «Высшая школа», 1973
7. Асмолов А.Г. Стратегия социокультурной модернизации образования: на пути преодоления кризиса идентичности и построения гражданского общества // Вопросы образования. 2008. № 1.
8. Асмолов А.Г., Семенов А.Л., Уваров А.Ю. Российская школа и новые информационные технологии: взгляд в следующее десятилетие. М.: НексПринт, 2010.
9. Вейцман Л.Р., Вейцман Р.Л. Алгебра: Основные сведения школьного курса. Донецк: ПКФ «БАО»,1997
10. Дистанционные образовательные технологии: проектирование и реализация учебных курсов. СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
11. Жильцова О.А. Организация исследовательской и проектной деятельности школьников: дистанционная поддержка педагогических инноваций при подготовке школьников к деятельности в сфере науки и высоких технологий. М.: Просвещение, 2007.
12. Заир-Бек С.И., Муштавинская И.В. Развитие критического мышления на уроке. М.: Просвещение, 2011.

2.3. Результаты опытно-экспериментальной работы

Эксперимент, направленный на апробацию разработанных элективных курсов проводился на базе МБОУ СШ №150, г. Красноярск, в 11-х классах. Цели эксперимента состояли в следующем:

– апробация методической идеи;

– проверка целесообразности проведения данных элективных куров на этапе подготовки учащихся к сдаче ЕГЭ;

– подбор теоретического и практического материала для элективных курсов, способствующего подготовке учащихся к решению уравнений и неравенств разного типа, систематизации и обобщению теоретического материала по элементам содержательно-методической линии уравнений и неравенств, а именно, тригонометрические уравнения, логарифмические и показательные уравнения и неравенства.

В начале 2014/2015 учебного года на основе результатов диагностической работы были рассмотрены типичные ошибки, которые допускают учащиеся при решении уравнений и неравенств из курса основной школы.

Учащимся была предложена диагностическая работа, состоящая из 10 заданий, направленных на проверку умений решать все основные типы алгебраических уравнений и неравенств за курс основной школы.

1. Решите уравнение $\frac{7x}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$.
2. Решите неравенство $1{,}5(x+3) < x - 5(1{,}5 - x)$.
3. Найдите корни уравнения $3x^2 - 2 = -5x$.
4. Решите неравенство $-3x^2 + 16x - 5 \geq 0$.
5. Решите уравнение $2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x = 0$.
6. Решите уравнение $|2x+3| = 7$.
7. Найдите корни уравнения $\frac{2x^2}{x-2} = \frac{-7x+6}{2-x}$.
8. Решите уравнение $x - 1 = \sqrt{2x^2 - 3x - 5}$.
9. Решите неравенство $\frac{2(7-5x)}{x+1} \geq \frac{12(x+1)-7}{x+1}$. В ответе укажите целое решение неравенства.
10. При каком значении параметра b уравнение $x^2 + (2b+10)x - 16 = 0$ имеет только один корень?

Рассмотрим основные ошибки, которые были допущены при решении алгебраических уравнений.

Линейные уравнения

– Нарушение в алгоритме решения уравнения вида $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0$: при переносе b в правую часть не меняется знак.

Квадратное уравнение

– Допущена ошибка при приведении квадратного уравнения к стандартному виду.

– Неправильно найден дискриминант: неверно использована формула.

– Неправильно найдены корни квадратного трехчлена: ошибки в использовании формулы для нахождения корней или при применении теоремы Виета.

Квадратное уравнение с параметром

При решении квадратных уравнений с параметром многие учащиеся традиционно попадают в затруднительное положение. В учебниках по математике для основной школы имеется небольшое количество подобных задач, и, при изучении соответствующих тем, как правило, лишь немногие учащиеся понимают смысл решения.

В диагностической работе предлагалось указать, при каком значении параметра квадратное уравнение имеет только один корень. Как и следовало ожидать, к выполнению задания приступило лишь несколько человек, и эти учащиеся уравнение решили абсолютно правильно. Таким образом, многие учащиеся имеют недостаточно опыта решения подобных заданий и не даже не приступают к их решению.

Уравнения с модулем

– При раскрытии модуля не было учтено, при каких условиях получили соответствующий корень.

– Неверно использовано определение модуля.

Уравнения высших степеней

– Неправильно осуществлена группировка.

– На первом этапе группировки осуществлено деление на выражение, содержащее неизвестную величину.

Дробно-рациональные уравнения

– Неправильно указана или не указана область допустимых значений (ОДЗ): не учтено, что знаменатель дроби не должен быть равен нулю.

– В случае если не найдена ОДЗ, не осуществлена проверка найденных корней уравнения.

– Нерациональные действия в процессе приведения к общему знаменателю.

– Деление на выражение, содержащее неизвестную величину.

Иррациональные уравнения

– Неправильно найдена или не найдена ОДЗ: не учтено, что выражение под знаком корня четной степени не может быть отрицательным.

– В случае если не найдена ОДЗ, не осуществлена проверка найденных корней уравнения.

Далее рассмотрим основные ошибки, которые были допущены при решении алгебраических неравенств.

Линейные неравенства

– Сохранение знака неравенства при делении его частей на отрицательное число.

– Не учитывается строгость неравенства.

Квадратные неравенства

– При нахождении корней квадратного трехчлена;

– При использовании метода интервалов: разложение квадратного трехчлена на множители, разбиение числовой прямой на промежутки и определение знаков на каждом из промежутков.

– При использовании графического метода решения неравенства (с помощью параболы): неверно определено направление ветвей параболы, что привело к неправильной расстановке знаков функции;

– Не учитывается строгость неравенства.

– При нахождении корней квадратного трехчлена получился отрицательный дискриминант: не учитывается, что если ветви параболы направлены вверх, то решением является вся числовая прямая, в противном случае решений нет.

– При нахождении корней квадратного трехчлена дискриминант равен нулю: не учитывается не только направление ветвей параболы, но и строгость неравенства.

Дробно-рациональные неравенства

– Умножение обеих частей неравенства на общий знаменатель.

– Неправильно найдена или не найдена ОДЗ.

– При приведении неравенства к виду $f(x)*0$, где $*=\{>,<,\geq,\leq\}$.

– При решении нестрого неравенства: включенность той точки, в которой знаменатель обращается в нуль, включение изолированного решения (т.е. точек, в которых числитель дроби обращается в нуль) [Гиматдинова, 2015].

Существует ряд типичных ошибок, возникающих при решении основных типов уравнений и неравенств. Эти ошибки, как правило, носят системный характер, и могут оказать негативное влияние при освоении материала 10–11 классов.

На наш взгляд, в начале 10 класса необходима актуализация основных методов и приемов решения уравнений и неравенств. Таким образом, разработанные элективные курсы начинаются с систематизации и обобщения теоретического материала, посвященного решению различных видов алгебраических уравнений и неравенств за курс основной школы, а также актуализации методов и приемов их решения.

С целью подбора подходящего материала для проведения элективных курсов нами были рассмотрены типичные ошибки учащихся, допускаемые при решении логарифмических и показательных неравенств – прототипов заданий 15 ЕГЭ профильного уровня.

Для выявления типичных ошибок, допускаемых учащимися при решении подобных заданий, была проведена диагностическая работа на 1 курсе Института математики, физики и информатики, КГПУ им. В.П. Астафьева. Студентам было предложено решить два задания, направленных на проверку умений решать логарифмические и показательные неравенства, встречаемые в ЕГЭ профильного уровня.

1. $\log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10\log_{0,5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0$.
2. $\frac{31-5\cdot 2^x}{4^x-24\cdot 2^x+128} \geq 0{,}25$.

С решением данных заданий с выделением всех необходимых действий, которые должны быть освоены учащимися, а также с критериями оценивания этих заданий можно ознакомиться в статье «Типичные ошибки при решении логарифмических и показательных неравенств» [Гиматдинова, 2015].

Был составлен рейтинг ошибок, которые допускают при решении подобных логарифмических и показательных неравенств.

1) Более 25% всех ошибок допущено при неверном использовании метода интервалов при решении квадратного неравенства, например: $(t-4)(t-6) > 0$, откуда $t > 4$, $t > 6$ или $x(x-6) < 0$, откуда $x < 0$, $x < 6$; при решении неравенства как уравнения, например, $\log_2(16 + 6x - x^2) = 4$ и $\log_2(16 + 6x - x^2) = 6$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

2) Около 10% ошибок – неправильная запись условия задачи, описка, приводящая к неправильному ответу; при решении дробно-рационального неравенства: умножение обеих частей неравенства на общий знаменатель, например, $\frac{-6a+66}{(a-9)(a-3)} \geq 0$, откуда$-6a + 66 \geq 0$, $a \neq 9$, $a \neq 3$; при записи ответа не учитывается ОДЗ.

3) Около 5% ошибок – при раскрытии скобок, при решении простейшего логарифмического неравенства, например, $\log_2 t < 4$, $2^4 < t$.

4) Отдельные ошибки: не сделан переход к единому основанию; при решении простейшего показательного неравенства, например $3^t = 9$, $t = 9$; при решении дробно-рационального неравенства не было произведено приведение к наименьшему общему знаменателю.

Как мы видим, ошибки при решении логарифмических и показательных неравенствах в основном связаны с неумением правильно решать рациональные неравенства. Анализ работ показывает, что больше всего ошибок допускалось при решении логарифмического неравенства. Но это не значит, что показательные неравенства решают лучше. Многие учащиеся просто не приступают к их решению [Гиматдинова, 2015].

Эксперимент по апробации элективных курсов был проведен для группы 11 класса, изучающих математику на базовом уровне, количество учащихся – 17 человек. Было проведено 10 занятий. Занятия проводились в третьей учебной четверти

(11 января – 18 марта), один раз в неделю. Основной акцент был сделан на решении тригонометрических уравнений, а также логарифмических и показательных уравнениях и неравенствах, в том числе нетиповых.

На момент проведения занятий учащиеся уже изучили логарифмические и показательные уравнения и неравенства, что позволило провести обобщение и систематизацию материала по данной теме.

В приложении 2 представлена разработка урока–КВН по теме «Логарифмические и показательные уравнения».

На протяжении всего учебного года проводились пробные ЕГЭ, в том числе и по математике базового и профильного уровней. Приведем результаты пробного ЕГЭ по математике базового и профильного уровня в таблицах 8, 9, которые были написаны в декабре и апреле. Требования, предъявляемые к выпускникам на базовом и профильном уровне государственными образовательными стандартами по содержательно-методической линии уравнений и неравенств представлены в Приложении 3.

Таблица 8

Результаты пробного ЕГЭ по математике базового уровня (процент справившихся учащихся с заданием)

Номер задания	декабрь	апрель
7	78%	100%
17	44%	75%
Количество писавших	9 человек	8 человек

Таблица 9

Результаты пробного ЕГЭ по математике профильного уровня (процент справившихся учащихся с заданием)

Номер задания	декабрь	апрель
5	80%	90%
10	20%	60%
11	10%	80%
13	20%	50%
15	10%	40%
Количество писавших	10 человек	10 человек

Результаты пробного ЕГЭ по математике базового и профильного уровня показывают, что количество справившихся учащихся с заданиями, посвященными решению уравнений и неравенств, увеличилось.

Было проведено анкетирование учащихся. Приведем ответы учащихся на часть вопросов анкеты. В условиях подготовки к экзаменам по различным предметам, учащиеся старшей школы находятся в постоянном напряжении: интенсивная умственная деятельность, повышенная статическая нагрузка, эмоциональные переживания. Таким образом, на занятиях элективного курса важен настрой учащихся. Поэтому первый вопрос звучал следующим образом: «С каким настроением ты посещаешь занятия элективного курса?» Далее предлагались следующие варианты ответов: «с радостью», «моё настроение не зависит от урока», «с неохотой и раздражением». Результаты отражены на рис. 21.

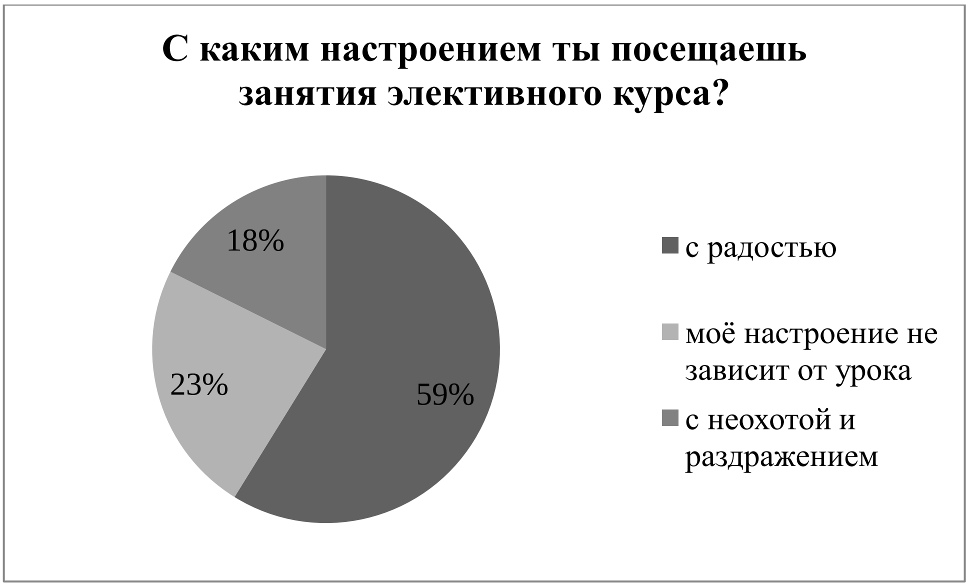


Рис. 21. Результаты первого вопроса

Далее нас интересовали ответы на следующий вопрос: «Всегда ли ты доволен своим результатом работы на уроке?». Предлагались следующие варианты ответов: «иногда недоволен, но стараюсь улучшить», «всегда», «часто недоволен, но мне это безразлично» (рис. 22).

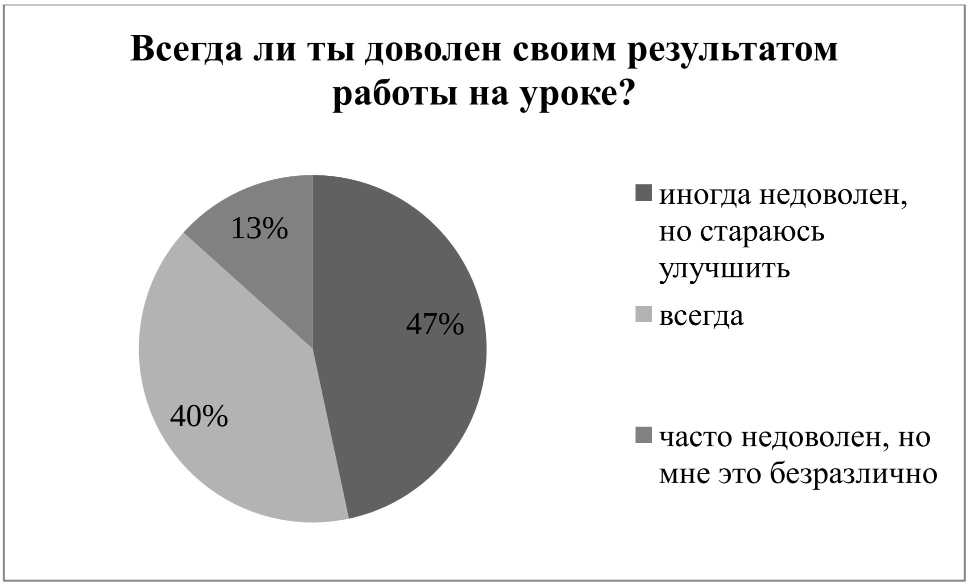


Рис. 22. Результаты второго вопроса

47% учащихся иногда недовольны своим результатом работы на уроке, но внушает оптимизм тот факт, что они стараются улучшить свои результаты. 40% опрошенных всегда довольны своим результатом работы. Скорее всего, эти учащиеся попали в «ситуацию успеха», на уроках у них получалось решать предложенные задания. Только 13% учащихся часто недовольны результатом своей работы и им это безразлично.

Третий вопрос, результаты которого хотелось бы привести, звучал следующим образом: «Если бы тебе предложили изучить данный элективный курс в начале учебного года, ты его бы выбрал?» Далее предлагалось дать один из предложенных ответов: «да», «не знаю», «нет» (рис. 23).

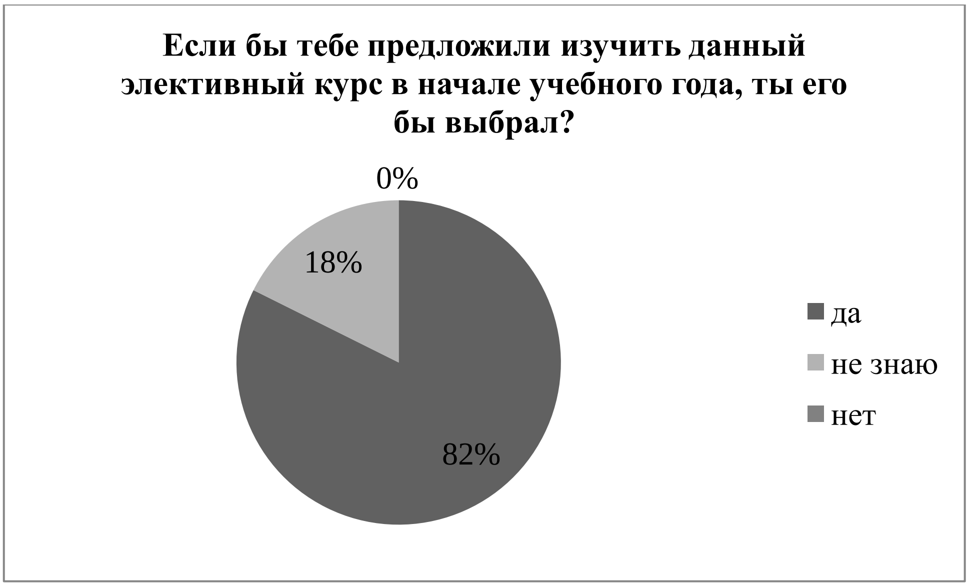


Рис. 23. Результаты третьего вопроса

Данный элективный курс вызвал интерес у учащихся. Он являлся эффективным дополнением в общей системе подготовки к сдаче ЕГЭ. Учащиеся позитивно отнеслись к занятиям элективного курса. Так как эксперимент состоял из меньшего количества часов, чем это заявлено в программе, то явные продвижения заметить немного трудно, но всё-таки положительные сдвиги имеются. О них можно судить по результатам пробных ЕГЭ и результатам анкетирования.

Таким образом, обобщение и систематизация основных методов решения уравнений и неравенств в 11 классе позволило повысить уровень математической подготовки учащихся в рамках содержательно-методической линии уравнений и неравенств.

Выводы по второй главе

В данной главе представлены описание основных требований к разработке элективных курсов в рамках профильной школы, разработка элективных курсов, отражающих суть методической идеи, предусматривающих систематизацию методов решения уравнений и неравенств, формирование обобщенных приемов их решения, расширение и углубление знаний учащихся по решению уравнений и неравенств с одной переменной, изучению методов решения уравнений в целых числах; описано содержание эксперимента, а также обобщены результаты опытно-экспериментальной работы по внедрению методической идеи.

По результатам второй главы можно заключить, что предложенная методическая идея позволяет систематизировать и обобщить теоретический материал, посвященный решению различных видов алгебраических уравнений и неравенств за курс основной школы, актуализировать методы и приемы их решения, углубить и расширить знания, дополнить теоретический материала, изучаемый в старшей школе, и ориентирована на подготовку учащихся к освоению вузовского курса математики. Данные элективные курсы могут быть использованы учителями математики в школе для учащихся 10−11 класса, изучающих математику как на базовом, так и на профильном уровнях. В рамках проведения опытно-экспериментальной работы среди учащихся 11 классов было установлено, что элективный курс является эффективным дополнением в общей системе подготовки к сдаче ЕГЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование по проблеме преодоления разрыва между линией алгебраических уравнений и неравенств и линией трансцендентных уравнений и неравенств в соответствии с поставленными задачами и выдвинутой гипотезой позволило получить следующие результаты:

1. На основе анализа психолого-педагогической, методической литературы доказана необходимость последовательного расширения представлений учащихся об уравнениях и неравенствах, соблюдения единой методической линии в различных определениях уравнений, активной работы по воспитанию культуры символики и графики, выработки системности знаний о классе уравнений и неравенств, развитию алгоритмической культуры учащихся.
2. Анализ учебно-методической литературы для учащихся 5–11 классов по математике позволил установить факт отсутствия у некоторых авторов сформированной единой концепции решения уравнений и неравенств, а также нахождение учебной литературы, в которой авторы дают возможность переосмысления методов решения уравнений и неравенств, но лишь в конце изучения школьного курса математики.
3. Систематизированы и обобщены виды уравнений и неравенств, основные методы и приемы их решения в рамках школьного курса математики.
4. Разработано методическое обеспечение процесса формирования линии уравнений и неравенств в 10–11 классах – элективные курсы «Уравнения и неравенства в профильной подготовке выпускников», предусматривающие систематизацию методов решения уравнений и неравенств, формирование обобщенных приемов их решения, расширение и углубление знаний учащихся по решению тригонометрических, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств, изучению методов решения уравнений в целых числах.

Описаны основные компоненты элективных курсов: целевой, содержательный и технологический.

5. Проведенная опытно-экспериментальная работа по апробации разработанного методического обеспечения показала, что элективные курсы являются прекрасным дополнением в общей системе подготовки к сдаче ЕГЭ по математике как базового, так и профильного уровня.

Таким образом, все поставленные задачи решены, цель исследования достигнута, гипотеза исследования получила частичное подтверждение, для ее полного подтверждения необходима более масштабная опытно-экспериментальная работа.

Дальнейшее исследование в выбранном направлении может быть посвящено созданию электронных образовательных ресурсов, обеспечивающих качественную реализацию предложенных элективных курсов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асмолов А.Г. Системно-деятельностный подход к разработке стандартов нового поколения. М.: Педагогика, 2009.
2. Базылев Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения. Мн.: НТЦ «АПИ», 1999.
3. Балаян Э.Н. Математика. Задачи типа С6. Ростов н/Д: Феникс, 2014.
4. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1989.
5. Валеев Г.Х. Методология и методы психолого-педагогических исследований: учебное пособие. Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 2002.
6. Вольфсон Г.И. и др. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. М.: МЦНМО, 2013.
7. Гиматдинова Г.Н. Подготовка учащихся старшей школы в рамках содержательно-методической линии уравнений и неравенств // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты (Красноярск, 2–3 ноября 2015 г.): материалы III Всероссийской научно-методической конференции. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. С. 145 – 151.
8. Гиматдинова Г.Н. Типичные ошибки при решении логарифмических и показательных неравенств // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сб. науч. тр. по материалам международной заочной научно-практической конференции. Воронеж, 9 – 12 ноября, 2015. С. 458 – 462.
9. Гиматдинова Г.Н. Типичные ошибки учащихся, допускаемые при решении уравнений и неравенств // Современные тенденции физико-математического образования: школа – вуз: материалы Международной научно-практической конференции. Соликамск, 17–18 апреля 2015. С. 31 – 35. года
10. Гунашева М.Г. Обучение учащихся решению уравнений и неравенств с параметрами при подготовке к ЕГЭ // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2011. № 1.
11. Ермолаева Е.Н. Уравнения в курсе алгебры 8–10 классов средней школы. М.: Учпедгиз, 1959.
12. Жаров С.Ю. Метод решения сложных логарифмических уравнений и неравенств в задании С3 ЕГЭ по математике // Наука и современность. 2014. № 29. С. 75–80.

13. Загвязинский В.И., Атаханов Р. Методология и методы психолого-педагогического исследования. М.: Академия, 2005.
14. Зубарева И.И. Математика. 5–6 классы: методическое пособие для учителя. М.: Мнемозина, 2008.
15. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2009.
16. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Математика. 6 класс: учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2009.
17. Иванов К.П. Ускоренный курс математики для сдачи ЕГЭ: учеб. пособие. СПб.: Невский Диалект, 2010.
18. Кейв М.А., Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие. Красноярск: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева, 2015.
19. Кожухов С.К. Уравнения и неравенства с параметром. Учебно-методическое пособие для учителей математики, студентов математических специальностей педагогических вузов, абитуриентов. Орел, 2013.
20. Колесникова С.И. Иррациональные уравнения. ЕГЭ. Математика. М.: ООО «Азбука-2000», 2010.
21. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Мерлина Н.И. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш, ун-та, 2009.
22. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования от 18.07.2002 № 2783 [Электронный ресурс]. URL: http://docs.cntd.ru/document/901837067 (дата обращения: 15.05.2016).
23. Концепция развития математического образования РФ от 24.12.2013 г. № 2506-Р [Электронный ресурс]. URL: http://docs.cntd.ru/document/499067348 (дата обращения: 15.05.2016).
24. Коропец З.Л., Коропец А.А., Алексеева Т.А. Математика. Нестандартные методы решения неравенств и их систем. Орел: ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК», 2012.
25. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных) [Электронный ресурс]. URL: http://alexlarin.net/ege/2011/C62011.pdf (дата обращения: 15.05.2016).
26. Краевский В.В., Бережнова Е.В. Методология педагогики: новый этап: учебное пособие для студентов высших учебных заведений. М.: Академия, 2006.
27. Лаппо Л.Д. ЕГЭ 2016. Математика. Эксперт в ЕГЭ. М.: Экзамен, 2016.

28. Лысенко Ф.Ф., Кулабухов С.Ю. Математика. ЕГЭ–2016. Тематический тренинг. 10–11 классы: учебно-методическое пособие. Ростов н/Д: Легион, 2015.
29. Лысенко Ф.Ф., Кулабухов С.Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2014: решаем задание С3 методом рационализации: учебно-методическое пособие. Ростов н/Д: Легион, 2013.
30. Ляпин С.Е., Гастева С.А., Крельштейн Б.И. и др. Методика преподавания математики в восьмилетней школе. М.: Просвещение, 1965.
31. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Преподавание алгебры в 6–8 классах: сб. статей. М.: Просвещение, 1980.
32. Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. М.: Просвещение, 1987.
33. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2007.
34. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2009.
35. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2009.
36. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10−11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). М.: Мнемозина, 2009.
37. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10−11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). М.: Мнемозина, 2009.
38. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2007.
39. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2009.
40. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2009.

41. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2009.
42. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2010.
43. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2010.
44. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс: методическое пособие для учителя. М.: Мнемозина, 2010.
45. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2010.
46. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2010.
47. Мордкович А.Г. Математика: полный справочник. М.: АСТ: Астрель, 2016.
48. Мордкович А.Г. Решаем уравнения. М.: Школа-Пресс, 1995.
49. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2009.
50. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2009.
51. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2005.
52. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2006.
53. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2006.
54. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2012.
55. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2012.
56. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология научного исследования. М.: Либроком, 2010.
57. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Учебно-методическое пособие для учащихся 10–11 классов. М.: Экзамен, 1998.
58. Потапов М.К. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Книга для учителя: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2008.

59. Потапов М.К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Книга для учителя: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2008.
60. Потапов М.К. Алгебра. 7 класс. Книга для учителя. М.: Просвещение, 2010.
61. Потапов М.К. Алгебра. 9 класс. Книга для учителя. М.: Просвещение, 2013.
62. Потапов М.К. Математика. Книга для учителя. 5-6 классы. М.: Просвещение, 2010
63. Потапов М.К. Математика. Методические рекомендации. 5 класс: пособие для учителей общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2012.
64. Потапов М.К. Математика. Методические рекомендации. 6 класс: пособие для учителей общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2012.
65. Примерные программы по учебным предметам. Математика. 5-9 классы: проект. М.: Просвещение, 2011.
66. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание С3. Решение неравенств с одной переменной. Ростов н/Д: Легион, 2014.
67. Садовничий Ю.В. ЕГЭ. Практикум по математике: Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. М.: Экзамен, 2015.
68. Севрюков П.Ф. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие. М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2008.
69. Севрюков П.Ф. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие. Ставрополь: Сервисшкола, 2009.
70. Седова Е.А., Пчелинцев С.В., Мищенко Т.М. и др. Примерные программы среднего (полного) общего образования: математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 10-11 классы. М.: Вентана-Граф, 2012.
71. Семенов А.В. Оптимальный банк заданий для подготовки к ЕГЭ. ЕГЭ 2015. Математика. Учебное пособие. М.: Интеллект-Центр, 2015.
72. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования от 17.12.2010 № 1897 [Электронный ресурс]. URL: http://docs.cntd.ru/document/902254916 (дата обращения: 15.05.2016).
73. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования от 7.06.2012 № 413 [Электронный ресурс]. URL: http://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 15.05.2016).
74. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс]. URL: http://base.garant.ru/70291362/ (дата обращения: 15.05.2016).

75. Харьковская В.Ф. Методика преподавания алгебры в основной школе: Учебное пособие для студентов педвузов и педколледжей. Ростов н/Д: РГПУ, 1996.
76. Чернокнижникова Л.М. Нестандартные уроки. Математика. 5–10 класс: Учебно-методическое пособие. М.: АРКТИ, 2010.
77. Шашкина М.Б., Табинова О.А. О качестве математической подготовки в школе и вузе // Математика в школе. 2014. №4. Электронное приложение. №1.
78. Шашкина М.Б., Якименко М.Б. По горячим следам ЕГЭ 2012 г.: задание С1 // Математика в школе. 2012. №9. С. 11–18.
79. Шашкина М.Б., Якименко М.Ш. Типичные ошибки при решении заданий С3 на ЕГЭ в 2010–2011 гг. // Математика в школе. 2011. № 9. С. 11–19.
80. Якименко М.Ш., Шашкина М.Б. По горячим следам ЕГЭ: задания С1–С4 // Математика в школе. 2013. №9. С. 14–22.
81. Ястребинецкий Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1972.
82. Ященко И.В., Семенов А.В., Высоцкий И.Р. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2015 года по математике. М.: ФИПИ, 2015.
83. Halmaghi Elena. Undegraduate students’ conceptions of inequalities. Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, 2011.
84. Vaiyavutjamai P. & Clements M.A. Effects of classroom instruction on student performance on, and understanding of, linear equations and linear inequalities. Mathematical Thinking and Learning, 8(2), 113–147.
85. Xuhui Li. An investigation of secondary school algebra teachers’ mathematical knowledge for teaching algebraic equation solving. Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, 2007.

Приложение 1. Методы решения тригонометрических уравнений

Методы искусственных преобразований для решения тригонометрических уравнений

Рассматриваются решения тригонометрических уравнений, требующие искусственных преобразований.

– Умножение обеих частей уравнения на одну и ту же тригонометрическую функцию.

Пример. Решить уравнение $2\cos x\,(2\cos 4x + 1) = 1$

Решение.

Раскроем скобки и преобразуем произведение $\cos 4x \cdot \cos x$ в сумму $4\cos 4x\cos x + 2\cos x = 1$; $2\cos 5x + 2\cos 3x + 2\cos x = 1$.

Умножим обе части уравнения на $\sin x$. Заметим, что $x = \pi n,\ n \in Z$ не является решением данного уравнения.

$2\sin x\cos 5x + 2\sin x\cos 3x + 2\cos x\sin x = \sin x$.

Преобразуем произведения, стоящие в левой части уравнения: $\sin 6x - \sin 4x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 2x = \sin x$; $\sin 6x = \sin x$, получим $2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{7x}{2} = 0$, откуда $2\sin\frac{5x}{2} = 0$ или $\cos\frac{7x}{2} = 0$. Решая последние уравнения, получим $x = \frac{2\pi k}{5}, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi m}{7}, m \in Z$. Исключим из найденных серий корней корни вида $x = \pi n, n \in Z$:

а) $\frac{2\pi k}{5} \neq \pi n,\ n \in Z;\ k \neq \frac{5n}{2},\ n \in Z$. Ясно, что n — четное число, т. е. $n = 2l, l \in Z$, а поэтому $k \neq 5l, l \in Z$.

б) $\frac{\pi(1+2m)}{7} \neq \pi n,\ n \in Z;\ m \neq \frac{7n-1}{2},\ n \in Z$. Так как $m \in Z$, то $n \neq 2p + 1$, $p \in Z$, но тогда $m \neq 7p + 3, p \in Z$.

Ответ: $\frac{2\pi k}{5}, k \in Z, k \neq 5l, l \in Z$; $\frac{\pi(1+2m)}{7}, m \in Z, m \neq 7p + 3, p \in Z$.

Прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа, одной и той же тригонометрической функции.

Пример. Решить уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 4x$.

Решение.

Область определения уравнения задается неравенствами $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$.

Прибавим к обеим частям уравнения по единице:

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 4x + 1$.

$$\frac{\cos x}{\cos x\cos 2x} = \frac{\cos x}{\cos 3x\cos 4x}.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим:

$\cos x + \cos 3x = \cos 7x \cos x$; $\cos 7x - \cos 3x = 0$;

$\sin 2x \cdot \sin 5x = 0$, тогда $x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{5}t$, $t \in Z$.

Из первой серии корней области определения принадлежит только $x = \pi m$, $m \in Z$, но эта серия корней содержится в серии $x = \frac{\pi}{5}t$, $t \in Z$.

Нетрудно убедиться, что $x = \frac{\pi}{5}t$, $t \in Z$ входит в область определения.

Например: $\frac{\pi}{5}t \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$; $4t \neq 5 + 10n$; $4t - 10n \neq 5$, что верно, поскольку левая часть — число четное, а правая - нечетное; и так далее...

Ответ: $x = \frac{\pi}{5}t$, $t \in Z$.

– Тождественные преобразования одной из частей уравнения (прибавление и вычитание одного и того же выражения).

Пример. Решить уравнение $\cos 7x = \cos^3 x$.

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$(\cos 7x - \cos 5x) + (\cos 5x - \cos 3x) + (\cos 3x - \cos x) + \cos x = \cos^3 x$;

$-2\sin 6x \sin x - 2\sin 4x \sin x - 2\sin 2x \sin x + \cos x = \cos^3 x$;

$-2\sin 6x\,(\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x) = \cos x\,(\cos^2 x - 1)$;

$-2\sin x\,(2\sin 4x \cos 2x + \sin 4x) + \sin^2 x \cos x = 0$;

$8\sin^2 x \cos x \cos 2x\,(2\cos 2x + 1) - \sin^2 x \cos x = 0$;

откуда $\sin^2 x \cos x = 0$, тогда $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$ или $8\cos 2x\,(2\cos 2x + 1) - 1 = 0$; $16\cos^2 2x + 8\cos 2x - 1 = 0$.

Легко видеть, что $\cos 2x = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{4}$; $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1\pm\sqrt{2}}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1\pm\sqrt{2}}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

– Использование свойств пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$; $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$; $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$. Необходимо помнить, что применение приведенных выше равенств приводит к расширению области определения уравнения. Так, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,(b \neq 0, d \neq 0)$, то $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$, если $a \neq -b$ и $c \neq -d$.

Пример. Решить уравнение $\frac{2\sqrt{3}\cos 10°+1}{2\sin 10°+1} = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

Решение.

Область определения уравнения задается неравенствами $\cos 3x \neq 0$; $\cos x \neq 0$; $\sin x \neq 0$. По свойству пропорции:

$\frac{2\sqrt{3}\cos 10°+2\sin 10°+2}{2\sqrt{3}\cos 10°-2\sin 10°} = \frac{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x}$;

$\frac{\sqrt{3}\cos 10°+\sin 10°+1}{\sqrt{3}\cos 10°-\sin 10°} = \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$;

$\frac{2\cos 20°+1}{2\cos 40°} = 2\cos 2x$;

$\frac{\cos 20°+\cos 60°}{\cos 40°} = 2\cos 2x$; $\cos 2x = \cos 20°$;

$x = \pm 10° + 180°n,\ n \in Z$. Очевидно, что расширения области допустимых значений не произошло.

Ответ: $\pm 10° + 180°n, n \in Z$.

Решение тригонометрических уравнений методом экстремальных значений

При решении некоторых тригонометрических уравнений удобно использовать ограниченность функций $\sin x$ и $\cos x$.

Пример. Решить уравнение $\sin 18x + \sin 10x + \sin 2x = 3 + \cos^2 2x$.

Решение.

Так как $\sin 18x + \sin 10x + \sin 2x < 3$, то $\cos^2 2x \leq 0$, откуда $\cos 2x = 0$, и возможные корни данного уравнения $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$.

Подставив это значение в левую часть уравнения, получим $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + 9\pi n\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 5\pi n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 3$ только при $n = 2k$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ — решение данного уравнения.

Решение тригонометрических уравнений с помощью скалярного произведения векторов

Известно, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$.

Так как $|\cos\alpha| \leq 1$, то $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Если векторы заданы в координатной форме, т. е. $\vec{a}\{a_1; a_2\}$ и $\vec{b}\{b_1; b_2\}$, то$a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Пример. Решить уравнение

$$\sin x\sqrt{\sin x} + \cos x\sqrt{\cos x} = \sqrt{\sin x + \cos x}.$$

Решение.

Пусть $\vec{a}\,\{\sin x\,; \cos x\}$ и $\vec{b}\,\{\sqrt{\sin x}\,; \sqrt{\cos x}\}$, тогда $\sin x\sqrt{\sin x} + \cos x\sqrt{\cos x} \leq \sqrt{\sin x + \cos x}$, и знак равенства имеет место, если $\frac{\sin x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}}$ или$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$[Севрюков, 2008].

Приложение 2. Разработка урока – КВН по теме «Логарифмические и показательные уравнения»

***Урок - КВН** по теме: «Логарифмические и показательные уравнения»*

Эпиграф урока: «В математических вопросах нельзя пренебрегать даже самыми мелкими ошибками.»

И. Ньютон

Цели:

образовательные: проверить знания учащихся по свойствам логарифмов, умения решать логарифмические и показательные уравнения.

воспитательные: воспитать уважения к математике как к предмету; воспитать аккуратность, эстетичность; воспитать положительное отношение к одноклассникам и самому себе;

развивающие: развить творческие способности учащихся; развить точность, логичность мышления;

Тип урока:урок закрепления знаний и умений

Вид урока: урок-КВН

Оборудование:

- эмблемы для капитанов, помощников и консультантов;
- компьютер
- цветные карточки для оценивания в личностном первенстве;
- карточки с заданиями;
- таблица для выставления баллов по результатам конкурсов.

План урока:

1. Организационный момент.
2. Разминка.
3. Блиц - турнир.
4. Домашнее задание.
5. Конкурс капитанов.
6. Конкурс консультантов.
7. Математический футбол.
8. Конкурс художников.
9. Итоги урока.

Ход урока:

Организационный момент: Сегодня наше задание пройдет в форме игры КВН. Ход урока будет проходить в следующие этапы: разминка, блиц-турнир, домашнее задание, конкурс капитанов, конкурс консультантов, математический футбол и конкурс художников.

Учащиеся рассаживаются за партами так, чтобы члены одной команды сидели в одном ряду: три ряда – три команды КВН. Выбираются капитаны, помощники и консультанты. Придумывается название команды и девиз. На груди у капитанов, помощников капитанов и консультантов соответствующие эмблемы:

$$\log_a b = c$$
$$a^c = b$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^{\log_a b} = a$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot b^m = \left(a \cdot b\right)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Разминка: Учитель после краткого вступления включает презентацию на компьютере и проецирует на экран задания, в которых требуется выполнить действия:

а) решить уравнения: $3^x = \frac{1}{81}$; $\log_3(x-1) = 0$; $\log_2(x+5) = 1$.

б) вычислить: 3^{-4}; 3^{-2}; $8^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{2^{3x}} = \sqrt{8}$; $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$.

Листочки с решениями собирают консультанты из команды соперников, быстро их просматривают и откладывают в сторону те, где есть ошибки. Количество отложенных листочков – это вычтенные баллы.

Примечание: при отсутствии компьютера учитель может пользоваться кодоскопом или заранее подготовленными таблицами с заданиями или записями на доске.

Трое учащихся, первыми верно выполнившие преобразование, получают по красной карточке. В конце урока учитель выставит им оценку «5». Баллы, заработанные всей командой, фиксируются в итоговой таблице.

Блиц-турнир: (проводится в то время, пока консультанты трудятся над проверкой работ предыдущего конкурса) на экране проецируется задание, требующее найти ошибку в решении уравнения: $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$

Решение: Обозначим $\log_3 x = y$, тогда $\log_3^2 x = y^2$, подставим соответственно y^2 иу в данное уравнение и получим: $y^2 + 3y + 2 = 0$, откуда $y = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$; $y = -1$ или $y = -2$. Получаем совокупность уравнений:

а) $\log_3 x = 1$, откуда $x = 3^1$;

б) $\log_3 x = 2$, откуда $x = 3^2$ или $x = 9$.

Учитывая, что $D(\log_3)=R_+$, получаем ответ: $\{3;9\}$.

Учащиеся отвечают только по желанию. Команде, от которой поступило первое указание на ошибку, присуждается 5 баллов.

За более рациональное решение и лучшее объяснение – еще 1-5 баллов.

Домашнее задание: Все тетради, собранные заранее, уже проверены помощниками капитанов и консультантами. Они докладывают классу о результатах; попутно отмечая ошибки. Число баллов, присужденных в этом конкурсе, фиксируется в итоговой таблице.

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^5$;
2. $2^{x^2} - 6x - 2{,}5 = 16\sqrt{2}$
3. $\lg(x-1)^2 = \lg(3x+1)$

Конкурс капитанов: Капитаны получают карточки с заданием «решить уравнение»:

1. $\lg(x+4) - \lg(x-5) = 1$;
2. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$;
3. $\lg 2x + \lg(3x+5) = 2$;

Конкурс консультантов: Троим консультантам (по одному от каждой команды) вручаются карточки с заданием «решить уравнение»:

1. $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2x-5}$;
2. $\log_4(x-1) = \log_4(5-x)$;
3. $2 \cdot 2^x + 4^x = 80$.

Консультант выполняет задание, объясняя одновременно свои действия всему классу. Ребята из других команд разыгрывают непонимание объясненного, задают консультантам свои вопросы.

Для остальных:

В этом конкурсе сильные участники могут участвовать только в роли консультантов. Но если они не выбраны консультантами, на экране проектора проецируется слайд с примерами, где требуется вместо знака вопроса поставить подходящее выражение:

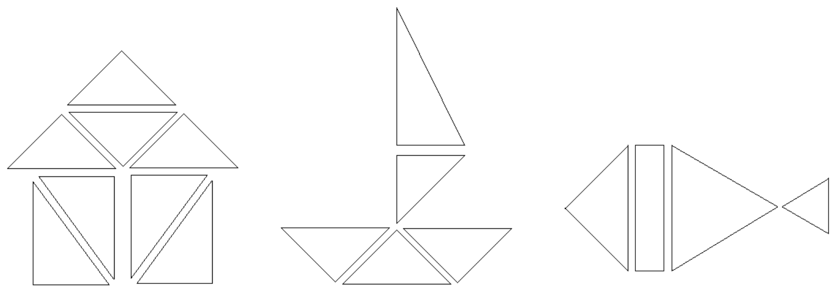
1. $0{,}01^{\log_{0,01}?} = \pi$;
2. $\dfrac{a^{16}}{?} = a^{20}$;
3. $\log_2 \log_3 ? = 0$.

Те ребята, которые верно выполнили задание по слайду, получают красные карточки.

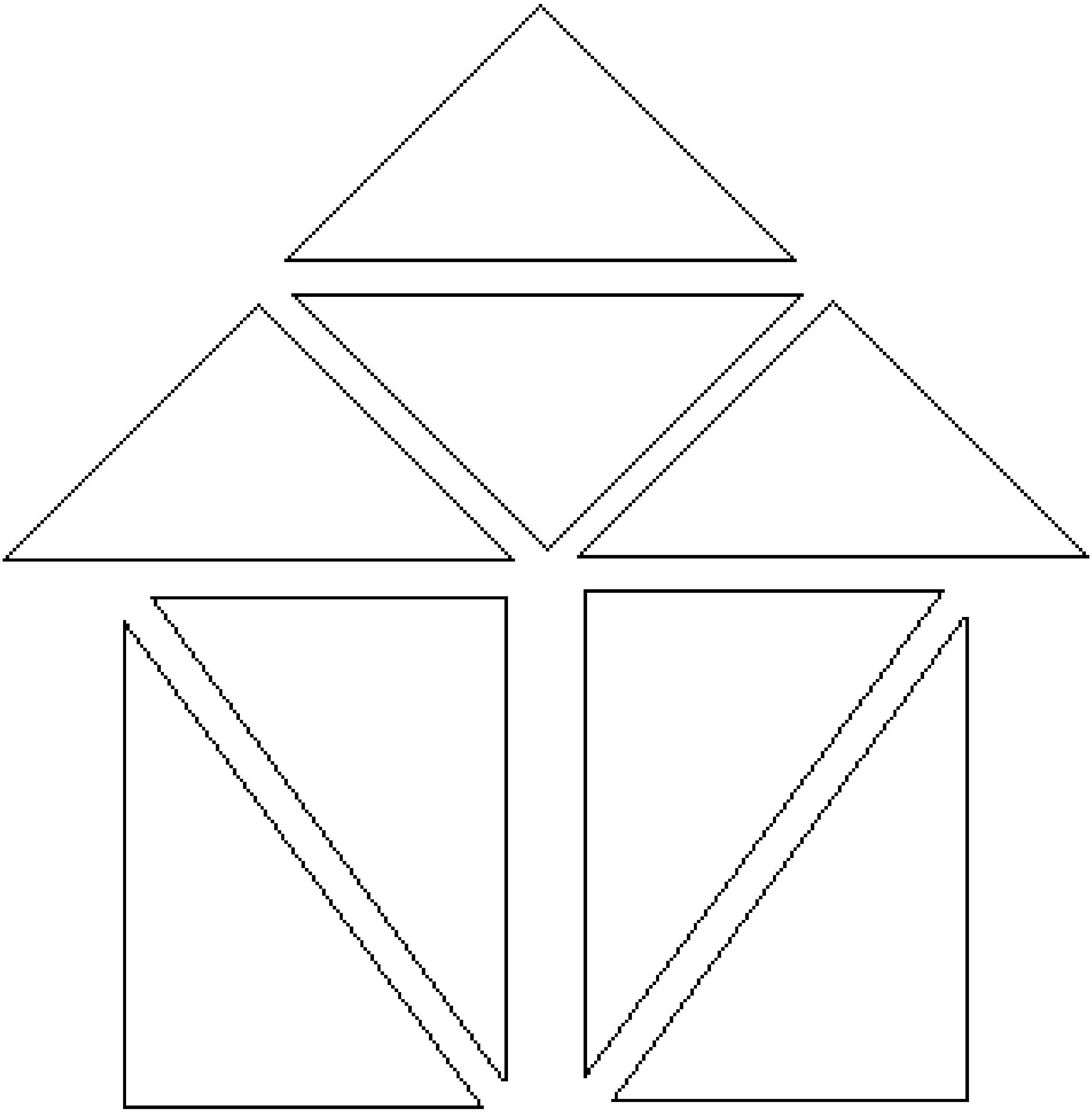
Математический футбол: Каждая команда должна придумать задание для участника другой команды, он в ответ должен «отфутболить» им это задание. Если ученик не справляется с задание, то команда выручает своего незадачливого товарища отвечая за него.

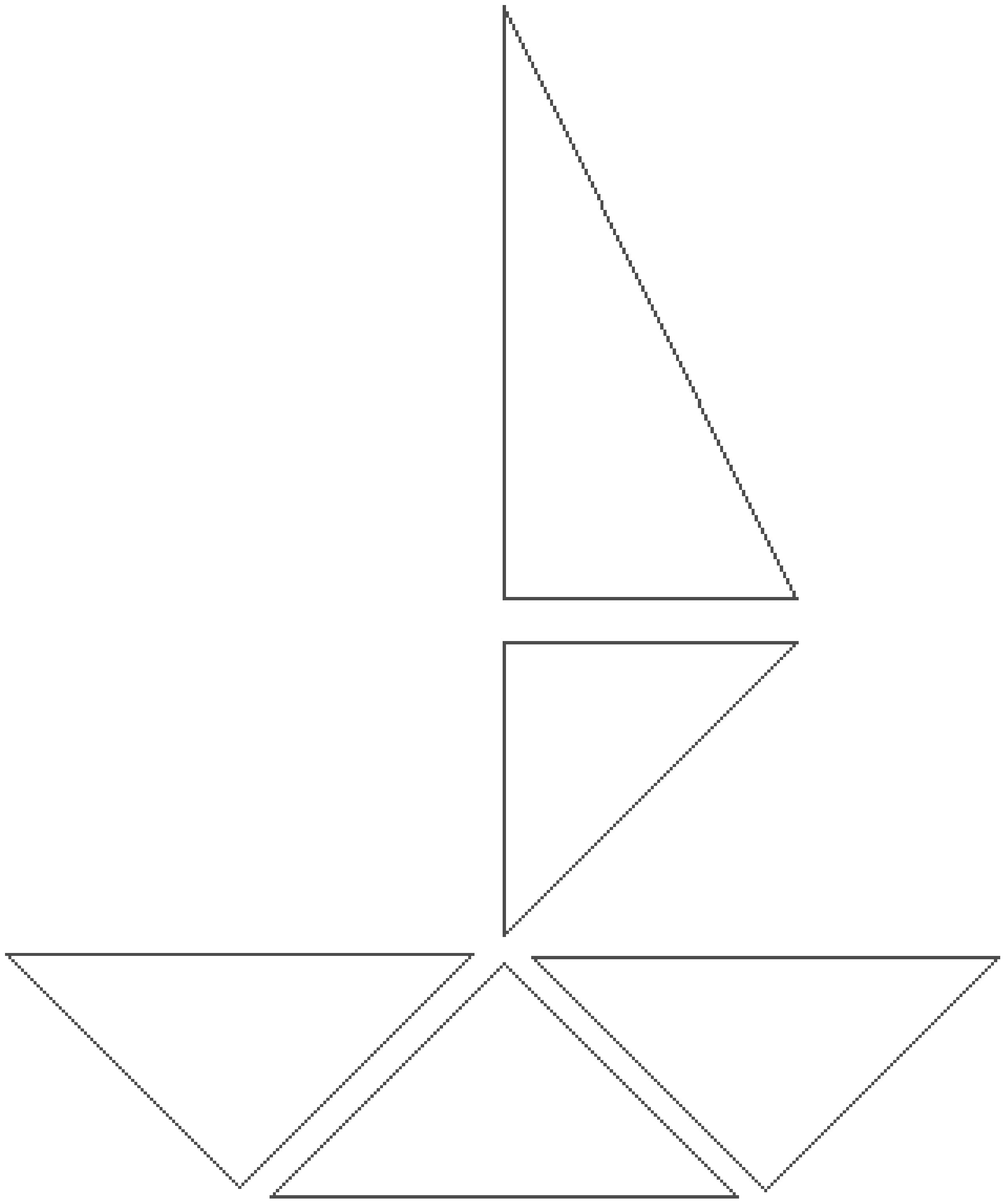
Каждая команда должна задать по два вопроса другой, и ответить на 4 задания.

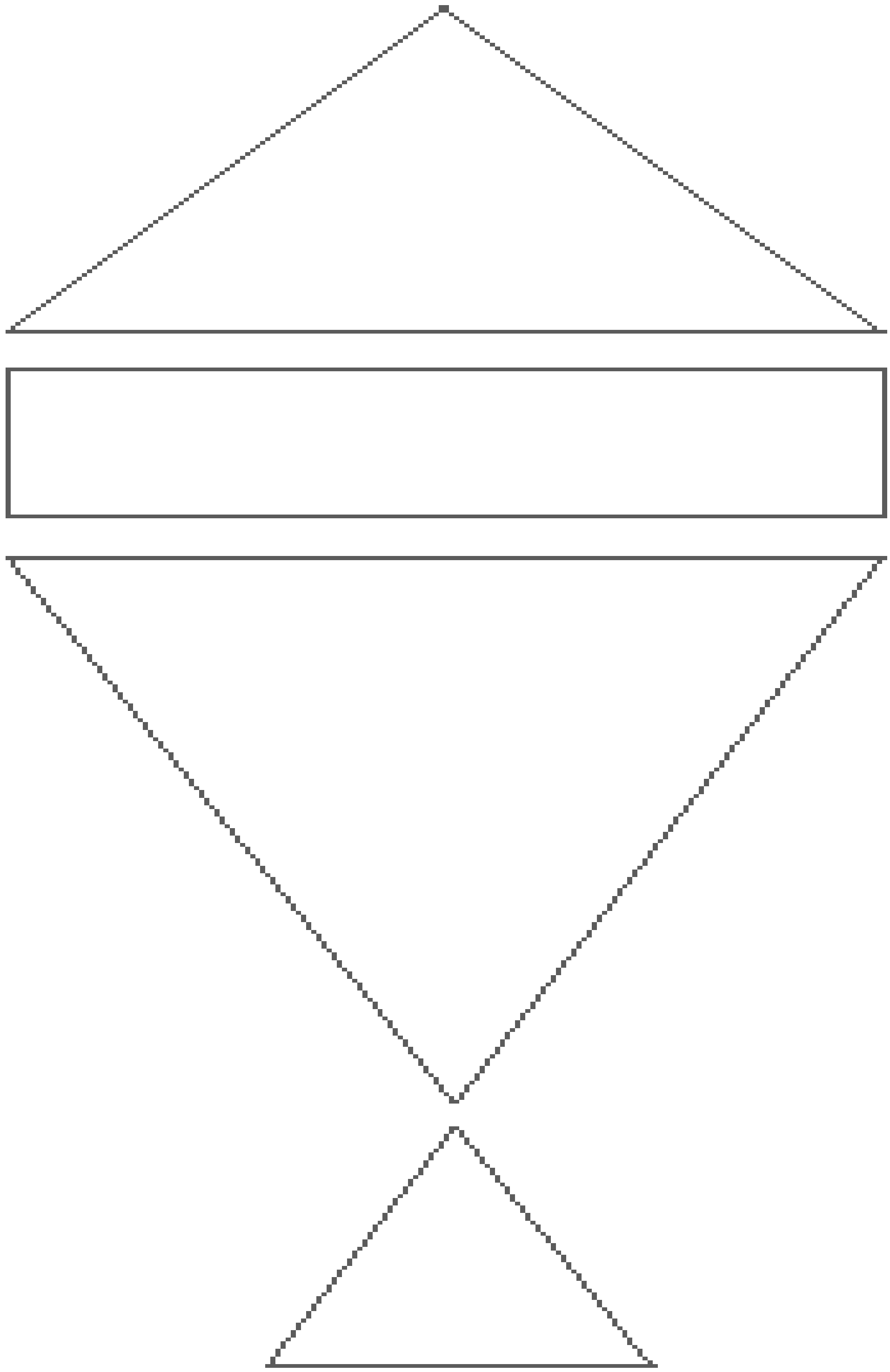
Конкурс художников: Каждая команда выделяет для участия в этом конкурсе по одному человеку, которые строят из геометрических фигур указанные фигурки. У одного должна получиться рыбка, у другого кораблик, у третьего – домик.



Итоги урока: КВН заканчивается подведением итогов и заключительным словом учителя. Ребята, которым во время игры были вручены красные карточки, получают оценку «5», более слабые учащиеся, которые проявили себя, но не получили карточки, получают оценки «4».







$$\log_a b = c$$
$$a^c = b$$

$$\log_a b = c$$
$$a^c = b$$

$$\log_a b = c$$
$$a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = a$$

$$a^{\log_a b} = a$$

$$a^{\log_a b} = a$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot b^m = \left(a \cdot b\right)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Приложение 3. Требования, предъявляемые к выпускникам государственными образовательными стандартами

Таблица 10

Требования, предъявляемые к выпускникам на базовом и профильном уровне государственными образовательными стандартами

№ задания	Проверяемые требования (умения)	Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
Базовый уровень			
7	Уметь решать уравнения и неравенства	- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы	- Квадратные уравнения - Рациональные уравнения - Иррациональные уравнения - Тригонометрические уравнения - Показательные уравнения - Логарифмические уравнения
17	Уметь решать уравнения и неравенства	- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы	- Квадратные неравенства - Рациональные неравенства - Показательные неравенства - Системы линейных неравенств
Профильный уровень			
5	Уметь решать уравнения и неравенства	- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы	- Квадратные уравнения - Рациональные уравнения - Иррациональные уравнения - Тригонометрические уравнения - Показательные уравнения - Логарифмические уравнения - Равносильность уравнений, систем уравнений - Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными

		- Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных - Использование свойств и графиков функций при решении уравнений - Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем - Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений
10	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	- Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках; - Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах; - Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.	- Квадратные уравнения - Рациональные уравнения - Иррациональные уравнения - Тригонометрические уравнения - Показательные уравнения - Логарифмические уравнения - Равносильность уравнений, систем уравнений - Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными - Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных - Использование свойств и графиков функций при решении уравнений - Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем - Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений - Квадратные неравенства - Рациональные неравенства - Показательные неравенства - Логарифмические неравенства - Системы линейных неравенств

		-	- Системы неравенств с одной переменной - Равносильность неравенств, систем неравенств - Использование свойств и графиков функций при решении неравенств - Метод интервалов - Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем
11	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	- Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры	- Квадратные уравнения - Рациональные уравнения - Иррациональные уравнения - Тригонометрические уравнения - Показательные уравнения - Логарифмические уравнения - Равносильность уравнений, систем уравнений - Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными - Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных - Использование свойств и графиков функций при решении уравнений - Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем - Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений - Квадратные неравенства - Рациональные неравенства - Показательные неравенства - Логарифмические неравенства - Системы линейных неравенств - Системы неравенств с одной переменной - Равносильность неравенств, систем неравенств

Продолжение табл. 10

		-	- Использование свойств и графиков функций при решении неравенств - Метод интервалов - Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем
13	Уметь решать уравнения и неравенства	- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы - Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод - Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы	- Квадратные уравнения - Рациональные уравнения - Иррациональные уравнения - Тригонометрические уравнения - Показательные уравнения - Логарифмические уравнения - Равносильность уравнений, систем уравнений - Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными - Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных - Использование свойств и графиков функций при решении уравнений - Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем - Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений - Квадратные неравенства - Рациональные неравенства - Показательные неравенства - Логарифмические неравенства - Системы линейных неравенств - Системы неравенств с одной переменной - Равносильность неравенств, систем неравенств - Использование свойств и графиков функций при решении неравенств

		-	- Метод интервалов - Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем
15	Уметь решать уравнения и неравенства	- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы	- Квадратные уравнения - Рациональные уравнения - Иррациональные уравнения - Тригонометрические уравнения - Показательные уравнения - Логарифмические уравнения - Равносильность уравнений, систем уравнений - Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными - Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных - Использование свойств и графиков функций при решении уравнений - Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем - Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений - Квадратные неравенства - Рациональные неравенства - Показательные неравенства - Логарифмические неравенства - Системы линейных неравенств - Системы неравенств с одной переменной - Равносильность неравенств, систем неравенств - Использование свойств и графиков функций при решении неравенств - Метод интервалов - Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем

18	Уметь решать уравнения и неравенства	- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы - Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод - Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы; - Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры	- Квадратные уравнения - Рациональные уравнения - Иррациональные уравнения - Тригонометрические уравнения - Показательные уравнения - Логарифмические уравнения - Равносильность уравнений, систем уравнений - Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными - Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных - Использование свойств и графиков функций при решении уравнений - Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем - Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений - Квадратные неравенства - Рациональные неравенства - Показательные неравенства - Логарифмические неравенства - Системы линейных неравенств - Системы неравенств с одной переменной - Равносильность неравенств, систем неравенств - Использование свойств и графиков функций при решении неравенств - Метод интервалов - Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем - Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания - Чётность и нечётность функции - Периодичность функции

		-	- Ограниченность функции - Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции - Наибольшее и наименьшее значения функции - Основные элементарные функции - Линейная функция, её график - Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график - Квадратичная функция, её график - Степенная функция с натуральным показателем, её график - Тригонометрические функции, их графики - Показательная функция, её график - Логарифмическая функция, её график