

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)
Институт математики, физики и информатики
Кафедра физики, технологии и методики обучения

Рупосов Кирилл Олегович
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Разработка методов определения типа вероятностного распределения в
приложении к стандартному броуновскому движению: интеграция в спецкурс
для старшего возраста

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы
Физическое и технологическое образование в новой образовательной
практике

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой
доцент, кандидат педагогических наук
С.В. Латынцев

15.06.2026

(дата, подпись)

Руководитель магистерской программы
профессор, доктор педагогических наук
В.И. Тесленко

22.05.2026

(дата, подпись)

Руководитель
доцент кафедры ФТиМО, кандидат физико-
математических наук И.Н. Орлова

19.06.2026

(дата, подпись)

Дата защиты

Обучающийся К.О. Рупосов

19.06.2026

(дата, подпись)

Оценка

хорошо

(прописью)

Красноярск 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	7
1.1. Ограничения классических критериев согласия при анализе асимметричных выборок конечных рядов	7
1.2. Математический аппарат логарифмического и полулогарифмического масштабирования	10
1.3. Специфика выборочного индекса Херста в траекториях броуновского движения.....	15
Выводы по главе 1	18
ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ АПРОБАЦИЯ МЕТОДОВ НА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ	19
2.1. Рабочая гипотеза: обобщённое нормальное распределение	19
2.2. Спрямоляющие координаты для проверки гипотезы	20
2.3. Идентификация распределения N_x	21
2.4. Идентификация распределения N_{vx}	24
2.5. Итог идентификации	25
Выводы по главе 2	26
ГЛАВА 3. СТРУКТУРНО-СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧЕБНОГО МОДУЛЯ	28
3.1. Назначение, цель и задачи модуля.....	28
3.2. Планируемые результаты и тематический план	29
3.3. Педагогическая целесообразность и прогнозируемые образовательные результаты	30
Выводы по главе 3	33
ГЛАВА 4. РАЗРАБОТКА МЕТОДИЧЕСКОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ УЧЕБНОГО МОДУЛЯ	34

4.1. Структура и состав пособия.....	34
4.2. Дидактические материалы	35
4.3. Контрольно-измерительные материалы	36
4.3.1. Образец заданий текущего контроля	36
4.3.2. Итоговое (зачётное) задание	37
4.4. Темы учебно-исследовательских проектов.....	38
Выводы по главе 4	38
ГЛАВА 5. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ	
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	39
Лабораторная работа № 1. Эмпирическое распределение индекса	
Херста и его числовые характеристики	40
Лабораторная работа № 2. Зависимость распределения индекса Херста	
от длины ряда	42
Лабораторная работа № 3. Идентификация распределения с помощью	
пробит- и логит-преобразований	44
Лабораторная работа № 4. Динамика координаты и скорости	
броуновского движения и значения индекса Херста	46
Выводы по главе 5	47
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	48
ЛИТЕРАТУРА	50

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

В распоряжении исследовательской группы имеются оригинальные экспериментально полученные распределения индексов Херста конечных рядов координаты и проекции скорости стандартного броуновского движения, имеющие необычный вид (наличие асимметрии, эксцесса и др.), для которых не удалось определить тип стандартными средствами. Многочисленные попытки найти аналогичные исследования в информационном пространстве не увенчались успехом. Имеется идея логарифмического представления распределений, имеющая потенциал в решении данной проблемы. В образовательном плане знакомство с логарифмическими методами работы с вероятностными распределениями окажется весьма полезным для обучающихся старшего возраста.

Гипотеза исследования

Использование логарифмических и подобных преобразований осей позволит решить нерешенную задачу об определении типа экспериментальных распределений вероятности индекса Херста конечных рядов стандартного броуновского движения. Разработанный специализированный учебный курс позволит углубить знания по математической статистике и теории стохастических процессов у обучающихся старшего звена (студенты, старшие школьники)

Объект исследования

Вероятностные распределения.

Предмет исследования

Логарифмические методы определения типа вероятностного распределения и их методико-дидактическое описание

Цель исследования

Определить тип распределений индексов Херста конечных рядов броуновского движения с использованием разработанных в данном исследовании методов; интегрировать эти методы в спецкурс для обучающихся старшего возраста.

Задачи исследования

1. Разработать и теоретически обосновать набор методов идентификации вероятностного распределения, основанных на отображении распределения в логарифмических, полулогарифмических и т. п. осях.
2. С помощью разработанных методов попытаться определить тип вероятностных распределений индексов Херста конечных рядов стандартного броуновского движения.
3. Сделать небольшое методическое пособие для изучения разработанных методов в рамках специализированного спецкурса по математической статистике и теории стохастических процессов.
4. Спроектировать структуру и содержание данной части спецкурса, предложить дидактические и контрольно-измерительные материалы для изучения материала.
5. Оценить педагогическую целесообразность и образовательный потенциал предложенного спецкурса.

Научная новизна:

Систематизирован и теоретически обоснован набор методов идентификации типа вероятностного распределения, объединяющий спрямление в логарифмических, полулогарифмических и подобных координатах в единый методический инструментарий. Этот инструментарий применён к ранее не исследованным распределениям индексов Херста конечных рядов координаты и проекции скорости стандартного броуновского движения: получены их количественная характеристика и отвергнут ряд гипотез о типе.

Кроме того, результаты исследования впервые перенесены в образовательную практику — на оригинальных экспериментальных данных разработан учебный модуль с лабораторным практикумом по идентификации вероятностных распределений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В последние годы исследование распределений случайных величин с выраженной асимметрией и сложным поведением хвостов приобретает всё большую актуальность в статистике, физике и теории случайных процессов. Особый интерес представляют распределения, возникающие при анализе броуновского движения и связанных с ним фрактальных характеристик. Одной из таких характеристик является индекс Херста, позволяющий оценивать наличие долговременной памяти и самоподобия временных рядов [1]. Анализ распределений индексов Херста представляет интерес как с точки зрения математической статистики, так и в контексте моделирования сложных динамических процессов.

Настоящая глава посвящена теоретическому обоснованию инструментария, на котором строится дальнейшее практическое исследование. В параграфе 1.1 анализируются принципиальные ограничения классических критериев согласия применительно к асимметричным выборкам конечного объёма. В параграфе 1.2 излагается математический аппарат логарифмического и полулогарифмического масштабирования, позволяющий преобразовывать распределения к виду, удобному для визуальной и количественной идентификации. В параграфе 1.3 рассматривается специфика выборочного индекса Херста в траекториях броуновского движения, объясняющая, почему распределения этой величины обладают необычной формой и не поддаются идентификации стандартными средствами.

1.1. Ограничения классических критериев согласия при анализе асимметричных выборок конечных рядов

Классические критерии согласия по своей природе являются проверочными (подтверждающими), а не идентифицирующими. Они отвечают на вопрос о том, согласуются ли наблюдаемые данные с заранее названным

теоретическим распределением, но не указывают, какому именно семейству принадлежит эмпирическое распределение. Когда исследуемая выборка обладает выраженной асимметрией и эксцессом, последовательная проверка стандартных гипотез нередко приводит к серии отвержений без указания истинного типа распределения. Именно такая ситуация возникает при анализе распределений индексов Херста: в работах, посвящённых данной тематике, установлено, что распределения индексов Херста рядов координаты и проекции скорости не относятся ни к распределению Вейбулла, ни к логнормальному, ни к гамма-распределению [3]. Это свидетельствует о более сложной структуре исследуемых распределений и о необходимости привлечения дополнительных методов идентификации.

Рассмотрим основные критерии, применяемые на практике, и их ограничения. Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат) основан на группировке данных по интервалам и сравнении наблюдаемых и ожидаемых частот. Его результат существенно зависит от выбора числа и границ интервалов, требует достаточного заполнения ячеек и теряет мощность на малых выборках; при оценивании параметров по той же выборке число степеней свободы должно корректироваться. Критерий Колмогорова — Смирнова, основанный на максимальном отклонении эмпирической функции распределения от теоретической, чувствителен прежде всего к центральной части распределения и слабо реагирует на отклонения в области хвостов. Кроме того, при оценивании параметров по той же выборке табличные критические значения становятся некорректными, что требует применения поправки Лиллиефорса.

Критерии Андерсона — Дарлинга и Крамера — Мизеса — Смирнова придают больший вес хвостовым областям и потому точнее реагируют на отклонения вдали от центра, однако и они дают лишь бинарный ответ относительно одной заранее заданной гипотезы. Узкоспециализированные критерии нормальности — Шапиро — Уилка и Жарка — Бера — проверяют согласие только с нормальным законом и непригодны для широкого перебора

семейств. Таким образом, ни один из перечисленных критериев не решает задачу идентификации типа распределения как таковую.

Одной из ключевых проблем классических критериев согласия является их ориентация преимущественно на центральную часть распределения. В результате редкие экстремальные значения оказывают относительно слабое влияние на итоговые статистические оценки. Между тем именно хвостовые области распределения позволяют судить о природе случайного процесса и наличии степенных закономерностей. В работах по стохастической теории экстремумов отмечается, что распределения с медленно убывающими хвостами требуют применения специальных методов анализа [2, 9]. При использовании стандартных критериев значительная часть информации о структуре хвостов может теряться, особенно в условиях конечного объёма выборки, где отдельные выбросы существенно влияют на коэффициенты асимметрии и эксцесса [5].

Дополнительные ограничения связаны с конечностью исследуемых рядов. Асимптотические свойства критериев, на которых основаны их распределения и критические значения, для коротких выборок не выполняются, а оценки параметров оказываются смещёнными. Существенна и зависимость мощности критериев от объёма выборки: при малом числе наблюдений практически любая гипотеза не отвергается, тогда как при очень большом объёме отвергается даже незначимое отклонение. Наконец, большинство классических критериев настроены на распределения, заданные на всей числовой оси, и не учитывают ограниченность носителя исследуемой величины. Для индекса Херста, принимающего значения в интервале от нуля до единицы, это ограничение особенно важно: распределение «прижимается» к границам носителя, что само по себе порождает асимметрию и отклонение от нормальности.

Совокупность перечисленных ограничений показывает, что для идентификации сложных асимметричных распределений конечных рядов необходим иной, разведочный подход, способный выявлять структуру

распределения, а не только подтверждать или отвергать заранее выбранную гипотезу. Таким инструментом выступает анализ поведения распределения в специальных координатных системах, основанных на логарифмических преобразованиях, рассматриваемый в следующем параграфе.

1.2. Математический аппарат логарифмического и полулогарифмического масштабирования

Основная идея логарифмических методов идентификации состоит в том, что многие распределения, практически неразличимые в линейных осях, после подходящего преобразования осей приобретают характерную, легко узнаваемую форму — чаще всего прямую линию. Тип распределения при этом определяется по форме спрямлённого графика, а параметры — по его наклону и смещению.

В основе аппарата лежит формула преобразования плотности вероятности при замене переменной. Если случайная величина Y связана с X монотонным преобразованием $Y = g(X)$, то плотность распределения величины Y выражается через плотность X следующим образом:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |d g^{-1}(y) / dy|.$$

В частности, для логарифмического преобразования $Y = \ln X$ (при $X > 0$) приведённое соотношение принимает вид $f_Y(y) = f_X(e^y) \cdot e^y$. Именно эта операция перевода величины и её плотности в логарифмический масштаб лежит в основе всех рассматриваемых ниже преобразований.

Рассмотрим базовые случаи спрямления. В полулогарифмических осях, когда по вертикальной оси откладывается логарифм плотности, показательное распределение $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ переходит в линейную зависимость $\ln f = \ln \lambda - \lambda x$, то есть в прямую с угловым коэффициентом, равным $-\lambda$. Нормальное же распределение в тех же осях даёт параболу, поскольку $\ln f = \text{const} - (x - \mu)^2 / (2\sigma^2)$. Это различие позволяет надёжно отличать показательный (лёгкий) хвост от гауссова.

Если же хвост распределения описывается степенной функцией вида $f(x) \sim x^{-\alpha}$, то после логарифмирования зависимость становится линейной:

$$\ln f(x) = -\alpha \cdot \ln x + C.$$

Следовательно, в двойных логарифмических координатах степенные функции отображаются прямыми линиями. Такой подход позволяет выявлять скрытые закономерности поведения хвостов распределений и количественно оценивать параметры степенных зависимостей [4, 8]. Сводка основных преобразований, спрямляющих типовые распределения, приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1 — Спрямляющие преобразования для типовых распределений

Распределение	Спрямляющие координаты	Результат
Показательное	$\ln f$ от x	прямая, наклон $-\lambda$
Степенное (Парето)	$\ln f$ от $\ln x$	прямая, наклон $-\alpha$
Нормальное	$\Phi^{-1}(F)$ от x (пробит)	прямая
Логнормальное	пробит от $\ln x$	прямая
Вейбулла	$\ln(-\ln(1-F))$ от $\ln x$	прямая, наклон k

Перечисленные преобразования являются частными случаями общего приёма, известного как метод «вероятностной бумаги»: подбираются такие функции ϕ от функции распределения F по вертикали и ψ от аргумента x по горизонтали, в которых F становится линейной. В этих координатах задача идентификации сводится к проверке прямолинейности эмпирических точек, а оценивание параметров — к определению наклона и смещения прямой. Для распределений с ограниченным носителем, к которым относится индекс Херста, удобным дополнительным инструментом служит логит-преобразование $\ln(H / (1 - H))$, отображающее интервал от нуля до единицы на всю числовую ось и снимающее искажения, связанные с близостью к границам носителя.

Естественным кандидатом для описания такой ограниченной величины выступает бета-распределение, гибко задающее асимметрию и эксцесс на отрезке $[0, 1]$.

Концептуально различие между линейным и спрямляющим представлениями иллюстрирует рисунок 1.1. В линейных осях показательное, степенное и нормальное распределения дают однотипные спадающие или колоколообразные кривые, по которым трудно определить тип распределения. После перехода к подходящим логарифмическим осям каждое семейство приобретает характерную форму: показательное и степенное распределения спрямляются в прямые (в полулогарифмических и двойных логарифмических осях соответственно), а нормальное распределение в полулогарифмических осях превращается в перевёрнутую параболу.

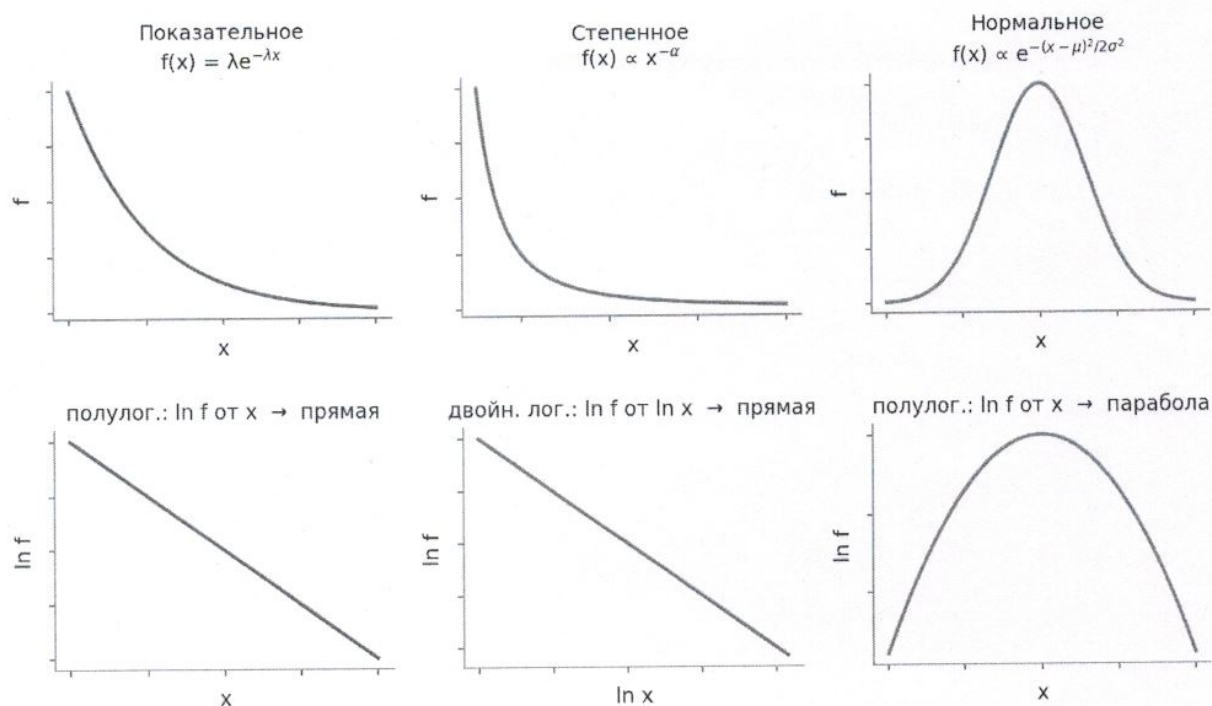


Рисунок 1.1 — Спрямление типовых распределений при переходе к логарифмическим осям

В проведённом исследовании распределений индексов Херста броуновского движения [20] гипотеза о наличии степенных хвостов проверялась

именно с помощью двойных логарифмических координат. Экспериментальные точки хвостовых областей в этих координатах группировались вблизи линейных зависимостей, что свидетельствует о степенном характере убывания вероятностей. Для оценки параметров степенных функций применялся метод наименьших квадратов, позволивший определить показатели степеней для распределений индексов Херста рядов координаты и проекции скорости:

$$\alpha_x = -9,282, \quad \alpha_{vx} = -8,770.$$

Соответствующие экспериментальные зависимости в двойных логарифмических осях приведены на рисунках 1.2 и 1.3. По горизонтальной оси отложен логарифм отклонения от точки начала степенной области $\ln(x - x_0)$, по вертикальной — логарифм плотности; экспериментальные точки в правой (хвостовой) части графика группируются вблизи прямой, наклон которой и определяет показатель степени. Для распределения индекса Херста ряда координаты (рисунок 1.2) аппроксимация даёт $\alpha_x = -9,282$, для распределения ряда проекции скорости (рисунок 1.3) — $\alpha_v = -8,770$.

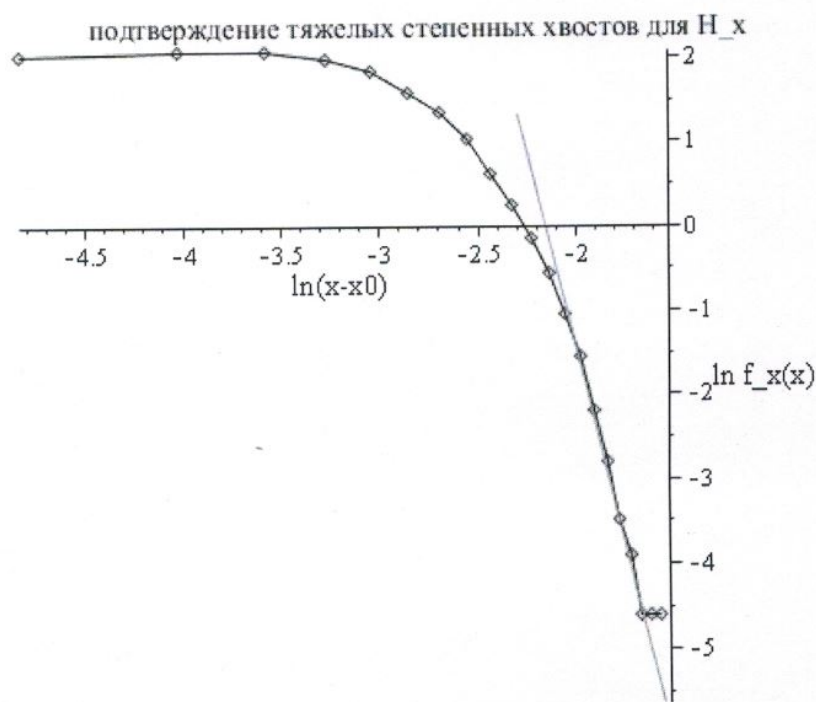


Рисунок 1.2 — Хвост распределения индекса Херста ряда координаты (H_x) в двойных логарифмических осях; наклон $\alpha_x = -9,282$

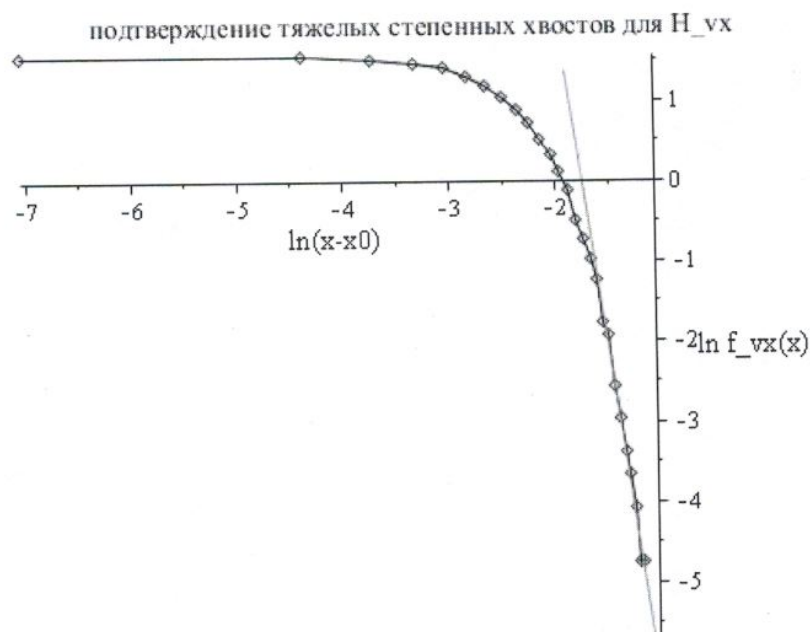


Рисунок 1.3 — Хвост распределения индекса Херста ряда проекции скорости (H_{vx}) в двойных логарифмических осях; наклон $\alpha_v = -8,770$

Полученные значения показывают, что хвосты распределений убывают достаточно быстро. Несмотря на наличие степенного характера зависимости, столь большие по модулю показатели обеспечивают сходимость статистических моментов высоких порядков. Это означает, что исследуемые распределения не относятся к распределениям с «тяжёлыми хвостами» в строгом математическом смысле. В современной теории распределений принято считать, что распределение обладает тяжёлым хвостом при расходимости моментов низких порядков, прежде всего дисперсии [5, 11]; для рассматриваемых распределений данное условие не выполняется.

Использование логарифмических преобразований обладает важным методологическим преимуществом. В линейных координатах хвостовые области распределений часто оказываются визуально малозаметными из-за высокой концентрации точек в центральной части распределения. Переход к логарифмическому масштабу существенно увеличивает информативность графического анализа и позволяет выделить закономерности, скрытые при обычном представлении данных. Подобный подход активно применяется в

стохастической теории экстремумов, где анализ хвостовых распределений играет ключевую роль. Исследования распределений катастрофических событий также демонстрируют эффективность двойных логарифмических координат: в работах по статистике катастроф и бедствий показано, что накопленные распределения числа жертв природных катастроф в логарифмическом масштабе хорошо аппроксимируются линейными зависимостями, соответствующими распределениям Парето [10]. Аналогичные методы используются и при исследовании финансовых временных рядов, для которых характерны значительные отклонения от нормального распределения [6, 12].

1.3. Специфика выборочного индекса Херста в траекториях броуновского движения

Индекс Херста характеризует степень самоподобия и долговременной памяти временного ряда. Для стандартного броуновского движения (винеровского процесса) истинное значение индекса равно 0,5; значения ниже 0,5 соответствуют антиперсистентному поведению (склонности к смене направления), а значения выше 0,5 — персистентному поведению (сохранению тенденции). Обобщением, в котором индекс Херста выступает управляющим параметром самоподобия, служит фрактальное броуновское движение. Сама величина индекса оценивается различными методами — методом нормированного размаха (R/S-анализ), детрендрованным флуктуационным анализом, дисперсионным (агрегационным) методом, спектральными и вейвлет-оценками. При этом форма выборочного распределения индекса Херста зависит от выбранного метода оценивания, что необходимо учитывать при идентификации.

Центральным для настоящей работы является то обстоятельство, что для конечного ряда длины N оценка индекса Херста представляет собой случайную величину, обладающую собственным распределением. Именно изучение этого распределения и составляет исследуемую задачу. Необычная форма выборочного распределения объясняется несколькими факторами. Во-первых,

оценки индекса Херста на коротких рядах смещены: например, метод нормированного размаха систематически завышает значение индекса для малых выборок. Во-вторых, дисперсия оценки убывает с ростом длины ряда, что отражает состоятельность процедуры. В-третьих, асимметрия и эксцесс распределения возникают вследствие нелинейности самих процедур оценивания (операций нахождения максимума и минимума, ранговых преобразований, регрессии в логарифмических осях), а также ограниченности индекса интервалом от нуля до единицы, из-за чего распределение «прижимается» к границам и отклоняется от нормального. Наконец, форма распределения зависит от длины ряда, что порождает конечно-размерные эффекты.

Особый интерес представляет различие между рядами координаты и проекции скорости броуновской частицы. Как показывают исследования, ряд координаты обладает выраженной тенденцией к сохранению направления изменения, что соответствует значениям индекса Херста, близким к единице. Такое поведение связано с наличием локальных трендов в конкретных реализациях случайного процесса и отражает интегральную (накопительную) природу координаты как винеровского процесса. Напротив, ряд проекции скорости демонстрирует свойства белого шума и характеризуется значениями индекса Херста, близкими к 0,5. Это различие имеет глубокое теоретическое основание: скорость броуновского движения, понимаемая как производная винеровского процесса, в классическом смысле не существует и трактуется как белый шум; ряд скорости фактически соответствует приращениям координаты, обладающим иной корреляционной структурой. Различие корреляционных структур двух рядов и порождает различие форм соответствующих распределений индекса Херста.

При этом сами распределения индексов Херста оказываются существенно асимметричными и обладают заметным эксцессом. В рамках проведённых исследований были рассчитаны статистические моменты до четвёртого порядка включительно, а также коэффициенты асимметрии и эксцесса; полученные

значения для рядов длины $N = 2000$ сведены в таблице 1.2. Они подтвердили сложную структуру распределений и необходимость применения дополнительных методов идентификации. В частности, анализ хвостовых областей с использованием логарифмических преобразований позволил получить информацию, недоступную при использовании только традиционных статистических критериев. Эти распределения, как уже отмечалось, не описываются ни распределением Вейбулла, ни логнормальным, ни гамма-распределением [3], что и определяет потребность в специальном инструментарии идентификации.

Таблица 1.2 — Числовые характеристики распределений индексов Херста ($N = 2000$)

Характеристика	H_x (ряд координаты)	H_{vx} (ряд скорости)
Мат. ожидание μ	0,997	0,532
Ср. кв. отклонение σ	0,060	0,080
Коэф. вариации σ/μ	6 %	15 %
Коэф. асимметрии A	-0,695 (скошено влево)	0,112 (скошено вправо)
Коэф. эксцесса E	0,882 (островершинное)	-0,098 (низковершинное)

Приведённые значения согласуются с теоретической картиной: для ряда координаты математическое ожидание близко к единице, а распределение скошено влево и островершинно, тогда как для ряда проекции скорости среднее близко к 0,5, асимметрия мала, а эксцесс отрицателен. Это количественно подтверждает различие персистентного и шумоподобного поведения двух рядов.

Дополнительной особенностью распределений индексов Херста является их зависимость от длины исследуемого временного ряда. Для конечных выборок оценки индекса подвержены статистическим флуктуациям, что усложняет процедуру идентификации распределения. В результате возникает необходимость комбинирования различных методов анализа: вычисления статистических моментов, исследования коэффициентов асимметрии и эксцесса, а также изучения поведения хвостов распределения в логарифмических

координатах [7]. Совокупность этих приёмов и образует методическую основу практической части работы.

Выводы по главе 1

Основные выводы теоретического анализа:

1. классические критерии согласия носят проверочный, а не идентифицирующий характер и малопригодны для асимметричных распределений конечных рядов;
2. логарифмическое и полулогарифмическое масштабирование спрямляет типовые распределения: показательное — в полулогарифмических осях, степенное — в двойных логарифмических, нормальное даёт параболу;
3. хвосты экспериментальных распределений индексов Херста степенные ($\alpha \approx -9,28$ и $-8,77$), но не тяжёлые: моменты высоких порядков сходятся;
4. выборочный индекс Херста — случайная величина на отрезке $[0, 1]$, существенно асимметричная; различие распределений рядов координаты и проекции скорости объясняется их корреляционной структурой.

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ АПРОБАЦИЯ МЕТОДОВ НА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Цель главы — идентифицировать экспериментальные распределения индексов Херста стандартного броуновского движения [13, 19], полученные с помощью авторского приложения [17], то есть отнести их к одному из известных классов распределений. Особенность задачи состоит в том, что ни один из распространённых типов распределений не описывал имеющийся массив экспериментальных данных. Были задействованы все доступные инструменты анализа — вычисление статистических моментов, оценка степени тяжести хвостов, пробит- и логит-преобразования, исследование эмпирической характеристической функции (фактически Фурье-спектра плотности), — однако ни одно из этих направлений не дало окончательного ответа. Задача относится к числу длительно не решавшихся: в литературе тип распределения индексов Херста броуновского движения обычно характеризуется как зависящий от метода оценивания и в общем случае неизвестный. Решение было найдено на основе физической интуиции и привело к идентификации распределений как обобщённых нормальных (экспоненциально-степенных).

2.1. Рабочая гипотеза: обобщённое нормальное распределение

Экспериментальные распределения существенно отличаются от нормального — как наличием асимметрии (особенно выраженной у распределения H_x), так и эксцессом [5, 6]. Качественно их форма выглядит так, будто кривую «потянули вверх» за точку максимума, причём жёсткость воображаемой плёнки с одной стороны оказалась больше, а с другой — меньше. Так, для распределения H_x справа «плёнка» жёстче и спад функции идёт круче и быстрее, а слева «плёнка» мягче и спад происходит медленнее.

Этот образ подсказывает ключевую идею: функция может оставаться похожей на гауссову, но справа и слева от точки максимума иметь разную скорость спадания экспоненты. Эта скорость регулируется коэффициентом k в показателе экспоненты. Кроме того, степенная функция в показателе не обязана

быть квадратичной: отличие формы экспериментальных распределений от известных типов настолько велико, что показатель степени β разумно оставить произвольным. Наконец, для квазигауссовой функции естественно перенести начало координат в точку максимума и рассматривать распределение как функцию отклонения $(x - x_0)$. Так возникает рабочая гипотеза об аппроксимации экспериментальных распределений функцией вида

$$f = A \cdot \exp(-k \cdot |x - x_0|^\beta), \quad k > 0, \beta > 0,$$

которую естественно называть обобщённой гауссовой, а распределение — обобщённым нормальным; при этом коэффициенты k и β справа и слева от точки максимума могут быть различными. Дополнительно проверялась возможность ввести перед экспонентой степенной множитель (по аналогии с распределением Максвелла по модулю скорости из класса Рэлея), $f = C \cdot x^\alpha \cdot \exp(-k \cdot |x - x_0|^\beta)$; однако численные оценки дали постоянный коэффициент порядка $C \sim 10^{-10}$ и показатель $\alpha \sim 40$, что указывает на искусственность такого слагаемого, и эта гипотеза была отброшена. Функция квазигауссова вида принципиально способна воспроизвести поведение экспериментальных распределений индексов N_x и N_{vx} .

2.2. Спрямяющие координаты для проверки гипотезы

Для нахождения неизвестных коэффициентов k и β методом наименьших квадратов функцию логарифмируют и подбирают спрямяющие координаты. Пусть $A = y(x = x_0)$ — максимальное значение функции. Тогда для области справа от максимума ($x > x_0$)

$$\ln(A / y) = k \cdot (x - x_0).$$

Вводя обозначения $y_1 \equiv \ln(A / y)$ и $x_1 \equiv (x - x_0)$, где $x_1, y_1 > 0$, получаем степенную зависимость $y_1 = k \cdot x_1^\beta$. Повторное логарифмирование обеих частей даёт

$$\ln y_1 = \ln k + \beta \cdot \ln x_1, \quad \text{то есть} \quad y_2 = \ln k + \beta \cdot x_2,$$

где $y_2 \equiv \ln y_1$, $x_2 \equiv \ln x_1$. В этих двойных логарифмических координатах зависимость представляет собой прямую с угловым коэффициентом β и свободным членом $b = \ln k$. Поскольку $x_1, y_1 > 0$, переменные x_2, y_2 действительны, что исключает выход в область комплексных чисел. Для области слева от максимума используется модуль отклонения, что и определяет общий вид функции на всей числовой оси, $f = A \cdot \exp(-k \cdot |x - x_0|^\beta)$; дальнейшее построение проводится аналогично.

2.3. Идентификация распределения H_x

Построение выполнено в системе Maple для распределения H_x при длине броуновского ряда 2000 шагов и статистическом ансамбле 100 000 реализаций. Для области справа от максимума экспериментальные точки в спрямляющих координатах ложатся на прямую практически идеально, что подтверждает гипотезу об обобщённом нормальном распределении; небольшие отклонения у границы связаны с экспериментальными флуктуациями. Метод наименьших квадратов даёт $k = 137,4$ и $\beta = 1,66$ (рисунки 2.1 и 2.2).

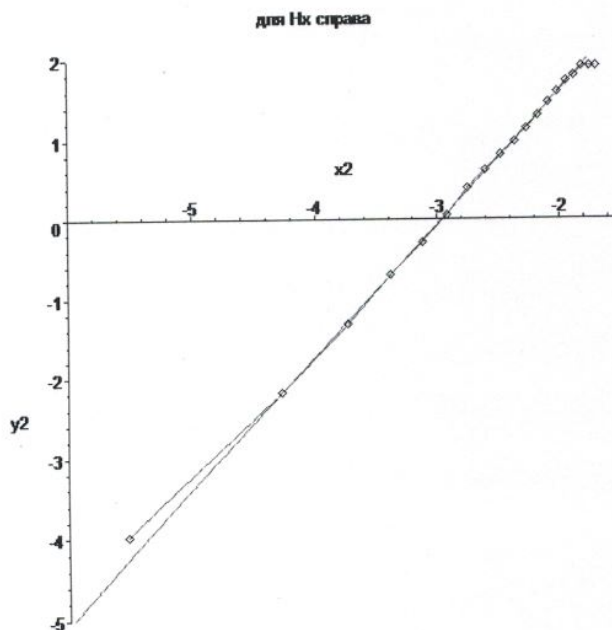


Рисунок 2.1 — Распределение H_x справа от максимума в спрямляющих координатах (x_2, y_2) с МНК-прямой ($k = 137,4$, $\beta = 1,66$)

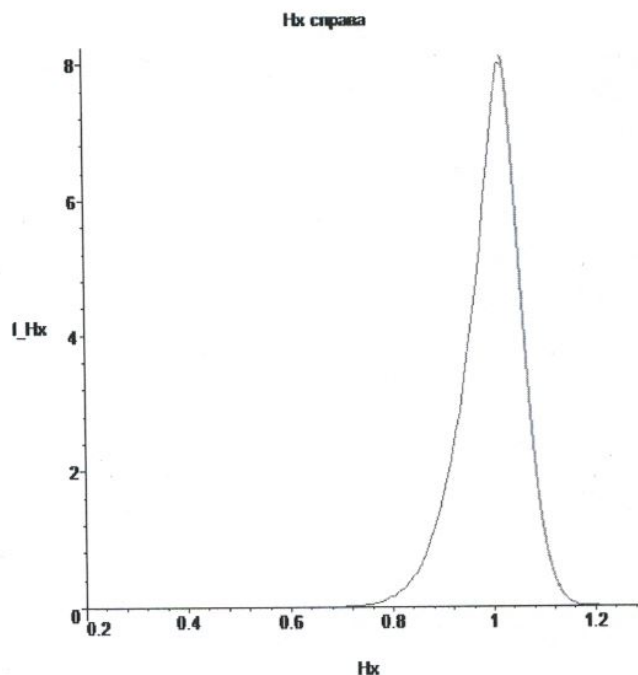


Рисунок 2.2 — Наложение экспериментального распределения H_x и подобранной кривой обобщённого нормального распределения (область справа от максимума)

Для области слева от максимума построение даёт $k = 35,6$ и $\beta = 1,45$ (рисунок 2.3); восстановленная по этим параметрам кривая также практически идеально аппроксимирует экспериментальные данные. Объединение левой и правой ветвей на всей числовой оси показано на рисунке 2.4: следы слабых отклонений теории от эксперимента заметны лишь вблизи максимума, где флуктуации максимальны.

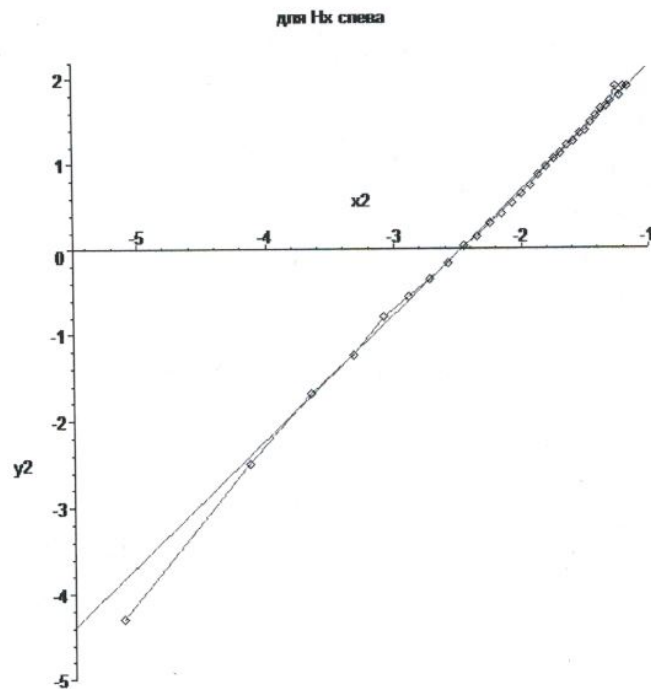


Рисунок 2.3 — Распределение H_x слева от максимума в спрямляющих координатах с МНК-прямой ($k = 35,6$, $\beta = 1,45$)

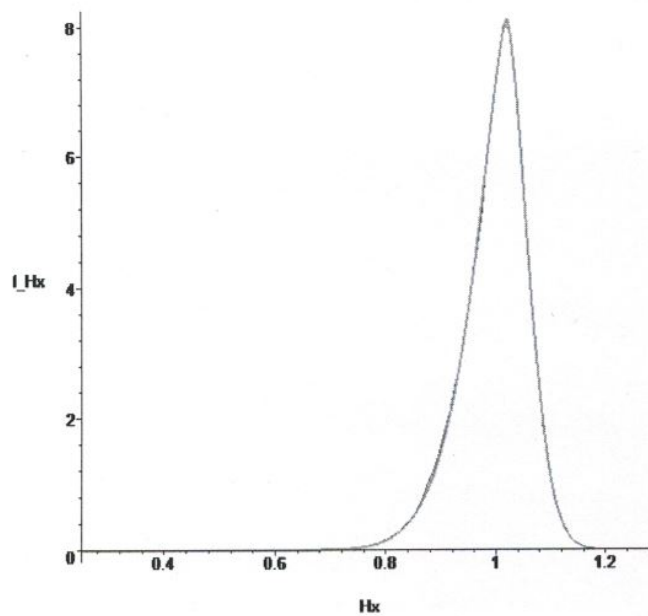


Рисунок 2.4 — Наложение подобранной теоретической кривой и экспериментального распределения H_x на всей числовой оси

Существенно, что числовые характеристики МНК-прямых слабо зависят от того, сколько крайних точек последовательности отбрасывается как заведомо флуктуационные, а также от выбора положения максимума x_0 и константы A ,

которые определяются лишь приближённо. Оптимально подбирая эти параметры и визуально контролируя совпадение теоретической и экспериментальной кривых, удаётся выделить вариант, при котором показатель β для левой и правой ветвей совпадает с высокой точностью и составляет

$$\beta = 1,5 = 3/2,$$

при этом масштабные коэффициенты k справа и слева различаются примерно в 3 раза. Качество совпадения при этом остаётся прежним. Именно такой вариант — единый показатель степени в экспоненте при разных скоростях спадания k — представляется наиболее правдоподобным и согласуется с исходной гипотезой, опирающейся на визуальные свойства функции.

2.4. Идентификация распределения H_{vx}

Та же процедура выполнена для распределения H_{vx} (рисунки 2.5 и 2.6). Получены параметры $k = 77,0$, $\beta = 2,09$ для области справа от максимума и $k = 94,5$, $\beta = 1,996$ для области слева. Совпадение теоретической кривой с экспериментальной столь же идеально, с несколько более интенсивными флуктуациями вблизи максимума.

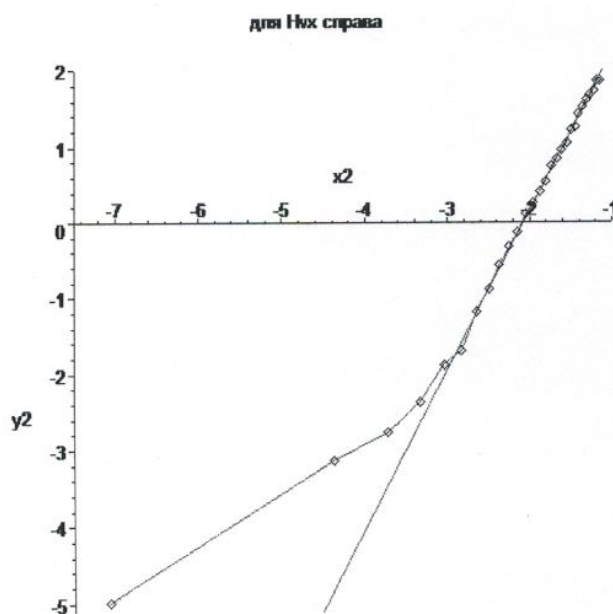


Рисунок 2.5 — Распределение H_{vx} справа от максимума в спрямляющих координатах с МНК-прямой ($k = 77,0$, $\beta = 2,09$)

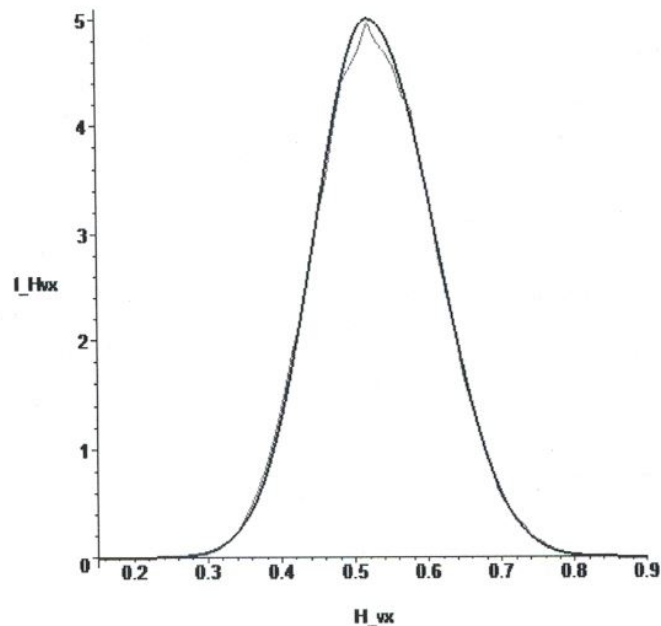


Рисунок 2.6 — Наложение подобранной теоретической кривой и экспериментального распределения H_{vx} на всей числовой оси

Числовые характеристики показывают, что для H_{vx} показатель степени в экспоненте на обеих ветвях один и тот же и равен $\beta = 2$; в компьютерном эксперименте он вычисляется с погрешностями, но отличия справа и слева невелики и близки к 2, а скорости спадаения k справа и слева различаются менее чем в 2 раза. Квадратичность показателя экспоненты на всей числовой оси действительно делает распределение H_{vx} более близким к гауссову, чем H_x , — этот факт независимо отмечался и при анализе пробит-преобразования. Тем не менее общий квадратичный показатель ещё не делает функцию гауссовой: скорости спадаения k справа и слева всё-таки различны, поэтому распределение является обобщённым нормальным, а не нормальным.

2.5. Итог идентификации

Таким образом, оба экспериментальных распределения индексов Херста идентифицированы как обобщённые нормальные (экспоненциально-степенные). Сводка подобранных параметров приведена в таблице 2.1; согласованные по обоим ветвям значения показателя формы составляют $\beta = 1,5$ для H_x и $\beta = 2$ для H_{vx} .

Таблица 2.1 — Параметры подобранного обобщённого нормального распределения $f = A \cdot \exp(-k \cdot |x - x_0|^\beta)$

Распределение	Склон	k	β
H_x	справа	137,4	1,66
H_x	слева	35,6	1,45
H_vx	справа	77,0	2,09
H_vx	слева	94,5	1,996

Распределения этого класса встречаются в литературе под несколькими названиями: обобщённое нормальное распределение, распределение Субботина, экспоненциально-степенное распределение и обобщённое распределение ошибок. Подобные распределения возникают, например, в теории распределения осей анизотропии в магнетизме, в финансовых временных рядах, в гидродинамике турбулентности и в биомедицинских сигналах.

Выводы по главе 2

Экспериментальные распределения индексов Херста не описываются ни одним из распространённых типов; классические инструменты (моменты, анализ хвостов, пробит- и логит-преобразования, эмпирическая характеристическая функция) не позволили выполнить идентификацию. Решение получено на основе физической гипотезы о квазигауссовой форме с разной скоростью спадания по разные стороны от максимума.

Установлено, что оба распределения принадлежат семейству обобщённого нормального (экспоненциально-степенного) распределения $f = A \cdot \exp(-k \cdot |x - x_0|^\beta)$ с единым показателем формы β на левой и правой ветвях. Для H_x показатель $\beta = 1,5$ (положение между распределениями Лапласа и Гаусса), а асимметрия обусловлена различием масштабов склонов: коэффициент k справа примерно втрое больше, чем слева; отклонения измеренных значений (1,66 и 1,45) от 1,5 связаны с приближённостью выбора x_0 .

Для H_{vx} показатель $\beta = 2$: по форме распределение совпадает с гауссовой кривой, однако из-за различия масштабов левого и правого склонов является не нормальным, а обобщённым нормальным. Кажущаяся «нормальность» распределения скорости оказывается обманчивой и выявляется лишь раздельным анализом ветвей. Хвосты обоих распределений убывают быстрее любого степенного закона и не являются тяжёлыми — статистические моменты сходятся.

ГЛАВА 3. СТРУКТУРНО-СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧЕБНОГО МОДУЛЯ

Разработанные в работе методы идентификации вероятностных распределений обладают значительной образовательной ценностью и могут служить содержательным ядром специализированного учебного модуля. В настоящей главе даётся структурно-содержательная характеристика модуля: определяются его назначение, цель и задачи (3.1), планируемые результаты и тематический план (3.2), а также обосновываются педагогическая целесообразность модуля и прогнозируемые образовательные результаты (3.3). Методическое обеспечение модуля вынесено в главу 4, а лабораторный практикум — в главу 5.

3.1. Назначение, цель и задачи модуля

Проектируемый модуль предназначен для включения в спецкурс по математической статистике и теории стохастических процессов [7, 15] и рассчитан на обучающихся старшего возраста — студентов бакалавриата физико-математических и педагогических направлений, а также старшеклассников профильных классов, освоивших базовые понятия теории вероятностей и описательной статистики. В вузовском учебном плане модуль реализуется как часть дисциплины по выбору, в школьной практике — как элективный курс, развивающий содержательную линию «Вероятность и статистика».

Цель модуля — сформировать у обучающихся представление о методах идентификации типа вероятностного распределения с помощью преобразования координатных осей и научить применять эти методы к анализу реальных эмпирических данных, в том числе к распределениям индексов Херста броуновского движения.

Задачи модуля: познакомить с числовыми характеристиками эмпирических распределений и ограничениями классических критериев

согласия; раскрыть идею спрямления распределений в логарифмических координатах; сформировать навык определения типа распределения по форме спрямлённого графика и оценивания его параметров; организовать самостоятельную исследовательскую работу с данными.

3.2. Планируемые результаты и тематический план

Планируемые результаты освоения модуля сформулированы в форме «знать — уметь — владеть».

Знать:

- понятия эмпирического распределения, статистических моментов, коэффициентов асимметрии и эксцесса;
- ограничения классических критериев согласия при анализе асимметричных выборок конечного объёма;
- основные виды спрямляющих преобразований и соответствующие им типы распределений;
- понятие индекса Херста и особенности его выборочного распределения для траекторий броуновского движения.

Уметь:

- строить эмпирическое распределение и вычислять его числовые характеристики;
- выполнять переход к логарифмическим и полулогарифмическим осям и интерпретировать форму графика;
- определять тип распределения по признаку спрямления и оценивать параметры методом наименьших квадратов;
- формулировать и проверять гипотезу о характере поведения хвостов распределения.

Владеть:

- приёмами разведочного анализа данных в специальных координатных системах;

— навыками работы с прикладным программным обеспечением для обработки и визуализации данных.

Структура модуля отражает логику исследования: от числовых характеристик и ограничений классических критериев — к логарифмическому аппарату и завершающему практикуму на реальных данных. Примерный тематический план объёмом 16 академических часов приведён в таблице 3.1.

Таблица 3.1 — Примерный тематический план модуля

Тема	Лек.	Практ.	Лаб./СРС	Всего
1. Эмпирические распределения и их числовые характеристики	2	1	1	4
2. Классические критерии согласия и их ограничения	1	1	0	2
3. Логарифмические и полулогарифмические преобразования	2	2	1	5
4. Анализ хвостов; степенные законы; МНК-оценка показателя	1	1	1	3
5. Практикум: распределения индексов Херста	0	1	1	2
Итого	6	6	4	16

3.3. Педагогическая целесообразность и прогнозируемые образовательные результаты

Педагогическая целесообразность модуля определяется четырьмя ключевыми обстоятельствами.

Восполнение дефицита разведочных и визуальных методов. Модуль формирует целостное представление о процедуре идентификации распределения, а не только о проверке заранее заданной гипотезы, чего недостаёт типовым курсам статистики.

Исследовательский и практико-ориентированный характер — благодаря работе с реальными экспериментальными данными броуновского движения и собственным [13, 19] программным обеспечением.

Формирование системного мышления — благодаря межпредметности содержания, объединяющего математику, физику и информатику.

Преимственность общего и профессионального образования — благодаря связи со школьной содержательной линией «Вероятность и статистика».

Формируемые компетенции.

Вклад модуля в формирование компетенций образовательной программы представлен в таблице 3.2.

Таблица 3.2 — Формируемые компетенции и способы их диагностики

Код	Компетенция	Формирование и диагностика в модуле
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	формируется при идентификации распределений и анализе данных; диагностируется лабораторными работами и итоговым заданием
ОПК-*	Способность применять естественнонаучные и математические знания (уточнить по учебному плану)	формируется при освоении математико-статистического содержания; диагностируется текущим контролем
ПК-*	Профессиональная (методическая) компетенция (уточнить по учебному плану)	формируется при выполнении проектных заданий; диагностируется по критериальной рубрике

Коды ОПК и ПК и точные формулировки приводятся в соответствии с действующим федеральным государственным образовательным стандартом и компетентностной матрицей учебного плана образовательной программы.

Помимо компетенций, модуль развивает универсальные учебные действия (познавательные и регулятивные), элементы функциональной математической грамотности, исследовательские и цифровые умения, а также выполняет профориентационную функцию, знакомя обучающихся с реальной логикой научного исследования.

Прогнозируемые образовательные результаты.

Прогнозируемые результаты освоения модуля разделяются на три группы — предметные, метапредметные и личностные (рисунок 3.1).

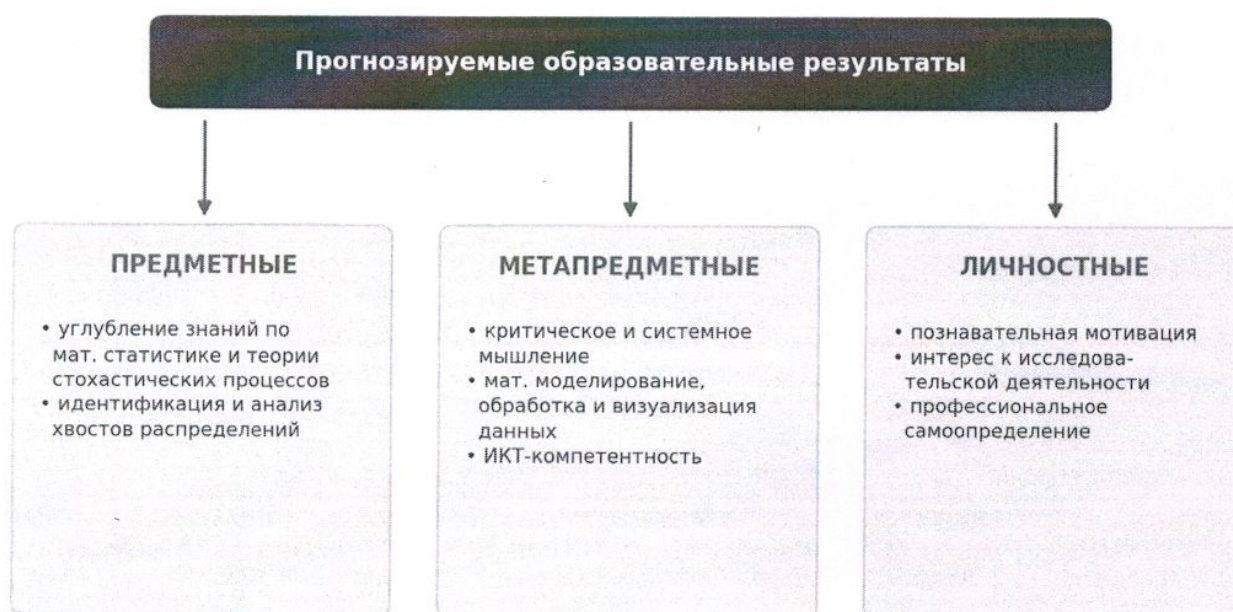


Рисунок 3.1 — Схема прогнозируемых образовательных результатов модуля

Условия реализации и оценка эффективности.

Возможная неоднородность математической подготовки компенсируется дифференциацией заданий и опорными конспектами; трудности освоения программных средств — пошаговыми инструкциями. Поскольку модуль находится на стадии проектирования, оценка носит прогностический характер; для эмпирической проверки при последующей апробации предусмотрены входной и итоговый срезы знаний, анкетирование познавательной мотивации, оценивание итогового задания по критериальной рубрике и экспертная оценка методических материалов.

Выводы по главе 3

Дана структурно-содержательная характеристика модуля: определены назначение, цель, задачи, планируемые результаты и тематический план; обоснована педагогическая целесообразность, представлены формируемые компетенции и спрогнозированы образовательные результаты.

ГЛАВА 4. РАЗРАБОТКА МЕТОДИЧЕСКОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ УЧЕБНОГО МОДУЛЯ

Методическое обеспечение модуля оформлено в виде небольшого методического пособия, объединяющего учебные, дидактические и методические материалы [15]. В настоящей главе описаны структура и состав пособия (4.1), его дидактические материалы (4.2) и контрольно-измерительные материалы (4.3), а также предложены темы учебно-исследовательских проектов (4.4). Сами лабораторные работы, входящие в состав пособия, вынесены в главу 5.

4.1. Структура и состав пособия

Пособие включает три группы материалов — учебные, дидактические и методические; их состав приведён в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Состав разработанных материалов пособия

Группа	Материалы
Учебные	пояснительная записка модуля (цель, планируемые результаты); опорные конспекты по темам; глоссарий основных терминов
Дидактические	опорная схема спрямления распределений; алгоритм-памятка идентификации; разобранные образцы заданий; комплекс из четырёх лабораторных работ; массив экспериментальных данных (распределения H_x и H_{vx} для $N = 50, 500, 2000$); темы учебно-исследовательских проектов
Методические	методические рекомендации по проведению лабораторных работ; тематический план; контрольно-измерительные материалы (входной, текущий, итоговый контроль) с ключами; критериальная рубрика оценивания

4.2. Дидактические материалы

Ядром дидактических материалов служит опорная схема спрямления распределений [14] (рисунок 4.1), наглядно сопоставляющая поведение распределений в линейных и логарифмических осях. Схема используется как визуальная опора при объяснении и как ориентир при выполнении заданий.

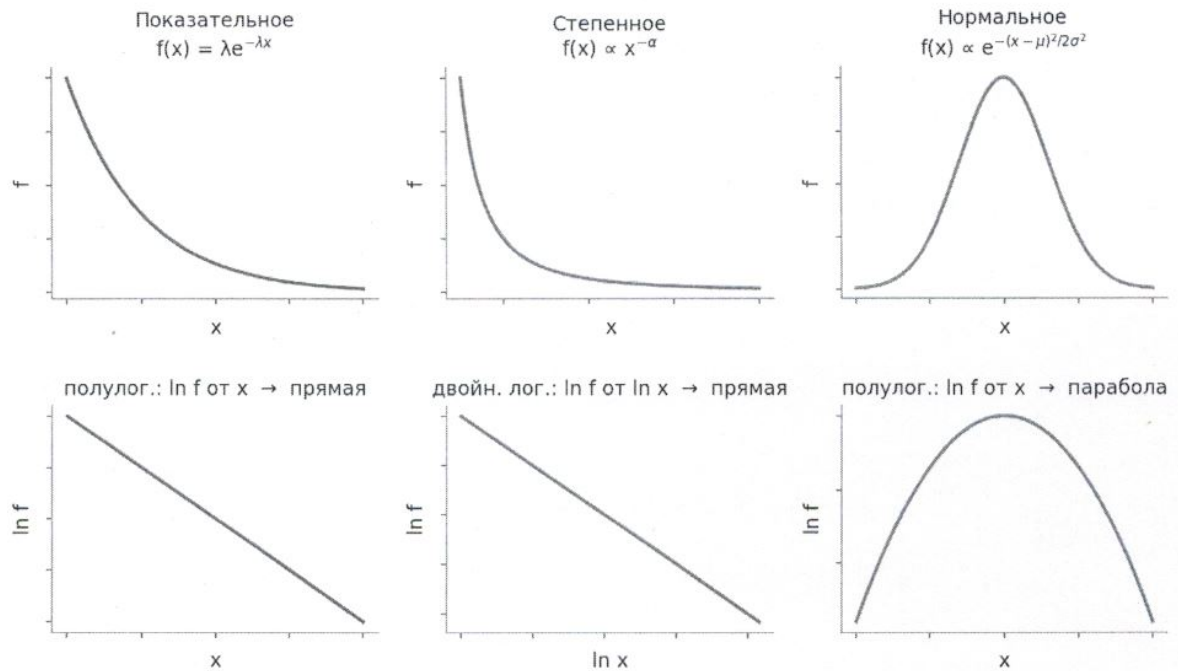


Рисунок 4.1 — Опорная схема: спрямление типовых распределений при переходе к логарифмическим осям

На основе схемы формулируется алгоритм-памятка идентификации распределения (таблица 4.2).

Таблица 4.2 — Алгоритм-памятка идентификации распределения

Шаг	Действие
Шаг 1	Построить эмпирическое распределение (гистограмму или оценку плотности) и нормировать его.
Шаг 2	Перейти к полулогарифмическим осям: спрямление в прямую указывает на показательный тип, в параболу — на нормальный.
Шаг 3	Перейти к двойным логарифмическим осям: спрямление в прямую указывает на степенной характер хвоста.

Шаг	Действие
Шаг 4	В области спрямления оценить наклон прямой методом наименьших квадратов; модуль наклона даёт показатель степени.
Шаг 5	Сделать вывод о типе распределения и характере хвоста, сопоставив результат с опорной схемой.

Образец разобранного задания. Если в двойных логарифмических осях точки хвоста ложатся на прямую $\ln f = b - \alpha \cdot \ln x$, то методом наименьших квадратов определяется наклон, модуль которого равен показателю α . Для распределения индекса Херста ряда координаты оценка даёт $\alpha \approx 9,3$, для ряда проекции скорости — $\alpha \approx 8,8$; большие по модулю значения означают, что хвосты степенные, но не тяжёлые.

4.3. Контрольно-измерительные материалы

Контрольно-измерительные материалы построены по трёхуровневой схеме: входной контроль (актуализация понятий вероятности и описательной статистики), текущий контроль (проверка усвоения приёма спрямления) и итоговый контроль (комплексное исследовательское задание). Ниже приведён образец заданий текущего контроля.

4.3.1. Образец заданий текущего контроля

1. В каких координатах показательное распределение отображается прямой? Чему равен её угловой коэффициент?
2. Какую форму принимает нормальное распределение в полулогарифмических осях и почему?
3. По какому признаку в двойных логарифмических осях распознаётся степенной характер хвоста?
4. Как по наклону спрямлённого графика оценить показатель степенной функции?
5. Означает ли наличие степенного хвоста, что распределение обязательно является тяжёлохвостым? Ответ обоснуйте.

Ключ. 1) В полулогарифмических осях; угловой коэффициент равен $-\lambda$. 2) Параболу, так как логарифм гауссовой плотности квадратичен. 3) По спрямлению точек хвоста в прямую. 4) Показатель равен модулю наклона, оценённого МНК. 5) Не обязательно: при большом по модулю показателе моменты низких порядков сходятся, и хвост не является тяжёлым.

4.3.2. Итоговое (зачётное) задание

По предложенной выборке построить эмпирическое распределение, вычислить его характеристики, идентифицировать тип распределения средствами логарифмического анализа, оценить параметры и сформулировать обоснованный вывод. Оценивается по критериальной рубрике (таблица 4.3).

Таблица 4.3 — Критериальная рубрика оценивания итогового задания

Критерий	Баллы	Показатель достижения
Построение и характеристики распределения	0–3	верно построено распределение, вычислены моменты, асимметрия, эксцесс
Применение логарифмических преобразований	0–3	верно выбраны координаты, корректно выполнено спрямление
Оценивание параметров	0–2	показатель степени оценён методом наименьших квадратов
Интерпретация и вывод	0–2	сформулирован обоснованный вывод о типе распределения и характере хвоста
Итого	0–10	«зачтено» — не менее 6 баллов

4.4. Темы учебно-исследовательских проектов

Содержание модуля создаёт основу для самостоятельных учебно-исследовательских проектов. Предлагаются следующие темы.

1. Зависимость формы распределения индекса Херста от длины ряда: конечно-размерные эффекты.
2. Сравнение методов оценивания индекса Херста (R/S-анализ, детрендрованный флуктуационный анализ) и их влияния на форму распределения.
3. Пробит- и логит-преобразования как инструмент идентификации распределений: возможности и границы применимости.
4. Эмпирическая характеристическая функция (Фурье-спектр) как инструмент анализа распределения индекса Херста.
5. Проверка гипотезы о принадлежности распределений индекса Херста бета-распределению.
6. Анализ хвостов распределений и оценка показателя степени для различных характеристик броуновского движения.
7. Связь динамики координаты и проекции скорости броуновской частицы со значениями индексов Херста.

Выводы по главе 4

Разработано методическое пособие модуля: определён состав учебных, дидактических и методических материалов; подготовлены опорная схема, алгоритм-памятка, образцы заданий, трёхуровневые контрольно-измерительные материалы и темы учебно-исследовательских проектов.

ГЛАВА 5. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Практическая часть модуля организована в виде комплекса из четырёх лабораторных работ нарастающей сложности. Работы выполняются на едином массиве [13, 17] экспериментальных данных — распределениях и реализациях индексов Херста рядов координаты (H_x) и проекции скорости (H_{vx}) броуновского движения для длин ряда $N = 50, 500, 2000$ при статистическом ансамбле до 100000 реализаций. Данные обрабатываются в специализированном приложении, электронных таблицах или системе компьютерной математики. Каждая работа снабжена указанием отрабатываемых умений, ходом выполнения, иллюстрацией, контрольными вопросами и формой отчёта.

Лабораторная работа № 1. Эмпирическое распределение индекса Херста и его числовые характеристики

Цель: построить эмпирические распределения индексов Херста и вычислить их числовые характеристики.

Отрабатываемые умения: построение эмпирической плотности по гистограммным данным; вычисление математического ожидания, дисперсии, коэффициентов асимметрии [5, 6] и эксцесса; интерпретация формы распределения и связь её с физическими свойствами процесса.

Оборудование и данные: массивы вероятностей распределений H_x и H_{vx} ($N = 2000$, ансамбль 100000).

Ход работы:

1. Построить эмпирическую плотность $f(H) = \Delta p / \Delta H$ для распределений H_x и H_{vx} (рисунок 5.1).
2. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение каждого распределения.
3. Вычислить коэффициенты асимметрии и эксцесса.
4. Сравнить характеристики и объяснить различие, опираясь на свойства рядов координаты и проекции скорости.

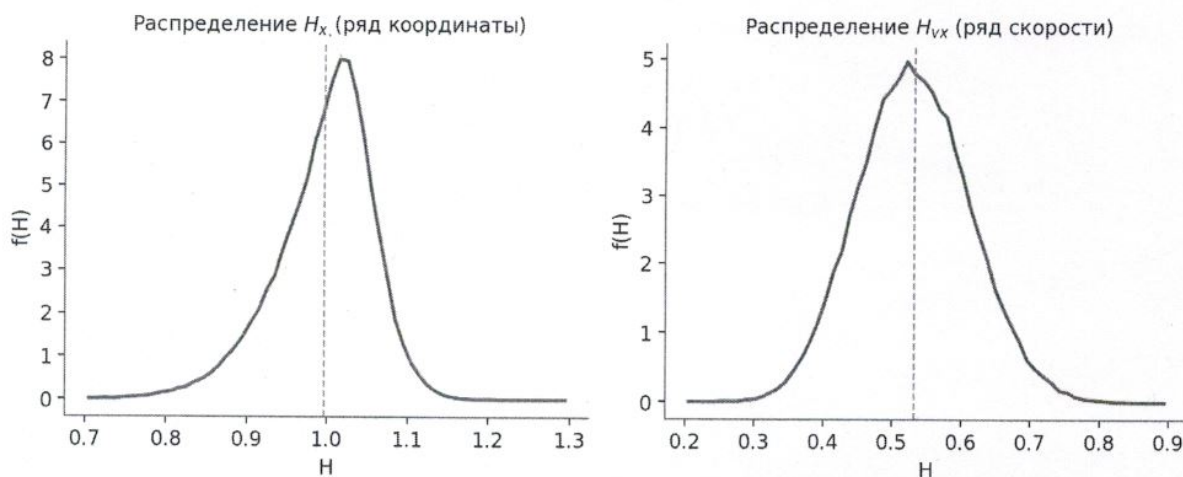


Рисунок 5.1 — Эмпирические распределения индексов Херста H_x и H_{vx} ($N = 2000$)

Контрольные вопросы:

1. Почему математическое ожидание H_x близко к единице, а H_{vx} — к 0,5?
2. О чём свидетельствует отрицательный коэффициент асимметрии распределения H_x ?
3. Какое из распределений является островершинным и что это означает?

Форма отчёта: графики плотностей, таблица характеристик, вывод (ожидаемо: H_x — $\mu \approx 0,997$, $\sigma \approx 0,060$, $A \approx -0,68$, $E \approx 0,87$; H_{vx} — $\mu \approx 0,532$, $\sigma \approx 0,080$, $A \approx 0,11$, $E \approx -0,10$).

Лабораторная работа № 2. Зависимость распределения индекса Херста от длины ряда

Цель: исследовать конечно-размерные эффекты — изменение распределения индекса Херста при росте длины ряда [18].

Отрабатываемые умения: сравнительный анализ распределений при разных параметрах; выявление смещения и сужения распределения; вывод о состоятельности выборочной оценки.

Оборудование и данные: массивы H_x и H_{vx} для $N = 50, 500, 2000$ (ансамбль 100000).

Ход работы:

1. Построить совмещённые графики распределений для трёх длин ряда — отдельно для H_x и H_{vx} (рисунок 5.2).
2. Для каждого N определить положение моды и среднеквадратичное отклонение.
3. Построить зависимость среднеквадратичного отклонения от длины ряда N .
4. Сделать вывод об изменении центра и ширины распределения с ростом N .

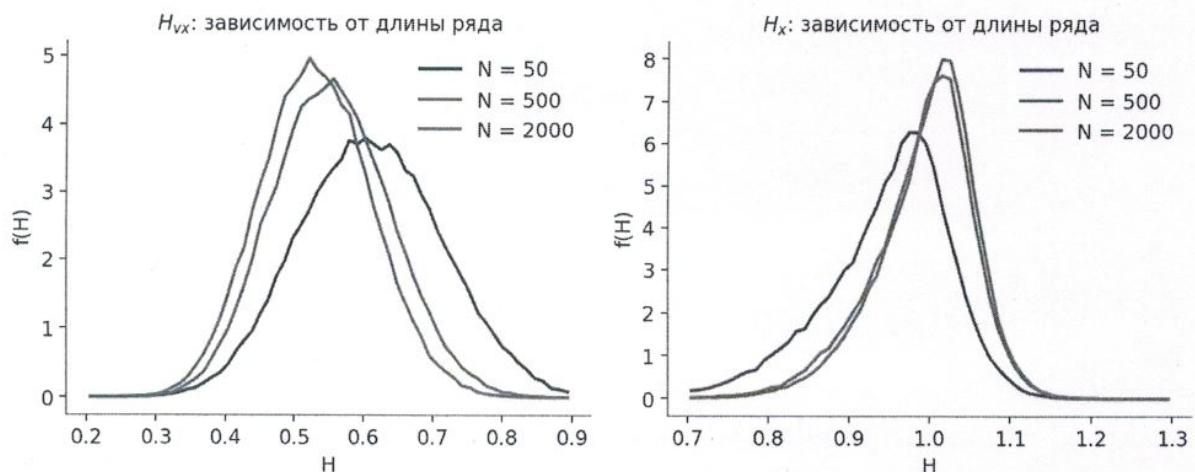


Рисунок 5.2 — Изменение распределений индексов Херста с ростом длины ряда N

Контрольные вопросы:

1. Как изменяется ширина распределения при увеличении длины ряда и почему?
2. К каким значениям стремятся центры распределений H_x и H_{yx} при росте N ?
3. Что означает сужение распределения для точности оценки индекса Херста?

Форма отчёта: совмещённые графики, таблица « N — мода — σ », график $\sigma(N)$, вывод о конечно-размерных эффектах.

Лабораторная работа № 3. Идентификация распределения с помощью пробит- и логит-преобразований

Цель: применить пробит- и логит-преобразования эмпирической функции распределения для проверки близости к нормальному [6] и логистическому закону.

Отрабатываемые умения: построение эмпирической функции распределения; применение пробит-преобразования $\Phi^{-1}(F)$ и логит-преобразования $\ln[F/(1-F)]$; распознавание типа распределения по признаку спрямления.

Оборудование и данные: массивы H_x и H_{vx} ($N = 2000$, ансамбль 100000).

Ход работы:

1. По массиву вероятностей построить эмпирическую функцию распределения $F(H)$.
2. Вычислить пробит-преобразование $\Phi^{-1}(F)$ и логит-преобразование $\ln[F/(1-F)]$ и построить их в зависимости от H (рисунок 5.3).
3. Оценить линейность зависимостей: прямая в пробит-осях указывает на нормальное распределение, в логит-осях — на логистическое.
4. Сопоставить поведение H_x и H_{vx} и сделать вывод о близости каждого к нормальному закону.

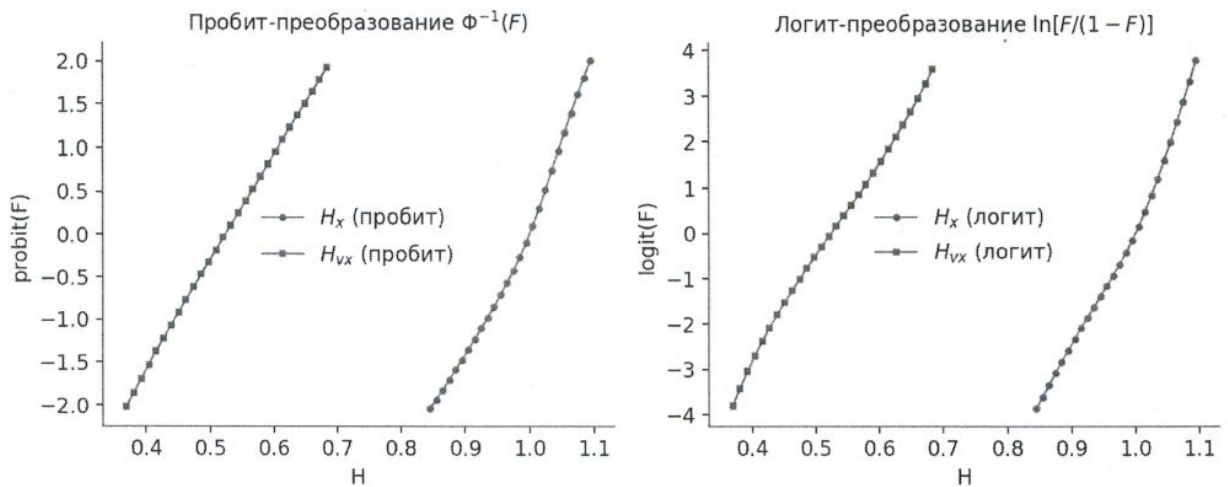


Рисунок 5.3 — Пробит- и логит-преобразования эмпирических функций распределения H_x и H_{vx}

Контрольные вопросы:

1. Какое распределение спрямляется в пробит-осях, а какое — в логит-осях?
2. Какое из распределений ближе к нормальному и по какому признаку это видно?
3. Можно ли пробит- и логит-преобразованиями идентифицировать произвольное распределение? Поясните ограничения.

Форма отчёта: графики преобразований, вывод (H_{vx} практически линеен в пробит-осях; H_x отклоняется вследствие асимметрии).

Лабораторная работа № 4. Динамика координаты и скорости броуновского движения и значения индекса Херста

Цель: установить связь между характером динамики процессов $x(t)$ и $v_x(t)$ и значениями индексов Херста [13, 16] H_x и H_{vx} .

Отрабатываемые умения: построение и качественный анализ траекторий случайного процесса; различение персистентного и шумоподобного поведения; связывание формы динамики ряда с числовым значением индекса Херста.

Оборудование и данные: реализации координаты $x(t)$ и проекции скорости $v_x(t)$ броуновской частицы (либо их моделирование: координата — накопленная сумма приращений, скорость — сами приращения).

Ход работы:

1. Построить график координаты $x(t)$ и график проекции скорости $v_x(t)$ для одной реализации (рисунок 5.4).
2. Качественно описать характер каждого ряда: наличие или отсутствие локальных трендов, склонность к сохранению или смене направления.
3. Оценить (или взять готовые) значения индекса Херста для каждого ряда и сопоставить их с распределениями из работ № 1–3.
4. Сформулировать вывод о связи динамики и индекса Херста.



Рисунок 5.4 — Реализации координаты $x(t)$ и проекции скорости $v_x(t)$ броуновского движения

Контрольные вопросы:

1. Какой из рядов обладает выраженными локальными трендами, а какой ведёт себя как шум?
2. Почему координата броуновского движения персистентна ($H_x \approx 1$), а проекция скорости — нет ($H_{v_x} \approx 0,5$)?
3. Как связаны значение индекса Херста и характер динамики ряда?
4. Почему скорость броуновского движения трактуется как белый шум?

Форма отчёта: графики $x(t)$ и $v_x(t)$, качественное описание динамики каждого ряда, обоснованный вывод о связи характера динамики со значением индекса Херста и с формой соответствующего распределения.

Выводы по главе 5

Разработан лабораторный практикум из четырёх работ исследовательского характера на едином массиве реальных данных: построение распределения и его характеристик, зависимость от длины ряда, идентификация пробит- и логит-преобразованиями и связь динамики броуновского движения со значениями индексов Херста.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе решалась задача разработки методов определения типа вероятностного распределения в приложении к стандартному броуновскому движению и интеграции этих методов в спецкурс для обучающихся старшего возраста. Поставленная цель достигнута: разработан и апробирован аппарат логарифмической идентификации распределений, с его помощью идентифицированы экспериментальные распределения индексов Херста, а на этой содержательной основе спроектирован учебный модуль с полным методическим обеспечением.

В соответствии с задачами исследования получены следующие результаты.

1. Разработан и теоретически обоснован набор методов идентификации вероятностного распределения, основанных на отображении распределения в логарифмических, полулогарифмических, а также пробит- и логит-координатах. Показано, что классические критерии согласия носят проверочный, а не идентифицирующий характер и малопригодны для анализа асимметричных распределений конечных рядов, тогда как переход к спрямляющим координатам позволяет определять тип распределения по форме графика и оценивать его параметры.

2. Разработанный аппарат применён к экспериментальным распределениям индексов Херста рядов координаты и проекции скорости броуновского движения. Установлено, что эти распределения не описываются распространёнными именованными типами (Вейбулла, логнормальным, гамма) и принадлежат семейству обобщённого нормального (экспоненциально-степенного) распределения $f = A \cdot \exp(-k \cdot |x - x_0|^\beta)$ с единым показателем формы β на левой и правой ветвях: для ряда координаты $\beta = 1,5$ (промежуточное положение между распределениями Лапласа и Гаусса) при выраженной асимметрии, обусловленной различием масштабов склонов, а для ряда проекции скорости $\beta = 2$ — по форме совпадает с гауссовой кривой, но из-за различия

масштабов левого и правого склонов соответствует не нормальному, а обобщённому нормальному распределению. Хвосты обоих распределений убывают быстрее любого степенного закона и не являются тяжёлыми, поскольку их статистические моменты сходятся.

3. Подготовлено учебно-методическое пособие для изучения разработанных методов в рамках специализированного спецкурса по математической статистике и теории стохастических процессов; определён и структурирован состав его учебных, дидактических и методических материалов.

4. Спроектированы структура и содержание спецкурса: сформулированы цель, задачи, планируемые результаты и тематический план модуля, разработаны дидактические материалы (опорная схема спрямления, алгоритм-памятка, образцы заданий, комплекс из четырёх лабораторных работ) и контрольно-измерительные материалы трёхуровневой структуры с ключами и критериальной рубрикой оценивания.

5. Оценены педагогическая целесообразность и образовательный потенциал предложенного модуля различной образовательной направленности; представлены формируемые компетенции, спрогнозированы образовательные результаты.

Гипотеза исследования подтвердилась. Использование логарифмических и подобных преобразований осей действительно позволило продвинуться в нерешённой ранее задаче об определении типа экспериментальных распределений индекса Херста — идентифицировать оба распределения как обобщённые нормальные (экспоненциально-степенные) и оценить их параметры. Образовательная часть гипотезы реализована на уровне проектирования: разработанный модуль обладает потенциалом углубления знаний обучающихся старшего звена, проверка которого предполагает последующую апробацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голдаева А. А. Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей. Дисс. к.ф.-м.н. М.: МГУ, 2014.
2. Кириллов Д.С., Короб О.В., Митин Н.А., Орлов Ю.Н., Плешаков Р.В. Распределения показателя Херста нестационарного маркированного временного ряда. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 11. 16 с.
3. Лебедев А.В. Неклассические задачи стохастической теории экстремумов: дис. д-р. ф.-м.н. наук: 01.01.05. - М., 2015. - 216 с.
4. Лебедев А.В. Основы стохастической теории экстремумов. - Ленанд Москва: Интеллектуальная Система Тематического Исследования НАукометрических данных, 2018. - 104 с.
5. Лесных Н.Б. Асимметрия и эксцесс в статистическом анализе закона распределения // Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). - 2014. - С. 40-45.
6. Жукова Г.Н. Идентификация вероятностного распределения по коэффициентам асимметрии и эксцесса // Автоматизация. Современные технологии. - 2016. - №5. - С. 26-33.
7. Попов В. А. Теория вероятностей. Часть 2. Случайные величины: Учебное пособие / В. А. Попов — Казань: Казанский университет, 2013. — 45 с. — Табл. 1. Ил. 5. Библиогр. 11 назв.
8. Оценка параметров распределения с тяжелыми хвостами с помощью эмпирического распределения // URL: <http://www.mce.su/archive/doc15522/doc.pdf>
9. Сидорова О.И. Пуассоновская модель трафика с бесконечным числом неоднородных источников // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 47–66.
10. Статистика катастроф и бедствий. Распределения с тяжелыми хвостами. // Статистика катастрофических событий. URL:

11. Толстые хвосты распределений — это загадочно и странно // URL: <https://habr.com/ru/companies/wunderfund/articles/832276/>
12. Что такое fat-tailed distribution и как использовать эту закономерность для прогнозирования? // QUANTPRO URL:
13. Шикина Д.А., Орлова И.Н. Вычисление показателя Херста для броуновского движения. Физика и методика обучения физике. Технологическое образование: материалы научно-практической конференции: [Электронный ресурс]. Красноярск, 25–27 мая 2016 г. / отв. ред. С.В. Бортновский; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016.
14. «Правда, чистая правда и статистика» или «15 распределений вероятности на все случаи жизни» // URL: <https://habr.com/ru/post/311092/>
15. Ивин Е.А., Курбацкий А.Н., Артамонов Д.В. Учебно-методическое пособие по математической статистике: для социально-экономических специальностей [Текст] – Вологда: ИСЭРТ РАН, 2017. – 141 с.
16. Бутаков В., Граковский А. Оценка уровня стохастичности временных рядов произвольного происхождения при помощи показателя Хёрста [Текст] – Рига: Институт транспорта и связи Ломоносова
17. Орлов Ю.Н., Плешаков Р.В. Программный комплекс для моделирования нестационарных неэквидистантных временных рядов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 36. 15 с.
18. Иванов А. И., Тарасов Д. В., Горбунов К. А. Оценки показателя Херста на малых выборках: простейший вариант нелинейного компенсатора методических ошибок федера при моделировании данных экономики и биометрии // Надежность и качество сложных систем. 2023. № 3. С. 50–54.
19. Орлова И.Н., Перевалова Л.В. О распределении индексов Херста простого броуновского движения. — Красноярск, 2020. В сборнике: Молодежь и наука XXI века. СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА В СИСТЕМЕ ШКОЛЬНОГО И ВУЗОВСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. Электронное издание. КГПУ им. В.П. Астафьева, 2020, с.84-88.

20. Орлова И.Н., Агеева Е.Н., Хвосты распределений индексов Херста броуновского движения (рукопись). — Красноярск, 2022.