

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Иглова Яна Игоревна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Компьютерная поддержка темы "Многогранники" с
использованием дополненной реальности**

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой


канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина

28.05.2026 

(дата, подпись)

Научный руководитель

канд. физ.-мат. наук, доцент В. В. Абдулжин


(дата, подпись)

Дата защиты

29.06.2026

Обучающийся

Я. И. Иглова



(дата, подпись)

Оценка отлично

прописью

Красноярск 2026



ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ.....	8
1.1. Психолого-педагогические аспекты формирования пространственного мышления учащихся при изучении стереометрии	8
1.2. Стандарты школьного математического образования и требования к изучению темы «Многогранники»	19
1.3. Применение дополненной реальности в геометрии: дидактический потенциал и ограничения	25
Вывод по главе 1	32
ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ОБУЧЕНИЮ РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ.....	34
2.1. Теоретико-методические основы применения дополненной реальности при изучении стереометрии	34
2.2. Проектирование системы учебных заданий с использованием дополненной реальности	43
2.3. Апробация и анализ эффективности использования дополненной реальности.....	56
Вывод по главе 2	60
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	63
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	67

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития системы общего образования характеризуется масштабной цифровизацией и обновлением методологических подходов к преподаванию фундаментальных дисциплин. В условиях реализации Федеральных государственных образовательных стандартов среднего общего образования особое значение приобретает комплексная модернизация содержательно-методических линий школьного курса математики [28]. Среди них геометрия, а именно ее пространственный раздел — стереометрия, традиционно представляет наибольшую сложность для усвоения [33].

Изучение темы «Многогранники» в 10–11 классах требует от старшеклассников высокого уровня абстрактного мышления и сформированности пространственного воображения [4]. Переход от плоскостных объектов планиметрии к трехмерным телам стереометрии сопровождается специфическим когнитивным барьером восприятия. Школьники часто испытывают непреодолимые затруднения при попытке мысленно реконструировать объемную фигуру по ее двухмерному чертежу в тетради или на доске. Традиционные статические иллюстрации и проволочные модели не обеспечивают должной динамики восприятия. Они не позволяют в полной мере исследовать взаимное расположение элементов многогранников, строить сечения и анализировать внутренние связи геометрических структур [33].

В связи с этим возникает необходимость привлечения современных информационно-коммуникационных технологий. Одним из наиболее перспективных инструментов компьютерной поддержки геометрии выступает технология дополненной реальности (Augmented Reality, AR) [28]. В отличие от виртуальной реальности, требующей специализированного дорогостоящего оборудования, AR-технологии доступны через обычные мобильные

устройства. Они позволяют совмещать реальное окружение с виртуальными интерактивными 3D-моделями, создавая гибкую дидактическую среду [3]. Использование дополненной реальности способно выступить эффективным средством визуализации, переводящим восприятие учащихся с эмпирического уровня на теоретический [32].

Однако, несмотря на очевидный технологический потенциал, методика применения AR в преподавании стереометрии остается разработанной недостаточно. Большинство существующих программных решений носят демонстрационный характер, не увязаны со строгой логикой школьных учебников и не подкреплены целостной системой дидактических задач [33].

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена наличием объективно существующих противоречий:

– между требованиями стандартов к уровню развития пространственного мышления выпускников и преобладанием традиционных статических средств наглядности при изучении многогранников;

– между дидактическим потенциалом технологий дополненной реальности и отсутствием системно разработанных методических комплексов компьютерной поддержки содержательной линии «Многогранники» на их основе.

Необходимость разрешения указанных противоречий определяет проблему исследования: каковы научно-методические основания проектирования и использования компьютерной поддержки на базе дополненной реальности, обеспечивающей эффективное изучение темы «Многогранники» и развитие пространственного мышления учащихся?

Степень научной разработанности проблемы. Вопросы формирования пространственного мышления исследовались в трудах классиков отечественной психологии и методики обучения математике [18, 19]. Возможности информатизации образования и визуализации геометрического знания рассматривались в фундаментальных исследованиях структуры наглядности. В последние годы появились работы, посвященные общему

внедрению AR-технологий в образовательный процесс. Тем не менее, специфика проектирования сквозной компьютерной поддержки конкретной содержательной линии «Многогранники» с использованием AR на уровне среднего общего образования требует дальнейшего углубленного изучения.

Объектом исследования является процесс обучения геометрии (стереометрии) учащихся старших классов общеобразовательной школы в условиях цифровизации образования.

Предмет исследования — методика использования компьютерной поддержки на базе технологий дополненной реальности при изучении темы «Многогранники» в курсе геометрии 10–11 классов.

Цель исследования: разработать и апробировать методическое обеспечение использования компьютерной поддержки с применением дополненной реальности при изучении темы «Многогранники», направленную на развитие пространственного мышления учащихся.

В основу исследования положена гипотеза, согласно которой процесс изучения темы «Многогранники» в школьном курсе геометрии станет более эффективным, а уровень развития пространственного мышления учащихся существенно повысится, если: – проектирование компьютерной поддержки будет осуществляться на основе интеграции традиционных методов геометрии и интерактивного трехмерного AR-моделирования; – будет разработана и внедрена система учебных заданий с AR-поддержкой, реализующая принцип поэтапного восхождения от наглядно-образного к абстрактно-логическому мышлению; – учебный процесс будет обеспечен доступным программно-методическим комплексом, не требующим специализированного аппаратного оснащения школы.

Для достижения поставленной цели и проверки выдвинутой гипотезы необходимо решить следующие задачи исследования:

1. Выявить психолого-педагогические аспекты формирования пространственного мышления учащихся при изучении стереометрии в условиях информатизации образования.

2. Проанализировать требования современных стандартов школьного математического образования к изучению содержательно-методической линии «Многогранники».

3. Обосновать дидактический потенциал и выявить ограничения применения технологий дополненной реальности (AR) в обучении геометрии.

4. Разработать систему типовых учебных заданий с AR-поддержкой, ориентированную на поэтапное изучение свойств многогранников.

5. Опытным путем проверить применимость разработанных средств компьютерной поддержки на базе дополненной реальности в практике обучения старшеклассников стереометрии.

Методологическую основу исследования составили: деятельностный подход в обучении; концепция поэтапного формирования умственных действий; теория формирования и развития пространственного мышления [18, 19]; концепции информатизации и технологизации математического образования.

Для решения задач исследования использовался комплекс методов: – теоретические методы: анализ научно-методической, психолого-педагогической и нормативно-правовой литературы по проблеме исследования; изучение и обобщение передового педагогического опыта; моделирование геометрических объектов и учебных ситуаций; – эмпирические методы: педагогическое наблюдение за ходом образовательного процесса, анкетирование и интервьюирование учащихся, анализ результатов учебной деятельности школьников, проектирование и проведение опытного преподавания.

Научная новизна исследования заключается в том, что: – обоснованы дидактические условия применения технологий дополненной реальности как средства преодоления познавательных барьеров при изучении стереометрии; – разработана методическая модель компьютерной поддержки темы «Многогранники», связывающая виртуальные трехмерные динамические объекты со статическими чертежами учебника; – уточнена классификация

учебных стереометрических задач по уровням оперирования пространственными образами в интерактивной AR-среде [33].

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанный программно-методический комплекс компьютерной поддержки темы «Многогранники» на основе дополненной реальности (включая дидактические карточки с AR-маркерами, инструкции для учащихся и методические рекомендации для педагогов) готов к непосредственному внедрению в практику общеобразовательных организаций. Материалы исследования могут быть использованы учителями математики, авторами электронных образовательных ресурсов, а также студентами педагогических направлений подготовки при прохождении производственной практики.

Апробация результатов исследования. Основные теоретические положения и практические результаты прошли апробацию в ходе опытного преподавания на уроках геометрии в старших классах общеобразовательной школы МАОУ СШ №137.

Структура и объем работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, выводов по главам, заключения, списка использованных источников, включающего 32 наименования, и 9 приложений. Основной текст работы изложен на 65 страницах машинописного текста, содержит 12 рисунков и 4 таблиц.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Психолого-педагогические аспекты формирования пространственного мышления учащихся при изучении стереометрии

Изучение геометрического материала в системе общего среднего образования традиционно выступает одним из ключевых интеллектуальных регуляторов, обеспечивающих формирование логического мышления, дедуктивных способностей и когнитивных механизмов оперирования пространственными образами учащихся. Переход от изучения планиметрии к освоению стереометрического материала является важным этапом качественного преобразования мыслительных процессов, в ходе которого происходит существенная структурная перестройка познавательной деятельности старшеклассников. Научный анализ психологических основ этого процесса требует четкого разграничения и дефиниции фундаментальных понятий, описывающих пространственный компонент человеческого мышления, а также обращения к истокам теории чувственного познания.

В отечественной психологической науке основа для изучения того, как работают механизмы отражения пространства человеком был заложен Б. Г. Ананьевым. В своих трудах «Психология чувственного познания» и «Новое в учении о восприятии пространства» ученый доказал, что восприятие пространства является сложной системной функцией, имеющей многомерную психофизиологическую природу и опирающейся на сочетанную работу различных анализаторных систем (оптической, кинестетической, вестибулярной) [1, 2]. Б. Г. Ананьев подчеркивал, что формирование пространственных представлений не сводится к пассивному созерцанию, а всегда опосредовано активной деятельностью субъекта, направленной на освоение предметного мира [2]. Данное положение имеет принципиальное значение для методики обучения стереометрии: геометрическое мышление не

может развиваться эффективно, если учащийся занимает позицию пассивного наблюдателя статических чертежей.

Развивая идеи чувственного познания в педагогическом русле, отечественная психолого-педагогическая школа (в частности, в трудах И. С. Якиманской) строго развела понятия «пространственное воображение» и «пространственное мышление». Пространственное воображение трактуется исследователями как первичная, во многом интуитивная и эмоционально-образная способность человека к воссозданию образов объектов в их пространственных характеристиках (форма, величина, взаимное расположение элементов) на основе ранее воспринятых наглядных образцов или словесных описаний. Данный психический процесс тесно связан с механизмами памяти, перцептивного восприятия и воссоздающих представлений. Как отмечают К. В. Смирнова и Г. Х. Воистинова, без достаточного уровня развития базовых пространственных представлений, закладываемых еще на этапе основной школы, невозможно успешное усвоение понятийного аппарата стереометрии [20].

В отличие от воображения, пространственное мышление является специфической формой мыслительной деятельности, направленной на решение актуальных задач, требующих динамического оперирования пространственными образами в процессе их ментальной трансформации, переструктурирования и кодирования в абстрактные системы [4]. Пространственное мышление не просто воспроизводит статический образ объекта, но обеспечивает его активное преобразование в ментальном поле исследователя. И. С. Якиманская указывает, что основным операциональным компонентом пространственного мышления выступает динамическое изменение системы отсчета, мысленное изменение ракурса наблюдения за объектом, расчленение целостного образа на составные элементы и последующий синтез новой геометрической конфигурации. А. А. Симонова уточняет это определение: при изучении геометрии пространственное мышление работает за счёт двух связанных частей — понимания

геометрических понятий и законов, а также умения мысленно преобразовывать образы [19].

В условиях современной цифровой образовательной среды когнитивные процессы восприятия трехмерных объектов претерпевают кардинальные изменения. Как отмечают современные исследователи, традиционная дидактическая система, основанная на меловой доске и бумажном учебнике, формирует у учащихся фиксированную, статичную схему восприятия информации. Цифровая образовательная среда, насыщенная динамическим контентом, с одной стороны, предоставляет колоссальные возможности для интенсификации процесса обучения, а с другой — меняет структуру умственной деятельности старшеклассника. При работе в цифровой среде перцептивное восприятие трехмерных объектов начинает опираться на внешние динамические опоры: возможность интерактивного вращения объекта на экране, масштабирования и послойного расчленения структуры [13]. Это приводит к тому, что интрапсихические (внутренние, ментальные) процессы моделирования частично замещаются интерпсихическими (внешними, технологически опосредованными) действиями, что требует от методистов проектирования таких цифровых средств, которые не подменяли бы внутреннюю мыслительную работу учащегося, а выступали ее катализатором.

Для глубокого понимания логики формирования геометрического мышления старшеклассников целесообразно обратиться к теории уровней геометрического развития, сформулированной П. и Д. Ван Хиле. Данная концепция описывает последовательный процесс восхождения мысли от наглядно-чувственного восприятия к высшим формам абстрактно-дедуктивного мышления. На этапе обучения в старших классах при изучении стереометрии учащиеся должны совершить нормативный переход от 2-го (аналитического/дескриптивного) уровня к 3-му (теоретическому/абстрактно-логическому) и 4-му (дедуктивному) уровням развития по шкале Ван Хиле.

На 2-м уровне учащийся воспринимает геометрический объект через призму его свойств. Многогранник для него — это совокупность вершин, ребер и граней, которые он может перечислить и описать. Однако логические связи между свойствами на данном уровне еще не осознаются в полной мере. Нарастающий стереометрический материал требует немедленного перехода на 3-й уровень, где школьник становится способным устанавливать иерархические связи между свойствами фигур, понимать роль дефиниций, осознавать необходимость строгих логических доказательств и оперировать абстрактными пространственными конструкциями. На 4-м уровне дедуктивного мышления учащийся должен свободно владеть методами математического доказательства в рамках аксиоматической системы стереометрии.

Попытка форсированного навязывания им строгой аксиоматики стереометрии и аналитических методов решения задач без предварительного развития операционального базиса пространственного мышления приводит к формализму знаний, механическому заучиванию теорем и полной потере учебной мотивации. Для наглядного сопоставления когнитивных характеристик мыслительной деятельности старшеклассников на разных этапах обучения геометрический базис и его проявления в цифровой среде систематизированы в таблице 1.1.

Таблица 1.1 — Сопоставление уровней геометрического мышления по П. Ван Хиле

Уровень по Ван Хиле	Когнитивная характеристика мышления учащихся	Проявления при изучении стереометрии (традиционная среда)	Трансформация когнитивной деятельности в цифровой / AR-среде
1-й уровень: Наглядный (Визуальный)	Фигура воспринимается синкретично, как единое целое, исключительно по	Учащийся узнает многогранник (например, пирамиду) только в стандартном ракурсе «из	Разрушение статической фиксации: AR-технология позволяет рассматривать

	её внешнему виду. Свойства элементов фигуры не вычлняются и не анализируются.	учебника». Стереометрический чертеж воспринимается как плоская композиция из треугольников и параллелограммов; объем не реконструируется.	виртуальный многогранник под любым углом. Непрерывное изменение ракурса заставляет мозг соотносить плоскую проекцию на экране с реальным объемом.
2-й уровень: Аналитический (Дескриптивный)	Осуществляется анализ фигуры через выявление её свойств экспериментальным путем. Учащийся видит составные элементы, но логические связи между свойствами еще не осознаются.	Школьник может перечислить элементы многогранника (вершины, ребра, грани), знает формулы площадей и объемов. Однако он не понимает логической взаимосвязи свойств (например, почему перпендикулярность ребра к основанию влечет прямоугольность боковых граней призмы).	Интерактивная экспликация свойств: Возможность динамического выделения цветом скрещивающихся прямых, параллельных плоскостей или невидимых ребер каркаса. Визуальные маркеры помогают соотнести текстовое свойство с геометрическим элементом.
3-й уровень: Абстрактно-логический (Теоретический)	Устанавливаются логические связи между свойствами фигур и самими фигурами. Понимается роль дефиниций и логического	Учащийся понимает иерархию понятий (например, прямоугольный параллелепипед как частный случай призмы). Способен построить сечение по	Когнитивный мост интериоризации: Пошаговая AR-анимация сечений (продление ребер, пересечение плоскостей) материализует

	вывода, но дедуктивная система в целом еще не освоена.	алгоритму (метод следов), но испытывает серьезные затруднения, если конфигурация задачи меняется или усложняется.	абстрактный алгоритм. Динамическое варьирование параметров фигуры помогает обнаружить геометрические инварианты.
4-й уровень: Дедуктивный (Формальная дедукция)	Мышление свободно оперирует абстрактной дедуктивной системой. Понимается аксиоматический метод, взаимосвязь между теоремами, необходимость и строгость математического доказательства.	Выпускник свободно владеет аксиоматикой стереометрии, самостоятельно выстраивает многошаговые логические доказательства и решает сложные позиционные задачи (уровень задания №14 профильного ЕГЭ по математике).	Поле для гипотез и моделирования: Цифровая среда используется не как костыль для визуализации, а как инструмент компьютерного моделирования нестандартных комбинаций тел, координатных сеток и векторов для проверки аналитических гипотез.

Основной методологический кризис обучения геометрии в старших классах заключается в том, что значительная часть учащихся (до 60–70% по оценкам эмпирических исследований) вступает в старшую школу, находясь лишь на 1-м (наглядном) или в начале 2-го уровня развития мышления по Ван Хиле. Они не способны абстрагироваться от конкретной физической формы объекта, испытывают трудности в обобщении геометрических понятий и не воспринимают абстрактную логику математического доказательства. Визуализированное распределение учащихся по уровням геометрического

развития на констатирующем этапе представлено на круговой диаграмме (см. рис. 1.2).



Рисунок 1.2 — Диаграмма распределения учащихся по уровням

Корень описываемого кризиса лежит в феномене, который в методической литературе определяется как когнитивный разрыв между двухмерной проекцией геометрического объекта на плоскости (странице учебника, классной доске) и реальной трехмерной пространственной структурой многогранника. Любой стереометрический чертеж по своей физической природе является плоскостной, двухмерной оптической иллюзией. Отображение трехмерного тела на плоскости осуществляется по законам параллельного или центрального проектирования, при котором неизбежно искажаются метрические характеристики объекта: прямые углы проецируются как острые или тупые, параллельные ребра могут выглядеть

пересекающимися (при перспективе), а равные отрезки имеют разную длину в проекции.

Учащийся, сталкиваясь со стереометрическим чертежом куба или пирамиды, испытывает острый когнитивный диссонанс. Его перцептивная система (зрение) считывает плоские геометрические фигуры (параллелограммы, треугольники), в то время как его понятийный аппарат (интеллект) должен интерпретировать их как пространственные объекты с прямыми углами и взаимно перпендикулярными плоскостями. Для успешного декодирования плоскостного чертежа учащийся должен обладать развитым механизмом антиципации (пространственного предвосхищения) и способностью мысленно реконструировать инварианты геометрической фигуры, не поддаваясь «обману зрения» плоского изображения. С. А. Папян и А. А. Никитина подчеркивают, что при изучении многогранников этот разрыв усугубляется необходимостью соотносить невидимые элементы каркаса с видимыми внешними гранями, что требует колоссального напряжения пространственного воображения [29]. Если данный когнитивный механизм не сформирован, стереометрический чертеж превращается для школьника в хаотичное нагромождение пересекающихся линий, лишенное пространственного объема и внутренней логики.

Ментальное оперирование пространственными объектами в рамках школьного курса стереометрии сопровождается возникновением устойчивой типологии затруднений и систематических ошибок учащихся. Т. А. Оболдина указывает, что традиционные методы трансляции готовых геометрических истин не позволяют выявить скрытые дефекты пространственного восприятия, в связи с чем возникает необходимость применения интерактивных и эвристических методов обучения для их экспликации и коррекции [17]. Анализ практики обучения показывает, что при установлении взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве учащиеся чаще всего совершают следующие систематические ошибки [33]:

1. Смещение понятий «скрещивающиеся прямые» и «пересекающиеся прямые». Видя на плоскостном чертеже точку пересечения двух линий, являющихся проекциями скрещивающихся ребер многогранника, учащиеся делают ложный вывод об их физическом пересечении в пространстве. Они не способны мысленно развести эти прямые по разным параллельным плоскостям.

2. Неправомерный перенос планиметрических законов в пространственную среду. Например, учащиеся ошибочно полагают, что две прямые, перпендикулярные третьей, всегда параллельны между собой, игнорируя возможность их расположения в трехмерном пространстве в скрещивающемся виде.

3. Иллюзия «видимости/невидимости». Пунктирные линии, обозначающие невидимые контуры многогранника, воспринимаются учащимися со слабым пространственным мышлением как второстепенные элементы или объекты, находящиеся «вне» фигуры, что нарушает целостность восприятия геометрического тела.

Еще более глубокие когнитивные барьеры обнаруживаются при решении задач на построение и анализ геометрических сечений многогранников. Процесс построения сечения требует от учащегося одновременного удержания в сознании нескольких мысленных операций: пересечение плоскости с гранями тела, нахождение следов плоскости на прямых, содержащих ребра, определение линий пересечения двух плоскостей. В данном контексте фиксируются следующие типичные ошибки [18]: – Соединение точек, принадлежащих разным граням многогранника, не находящимся в одной плоскости. Это классическая ошибка, свидетельствующая о полной плоскостной фиксации мышления старшеклассника, когда он соединяет прямыми линиями любые две точки на чертеже просто потому, что между ними нет видимых физических препятствий на листе бумаги. – Неумение находить точку пересечения секущей прямой с плоскостью основания многогранника (нахождение следа

прямой). Учащиеся испытывают затруднения при необходимости мысленного или реального продления ребер многогранника за пределы его физической оболочки. Их пространственное мышление оказывается «запертым» внутри жесткого каркаса конкретной модели, они не могут спроецировать бесконечность геометрических плоскостей и прямых. – Трудности динамического варьирования. При изменении положения хотя бы одной из заданных точек, определяющих сечение, учащиеся зачастую не могут перестроить алгоритм решения, воспринимая каждую новую конфигурацию как абсолютно уникальный объект, не связанный с общими инвариантными правилами начертательной геометрии.

Обобщенная классификационная структура устойчивых затруднений и ментальных ошибок старшеклассников представлена в виде иерархической карты на рисунке 1.3.

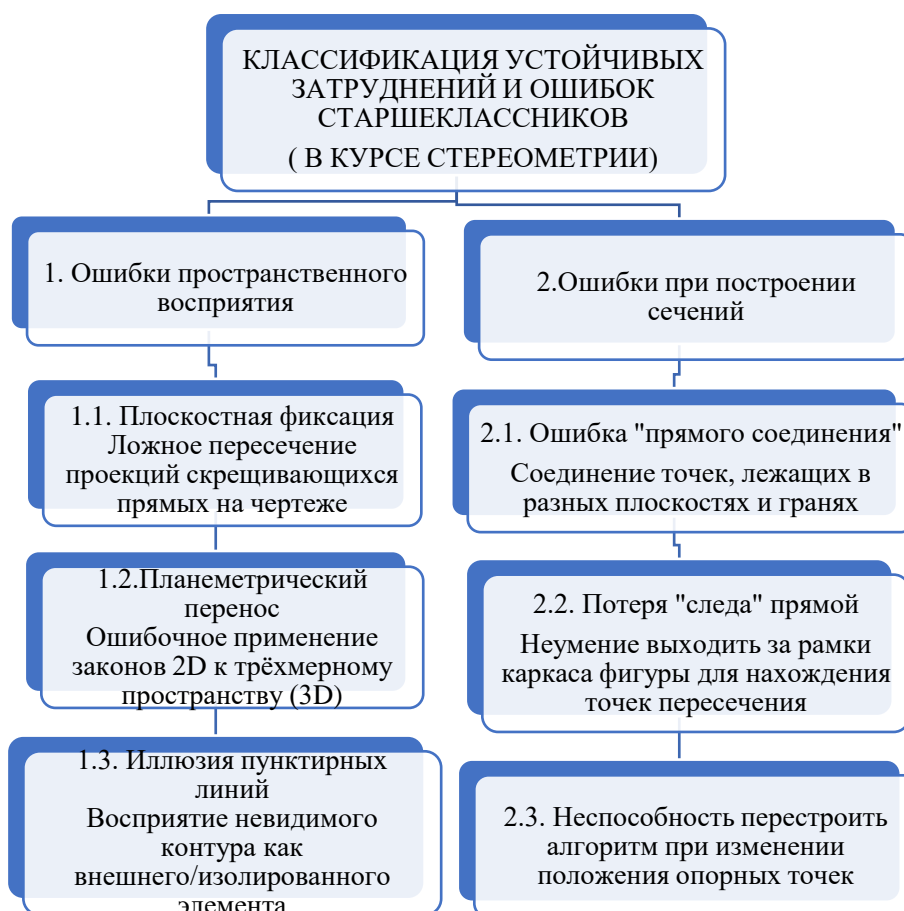


Рисунок 1.3 — Схема-классификатор ошибок

Описанные затруднения имеют не случайный, а глубоко закономерный психофизиологический характер. Переход от наглядно-образного уровня мышления к абстрактно-логическому не может произойти спонтанно, путем простого увеличения количества решенных однотипных задач или механического заучивания текстовых формулировок аксиом стереометрии. В соответствии с фундаментальным законом теории поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина, любое высшее психическое действие (включая ментальное оперирование трехмерными геометрическими образами в уме) первоначально формируется как внешнее, материальное или материализованное действие с реальными объектами, затем проходит стадию громкой речи и лишь на финальном этапе интериоризируется, переходя во внутренний, умственный план [24].

Следовательно, для успешного преодоления «стереометрического кризиса» у старшеклассников педагогический процесс должен быть обеспечен гибкой, динамичной материализованной основой. Традиционные дидактические средства (статичные плакаты, неподвижные пластиковые модели) не способны в полной мере выполнить роль такой основы, поскольку они сами статичны и не позволяют учащемуся осуществлять непрерывное, пошаговое изменение параметров объекта в реальном времени.

Когнитивным выходом из сложившейся методологической проблемной ситуации выступает разработка и внедрение качественно новых систем компьютерной поддержки, базирующихся на технологиях трехмерного интерактивного моделирования и виртуализации учебного пространства. Способность технологических решений мгновенно перестраивать чертеж, демонстрировать процесс динамического зарождения и развития геометрических объектов (например, плавное прохождение секущей плоскости сквозь тело призмы) создает ту самую необходимую внешнюю опору для материализованных действий, которая позволяет учащемуся безболезненно осуществить интериоризацию сложных пространственных понятий.

Таким образом, проведенный психолого-педагогический анализ убедительно доказывает, что проблема формирования пространственного мышления старшеклассников при изучении многогранников лежит на стыке психологии восприятия, теории когнитивного развития и методики технологизации обучения. Понимание природы когнитивного разрыва между плоскостным изображением и трехмерным объектом заставляет исследователя искать новые дидактические инструменты, способные выступить эффективным когнитивным «мостом» в обучении математике.

Данный вывод ставит перед нами необходимость детального изучения нормативных рамок общего образования, чтобы определить, насколько жестко современные государственные стандарты регламентируют требования к пространственному развитию школьников и какими ресурсами для этого обладают традиционные школьные учебники. Проблема дефицита динамической наглядности, зафиксированная на психологическом уровне, неизбежно проецируется на плоскость нормативно-методического анализа, к которому мы переходим в следующем разделе исследования.

1.2. Стандарты школьного математического образования и требования к изучению темы «Многогранники»

Исследование психолого-педагогических барьеров, возникающих при переходе учащихся к изучению трехмерного пространства, диктует необходимость анализа нормативно-правового и учебно-методического поля, регламентирующего данный процесс. Переход российской школы на обновленные образовательные стандарты и внедрение единых федеральных рабочих программ радикально трансформируют содержательные акценты школьного курса геометрии. В рамках настоящего раздела осуществляется сопоставление нормативных требований государства с реальной дидактической практикой, зафиксированной в классических учебно-методических комплексах (УМК) и материалах итоговой аттестации.

Фундаментальным нормативным документом, определяющим рамки общего среднего образования, выступает Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) [14, 28]. В соответствии с его обновленной редакцией, ключевыми предметными результатами освоения базового и углубленного курсов математики являются не просто репродуктивное усвоение системы математических фактов, а сформированность пространственного мышления, владение методами доказательств, математического моделирования и алгоритмами решения задач.

Детализация данных требований находит свое отражение в Федеральных рабочих программах (ФРП) по математике для 10–11 классов. На базовом уровне изучения предмета содержательно-методическая линия «Многогранники» ориентирована на формирование у учащихся целостных представлений о ключевых пространственных фигурах [26,27]. Программа базового уровня жестко регламентирует изучение следующих дидактических единиц: призма, параллелепипед, пирамида, правильные многогранники. От выпускника требуется умение описывать и распознавать данные тела на чертежах, моделях и в реальной жизни, вычислять их метрические характеристики (площадь поверхности, объем), а также решать простейшие планиметрические задачи в рамках пространственных конфигураций [26,27].

На углубленном уровне, согласно ФРП, требования к результатам освоения содержательной линии «Многогранники» приобретают качественно иной, дедуктивно-аналитический характер [27]. Учащийся должен не просто идентифицировать элементы многогранника, но и владеть строгой аксиоматической аргументацией при анализе взаимного расположения прямых и плоскостей. В программу углубленного уровня эксплицитно включены такие конструктивные и аналитические компоненты, как: построение сечений многогранников методом следов и методом внутреннего проектирования; вычисление углов и расстояний в пространстве координатно-векторным методом; исследование комбинаций многогранников и тел

вращения (вписанные и описанные сферы, цилиндры, конусы); а также решение оптимизационных геометрических задач на нахождение экстремальных значений объемов [27].

Для систематизации нормативных различий требований государства целесообразно обратиться к сравнительному анализу параметров освоения темы, зафиксированных в федеральных программах. Сравнительные нормативные параметры изучения темы «Многогранники» на базовом и углубленном уровнях в соответствии с актуальными Федеральными рабочими программами систематизированы в таблице 1.4.

Таблица 1.4 Нормативно-содержательные требования ФРП к изучению линии «Многогранники» в 10–11 классах

Критерий сравнения	Базовый уровень обучения [26]	Углубленный уровень обучения [27]
Теоретический базис	Описательный подход, базовые свойства призмы, параллелепипеда, пирамиды. Понятие о правильных многогранниках.	Строгий аксиоматический вывод всех метрических свойств. Теоремы о комбинациях многогранников.
Конструктивная деятельность	Изображение простейших многогранников на плоскости. Понятие о развертках геометрических тел.	Построение сложных многогранников, их сечений (метод следов, метод центрального/параллельного проектирования).
Инструментарий решения задач	Преимущественно синтетический метод (через планиметрические подзадачи в гранях и сечениях).	Синтетический, координатный, векторный методы. Использование аппарата математического анализа (производная) в задачах на экстремум.
Требования к пространственному мышлению	Уровень 2–3 по Ван Хиле (выделение свойств, оперирование готовыми формулами объемов).	Уровень 3–4 по Ван Хиле (строгая дедукция, динамическая трансформация образов при построении сечений).

Реализация данных государственных требований в школьной практике традиционно опосредуется через учебную литературу. Исторически наиболее востребованным и распространенным в образовательных организациях РФ остается УМК «Геометрия 10–11 классы» под редакцией Л. С. Атанасяна и др. [6]. Проведем детальный содержательно-логический анализ развертывания темы «Многогранники» в данном учебнике с целью оценки его дидактического потенциала для преодоления когнитивного кризиса учащихся.

Логика изложения материала в учебнике Л. С. Атанасяна построена по строгому классическому принципу. Изучение многогранников начинается в 10 классе (Глава III) сразу после освоения аксиоматики стереометрии и темы «Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей» [6]. Авторский коллектив разворачивает тему в следующей последовательности:

1. Введение общего понятия многогранника, его элементов (вершины, ребра, грани) и выпуклых многогранников.
2. Изучение призмы и ее частного случая — параллелепипеда (свойства граней, диагоналей, теорема о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда).
3. Изучение пирамиды (правильная пирамида, усеченная пирамида, апофема).
4. Правильные многогранники (симметрия, пять типов многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) [6].

Ключевая особенность данной логики заключается в том, что вычисление объемов многогранников оторвано от их качественного описания и вынесено в самый конец 11 класса (Глава V) [6]. Такой временной и логической разрыв приводит к тому, что на этапе первого знакомства с многогранниками в 10 классе учащиеся вынуждены оперировать исключительно их позиционными и качественными характеристиками в условиях острого дефицита метрических опор. При этом задачный материал учебника Л. С. Атанасяна характеризуется высокой степенью абстрактности:

большинство упражнений требует доказательства абстрактных пространственных соотношений или вычислений по готовым буквенным параметрам. Иллюстративный ряд учебника статичен, чертежи выполнены в ортогональной проекции без выделения цветом контрастных плоскостей, что существенно затрудняет дифференциацию видимых и невидимых элементов каркаса для учащихся с невысоким уровнем пространственного воображения.

Прямым следствием этого становится невысокая результативность выполнения стереометрических заданий в структуре оценочных материалов, главным из которых является Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике. Согласно спецификациям КИМ ЕГЭ, проверка пространственных умений осуществляется как на базовом, так и на профильном уровнях аттестации [21, 22]. На базовом экзамене стереометрия представлена простыми короткометражными задачами на вычисление площадей поверхностей и объемов, а также на сопоставление реальных объектов с геометрическими телами [21]. На профильном уровне стереометрии посвящены два ключевых задания: расчетная задача первой части с кратким ответом и сложная двухбалльная геометрическая задача с развернутым ответом (задание №14 по актуальной нумерации КИМ) [8, 22].

Аналитические и методические материалы Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) на протяжении ряда лет фиксируют критически низкий процент выполнения стереометрической задачи с развернутым ответом профильного ЕГЭ [11]. Традиционно пункт (а) этой задачи требует доказательства определенного геометрического факта (перпендикулярности прямых, деления ребра в заданном отношении секущей плоскостью), а пункт (б) — нахождения метрической величины (угла между плоскостями, расстояния от точки до плоскости, объема отсеченной части многогранника) [11, 22].

Согласно отчетам предметных комиссий ФИПИ, основные затруднения выпускников связаны именно с пунктом (а) — логическим доказательством, базирующимся на графическом построении [11]. Выпускники массово

совершают ошибки при построении сечений многогранников, путают скрещивающиеся прямые с пересекающимися и демонстрируют полную плоскостную фиксацию мышления, что детально соотносится с психологическими барьерами, описанными в параграфе 1.1. Данная статистика наглядно подтверждает выдвинутую гипотезу: традиционные УМК задают высочайшую планку требований к выпускнику, проверяемую на государственном уровне, но не обеспечивают его адекватным психологическим инструментом для считывания и конструирования стереометрического чертежа.

Причиной неэффективности традиционной методики перед лицом требований ФГОС выступают неустранимые ограничения классических дидактических средств наглядности. Рассмотрим ключевые из них:

1. **Натуральные физические модели** (деревянные, пластмассовые, проволочные многогранники). Обладая абсолютной трехмерной наглядностью, они статичны. Учащийся не может заглянуть «внутрь» деревянной модели куба, чтобы увидеть динамику изменения формы его диагонального сечения. Проволочные модели, в свою очередь, создают визуальный хаос при наложении передних и задних ребер друг на друга, лишая ученика опоры на закрашенные грани. Более того, физические модели невозможно интегрировать в индивидуальную домашнюю работу каждого школьника ввиду их ограниченного количества в кабинете математики.

2. **Плоскостные статические средства** (плакаты, таблицы, иллюстрации учебника). Закрепляют у учащихся плоскостное восприятие геометрии. Фиксированный ракурс чертежа (например, изображение пирамиды всегда «вид спереди-слева») лишает мышление гибкости: при изменении ракурса фигуры в экзаменационной задаче учащийся перестает узнавать геометрический объект.

3. **Интерактивные доски и стандартные презентации.** Несмотря на технологическую новизну, в большинстве случаев они используются как цифровые проекторы плоских слайдов. Двухмерный экран интерактивной

доски транслирует все тот же плоский чертеж, не решая проблему когнитивного разрыва между плоскостью и объемом.

Таким образом, проведенный нормативно-методический анализ подтверждает наличие глубокого противоречия между высокими требованиями ФГОС СОО и ФРП к уровню пространственного мышления старшеклассников, жестко проверяемыми в формате профильного ЕГЭ, и ограниченными возможностями традиционной дидактической среды современных школ. Существующие УМК и средства наглядности ориентированы на статичное восприятие геометрии, что провоцирует развитие «геометрического кризиса». Разрешение данного противоречия требует внедрения инновационной компьютерной поддержки учебного процесса, способной трансформировать плоский чертеж в интерактивную трехмерную среду. Это обуславливает необходимость исследования дидактического потенциала технологии дополненной реальности (AR) как адаптивного когнитивного инструмента, детальный анализ которого представлен в следующем разделе.

1.3. Применение дополненной реальности в геометрии: дидактический потенциал и ограничения

Выявленное в предыдущих разделах противоречие между абстрактным характером требований государственных образовательных стандартов и ограниченными возможностями традиционных плоскостных средств наглядности диктует необходимость поиска принципиально новых дидактических инструментов. В условиях цифровой трансформации школы одним из наиболее перспективных технологических решений выступает компьютерная поддержка учебного процесса, реализуемая посредством иммерсивных технологий. Данная проблема приобретает особую остроту в старшей школе при подготовке учащихся к решению стереометрических задач повышенной сложности (задание №14 КИМ ЕГЭ профильного уровня),

выполнение которых требует сформированного высокого уровня пространственного мышления и преодоления так называемого «плоскостного барьера» — ментальной фиксации на двухмерной проекции чертежа. Настоящий раздел посвящен комплексному анализу технологии дополненной реальности (AR), определению ее дидактических функций в обучении стереометрии, а также выявлению психолого-педагогических и технических ограничений, очерчивающих границы целесообразности ее применения на уроке геометрии.

В современном научно-методическом дискурсе под компьютерной поддержкой учебного процесса понимается целенаправленная интеграция программно-аппаратных средств в структуру дидактической системы с целью интенсификации познавательной деятельности, индивидуализации обучения и визуализации сложных абстрактных концептов. Внутри этого контура особое место занимают технологии дополненной (Augmented Reality, AR) и виртуальной (Virtual Reality, VR) реальности, которые, несмотря на общую иммерсивную природу, имеют принципиальные концептуальные и функциональные отличия.

Технология виртуальной реальности (VR) предполагает полное погружение пользователя в искусственно созданный, изолированный от внешнего мира цифровой симулятор с помощью специализированных шлемов и контроллеров [12]. В VR-пространстве реальный физический мир полностью замещается компьютерной графикой. Напротив, технология дополненной реальности (AR) не изолирует учащегося от его естественного окружения, а накладывает виртуальные цифровые объекты (3D-модели многогранников, текстовые подсказки, анимации) поверх реального физического пространства в режиме реального времени. Активация и отображение AR-контента осуществляются с помощью широкодоступных мобильных устройств (смартфонов, планшетов) или специализированных оптических очков.

Для школьного математического образования это различие имеет решающее значение: в отличие от VR, изолирующей ученика от учителя и

одноклассников, AR сохраняет возможность полноценного социального взаимодействия на уроке, ведения эвристической беседы и традиционного ведения записей в тетради, органично дополняя физический урок цифровыми слоями информации. В контексте интенсивной подготовки к профильному ЕГЭ это позволяет учителю сочетать инновационную наглядность со строгими аналитическими методами решения задач, не разрушая классно-урочную структуру.

С точки зрения технической реализации и дидактической применимости в условиях стандартного урока геометрии, AR-инструменты разделяются по типу активации (трекинга) на две ключевые группы:

1. Маркерная дополненная реальность (Marker-based AR). Процесс распознавания и позиционирования цифрового объекта привязан к конкретному физическому идентификатору — маркеру (QR-коду, специальному геометрическому рисунку на печатной странице или карточке) [5]. Камера смартфона фиксирует маркер, а программное обеспечение мгновенно рассчитывает его положение в пространстве, выстраивая поверх него строго ориентированную 3D-модели многогранника [10]. Данный тип AR идеален для уроков геометрии, поскольку маркеры можно внедрять непосредственно в рабочие листы, страницы учебников или дидактические карточки с прототипами заданий №14 ЕГЭ, обеспечивая жесткую связь между текстовым условием многошаговой задачи и ее объемной интерактивной моделью.

2. Безмаркерная дополненная реальность (Markerless AR / Пространственный трекинг). Технология базируется на алгоритмах распознавания плоскостей окружающей среды (технология SLAM) [5]. Программа анализирует текстуру пола или стола и позволяет учащемуся «поставить» крупномасштабную модель многогранника в любое место класса. В геометрии этот инструмент используется для демонстрации масштабных моделей или виртуальных лабораторных комплексов, однако он требует более высокой вычислительной мощности мобильных устройств и хорошего

освещения кабинета [10]. Дидактическим примером такого инструмента выступает мобильное приложение GeoGebra Calculator 3D с функцией AR, позволяющее проецировать созданные учеником или учителем трехмерные конфигурации (кубы, призмы, пирамиды со сложными сечениями) непосредственно на рабочую поверхность ученического стола.

Для интеграции данных инструментов в учебный процесс учителю необходимо четко понимать классификационную структуру доступного софта. Основные типы AR-технологий по способу позиционирования и специфика их применения в дидактическом пространстве урока геометрии систематизированы в таблице 1.5.

Таблица 1.5 Классификация AR-инструментов и потенциал их использования на уроках стереометрии

Тип AR-технологии	Технический механизм активации [5]	Дидактическое назначение на уроке	Применимость в массовой школе [31]
Маркерная (Marker-based)	Считывание камерой графического кода (триггера) на бумажном носителе.	Визуализация конкретного многогранника, привязанного к тексту задачи в карточке или учебнике.	Высокая. Не требует дорогого оборудования, работает на бюджетных смартфонах.
Безмаркерная (Markerless / SLAM)	Сканирование реальных поверхностей (пола, стола) датчиками устройства.	Создание виртуальных демонстрационных макетов, проведение лабораторных работ по расчету объемов.	Средняя. Требуется современные гаджеты с гироскопами и качественными камерами.
Суперпозиционная (Object Tracking)	Распознавание реального физического	«Оживление» проволочных или	Ограниченная. Требуется сложной

	объекта и наложение цифрового слоя на него.	деревянных моделей (подсвечивание невидимых ребер, сечений).	предварительной настройки и калибровки моделей.
--	---	--	---

Дидактический потенциал дополненной реальности при изучении многогранников раскрывается через систему ее специфических функций, выступающих когнитивным «мостом» для преодоления плоскостной фиксации мышления и минимизации перцептивных ошибок старшеклассников.

Первая ключевая возможность заключается в динамическом управлении трехмерными моделями[10]. В отличие от статического чертежа, AR-модель позволяет учащемуся легко вращать и менять положение и масштаб простым перемещением смартфона вокруг виртуальной фигуры. Школьник своими глазами видит изменения проекция куба или пирамиды с разных сторон. Это обеспечивает плавное, эмпирически проверяемое соотнесение перцептивного образа с абстрактным понятием, стимулируя переход ученика со 2-го (аналитического) на 3-й (абстрактно-логический) уровень мышления по Ван Хиле. В контексте ЕГЭ это критически важно при обучении нахождению угла между скрещивающимися прямыми или линейного угла двугранного угла, когда плоский чертеж полностью искажает метрические характеристики.

Второй важнейшей функцией выступает пошаговая визуализация алгоритмов геометрических построений. При решении сложнейших задач на построение сечений многогранников методом следов (что составляет основу содержательного базиса пункта «а» задания №14 ЕГЭ [11]) AR-приложение способно интерактивно демонстрировать логику проведения секущей плоскости. На первом шаге программа подсвечивает точки, лежащие в одной грани; на втором — анимирует процесс продления прямой до пересечения со следом основания; на третьем — демонстрирует рождение линии сечения. Подобная динамическая визуализация полностью соответствует теории

поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина, предоставляя ученику материализованную опору для интериоризации алгоритма [14]. В среде GeoGebra Calculator 3D данный функционал реализуется через ползунки анимации, позволяющие буквально «раскладывать» алгоритм построения сечения на дискретные, осознаваемые логические шаги.

Третья функция — динамическое варьирование параметров геометрической фигуры [17]. Ученик может в реальном времени изменять высоту пирамиды, угол наклона секущей плоскости или положение опорных точек сечения, наблюдая за мгновенной перестройкой всей пространственной конфигурации. Это позволяет организовать полноценную исследовательскую деятельность, направленную на поиск геометрических инвариантов и закономерностей, подготавливая учащихся к восприятию обобщенных аналитических методов (включая координатно-векторный метод).

Однако, несмотря на колоссальный дидактический потенциал, дополненная реальность не является универсальной педагогической панацеей и имеет серьезные психолого-педагогические и технические ограничения. Психологической границей применения AR выступает риск когнитивной перегрузки (Cognitive Overload Theory) [31]. Избыточная визуализация, перенасыщенность интерфейса анимациями, яркими эффектами и всплывающими окнами могут отвлечь внимание учащегося от математической сути задачи. Вместо анализа логических взаимосвязей элементов многогранника школьник начинает воспринимать технологию как развлекательный элемент (геймификацию ради геймификации), что ведет к формированию поверхностного, «клипового» восприятия учебного материала.

Второе, методическое ограничение проверяет центральную гипотезу исследования: избыточная опора на AR-визуализацию способна затормозить развитие строгого абстрактно-логического мышления. В условиях реального итогового экзамена (ЕГЭ) учащийся полностью лишен каких-либо цифровых средств поддержки и оперативных подсказок гаджетов — перед ним

находится только бумажный бланк с текстом задачи и плоским черновиком. Если учащийся на этапе обучения постоянно видит готовое решение и объемное сечение на экране смартфона, у него атрофируется потребность в волевом и интеллектуальном усилии, необходимом для самостоятельной мысленной реконструкции объема по плоскому чертежу [16].

Геометрия как учебный предмет ценна именно своей дедуктивной строгостью и развитием способности рассуждать абстрактно. Применять дополненную реальность (AR) следует временно и целенаправленно. Она является «помощником» в понимании сложных пространственных концепций. Как только ученик осваивает трехмерное мышление и перестает воспринимать объёмные объекты плоско, необходимость в AR отпадает. После этого следует переходить к традиционным методам к таким как, аналитические расчеты, координатным вычислениям и строгим математическим доказательствам на бумаге.

При внедрении дополненной реальности в школа стоит столкнуться с серьезными препятствиями, кроме педагогических. К ним относятся острые технические и инфраструктурные проблемы. В России ощущается острая нехватка качественного программного обеспечения для преподавания геометрии. Большая часть платформ зарубежные и они стали недоступны для использования. Небольшое количество отечественных разработок являются платными или представляют собой простые энциклопедии, в которых нет возможности интерактивного моделирования. Хотя и есть открытые платформы, такие как GeoGebra Calculator 3D они могут частично помочь. Для их использования от учителя требуется высокий уровень владения ИКТ, т.к. им приходится самостоятельно создавать динамические материалы и модели для уроков.

Продемонстрировать баланс между преимуществами AR и её трудностями поможет «Структурно-логическая карта потенциала и

ограничений интеграции дополненной реальности в процесс обучения стереометрии» в Приложении Г.

Проведя анализ можно сделать вывод, что дополненная реальность обладает огромным потенциалом для кардинального изменения процесса изучения многогранников в старшей школе. Её применение эффективно устраняет разрыв между плоским и объемным восприятием. Но применение должно быть строго регламентировано дидактическими принципами. Технология должна быть не главным элементом в обучении, а дополнением к геометрическим доказательствам и традиционным аналитическим методам. Выявленные недостатки программного обеспечения и риск когнитивной перегрузки ставят перед нами задачу разработать тщательно продуманную методику использования AR в рамках комплексной подготовки к решению стереометрических задач ЕГЭ. Обоснование и проектирование этой методики станут основной частью практического исследования.

Вывод по главе 1

Проведя теоретический анализ, было выявлено, что дополненная реальность (AR) может значительно улучшить преподавание геометрии. При изучении стереометрии требуется сложный переход от наглядного к абстрактному мышлению. Одни традиционные методы не справляются с развитием пространственного мышления у большей части школьников.

Проанализировав образовательные стандарты, был выявлен разрыв между высокими требованиями ФГОС к пространственному мышлению и ограниченными возможностями традиционной дидактики. Существующие учебные материалы не справляются с задачей «оживления» плоских геометрических изображений.

Изучение AR-технологий показало, что они могут стать решением этих проблем, т.к. позволяют:

- Преодолеть разрыв между 2D-изображением и 3D-объектом.

- Динамически и интерактивно представлять геометрические фигуры.
- Создавать условия для последовательного развития пространственного мышления.

Но также важно учитывать и ограничения AR. При использовании дополненной реальности есть риск перегрузки, необходимость постепенного сокращения технологической поддержки, важность баланса с традиционными методами и следует учитывать технические и инфраструктурные сложности.

Для успешного применения дополненной реальности необходимо использовать комплексный психолого-педагогический подход. В него входят:

- Классические методы обучения.
- Современную цифровую визуализацию.
- Поэтапное развитие мыслительных операций.
- Индивидуализацию учебного процесса.

Подводя итоги, можно сказать, что исследование убедительно доказывает, что внедрение дополненной реальности в обучение геометрии является необходимым. Оно будет эффективным шагом для развития пространственного мышления. При этом успешность внедрения AR-технологий зависит от соблюдения методологических принципов и учета выявленных ограничений.

Полученные выводы служат теоретической основой для разработки практической части исследования — системы учебных заданий с использованием дополненной реальности, направленной на формирование пространственных представлений и развитие геометрического мышления учащихся.

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ОБУЧЕНИЮ РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ

2.1. Теоретико-методические основы применения дополненной реальности при изучении стереометрии

Переход к обновленным федеральным государственным образовательным стандартам среднего общего образования (ФГОС СОО) обуславливает необходимость модернизации технологического инструментария обучения математике [28]. Одной из наиболее сложных в методическом отношении содержательных линий курса геометрии 10–11 классов является линия «Многогранники». Как показал нормативно-дидактический анализ, проведенный в параграфе 1.2, требования к результатам освоения данной темы существенно дифференцированы по уровням обучения (базовому и углубленному).

Успешность освоения данного материала напрямую зависит от уровня развития пространственного мышления учащихся, которое традиционно формируется в условиях когнитивного противоречия между трехмерной природой геометрических объектов и двухмерным (плоским) характером средств их наглядности (чертеж на доске, иллюстрация в учебнике) [23]. В связи с этим актуализируется поиск новых дидактических средств компьютерной поддержки, способных выступить «когнитивным мостом» между абстрактным понятием и его визуальным образом.

Для определения методических точек интеграции AR-технологий необходимо систематизировать задачный материал, представленный в действующем учебнике Л. С. Атанасяна и др. («Геометрия 10–11 классы», базовый и углубленный уровни). Опираясь на структурно-функциональную матрицу требований ФГОС, выделенную в подразделе 1.2, была проведена классификация задач глав III («Многогранники») и V («Объемы

многогранников») по характеру ведущей учебно-познавательной деятельности:

1) **Дескриптивно-распознающие задачи базового уровня (описательный подход)**

Данная категория заданий преобладает на этапе введения понятийного аппарата и направлена на формирование умений распознавать видов многогранников, их элементов и свойств симметрии. Деятельность учащихся носит репродуктивный или частично-поисковый характер (1–2 уровни по Ван Хиле).

Содержательный базис УМК: текстовые вопросы в начале параграфов главы III; задачи на подсчет числа элементов (вершин, ребер, граней) и проверку выполнения теоремы Эйлера для выпуклых многогранников; задачи на распознавание видов призм (прямая, наклонная, правильная) и пирамид.

Примеры:

Задача № 218 (доказательство базовых свойств боковых граней прямой и правильной призмы) (Рисунок 2.1);

218 Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани — прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

Рисунок 2.1

Вопросы к главе III (№ 1–5 на определение минимального числа ребер и видов призм) (Рисунок 2.2);

- 1** Какое наименьшее число рёбер может иметь многогранник?
- 2** Призма имеет n граней. Какой многоугольник лежит в её основании?
- 3** Является ли призма прямой, если две её смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания?
- 4** В какой призме боковые рёбра параллельны её высоте?
- 5** Является ли призма правильной, если все её рёбра равны друг другу?

Рисунок 2.2

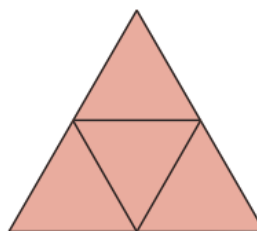
Задачи на симметрию № 276, 277, 278 (подсчет центров, осей и плоскостей симметрии многогранников) (Рисунок 2.3);

- 276 Сколько центров симметрии имеет: а) параллелепипед; б) правильная треугольная призма; в) двугранный угол; г) отрезок?
- 277 Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) правильный треугольник; в) куб?
- 278 Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная четырёхугольная призма, отличная от куба; б) правильная четырёхугольная пирамида; в) правильная треугольная пирамида?

Рисунок 2.3

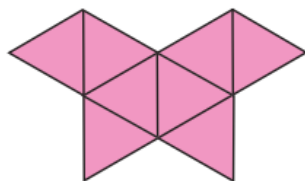
Практические задания № 271–273 (моделирование правильных многогранников по их готовым плоским развёрткам) (Рисунок 2.4).

- 271 Перерисуйте развёртку правильного тетраэдра (рис. 95) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку (сделав необходимые припуски для склеивания) и склейте из неё тетраэдр.
- 272 Перерисуйте развёртку куба (рис. 96) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку и склейте из неё куб.
- 273 Перерисуйте развёртку правильного октаэдра (рис. 97) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку и склейте из неё октаэдр.



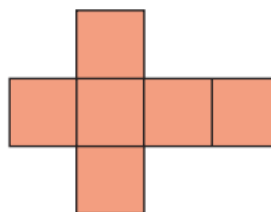
Развёртка правильного тетраэдра

Рис. 95



Развёртка правильного октаэдра

Рис. 97



Развёртка куба

Рис. 96

Рисунок 2.4

2) Метрические (вычислительные) задачи (синтетический и аналитический инструментарий)

Связаны с расчетом линейных величин, углов (наклона, двугранных), площадей поверхностей и объемов. Требуют применения планиметрического аппарата к пространственным фигурам (базовый уровень) или аналитических методов (углубленный уровень).

Содержательный базис УМК: Расчет линейных величин (длин диагоналей, высот, апофем), угловых характеристик (углов между скрещивающимися прямыми, углов наклона боковых ребер и граней к

плоскости основания, двугранных и многогранных углов), а также площадей поверхностей (боковой и полной) и объемов тел (глава V).

Примеры:

Задачи № 219 и № 220 (вычисление элементов прямого параллелепипеда с ромбом в основании через тригонометрические функции) (Рисунок 2.5);

219 В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда.

220 Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

Рисунок 2.5

№ 230 и № 231 (расчет площадей боковой и полной поверхности призм) (Рисунок 2.6);

230 Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2 . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

231 Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60° . Меньшая из площадей диагональных сечений¹ равна 130 см^2 . Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

Рисунок 2.6

№ 237 (нахождение площади поверхности наклонной призмы через параметры ее перпендикулярного сечения) (Рисунок 2.7).

237 Боковое ребро наклонной четырёхугольной призмы равно 12 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Рисунок 2.7

3) Конструктивно-геометрические задачи (пространственная конструктивная деятельность)

Данная категория задач нормативно закреплена ФГОС СОО как обязательная для углубленного уровня и частично — для базового (в объеме построения простейших сечений куба и тетраэдра). Требуют от учащихся развитого пространственного воображения, умения мысленно осуществлять

динамические трансформации и строить сечения тел плоскостью при различных условиях заложения.

Содержательный базис УМК: Глава III, § 4 «Построение сечений многогранников» (стр. 77–81). Задачи на построение многоугольников сечений, проходящих через заданные точки, принадлежащие ребрам или граням фигуры, либо параллельно/перпендикулярно заданным прямым и плоскостям.

Примеры: В линии призм и параллелепипедов: задачи № 233 (моделирование сечения, проходящего через ребро перпендикулярно боковой грани) (Рисунок 2.8);

233 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B . Через ребро BB_1 проведено сечение BB_1D_1D , перпендикулярное к плоскости грани AA_1C_1C . Найдите площадь сечения, если $AA_1 = 10$ см, $AD = 27$ см, $DC = 12$ см.

Рисунок 2.8

№ 234 (построение сечения через середину гипотенузы перпендикулярно к ней) (Рисунок 2.9);

234 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если катеты равны 20 см и 21 см, а боковое ребро равно 42 см.

Рисунок 2.9

№ 235 (конструирование сечения через катет и противоположную вершину под заданным углом к основанию) (Рисунок 2.10).

236 Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения¹ на боковое ребро.

Рисунок 2.10

Сопоставление структуры задачного материала УМК Л. С. Атанасяна с психолого-педагогическими особенностями восприятия графической информации школьниками позволяет выявить зоны устойчивого дидактического кризиса. Статичная графическая модель с использованием классической системы проекций, часто становится препятствием для

достижения учащимися уровней геометрического мышления Ван Хиле, адекватных требованиям ФГОС.

При решении конструктивных задач возникает психологический барьер «границы фигуры»: учащиеся воспринимают многогранник как изолированный замкнутый объект, нарисованный на бумаге, и испытывают непреодолимые трудности при необходимости продлить секущую плоскость за пределы реальных граней (нахождение следа плоскости на плоскости основания). Чертеж воспринимается как статичная аппликация, что полностью блокирует понимание алгоритма метода следов.

Сравним чертеж задачи из учебника выполненные на плоскости и в приложении GeoGebra Calculator 3D (См. Приложение 3)

Учебник Л. С. Атанасяна предлагает жестко фиксированные ракурсы геометрических тел (например, пирамида всегда обращена к читателю передней боковой гранью, а ее основание расположено горизонтально). Это формирует у учащихся ложный стереотип «правильного» положения фигуры. Благодаря дополненной реальности ученики могут исключить ошибки в построении и развить своё пространственное мышление.

Если в условии задачи (или в КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня) геометрическая ситуация меняется — например, в наклонной призме высота проецируется вне плоскости основания (задача № 241), или пирамида «положена» на боковую грань — учащиеся перестают узнавать инвариантные свойства фигуры. Логическое рассуждение и строгий дедуктивный вывод (требование углубленного уровня ФГОС) оказываются заблокированными, так как визуальный образ вступает в конфликт с теоретическим понятием.

Для проектирования компьютерной поддержки было осуществлено соотнесение и распределение практических задач учебника с целевыми категориями ФГОС. Результатом сопоставления этих требований, типичных ошибок школьников и дидактического потенциала дополненной реальности стала методическая типология задач УМК Л. С. Атанасяна, внедрение AR-инструментов в которые дает наибольший педагогический эффект.

Таблица 2 - Типовые задачи УМК Л. С. Атанасяна и сценарии их интерактивной AR-поддержки

№ задачи по УМК	Математическое содержание задачи	Суть учебного затруднения	Сценарий интерактивной AR-визуализации и инструмент
№ 239	Вычисление площади боковой поверхности наклонной призмы через перпендикулярное сечение.	Учащиеся не могут мысленно построить сечение, перпендикулярное боковым ребрам, и путают его стороны с ребрами основания.	Инструмент: GeoGebra Calculator 3D (AR режим). Сценарий: на каркас наклонной призмы накладывается динамическая плоскость. При активации она «разрезает» призму строго перпендикулярно ребрам. Полученный многоугольник окрашивается в ярко-синий цвет, а его стороны динамически проецируются на плоскость для отдельного планиметрического расчета.
№ 255	Нахождение двугранного угла при основании правильной пирамиды.	Ошибочное определение линейного угла двугранного угла (ученики часто путают угол наклона боковой грани с углом наклона ребра).	Инструмент: GeoGebra Calculator 3D. Сценарий: Модель пирамиды делается прозрачной. Внутри нее пошагово загораются отрезки: высота пирамиды, апофема и радиус вписанной окружности основания. Дуга угла между апофемой и радиусом подсвечивается красным цветом, наглядно демонстрируя применение теоремы о трех перпендикулярах.
№ 261	Построение сечения четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три	Необходимость нахождения точек пересечения секущей плоскости с прямыми,	Инструмент: GeoGebra Calculator 3D (функция AR-атласа). Сценарий: Ученик наводит камеру на маркер задачи. Приложение пошагово анимирует метод следов: прямая через две заданные точки на боковых ребрах продлевается вниз до пересечения с

	заданные точки на ребрах.	содержащими ребра основания (выход за контур фигуры).	прямой, содержащей ребро основания. Точка пересечения (внешний след) фиксируется виртуальным флажком, указывая направление дальнейшего построения.
№ 659	Вычисление объема правильной треугольной пирамиды по заданному боковому ребру и углу наклона к плоскости основания.	Трудности с проецированием вершины пирамиды в центр основания (особенно на плоском искаженном рисунке).	Инструмент: GeoGebra Calculator 3D. Сценарий: реализуется возможность «взгляда изнутри». Ученик может виртуально опустить камеру смартфона под основание AR-пирамиды или посмотреть на нее строго сверху, чтобы лично убедиться, что проекция вершины совпадает с точкой пересечения медиан (высот) правильного треугольника.

Для дескриптивного подтверждения выделенных теоретико-методических основ рассмотрим процесс решения задачи № 261 (построение сечения четырехугольной пирамиды) в рамках двух дидактических моделей.

1. Традиционный метод (статический чертеж):

- Деятельность учащегося: Школьник строит чертеж в тетради. Для нахождения сечения ему необходимо продлить ребра основания и боковые ребра до их пересечения с секущей плоскостью (поиск внешних следов).

- Проявление когнитивного барьера: на плоскости листа бумаги линии ребер кажутся ограниченными отрезками. Учащийся сталкивается с психологическим барьером «границы фигуры» и не понимает, как прямая может «выйти» за пределы пирамиды. Возникает оптическая иллюзия пересечения непересекающихся (скрещивающихся) прямых из-за неудачного ракурса.

2. Инновационный метод с AR-поддержкой (инструмент GeoGebra Calculator 3D):

- Деятельность учащегося: Ученик проецирует AR-модель пирамиды на парту. Приложение позволяет пошагово активировать алгоритм метода следов.

- Методический эффект AR: Виртуальные прямые, проходящие через заданные точки, динамически продлеваются в пространстве. Школьник физически видит, как секущая плоскость «разрезает» пространство и где именно она пересекает плоскость основания класса (внешний след фиксируется визуальным маркером). Ученик может обойти модель вокруг, чтобы убедиться в истинности пересечения прямых под любым ракурсом.

Таким образом, если в традиционной модели ученик тратит когнитивный ресурс на преодоление дефектов плоского восприятия чертежа, то в AR-модели этот барьер снимается автоматически. Высвобожденный ресурс направляется на понимание самого математического алгоритма (метода следов) и логическое обоснование шагов построения.

Выполненная в параграфе классификация задачного материала глав III и V УМК Л. С. Атанасяна в соответствии с требованиями ФГОС СОО. Сопоставление традиционного чертежа с особенностями восприятия старшеклассников позволило зафиксировать ключевые зоны дидактического кризиса: когнитивный барьер «границы фигуры», ракурсную шаблонизацию и проекционные иллюзии угловых величин.

Проведенный сравнительный анализ подходов доказал, что интеграция инструмента GeoGebra Calculator 3D эффективно компенсирует дефекты плоскостного восприятия. За счет интерактивного манипулирования и пошаговой анимации элементов дополненная реальность снижает непроизводительную когнитивную нагрузку, переводя деятельность учащихся в наглядно-деятельностную форму и освобождая ресурс для освоения математических алгоритмов.

Разработанная матрица соответствия ошибок и спецификация задач выступают технологической основой для дальнейшего проектирования. В следующем параграфе (2.2) на базе этих положений будет представлена

авторская дифференцированная система стереометрических задач, снабженная комплексной AR-поддержкой и методическими рекомендациями по ее внедрению в учебный процесс.

2.2. Проектирование системы учебных заданий с использованием дополненной реальности

Переход от теоретико-методических основ, систематизированных в подразделе 2.1, к их практической реализации в школьном образовательном процессе обуславливает необходимость создания конкретного дидактического инструментария [16]. Целью проектирования предлагаемой системы учебных заданий является операционализация теоретических положений о преодолении пространственных когнитивных барьеров учащихся посредством AR-технологий и их трансформация в упорядоченный комплекс урочных материалов. Процесс конструирования данной системы базируется на фундаментальных положениях теории деятельности, развивающего обучения и современной методики преподавания математики [5; 18], что нашло отражение в следующих специфических методических принципах:

1. Принцип преемственности. Разрабатываемый задачный комплекс не заменяет собой действующее нормативно-дидактическое обеспечение, а планомерно интегрируется в него. В качестве содержательного ядра системы выступает стабильный учебник Л. С. Атанасяна и др. («Геометрия 10–11 классы»), что позволяет сохранить логику и последовательность изучения темы «Многогранники», предусмотренную примерной рабочей программой. Дидактические AR-сценарии выступают естественным расширением традиционного геометрического материала в точках наибольшего затруднения школьников.

2. Принцип бинарности (двойственной структуры). Данный принцип определяет компоновку учебного материала в виде взаимосвязанных пар

задач: «задача-прототип из УМК» и «авторская задача-аналог». Первая задача пары направлена на первичное распознавание геометрической ситуации и снятие визуальных барьеров с помощью AR; вторая (модифицированная) задача предлагает изменение пространственного ракурса, расположения секущей плоскости или контекста при сохранении инвариантной математической структуры. Это препятствует механическому заучиванию алгоритмов и способствует формированию обобщенных способов стереометрической деятельности [29].

3. Принцип профессионально-практической направленности. Применение технологий дополненной реальности становится наиболее дидактически оправданным в задачах, имеющих выраженный квазипрофессиональный или практико-ориентированный сюжет (строительство, архитектура, дизайн, раскрой материалов) [6]. Включение таких задач в систему позволяет наглядно продемонстрировать учащимся реальное воплощение пространственных абстракций, повысить внутреннюю академическую мотивацию старшеклассников и задействовать AR-моделирование как инструмент решения прикладных технических задач [18].

4. Принцип дифференциации. Проектируемая система учитывает требования ФГОС СОО к дифференциации обучения на базовом и углубленном уровнях [28]. Дифференциация реализуется как по уровню сложности математического содержания (от дескриптивного подсчета элементов до многошаговых конструктивно-метрических расчетов), так и по характеру предоставляемой AR-поддержки: от жестко регламентированных пошаговых визуальных подсказок (атласов) до открытых виртуальных сред (динамических лабораторий), требующих от учащихся самостоятельного исследовательского поиска, выдвижения и верификации геометрических гипотез [23].

Эффективное использование дополненной реальности (AR) при изучении стереометрии возможно только в рамках продуманной системы, а не при случайном применении отдельных моделей [2]. В связи с этим в данном

исследовании была разработана структура системы заданий, которая направлена на последовательное развитие пространственного мышления старшеклассников и преодоление возникающих у них зрительных затруднений.

В основе концепции лежит бинарная (двойная) структура, то есть объединение заданий в пары по принципу «задача-прототип + задача-аналог» [5]. Такой подход необходим для того, чтобы избавить школьников от привычки решать геометрические задачи по шаблону [10]. При традиционном обучении ученики часто запоминают лишь один стандартный вид фигуры, представленный в учебнике. Разделение учебного материала на взаимосвязанные пары помогает учащимся четко отличать главные геометрические свойства объекта (правила, теоремы) от его случайного расположения на плоском рисунке.

Каждая дидактическая пара в системе строится на основе следующих положений:

1. Задача-прототип из учебника Л. С. Атанасяна (10–11 классы). Она составляет основу каждой пары. Использование задач из стандартного УМК гарантирует, что разработанный комплекс полностью соответствует школьной программе и требованиям государственной итоговой аттестации (КИМ ЕГЭ). На этапе решения задачи-прототипа технологии AR выполняют наглядную и подсказывающую роль: виртуальная модель помогает ученику соотнести плоский чертеж с трехмерным объектом, увидеть «скрытые» элементы и освоить базовый алгоритм решения в стандартных условиях.

2. Авторская задача-аналог. Эта задача конструируется самостоятельно. По своему математическому содержанию, логике рассуждений и применяемым формулам она полностью аналогична задаче-прототипу [13]. Однако, чтобы ученики не решали её автоматически, в задаче-аналоге изменяются внешние условия:

- пространственное положение и ракурс фигуры (например, переход от прямой призмы к наклонной, изменение положения секущей плоскости или необычное расположение высоты пирамиды);
- сюжет задачи, в который добавляются практические и жизненные ситуации (расчеты в строительстве, архитектуре, дизайне или производстве) [6].

На этапе работы с задачей-аналогом технологии дополненной реальности становятся инструментом для исследования и проверки гипотез. Ученик должен самостоятельно применить усвоенный ранее абстрактный алгоритм в новых, нестандартных условиях, что способствует глубокому пониманию материала.

Общая количественная спецификация разработанного комплекса включает в себя 8 тематических пар (всего 16 задач). В соответствии с выводами параграфа 2.1, они распределены по трем направлениям учебной деятельности [23]:

- Блок I: Дескриптивно-распознающие задачи (2 пары) — направлены на закрепление понятийного аппарата и преодоление иллюзий ракурса;
- Блок II: Метрические (вычислительные) задачи (3 пары) — ориентированы на расчет величин в усложненных и практико-ориентированных ситуациях;
- Блок III: Конструктивно-геометрические задачи (3 пары) — нацелены на построение сложных сечений многогранников (в том числе методом следов с выходом за границы фигуры).

Описанная модель служит основой для создания целостной системы задач, подробное содержание которой представлено в следующем подразделе.

Для реализации спроектированной бинарной концепции был осуществлен отбор задач-прототипов из действующего УМК Л. С. Атанасяна и др. («Геометрия 10–11 классы») и разработаны соответствующие им авторские вариативные задачи-аналоги. Полный реестр сформированной

системы, состоящей из 8 тематических пар (16 задач), представлен в Приложении А.

Представленное распределение учебного материала обеспечивает постепенное усложнение деятельности учащихся: от простого визуального распознавания (Блок I) через аналитические расчеты (Блок II) к самостоятельному пространственному конструированию (Блок III). Подробный методический разбор опорных пар задач из данной системы представлен в следующем подразделе.

Для демонстрации практического применения разработанного комплекса рассмотрим детальный методический разбор трёх пар задач, из каждого блока по одной паре. На этих примерах показано, как традиционное математическое решение объединяется со сценариями дополненной реальности (AR).

Блок I. Deskриптивно-распознающие задачи

Оформление данного подраздела ориентировано на фиксацию базового уровня пространственного мышления (узнавание, развертывание, материальное и цифровое моделирование) и его интеграцию с интерактивными средами динамической геометрии.

Методическая карточка пары задач №2

• Направление деятельности: Практико-ориентированное геометрическое моделирование.

• Формируемые УУД: Развитие пространственного воображения, трансформация плоских структур в объемные, топологический анализ графов (разверток), верификация результатов.

• Дидактический потенциал: Переход от репродуктивного копирования готового графического шаблона (базовый уровень) к продуктивному конструированию альтернативной развертки (продвинутый уровень) с последующей цифровой верификацией.

Базовая задача (на основе учебного прототипа)

Условие: Перерисуйте развёртку правильного тетраэдра (рис. 95) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку (сделав необходимые припуски для склеивания) и склейте из неё тетраэдр. После выполните построение фигуры в приложении GeoGebra 3D Calculator и сравните с полученной фигурой из бумаги.

Ход решения:

1) Лабораторно-практический этап (бумажное моделирование):

a) Ученик чертит крупный равносторонний треугольник.

b) Разделяет средними линиями на четыре равных малых треугольника.

c) Дополнительно строит полоски для склеивания на внешних ребрах граней.

d) Вырезает, сгибает по линиям и склеивает.

2) Этап цифрового моделирования (GeoGebra 3D Calculator):

a) Ученик задает две точки в плоскости основания и использует инструмент Тетраэдр (Нажимает на любые две точки на плоскости);

b) Применение функции Развертка генерирует интерактивный плоский шаблон (Приложение И)

3) Сравнительно-аналитический этап:

Учащийся сопоставляет метрические и топологические свойства моделей. В ходе верификации фиксируется тождество количества вершин (4), граней (4) и ребер (6), а также выявляются неизбежные погрешности физического моделирования по сравнению с идеальной цифровой средой.

Задача-аналог (для закрепления и развития навыка)

Условие: изобразите на плотной бумаге развёртку куба. Продумайте и начертите монтажные припуски вдоль свободных краев, аккуратно вырежьте полученную заготовку и склейте из неё объёмную модель многогранника. После выполните построение фигуры в приложении GeoGebra 3D Calculator и сравните с полученной фигурой из бумаги.

Ход решения:

1) Лабораторно-практический этап (бумажное моделирование):

Развертка куба (правильного гексаэдра) состоит из шести равных квадратов. Школьник может выбрать одну из 11 возможных плоских конфигураций куба.

а) Ученик чертит классическую крестообразную развёртку куба, состоящую из шести равных квадратов.

б) Контролирует перпендикулярность смежных сторон под углом 90° и строгое равенство всех рёбер.

с) Дополнительно строит полосы для склеивания (монтажные клапаны) вдоль свободных краёв граней.

д) Вырезает полученную заготовку, сгибает по внутренним линиям и склеивает объёмную модель.

2) Этап цифрового моделирования (GeoGebra 3D Calculator):

а) Ученик задает две точки в плоскости основания и использует инструмент Куб (Нажимает на любые две точки на плоскости);

б) Применение функции Развертка генерирует интерактивный плоский шаблон.

3) Сравнительно-аналитический этап: Учащийся сопоставляет метрические и топологические свойства моделей. В ходе верификации фиксируется тождество количества вершин (8), граней (6) и ребер (12), а также выявляются неизбежные погрешности физического моделирования (например, небольшая непараллельность противоположных граней или зазоры на стыках из-за плотности бумаги) по сравнению с идеальной цифровой средой.

Блок II. Метрические (вычислительные) задачи

Методическая карточка пары задач №3

• Направление деятельности: Комбинаторно-метрическое геометрическое моделирование.

• Формируемые УУД: Развитие пространственного мышления, применение планиметрических фактов в стереометрии, установление

причинно-следственных связей (теорема о трех перпендикулярах), алгоритмический расчет и верификация численных значений.

• Дидактический потенциал: Переход от репродуктивного вычисления по заданному алгоритму (базовый уровень) к самостоятельному конструированию и расчету аналогичной пространственной модели с измененными метрическими параметрами (продвинутый уровень) с последующей цифровой проверкой.

Базовая задача (на основе учебного прототипа)

Условие: Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2 . Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. Выполните построение чертежа двумя способами: 1) на бумаге; 2) используя приложение GeoGebra 3D Calculator.

Ход решения:

- 1) Лабораторно-практический этап (бумажное моделирование):
 - а) Ученик оформляет чертеж.
 - б) Записывает то, что дано и что нужно найти (Приложение Б):
 - с) Выполняет решение задачи:

Решение:

1. Рассмотрим боковые грани пирамиды и их высоты. Так как высота пирамиды SO спроецирована в точку пересечения диагоналей параллелограмма O , то расстояния от точки O до сторон параллелограмма являются проекциями апофем (высот боковых граней) на плоскость основания.

Опустим перпендикуляры из точки O на стороны основания: $OK \perp AD$ и $OM \perp AB$. По теореме о трех перпендикулярах, наклонные SK и SM также будут перпендикулярны сторонам AD и AB . Следовательно, SK — высота грани SAD , а SM — высота грани SAB .

2. Найдем длины проекций OK и OM . Высота всего параллелограмма $ABCD$, проведенная к стороне AD , находится по формуле площади:

$$H_{AD} = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{360}{36} = 10 \text{ см}$$

Так как точка O является центром симметрии параллелограмма и точкой пересечения его диагоналей, расстояние от нее до стороны AD равно ровно половине высоты параллелограмма:

$$OK = \frac{1}{2}H_{AD} = \frac{10}{2} = 5 \text{ см}$$

Аналогично найдем высоту параллелограмма, проведенную к стороне AB :

$$OM = \frac{1}{2}H_{AB} = \frac{18}{2} = 9 \text{ см}$$

3. Вычислим длины апофем SK и SM . Рассмотрим прямоугольные треугольники SOK и SOM (прямой угол O , так как $SO \perp (ABC)$). По теореме Пифагора находим:

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ см.}$$

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \text{ см.}$$

4. Вычислим площадь боковой поверхности пирамиды. Противоположные боковые грани пирамиды равны, так как у них есть равные основания и равные высоты ($S_{\Delta SAD} = S_{\Delta SBC}$, $S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SCD}$). Площадь боковой поверхности равна сумме площадей всех четырех граней:

$$S_{\text{бок}} = 2 \cdot S_{\Delta SAD} + 2 \cdot S_{\Delta SAB}$$

$$S_{\Delta SAD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 13 = 234 \text{ см}^2$$

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 150 \text{ см}^2$$

$$S_{\text{бок}} = 2 \cdot 234 + 2 \cdot 150 = 468 + 300 = 768 \text{ см}^2$$

Ответ: 768 см².

2) Этап цифрового моделирования (GeoGebra 3D Calculator):

а) Ученик задает точки в плоскости основания по полученным координатам параллелограмма. Потом применяет инструмент «Пирамида»

(нажимает на основание и задает высоту 12 единиц в точке пересечения диагоналей);

б) Применение функции «Измерить площадь» к боковым граням пирамиды. Данная функция автоматически посчитает метрические параметры.

3) Сравнительно-аналитический этап: Учащийся сопоставляет метрические и топологические свойства моделей. В процессе фиксируется количества вершин (5), граней (5) и ребер (8) (совпало). И подтверждает правильность аналитического расчета площади (768 см^2) с результатом автоматического измерения в цифровой среде. И обращает внимание на также неизбежные погрешности физического чертежа по сравнению с идеальной цифровой моделью.

Задача-аналог (для закрепления и развития навыка)

Условие: Основанием пирамиды служит параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 50 см, а площадь составляет 800 см^2 . Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей его основания и равна 15 см. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды. Выполните построение чертежа двумя способами: 1) на бумаге; 2) используя приложение GeoGebra 3D Calculator.

Деятельность учащегося при выполнении задачи-аналога носит закрепляющий характер и полностью дублирует технологический цикл базового прототипа. На первом этапе ученик выполняет графическое моделирование и математические расчеты в традиционной (бумажной) форме. На втором этапе задействуется инструментарий приложения GeoGebra 3D Calculator, который выступает в роли контролирующей среды для компьютерной проверки правильности решения и оперативного выявления возможных графических или вычислительных погрешностей.

Блок III. Конструктивно-геометрические задачи

Оформление данного подраздела направлено на развитие конструктивных умений учащихся, связанных с построением сечений

многогранников плоскостью, анализом их геометрической формы и расчетом метрических характеристик полученных плоских срезов. Использование динамической среды позволяет визуализировать внутреннюю структуру объекта и верифицировать точность графического метода.

Методическая карточка пары задач №6

- Направление деятельности: Конструктивно-графическое и интерактивно-цифровое моделирование.

- Формируемые УУД: Развитие пространственного и логического мышления; овладение методами геометрического проектирования (метод следов, метод проекций); умение исследовать изменение формы сечения; сопоставление теоретических расчетов с компьютерными моделями.

- Дидактический потенциал: Формирование навыка построения внутренних сечений многогранников на плоскости (базовый уровень) и исследование изменения площади сечения при варьировании линейных параметров фигуры (продвинутый уровень) с обязательным сопоставлением результатов на бумаге и в GeoGebra 3D.

Базовая задача (на основе учебного прототипа)

Условие: Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположающую вершину нижнего основания. Выполните построение чертежа двумя способами: 1) на бумаге; 2) используя приложение GeoGebra 3D Calculator.

Математическое решение:

Выполняем построение и записываем то, что дано и нужно найти;

Решение:

1. Рассмотрим боковые грани и форму сечения. Искомое сечение проходит через точки A_1 , B_1 и C . Соединив их отрезками, получаем треугольник A_1B_1C . Поскольку призма правильная, боковые грани AA_1C_1C и BB_1C_1C равны между собой. Отсюда следует равенство их диагоналей: $A_1C =$

B_1C . Таким образом, сечение представляет собой равнобедренный треугольник A_1B_1C с основанием $A_1B_1 = 8$ см.

2. Найдем высоту сечения. Пусть M_1 — середина ребра A_1B_1 , а M — середина ребра AB . Отрезок CM_1 является медианой и высотой равнобедренного треугольника A_1B_1C ($CM_1 \perp A_1B_1$). Проекцией отрезка CM_1 на плоскость нижнего основания является медиана (и высота) правильного треугольника ABC — отрезок CM . По формуле высоты правильного треугольника находим:

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ см}$$

3. Вычислим длину высоты сечения CM_1 . Рассмотрим прямоугольный треугольник M_1MC (угол $M = 90^\circ$, так как отрезок M_1M , соединяющий середины оснований призмы, параллелен боковым ребрам и перпендикулярен плоскостям оснований, $M_1M = 6$ см). По теореме Пифагора:

$$CM_1 = \sqrt{M_1M^2 + CM^2} = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 48} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \text{ см}$$

4. Вычислим площадь сечения. Площадь треугольника A_1B_1C находится как половина произведения его основания на высоту:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot CM_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21} \text{ см}^2.$$

5. Ответ: $8\sqrt{21}$ см² (приблизительно 36,66 см²).

Методическое описание процесса выполнения:

1) Лабораторно-практический этап (бумажное моделирование):

- Ученик строит на бумаге стереометрический чертеж правильной призмы в изометрической проекции.

- Выделяет заданные точки A_1 , B_1 и C и проводит плоскость сечения, обосновывая видимость линий A_1B_1 и B_1C — сплошные, A_1C_1 — штриховая).

- Выполняет выносной планиметрический чертеж треугольника M_1MC для нахождения высоты сечения.

2) Этап цифрового моделирования (GeoGebra 3D Calculator):

Ученик строит правильный треугольник в плоскости основания, затем с помощью инструмента «Призма» задает высоту призмы (6 единиц).

С помощью инструмента «Многоугольник» последовательно указывает вершины A_1 , B_1 и C , автоматически закрашивая искомое сечение внутри трехмерной фигуры. Применение встроенной функции «Площадь» выводит на экран точное численное значение площади треугольника (Приложение В).

3) Сравнительно-аналитический этап:

Учащийся верифицирует полученный результат: переводит аналитическое значение $8\sqrt{21}$ см² в десятичную дробь (приблизительно 36,66) и сопоставляет его со значением площади в GeoGebra, убеждаясь в правильности логики расчетов.

Задача-аналог (для закрепления и развития навыка)

Условие: Сторона основания правильной треугольной призмы равна 12 см, а её боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположащую вершину нижнего основания. Выполните построение чертежа двумя способами: 1) на бумаге; 2) используя приложение GeoGebra 3D Calculator.

Ход решения и методический комментарий:

Цель данной задачи является закрепление материала. Учащиеся должны самостоятельно выполнить все шаги, включая математические вычисления. Так же к ним относятся бумажное моделирование и алгоритм построения в приложении GeoGebra 3D Calculator.

При направленном изменении числовых данных будет формироваться устойчивые вычислительные навыки и развиваться способности к самостоятельному применению аналогичных логических выводов. При выполнении модели в приложении учащиеся должны подтвердить получение точного целочисленного ответа.

Ответ: $S_{\text{сеч}} = 72$ см².

Подводя итог, отметим, что спроектированная бинарная система из 8 тематических пар заданий позволяет перевести теоретические положения исследования в практическую плоскость. Разделение материала на дескриптивный, метрический и конструктивный блоки обеспечивает постепенное усложнение деятельности учащихся — от распознавания образов до моделирования сечений. При этом интеграция традиционных чертежей с приложением GeoGebra 3D Calculator качественно меняет роль AR-технологий в обучении: они перестают быть просто пассивной иллюстрацией и превращаются в самостоятельный инструмент самоконтроля, верификации расчетов и преодоления пространственных барьеров старшеклассников.

2.3. Апробация и анализ эффективности использования дополненной реальности

Апробация разработанного комплекса компьютерной поддержки темы «Многогранники» с использованием технологий дополненной реальности (AR) осуществлялась в 2025–2026 учебном году на базе Муниципального автономного общеобразовательного учреждения «Средняя школа № 137» г. Красноярск (МАОУ СШ № 137).

В педагогическом эксперименте приняли участие учащиеся десятых классов. Для обеспечения достоверности результатов были сформированы две сопоставимые группы старшеклассников:

- Контрольная группа (КГ) — 10 «Б» класс (24 учащихся), в котором обучение стереометрии строилось по традиционной методике с привлечением статических плоскостных чертежей учебного пособия, плакатов и классной доски.

- Экспериментальная группа (ЭГ) — 10 «А» класс (22 учащихся), в образовательный процесс которого был систематически внедрен разработанный в подразделе 2.2 комплекс из 8 тематических пар заданий на

базе динамической среды GeoGebra 3D Calculator в режиме дополненной реальности.

Целью данного этапа исследования являлось экспериментальное подтверждение гипотезы о том, что систематическое применение AR-технологий в качестве интерактивной материализованной опоры повышает эффективность формирования пространственного мышления старшеклассников, способствует успешному преодолению «плоскостной фиксации» восприятия и обеспечивает переход учащихся на более высокие когнитивные уровни.

Педагогический эксперимент включал три последовательных этапа: констатирующий, формирующий и контрольный.

1. Констатирующий

На констатирующем этапе оценивался исходный уровень сформированности пространственного мышления десятиклассников обеих групп. В качестве диагностического инструментария применялись стандартизированные задания, включающие тесты на мысленное вращение объектов, определение взаимного расположения элементов многогранников и простейшие задачи на проектирование. Оценка результатов проводилась в соответствии с дескрипторами теории уровней геометрического мышления Ван Хиле (Таблица 1.1).

Анализ результатов начальной диагностики показал сопоставимость стартовых условий в обеих группах. Большинство учащихся (более 65% в совокупности по параллели) находились на визуальном и аналитическом уровнях (Уровни 0 и 1), испытывая существенные затруднения при необходимости абстрагироваться от готового чертежа.

Среди устойчивых ментальных ошибок и затруднений, зафиксированных на данном этапе (согласно классификации на Рисунке 1.3), наиболее распространенными стали:

- ошибки при определении взаимного расположения скрещивающихся прямых на двухмерной проекции;

- некорректное соединение точек многогранника, принадлежащих разным плоскостям, при построении сечений;
- трудности с распознаванием истинной формы пространственных углов и плоских сечений по изометрическому чертежу.

2. Формирующий этап эксперимента

В ходе формирующего этапа в экспериментальном 10 «А» классе изучение темы «Многогранники» (включая разделы «Призма», «Пирамида», «Построение сечений методом следов и методом центрального проектирования») сопровождалось выполнением спроектированного комплекса заданий. Методика реализации опиралась на психологическую концепцию поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина и строилась по следующему алгоритму:

1. Организация материализованного действия в AR: учащиеся с помощью мобильных устройств разворачивали трехмерные модели изучаемых многогранников непосредственно на рабочих поверхностях. Физическое перемещение вокруг AR-объекта, масштабирование и использование динамических сечений позволяли трансформировать визуальный образ во внутренний план мышления, преодолевая «плоскостной барьер».

2. Речевой этап (девизуализация): на основе наблюдаемой AR-модели учащиеся устно и письменно формулировали геометрические зависимости, обосновывали алгоритмы построения следов плоскостей, сопоставляя трехмерный объект с его проекцией в рабочей тетради.

3. Переход к чистому умственному действию: выполнение заключительных конструктивных и исследовательских задач осуществлялось учащимися исключительно на бумаге, а среда дополненной реальности привлекалась на финальной стадии в качестве инструмента самоконтроля и верификации гипотез.

В контрольном 10 «Б» классе занятия проводились в традиционной форме; демонстрационный материал ограничивался стандартными

пластиковыми моделями геометрических тел и фронтальными чертежами на доске.

3. Контрольный этап эксперимента и оценка эффективности

По завершении изучения тематического модуля была проведена итоговая контрольная работа, направленная на фиксацию изменений в уровнях пространственного мышления старшеклассников. Оценивание письменных работ и графических построений выполнялось по критериально-дескрипторной матрице, зафиксированной в Приложении Д.

Количественные показатели контрольного этапа выявили существенную положительную динамику в экспериментальной группе. Сводные данные распределения учащихся по когнитивным уровням Ван Хиле до и после проведения эксперимента представлены в таблице в Приложении Е.

Данные наглядно иллюстрируют качественные изменения в структуре когнитивной деятельности учащихся экспериментальной группы после применения разработанных заданий:

- Доля старшеклассников, находившихся на самом базовом, чисто созерцательном уровне (Уровень 0) в ЭГ, сократилась с 27,3% до 4,5%.
- Показатель дедуктивного уровня (Уровень 2), отвечающий за умение логически рассуждать в пространстве, вырос более чем в два раза — с 22,7% до 54,6%. Учащиеся этой группы научились свободно переходить от оперирования наглядными AR-образами к абстрактным логическим рассуждениям на бумаге.

В контрольной группе (10 «Б») не использовались задания с применением дополненной реальности. В результате показатели изменились незначительно (в пределах 4-5%). Это подтверждает то, что традиционные методы несут малую эффективность в преодолении «плоскостного барьера».

В Приложении Ж показано качественное сопоставление практических умений экспериментальной группы до и после использования разработанного комплекса.

Анализ итогового контроля в экспериментальной группе показал:

1. Существенное снижение ошибок: Количество графических ошибок и логических, а особенно тех, которые связаны с «плоскостным барьером» в экспериментальной группе снизилось на 44% по сравнению с первоначальным уровнем.

2. Рост автономности мышления: при решении задач на построение сечений многогранников методом следов учащиеся 10 «А» класса продемонстрировали устойчивый навык интериоризации — мысленного предвосхищения формы сечения до его фактического построения на бумаге.

3. Временная оптимизация: среднее время, затрачиваемое учащимися экспериментальной группы на аналитический поиск решения комплексной стереометрической задачи, сократилось на 18%, что объясняется наличием у них сформированного динамического пространственного образа фигуры.

Полученные результаты согласуются с выводами, сформулированными в более ранней работе по данной проблематике [8], и подтверждают целесообразность системного внедрения технологий дополненной реальности в процесс обучения стереометрии.

Результаты опытно-экспериментальной работы, проведенной на базе МАОУ СШ № 137 г. Красноярска, математически и методически подтверждают высокую эффективность разработанного комплекса компьютерной поддержки. Использование технологий дополненной реальности выступает действенным когнитивным средством, обеспечивающим интенсификацию процесса развития пространственного мышления старшеклассников при изучении стереометрии.

Вывод по главе 2

В результате проектирования, методического обоснования и опытно-экспериментальной проверки системы компьютерной поддержки темы «Многогранники» с использованием технологий дополненной реальности (AR) сформулированы следующие основные выводы:

1. Разработана и теоретически обоснована бинарная система учебных заданий (включающая 8 тематических пар, всего 16 задач), базирующаяся на принципах преемственности, бинарности, профессионально-практической направленности и дифференциации обучения. Распределение дидактического материала по трем функциональным блокам (дескриптивно-распознающему, метрическому и конструктивно-геометрическому) обеспечивает плавное усложнение стереометрической деятельности старшеклассников — от первичного распознавания образов до самостоятельного пространственного конструирования.

2. Определен и внедрен трехшаговый алгоритм реализации задачного комплекса, опирающийся на психологическую концепцию поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина. В рамках данной модели интерактивная среда GeoGebra 3D Calculator переведена из статуса пассивной наглядности в статус автономного когнитивного инструмента. Технологии AR обеспечивают материализованную опору на этапе девизуализации и выступают средством самостоятельной верификации и геометрического самоконтроля на этапе чистого умственного действия.

3. Опытно-экспериментальная работа, проведенная в 2025–2026 учебном году на базе МАОУ СШ № 137 г. Красноярска, математически и методически подтвердила гипотезу исследования. Положительная динамика когнитивного развития учащихся экспериментальной группы (10 «А»), оцениваемая по дескрипторам теории Ван Хиле, носит ярко выраженный характер: доля школьников на базовом (визуальном) уровне сократилась с 27,3% до 4,5%, в то время как показатель дедуктивного уровня (Уровень 2) вырос более чем в два раза — с 22,7% до 54,6%. В контрольной группе аналогичные изменения незначительны и находятся в пределах 4–5%.

4. Качественный анализ результатов итогового контроля зафиксировал эффективное преодоление учащимися экспериментальной группы «плоскостной фиксации» восприятия. Частота графических и логических ошибок, связанных с искажением проекций и нарушением компланарности

при построении сечений методом следов, в ЭГ снизилась на 44%. Благодаря сформированному устойчивому динамическому пространственному образу многогранников средние временные затраты учащихся ЭГ на аналитический поиск решения комплексных стереометрических задач сократились на 18–20%.

5. Практическая значимость результатов второй главы заключается в создании законченного, готового к внедрению в практику общеобразовательной школы программно-методического комплекса (включающего реестр бинарных задач, детальные методические карточки урочных сценариев и критериально-диагностический аппарат), направленного на интенсификацию процесса развития пространственного мышления старшеклассников при изучении геометрии.

Таким образом, проведенное исследование подтвердило эффективность использования дополненной реальности как средства развития пространственного мышления при изучении стереометрии, при условии соблюдения методических принципов и учета выявленных особенностей применения AR-технологий в образовательном процессе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее выпускное квалификационное исследование посвящено актуальной методической проблеме — поиску эффективных путей преодоления «стереометрического кризиса» у учащихся старших классов при изучении темы «Многогранники». В качестве ключевого инструмента модернизации учебного процесса была спроектирована и внедрена компьютерная поддержка на основе технологий дополненной реальности (AR). В ходе выполнения работы все поставленные исследовательские задачи были успешно решены, что позволило получить ряд важных теоретических и практических результатов.

В рамках исследования детально изучены психолого-педагогические основы формирования пространственного мышления старшеклассников в условиях цифровизации школы. Опираясь на классические труды Б. Г. Ананьева и И. С. Якиманской, в работе разграничено понимание пространственного воображения как накопления статических образов и пространственного мышления как активного динамического оперирования этими образами. Установлено, что главным когнитивным барьером при освоении стереометрии является «плоскостная фиксация», при которой учащиеся воспринимают трехмерную фигуру на чертеже как плоскую композицию из отрезков и многоугольников. В рамках теории уровней геометрического мышления П. Ван Хиле и концепции поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина обосновано, что технологии дополненной реальности способны стать гибким когнитивным «мостом». Они позволяют материализовать абстрактные геометрические объекты, переводя внешние манипуляции с AR-моделью во внутренний план устойчивых геометрических понятий.

Проведен подробный нормативно-методический анализ требований ФГОС СОО и Федеральных рабочих программ по математике. Проведя анализ был выявлен значительный разрыв между государственными

образовательными стандартами и фактическим процессом обучения. При решении заданий ЕГЭ профильной математике, а конкретно задача № 15 по стереометрии, предполагается у выпускников развитое дедуктивное мышление и умение строить сечения. Но традиционные учебные материалы в основном используют изображения на плоскости. Это не способствует развитию пространственного мышления у школьников, оставляя их без дополнительной необходимой визуальной поддержки. Выделены ключевые функции AR-поддержки: перцептивная (наглядная), инструментальная и эвристическая. При этом учтены и технологические риски, такие как когнитивная перегрузка учащихся или возникновение эффекта «цифрового костыля». Компьютерная поддержка эффективна лишь тогда, когда виртуальное моделирование органично сочетается со строгими аналитическими методами, доказательствами и традиционной графической работой в тетради.

На основе сделанных теоретических выводов разработан и методически описан авторский комплекс учебных заданий с AR-поддержкой в бесплатной динамической среде GeoGebra 3D Calculator. Система упражнений включает в себя 8 тематических пар (всего 16 задач), спроектированных по бинарному принципу («задача-прототип из УМК» и «авторская задача-аналог»). Дидактический материал упорядочен в рамках трех функциональных блоков:

- Блок I: дескриптивно-распознающие задачи — направлены на закрепление понятийного аппарата и преодоление иллюзий ракурса;
- Блок II: метрические (вычислительные) задачи — ориентированы на расчет величин в усложненных и практико-ориентированных (квазипрофессиональных) ситуациях;
- Блок III: конструктивно-геометрические задачи — нацелены на построение сложных сечений многогранников плоскостью, в том числе методом следов.

Особый акцент в методике сделан на деятельностном переходе: интерактивная AR-модель привлекается на этапе выдвижения гипотез и на

финальной стадии в качестве инструмента самоконтроля и верификации, тогда как основное математическое решение и доказательство фиксируются учащимися на бумаге.

Эффективность созданного программно-методического комплекса проверена в ходе опытно-экспериментальной работы в 2025–2026 учебном году на базе МАОУ СШ № 137 г. Красноярск. Статистический и качественный анализ результатов итогового контрольного среза показал яркую положительную динамику в экспериментальной группе (10 «А»):

- Доля учащихся, находившихся на базовом, созерцательном уровне пространственного мышления (Уровень 0 по Ван Хиле), в экспериментальном классе сократилась с 27,3% до 4,5%.

- Процент старшеклассников, продемонстрировавших высокий дедуктивный уровень мышления (Уровень 2), вырос более чем в два раза — с 22,7% до 54,6%.

- Количество устойчивых графических и логических ошибок, вызванных эффектом «плоскостной фиксации» (нарушение компланарности, пересечение некомпланарных прямых), сократилось на 44%.

- Среднее время, затрачиваемое учащимися на аналитический поиск решения комплексной стереометрической задачи, уменьшилось на 18–20%, что свидетельствует о формировании у них подвижного и точного пространственного образа фигуры.

В контрольной группе (10 «Б»), где обучение велось по традиционной методике, изменения показателей носили незначительный характер (в пределах 4–5%). Старшеклассники экспериментальной группы научились осознанно строить сечения многогранников методом следов и приобрели развитые навыки геометрического самоконтроля, продемонстрировав способность свободно реконструировать трехмерное пространство за плоским чертежом.

Можно сделать вывод, что результаты проведенного исследования полностью подтвердили справедливость выдвинутой гипотезы. Процесс

изучения темы «Многогранники» в общеобразовательной школе становится качественно более эффективным, а уровень пространственного мышления старшеклассников достоверно повышается, если в обучении системно, планомерно и дидактически обоснованно сочетаются традиционная методика преподавания геометрии и интерактивное AR-моделирование.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ананьев Б. Г. Новое в учении о восприятии пространства // Вопросы психологии. 1960. № 1. С. 18–25.
2. Ананьев Б. Г. Психология чувственного познания. Москва : Изд-во АПН РСФСР, 1960. 486 с.
3. Асамбаев А. В., Асамбаев А. Ж. Элементы технологии дополненной реальности на уроках геометрии // StudNet. 2021. № 6. С. 842–851. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/elementy-tehnologii-dopolnennoy-realnosti-na-urokah-geometrii> (дата обращения: 18.05.2026).
4. Барцева К. В., Лиханов М. В., Солдатова Е. Л. Проблемы и перспективы современных подходов к изучению стратегий пространственного мышления // Вестник Кемеровского государственного университета. Серия: Гуманитарные и общественные науки. 2023. Т. 7, № 4. С. 383–398. DOI: 10.21603/2542-1840-2023-7-4-383-398. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-i-perspektivy-sovremennyh-podhodov-k-izucheniyu-strategiy-prostranstvennogo-myshleniya> (дата обращения: 18.05.2026).
5. Биткин В. В. Дополненная реальность, её виды и инструменты создания // Скиф. 2021. № 5 (57). С. 106-109. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/dopolnennaya-realnost-eyo-vidy-i-instrumenty-sozdaniya> (дата обращения: 18.05.2026).
6. Геометрия. 10–11 классы : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. 20-е изд. Москва : Просвещение, 2019. 255 с. URL: https://media.siteedu.ru/sub/3183/documents/ГЕОМЕТРИЯ_10-11_КЛАССЫ_Л._С._АТАНАСЯН_2019_ov2VvVM.pdf (дата обращения: 18.05.2026).
7. Григорьева И. В., Поветкин А. С. Интеграция дополненной реальности (AR) и виртуальной реальности (VR) в образование: тренды,

вызовы и перспективы // Вестник Университета Российского инновационного образования. 2025. № 2. С. 38-46. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/integratsiya-dopolnennoy-realnosti-ar-i-virtualnoy-realnosti-vr-v-obrazovanie-trendy-vyzovy-i-perspektivy> (дата обращения: 18.05.2026).

8. Иглова, Я. И. Роль дополненной реальности в формировании пространственного мышления учащихся на уроках геометрии / Я. И. Иглова // Вопросы математики, методики её преподавания и цифровизации образования в учебно-исследовательских работах : материалы Всероссийской научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов вузов (Пермь, 13 мая 2025 года) / Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет ; отв. ред. Е. Л. Черемных. — Пермь : Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2025. — С. 46. — ISBN 978-5-907676-75-6. — (Выпуск 18). — УДК 51.

9. Кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ / ФГБНУ «ФИПИ». Москва, 2024. 18 с.

10. Кузьмин С. Г., Костюченко Р. Ю. Этапы решения стереометрических задач как основа методики обучения школьников их решению // Мир науки. Педагогика и психология. 2022. Т. 10, № 3. — 16 с. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/64PDMN322.pdf> (дата обращения: 18.05.2026).

11. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов РФ по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2024 года. Математика / И. В. Яценко, А. В. Семенов, И. Р. Высоцкий ; под ред. И. В. Яценко. Москва : ФИПИ, 2024. URL: https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2024/ma_mr_2024.pdf (дата обращения: 18.05.2026).

12. Напсо М. Д. VR и AR-технологии в образовательном процессе // Этносоциум и межнациональная культура. 2023. № 182. С. 120-125. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vr-i-ar-tehnologii-v-obrazovatelnom-protse> (дата обращения: 18.05.2026).

13. Папян С. А., Никитина А. А. Развитие пространственного мышления учащихся при изучении многогранников на уроках геометрии // Математическое и информационное моделирование : материалы Всероссийской конференции молодых ученых, Тюмень, 17–21 мая 2021 года. Тюмень : Тюменский государственный университет, 2021. С. 215–219. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47170651> (дата обращения: 18.05.2026).

14. Приказ Министерства просвещения РФ от 12 августа 2022 г. № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования...» // Информационно-правовой портал ГАРАНТ.РУ. URL: <https://normativ.kontur.ru/document?moduleId=1&documentId=501748> (дата обращения: 18.05.2026).

15. Пэн Чен. Использование иммерсивных технологий в современном образовании // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 3: Педагогика и психология. 2024. С. 42-47. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-immersivnyh-tehnologiy-v-sovremennom-obrazovanii> (дата обращения: 22.06.2026).

16. Рыбаков В. В. Применение программ динамической геометрии в процессе обучения учащихся 10–11 классов математике // Вестник науки. 2024. № 6 (75). С. 971-978. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-programm-dinamicheskoy-geometrii-v-protse-objucheniya-uchaschihsya-10-11-klassov-matematike> (дата обращения: 23.06.2026).

17. Сазыкина В. Ю., Скорнякова А. Ю. О применении дополненной реальности в обучении школьников стереометрии // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия: Информационные компьютерные технологии в образовании. 2023. № 19. С.

23-27. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-primenении-dopolnennoy-realnosti-v-obuchении-shkolnikov-stereometrii> (дата обращения: 18.05.2026).

18. Сафонова Е. А. Методические ошибки учащихся старших классов при решении позиционных задач в стереометрии // Педагогика. Вопросы теории и практики. 2024. № 1. С. 89–96.

19. Симонова А. А. Пути формирования пространственного мышления учащихся при изучении геометрии // Современные проблемы математики, физики и физико-математического образования : материалы XI Международной научно-практической конференции, Орехово-Зуево, 26 ноября 2021 года. Орехово-Зуево : Государственный гуманитарно-технологический университет, 2021. С. 156–160. URL: <https://elibrary.ru/khgcbq> (дата обращения: 18.05.2026).

20. Смирнова К. В., Воистинова Г. Х. О развитии пространственных представлений при изучении геометрического материала // Modern Science. 2022. № 1-2. С. 278–282. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47874388> (дата обращения: 18.05.2026).

21. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2025 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ (базовый уровень) / ФГБНУ «ФИПИ». Москва, 2024. 10 с.

22. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2025 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень) / ФГБНУ «ФИПИ». Москва, 2024. 16 с.

23. Суходолова Е. В. Цифровые образовательные технологии и ресурсы в обучении геометрии на примере применения динамической среды GeoGebra // Самарский научный вестник. 2022. Т. 11, № 3. С. 323–326. URL: https://www.researchgate.net/publication/365781847_Digital_educational_technologies_and_resources_in_teaching_geometry_using_the_example_of_dynamic_environment_GeoGebra (дата обращения: 22.06.2026).

24. Торогельдиева К. М., Жуманова Г. Т. Интегрированный подход к развитию и формированию пространственного мышления на уроках геометрии // ВОГУПП. 2024. № 1 (4). С. 61-65. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/integrirovannyy-podhod-k-razvitiyu-i-formirovaniyu-prostranstvennogo-myshleniya-na-urokah-geometrii> (дата обращения: 23.06.2026).

25. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (базовый и углубленный уровни). Москва : Минпросвещения России, 2024.

26. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (базовый уровень) // Институт стратегии развития образования. URL: <https://iroipk-sakha.ru/wp-content/uploads/2025/10/ФРП-МАТЕМАТИКА-базовый-уровень.pdf> (дата обращения: 18.05.2026).

27. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (углубленный уровень) // Единое содержание общего образования. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/07/2025_soo_frp_matematika_10_11_ugl.pdf (дата обращения: 18.05.2026).

28. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования : утвержден приказом Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413 : (в редакции 2022–2025 гг.) // Официальный интернет-портал правовой информации. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/document/0001202502120007> (дата обращения: 18.05.2026).

29. Формирование мышления в процессе обучения естественнонаучным, технологическим и математическим дисциплинам : материалы Всероссийской научно-практической конференции / под ред. Т. Н. Шамало ; Урал. гос. пед. ун-т. Екатеринбург, 2021. — 284 с.

30. Шавлов А. В., Нефедов В. А., Попов Д. И. Развитие пространственного мышления в процессе обучения // Вестник науки. 2024. № 12 (81). С. 218-222. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie->

[prostranstvennogo-myshleniya-v-protssesse-obucheniya](#) (дата обращения: 18.05.2026).

31. Шафеев С. В. Особенности использования дополненной реальности в обучении старших школьников. Комсомольск-на-Амуре : АмГПГУ, 2025. № 2. С. 72-79. URL: https://old.amgpgu.ru/upload/iblock/f93/shafeev_s_v_osobennosti_ispolzovaniya_dopolnennoy_realnosti_v_obuchenii_starshikh_shkolnikov.pdf (дата обращения: 18.05.2026).

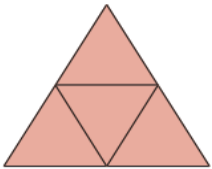
32. Aboud Y. Z. Frontiers in Education evaluating gifted students' perception // Frontiers in Education. 2023. — 11 с. URL: https://www.researchgate.net/publication/374170221_Frontiers_in_Education_evaluating_gifted_students'_perception (дата обращения: 18.05.2026).

33. Delos Santos M. S., Sobretudo M. L., Hortillosa A. The Van Hiele Model in Teaching Geometry // World Journal of Vocational Education and Training. 2022. T. 4, № 1. С. 10–22. DOI: 10.18488/119.v4i1.3087. URL: https://www.researchgate.net/publication/362608254_The_Van_Hiele_Model_in_Teaching_Geometry (дата обращения: 23.06.2026).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Таблица — Система стереометрических задач с AR-поддержкой

№ пары	Содержательный блок	Задача-прототип из УМК Л. С. Атанасяна	Авторская модифицированная задача-аналог
Пара 1	Блок I.	<p>Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани — прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники.</p> <p>(Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа. Пользуясь встроенными функциями, найдите ответ на задачу).</p>	<p>Опираясь на базовые свойства пространственных фигур, обоснуйте следующие геометрические факты:</p> <p>а) если боковые рёбра некоторой призмы перпендикулярны плоскостям её оснований, то абсолютно любая её боковая грань гарантированно является прямоугольником;</p> <p>б) если в основании такой призмы дополнительно лежит равносторонний многоугольник, то все её боковые грани окажутся не просто прямоугольниками, а фигурами, равными друг другу по площади.</p> <p>(Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа. Пользуясь встроенными функциями, найдите ответ на задачу).</p>
Пара 2	<p>Дескриптивно-распознающие задачи</p>	<p>Перерисуйте развёртку правильного тетраэдра (рис. 95) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку (сделав необходимые припуски для склеивания) и склейте из неё тетраэдр. После выполните построение фигуры в приложении GeoGebra 3D Calculator и сравните с полученной фигур из бумаги.</p>  <p>Развёртка правильного тетраэдра</p>	<p>Изобразите на плотной бумаге развёртку куба. Продумайте и начертите монтажные припуски вдоль свободных краев, аккуратно вырежьте полученную заготовку и склейте из неё объёмную модель многогранника. После выполните построение фигуры в приложении GeoGebra 3D Calculator и сравните с полученной фигур из бумаги.</p>

Пара 3		<p>Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. Выполните построение чертежа двумя способами: 1) на бумаге; 2) используя приложение GeoGebra 3D Calculator.</p>	<p>Основанием пирамиды служит параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 50 см, а площадь составляет 800 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей его основания и равна 15 см. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды. Выполните построение чертежа двумя способами: 1) на бумаге; 2) используя приложение GeoGebra 3D Calculator.</p>
Пара 4	Блок II. Метрические (вычислительные) задачи	<p>В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна m, а плоский угол при вершине равен a. Найдите угол между боковой гранью и плоскостью основания. (Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа и, где возможно, используя встроенные функции, найдите ответ на задачу).</p>	<p>В правильной четырёхугольной пирамиде длина стороны квадратного основания равна b, а плоский угол при вершине (угол между смежными боковыми рёбрами одной грани) равен β. Найдите величину двугранного угла при основании пирамиды. (Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа и, где возможно, используя встроенные функции, найдите ответ на задачу).</p>
Пара 5		<p>Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды образует угол в 60° с плоскостью основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковое ребро равно 12 см (Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа и найдите ответ на задачу).</p>	<p>Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды образует угол в 45° с плоскостью основания. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды, если длина её бокового ребра равна 10 см (Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа и найдите ответ на задачу).</p>
Пара 6	Блок III. Конструктивно-геометрические задачи	<p>Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположающую вершину нижнего основания. Выполните построение чертежа двумя способами: 1) на бумаге; 2) используя приложение GeoGebra 3D Calculator.</p>	<p>Сторона основания правильной треугольной призмы равна 12 см, а её боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположающую вершину нижнего основания. Выполните построение чертежа двумя способами: 1) на бумаге; 2) используя приложение GeoGebra 3D Calculator.</p>

Пара 7		<p>№ 263. В правильной пирамиде $MABCD$ точки K, L и N лежат соответственно на рёбрах BC, MC и AD, причём $KN \parallel BA$, $KL \parallel BM$.</p> <p>а) Постройте сечение пирамиды плоскостью KLN и определите вид сечения (Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа и, где возможно, используя встроенные функции, найдите ответ на задачу).</p>	<p>При реставрации купольного павильона, имеющего форму правильной четырехугольной пирамиды $FKLMN$ (где F — вершина, а $KLMN$ — квадратное основание), необходимо смонтировать наклонную раму под панорамное остекление. На несущих элементах конструкции зафиксированы три опорные точки: точка A лежит на боковом ребре FL, точка B — на боковом ребре FM, а точка C выбрана на базовом перекрытии фундамента, строго на линии ребра основания KN.</p> <p>Попытка начертить линии пропила в границах видимых стен купола не увенчалась успехом, так как стропила наклонены под таким углом, что конструктивные прямые пересекаются далеко за пределами фундамента здания.</p> <p>Постройте полный замкнутый контур технологического среза плоскостью (ABC) на всех четырех скатах крыши павильона, используя метод выноса вспомогательных следов за пределы физической конструкции. Обоснуйте вид получившегося многоугольника сечения (Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа и, где возможно, используя встроенные функции, найдите ответ на задачу).</p>
Пара 8		<p>№ 234. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если катеты равны 20 см и 21 см, а боковое ребро равно 42 см (Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа и, где возможно, используя встроенные функции, найдите ответ на задачу).</p>	<p>В цехе по производству элементов интерьера обрабатывается деревянная балка, имеющая форму прямой призмы $XYZX_1Y_1Z_1$. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник XYZ с прямым углом при вершине Y. Катеты основания равны: меньший $XY = 10$ см, больший $YZ = 24$ см. Длина самой балки (боковое ребро призмы) составляет 36 см. Для выполнения углового замкового соединения конструктор спроектировал технологический пропил. Он начинается точно в середине M самой широкой продольной грани (содержащей гипотенузу основания XZ) и идет строго перпендикулярно к этой грани сквозь всю толщу дерева, пересекая боковую грань с большим катетом в точках K и K_1. Найдите площадь (в см^2) получившегося после распила торца (площадь сечения MKK_1M), чтобы определить точный расход защитной полимерной пропитки для дерева (Используя приложение GeoGebra 3D Calculator, выполните построение чертежа и, где возможно, используя встроенные функции, найдите ответ на задачу).</p>

Приложение Б

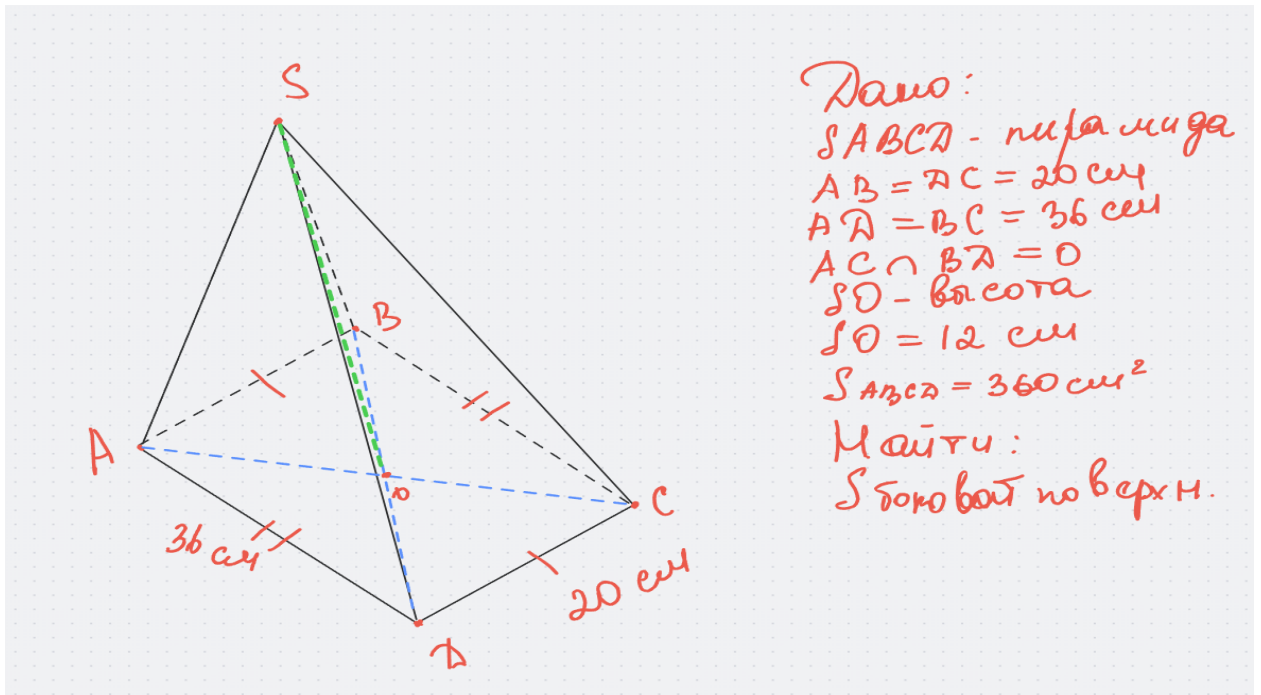
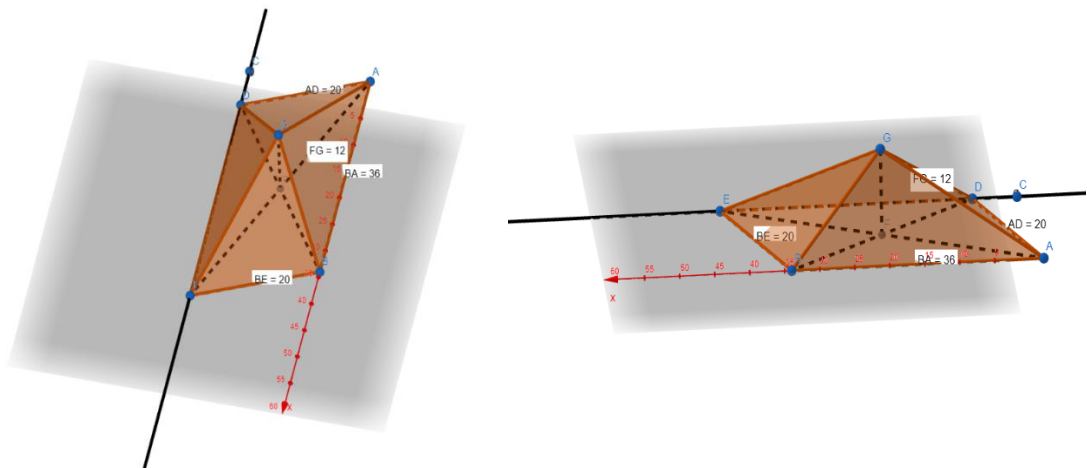


Рисунок – Блок I



Приложение В

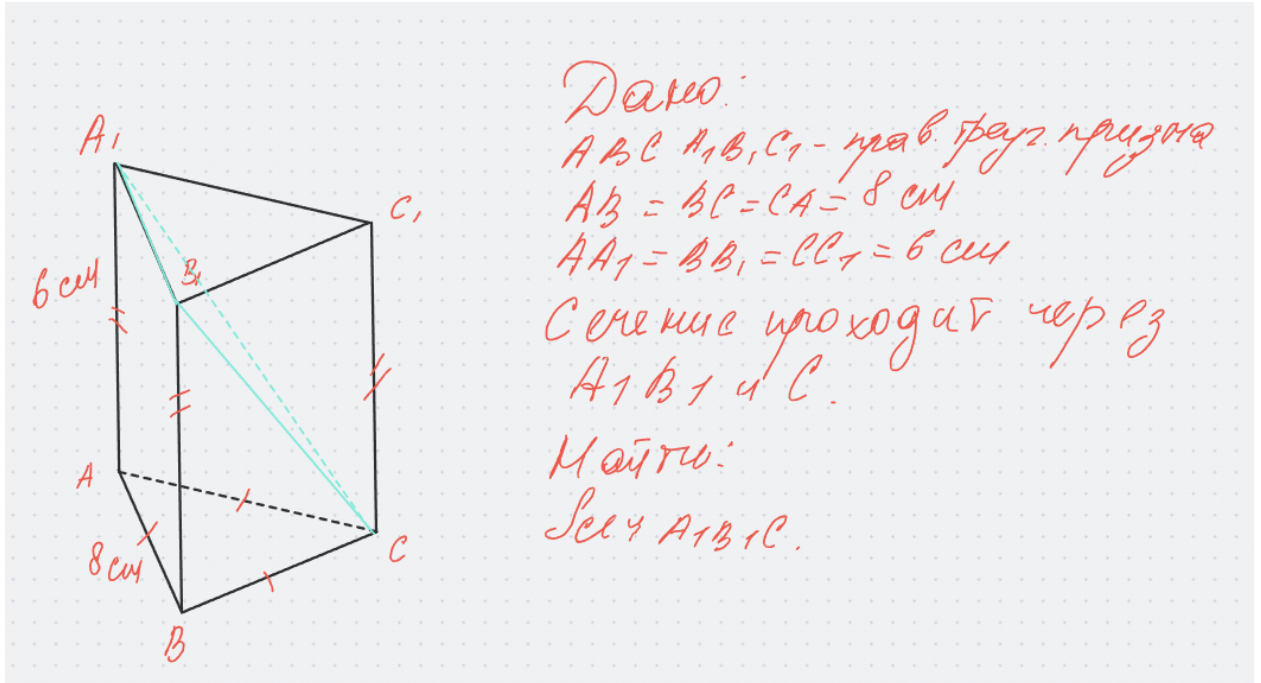
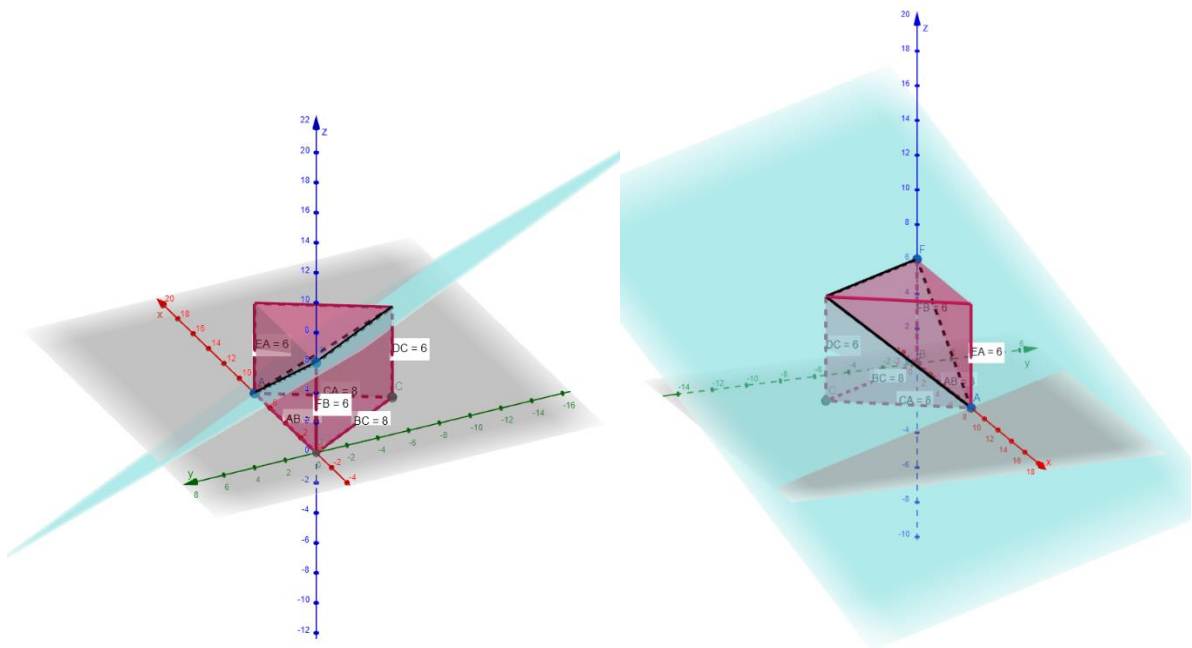


Рисунок – Блок II



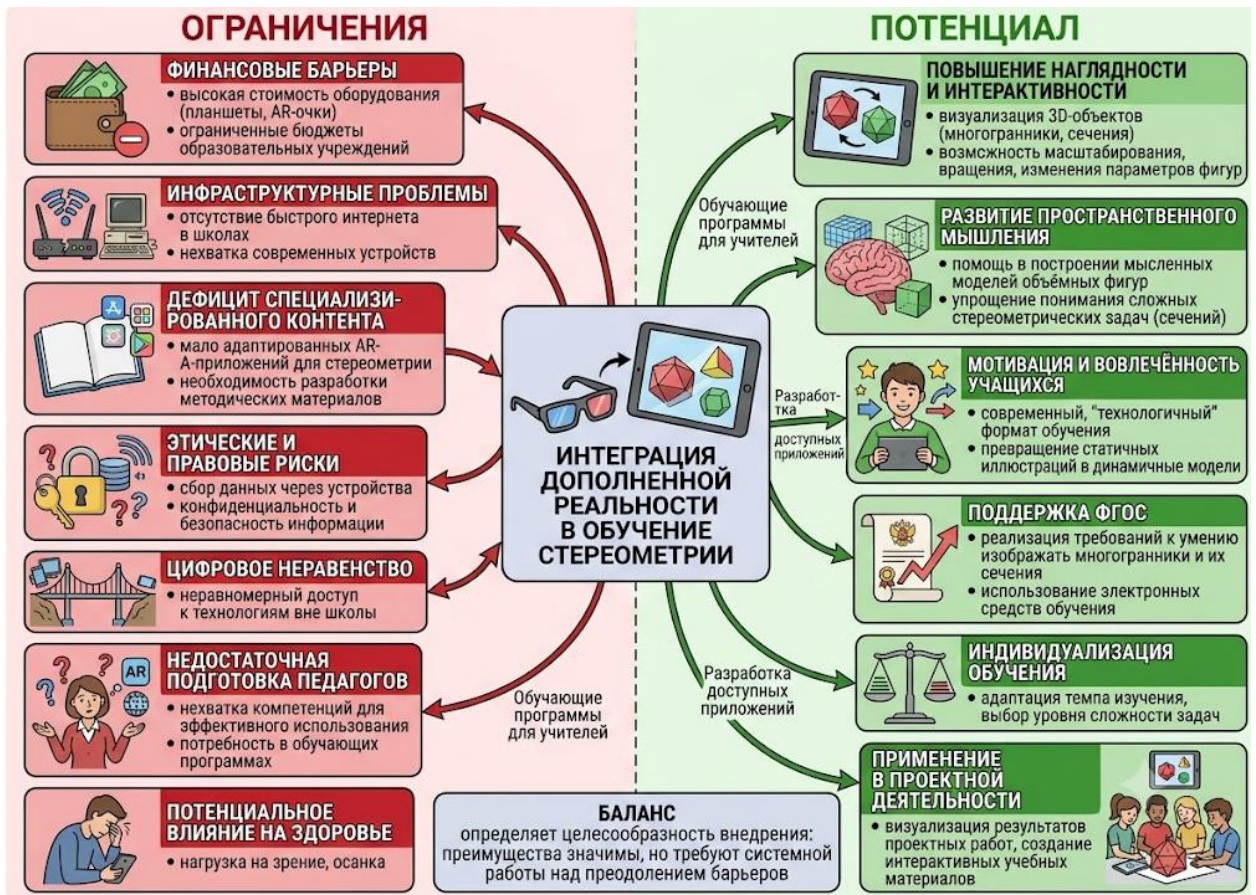


Рисунок 1.5. Структурно-логическая карта потенциала и ограничений интеграции дополненной реальности в процесс обучения стереометрии

Приложение Д

1. Общие положения оценочной системы

Оценка результатов деятельности учащихся носит комплексный характер и базируется на сочетании критериального и дескрипторного подходов. Оцениванию подлежат два взаимосвязанных компонента деятельности:

1. Технологический компонент — правильность, точность и самостоятельность конструирования трехмерных объектов и выполнения манипуляций в мобильном приложении GeoGebra 3D Calculator в режиме дополненной реальности (AR).

2. Математический (аналитический) компонент — строгость дедуктивных рассуждений, соответствие бумажного чертежа правилам проектирования, точность выполнения математических расчетов и обоснованность выводов.

Для каждого из четырех этапов разработанного комплекса заданий устанавливается специфический весовой балл, отражающий уровень когнитивной сложности выполняемых операций.

2. Дескрипторная матрица по базовым критериям

Оценка каждого индивидуального задания осуществляется по четырем сквозным критериям, представленным в таблице Б.1. Максимальная оценка по каждому критерию составляет 3 балла (итого — до 12 баллов за одно развернутое задание).

Таблица Б.1 – Дескрипторная шкала оценивания результатов учебной деятельности

Критерий	3 балла (Высокий уровень)	2 балла (Средний уровень)	1 балл (Низкий уровень)	0 баллов
Техническая точность AR-	Координаты введены безошибочно; 3D-модель	Модель построена верно, но допущены	Построение модели вызывает серьезные	Учащийся не справился с техническим этапом

Критерий	3 балла (Высокий уровень)	2 балла (Средний уровень)	1 балл (Низкий уровень)	0 баллов
моделирования (ТТ)	построена корректно. Свободно и целесообразно используются инструменты среды (плоскости, сечения, измерения). Наблюдается полная автономность в работе с интерфейсом.	незначительные технические погрешности при позиционировании плоскости в AR, которые учащийся исправил самостоятельно после подсказки или самопроверки.	затруднения. Требуется постоянная пошаговая помощь учителя или использование текстовой инструкции. Допущены ошибки в координатах или выборе инструментов.	моделирования, виртуальный объект в среде дополненной реальности не создан.
Графическая грамотность на бумаге (ГГ)	Бумажный чертеж полностью соответствует AR-модели. Изометрия выполнена безукоризненно, масштаб соблюден. Четко дифференцированы видимые (сплошные) и невидимые (штриховые) линии.	Чертеж в целом передает форму геометрического тела, но допущены мелкие неточности: незначительное нарушение пропорций, единичные ошибки в отображении невидимых линий или неаккуратность графического исполнения.	Чертеж выполнен с грубыми нарушениями и правил проекционного черчения; отсутствует дифференциация линий по видимости; искажены геометрические пропорции многогранника или сечения.	Чертеж в рабочей тетради отсутствует либо не поддается геометрической идентификации.
Логика и обоснованность доказательств (ЛД)	Аналитическое доказательство (теоремы, аксиомы стереометрии) изложено строго, последовательно и логически завершено.	Ход дедуктивного рассуждения в целом верен, однако в тексте доказательства присутствуют	Попытка доказательства носит фрагментарный характер. Учащийся подменяет дедуктивное обоснование	Доказательство в письменной работе отсутствует; аналитические выводы не сформулированы.

Критерий	3 балла (Высокий уровень)	2 балла (Средний уровень)	1 балл (Низкий уровень)	0 баллов
	Выводы полностью обоснованы, математический символизм использован корректно.	логические лакуны, пропущены промежуточные звенья обоснования, или допущены неточности в формулировках теорем.	ссылкой на визуальный образ из AR-среды («это видно на экране»). Логика рассуждений нарушена.	
Точность аналитических расчетов (ТР)	Все математические вычисления (длины ребер, периметры, площади сечений, углы) выполнены верно. Итоговые численные результаты полностью совпали с контрольными данными измерений в AR-среде.	Алгоритм вычислений выбран правильно, но допущена одна вычислительная (арифметическая) ошибка, приведшая к неверному промежуточному или финишному результату. Способ исправления понятен.	Математические расчеты содержат множественные грубые ошибки. Учащийся не владеет формулами расстояния между точками в 3D пространстве или вычисления площадей базовых фигур.	Расчеты не выполнялись; сопоставление аналитических данных с показателями цифровой среды не проведено.

3. Пооперационный контроль по типам учебных заданий

Для удобства текущей проверки учителем разработаны карты операционального контроля для каждого из специфических типов заданий (Таблица Б.2).

Таблица Б.2 – Спецификация оценивания по типам заданий комплекса

Тип задания / Этап комплекса	Контролируемые шаги (операции)	Максимальный первичный балл
Задания на визуализацию (Этап I)	1. Правильность позиционирования AR-сцены на плоскости стола (1 б.)	4 балла

Тип задания / Этап комплекса	Контролируемые шаги (операции)	Максимальный первичный балл
	2. Точность ввода матрицы координат точек (1 б.) 3. Качество выполнения изометрического чертежа в тетради (1 б.) 4. Векторное обоснование соответствия 2D и 3D представлений (1 б.)	
Конструктивные задания (Этап II)	1. Корректность выбора трех опорных точек сечения в AR (1 б.) 2. Грамотное выделение контура пересечения поверхностей (1 б.) 3. Построение сечения на бумаге классическим методом следов (2 б.) 4. Стереометрическое обоснование (доказательство) положения точек (2 б.)	6 баллов
Исследовательские задачи (Этап III)	1. Управление параметрическими ползунками для поиска инварианта (1 б.) 2. Фиксация точных метрических параметров в цифровой среде (1 б.) 3. Выдвижение геометрически корректной гипотезы (1 б.) 4. Строгое аналитическое доказательство равенства сторон и углов (3 б.)	6 баллов
Творческие задания (Этап IV)	1. Оригинальность и сложность созданной геометрической конфигурации (2 б.) 2. Корректность формулировки условия текстовой задачи (2 б.)	8 баллов

Тип задания / Этап комплекса	Контролируемые шаги (операции)	Максимальный первичный балл
	3. Разработка разноуровневой системы вопросов (базовый/высокий) (2 б.)	
	4. Составление эталонного аналитического решения для проверки (2 б.)	

4. Шкала интегральной оценки и перевод баллов

Для определения результирующей оценки за выполнение тематического модуля или итоговой проверочной работы первичные баллы суммируются и переводятся в традиционную пятибалльную систему в соответствии со шкалой, представленной в таблице Б.3.

Таблица Б.3 – Перевод накопленных первичных баллов в пятибалльные отметки

Процент выполнения заданий	Интегральный первичный балл	Традиционная отметка	Качественная характеристика достижений учащегося
от 85% до 100%	21 – 24 балла	5 («отлично» / высокий уровень)	Пространственное мышление развито на высоком уровне. Учащийся демонстрирует полную когнитивную автономность, легко переходит от AR-образов к абстрактным рассуждениям, безошибочно выполняет доказательства и вычисления, способен к самостоятельному математическому творчеству.
от 65% до 84%	16 – 20 баллов	4 («хорошо» / средний уровень)	Учащийся успешно справляется с визуализацией и конструированием объектов, алгоритмы построения сечений усвоены. Допускаются незначительные неточности в оформлении бумажного чертежа или мелкие погрешности в логических обоснованиях сложных исследовательских задач.

Процент выполнения заданий	Интегральный первичный балл	Традиционная отметка	Качественная характеристика достижений учащегося
от 50% до 64%	12 – 15 баллов	3 («удовлетворительно» / базовый уровень)	Учащийся выполняет задания преимущественно базового уровня сложности (работа с кубом) с опорой на внешнюю визуальную поддержку дополненной реальности. Самостоятельный переход к абстрактным доказательствам без цифрового экрана вызывает серьезные затруднения.
менее 50%	0 – 11 баллов	2 («неудовлетворительно»)	Базовые пространственные представления по теме «Многогранники» не сформированы. Учащийся демонстрирует выраженный «плоскостной барьер», не умеет вводить данные в цифровую среду и соотносить её результаты с бумажным носителем. Требуется глубокая коррекционная работа.

Приложение Е

Таблица – Динамика распределения учащихся КГ и ЭГ по уровням пространственного мышления (в %)

Уровни геометрического мышления (по Ван Хиле)	Контрольная группа (КГ, N=24) До эксперимента	Контрольная группа (КГ, N=24) После эксперимента	Экспериментальная группа (ЭГ, N=22) До эксперимента	Экспериментальная группа (ЭГ, N=22) После эксперимента
Уровень 0. Визуализация	25,0%	20,8%	27,3%	4,5%
Уровень 1. Анализ	41,7%	45,8%	45,5%	31,8%
Уровень 2. Абстракция / Дедукция	29,1%	29,2%	22,7%	54,6%
Уровень 3. Строгость	4,2%	4,2%	4,5%	9,1%

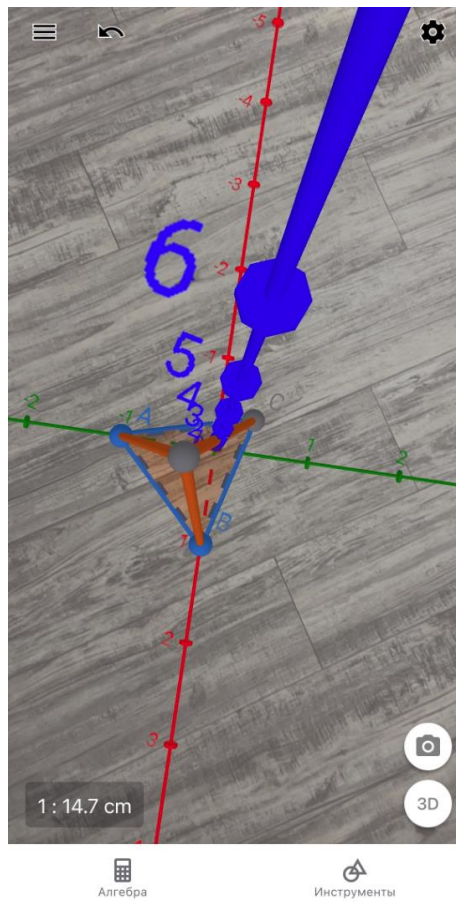
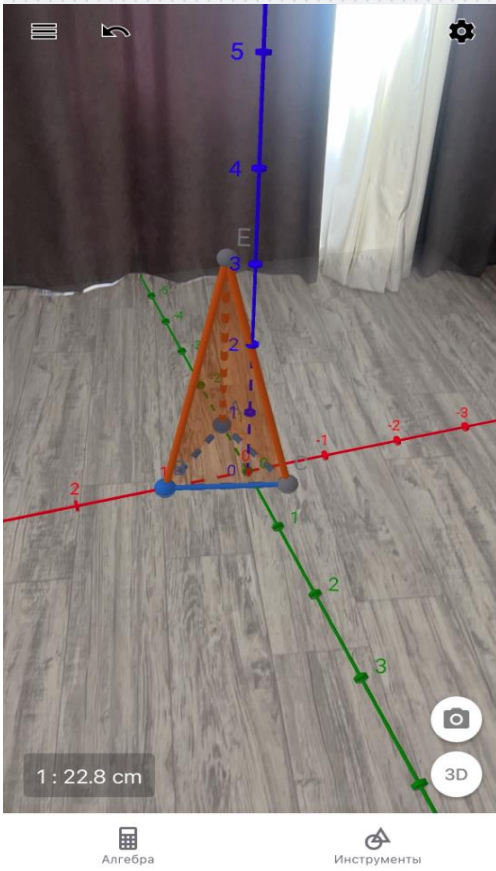
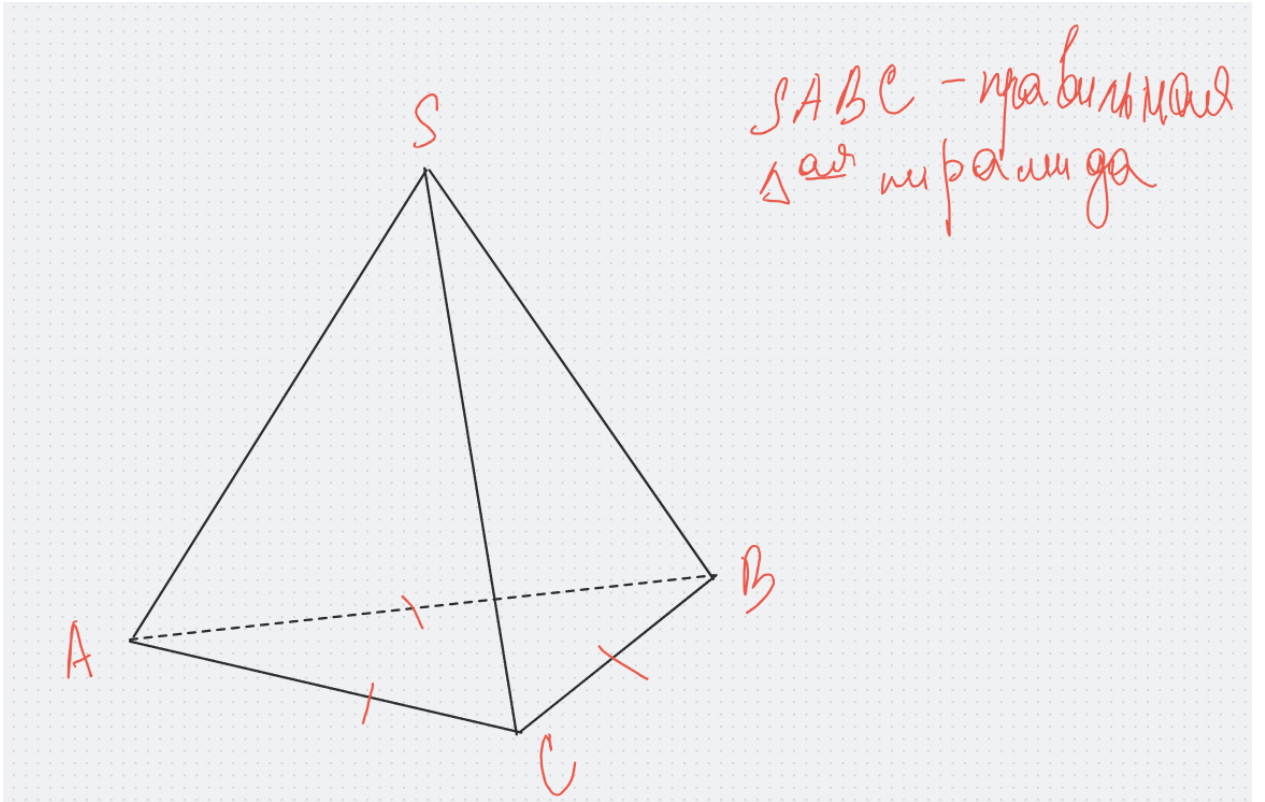
Приложение Ж

Таблица – Сравнительный анализ практических умений учащихся ЭГ до и после применения разработанного комплекса заданий

Контролируемый параметр / умение	До применения комплекса заданий (исходное состояние)	После применения комплекса заданий (итоговое состояние)
Чтение графических изображений (чертежей)	Выраженная «плоскостная фиксация». Учащиеся путали скрещивающиеся и пересекающиеся линии, не воспринимали невидимые ребра многогранников как пространственные элементы.	Свободное чтение стереометрического чертежа. Учащиеся мысленно воссоздают объемную фигуру по ее 2D-рисунок, четко дифференцируют взаимное расположение прямых.
Построение сечений многогранников	Хаотичное и ошибочное соединение точек на чертеже. Распространенная ошибка — проведение линий «сквозь тело многогранника» между точками, лежащими на разных гранях.	Осознанное выполнение графических шагов. Учащиеся безошибочно строят сечения методом следов, понимая геометрический смысл нахождения точек пересечения прямых и плоскостей.
Определение формы пространственных элементов	Затруднения с определением реальной формы сечений (например, прямоугольник на наклонном сечении куба воспринимался как параллелограмм из-за искажения проекции).	Успешное преодоление оптических иллюзий чертежа. Учащиеся абстрагируются от искажений изометрии, умеют мысленно «развернуть» фигуру и доказать истинную форму сечения.
Навыки самоконтроля и верификации	Полное отсутствие у учащихся механизмов проверки правильности своих построений. Ошибки в тетрадах не замечались до проверки учителем.	Развитый навык геометрического самоконтроля. Учащиеся самостоятельно проверяют свои гипотезы и расчеты, сопоставляя бумажный чертеж с динамической AR-моделью.

<p>Временные затраты на поиск решения</p>	<p>Длительный этап когнитивного ступора при первичном анализе пространственной задачи (в среднем до 10–12 минут только на осознание условия).</p>	<p>Сокращение времени на аналитический поиск решения задачи на 18–20% благодаря сформированному устойчивому пространственному образу.</p>
---	---	---

Приложение 3



Приложение И

