

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Дмитриенко Кирилл Игоревич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Развитие пространственных представлений обучающихся
6-7 классов в процессе изучения различных
содержательных линий школьного курса математики**

Направление подготовки:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль) образовательной программы:
Математика и Информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой

канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина

22.05.2026

(дата, подпись)

Научный руководитель

канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина

22.05.2026

(дата, подпись)

Дата защиты 22.06.2026

Обучающийся К.И. Дмитриенко

22.06.2026

(дата, подпись)

Оценка _____

прописью

Красноярск 2026



Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ	8
1.1. Структура и содержание пространственных представлений	8
1.2. Психолого-педагогические условия формирования пространственных представлений обучающихся	13
1.3. Роль различных содержательных линий школьного курса математики в развитии пространственных представлений обучающихся	21
Выводы по главе 1	32
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 6-7 КЛАССОВ	33
2.1. Анализ содержания школьных учебников математики основной школы в контексте развития пространственного мышления	33
2.2. Разработка серии занятий по математике, направленных на формирование пространственных представлений обучающихся 6-7 классов	45
2.3. Апробация занятий на практике и методические рекомендации для учителя.....	68
Выводы по главе 2	78
Заключение	79
Список используемых источников.....	81
Приложение А	86
Приложение Б.....	97
Приложение В	106
Приложение Г	117
Приложение Д	118

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития общества характеризуется внедрением информационных технологий, усложнением технических систем и повышением требований к профессиональной подготовке специалистов STEM. В сложившихся условиях огромную значимость приобретает развитие пространственного мышления у обучающихся. Пространственное мышление является фундаментом для успешного освоения инженерных, дизайнерских и архитектурных специальностей. Развитие пространственных представлений может повлиять на то, как обучающийся понимает геометрическую концепцию, что положительно скажется на его успеваемости и будущем профессиональном успехе.

Пространственные представления начинают развиваться в младшем школьном возрасте в процессе освоения различных школьных предметов. Например, уроки изобразительного искусства, где практически основными навыками является умение изображать различные геометрические фигуры, правильно располагать их на листе, соблюдать пропорции и симметрию. В литературе пространственные представления помогают при изучении художественных произведений. Представление художественного пространства, интерьера, пейзажа и других элементов, описанных в тексте, раскрывает сюжет и характер персонажей. На уроках географии обучающиеся работают с картами и различными схемами и тут опять же важную роль играет пространственное мышление, благодаря ему обучающиеся лучше ориентируются на местности и понимают расположение объектов на карте. Таким образом, развитие пространственных представлений играет ключевую роль при освоении школьной программы.

Ключевым инструментом для формирования пространственных представлений являются уроки геометрии. Геометрия, как учебный предмет, имеет огромный потенциал. Однако анализ практики преподавания и результатов государственной итоговой аттестации свидетельствует о сохраняющихся трудностях обучающихся в построении, распознавании и

мысленном представлении геометрических объектов в пространстве. Чаще всего затруднения вызывают работа с чертежами, интерпретация сечений, построение проекций и решение задач, требующих умения мысленно менять расположение объекта в пространстве. Несмотря на глобальность данной проблемы, в современных методиках обучения геометрии остается много не проработанных вопросов. Например, системность формирования пространственных представлений в рамках регулярных уроков, а не факультативной, кружковой или олимпиадной практике.

В условиях реализации обновленных федеральных государственных образовательных стандартов повышается уровень требований к метапредметным результатам обучения, включающих в себя развитие пространственных представлений. При этом методика преподавания геометрии достаточно часто носит репродуктивный характер, не обсуждается практическое применение изучаемого материала, обучающиеся не видят связи решаемых задач с реальной жизнью. Ситуация усугубляется сокращением учебных часов и недостаточной подготовкой учителей к использованию современных дидактических материалов и средств, включая динамические математические среды.

По данным методического анализа результатов основного государственного экзамена 2025 г., у выпускников 9 классов, одним из наименее сформированных умений является нахождение геометрических величин с применением изученных свойств фигур и тел. Также усвоение элементов содержания курса математики основной школы, относящихся к функциональной линии, имеет очень низкие показатели: не более 3 %. В 2023 г. результативность выполнения 23 задания, в котором необходимо продемонстрировать умение выполнять действия с геометрическими фигурами, составила 9,42 %, а в 2024 и 2025 – 5,05 % и 6,52 % соответственно. Средний процент выполнения геометрических заданий с развернутым ответом обычно не превышает 6,52 %. Вполне вероятно, что одной из ключевых причин может быть перекос в подготовке: усиленное «натаскивание» на алгебру в ущерб

геометрии, которой, судя по всему, уделяется меньше времени и внимания. При изучении геометрического материала, возможно, акцент делается на заучивании формул и фактов без понимания их сути. Если сравнивать результаты единого государственного экзамена базового уровня 2024 г. и 2025 г., то можно заметить, что процент успешного выполнения 9 задания, требующего знания планиметрии, снизился, в 2024 г. – 83,51 % и 53,75 % в 2025 г. Низкий процент выполнения (26,01 %) 11 задания показывает наличие проблем с подобными стереометрическими задачами. Если сравнивать успешность выполнения 11 и 13 заданий, требующих знания стереометрии, с процентами выполнения остальных заданий первой части, то видно, что 13 задание с результатом 59,37%, недалеко отходит от общей планки, например, процент выполнения заданий 1-7 не опускается ниже 70 %, но вот 11 задание имеет процент выполнения 26,01%, что гораздо ниже, чем у других заданий первой части. По результатам экзамена по математике профильного уровня, можно отметить очень низкий процент выполнения задания по стереометрии с развернутым ответом – 2,94 %.

Данные, приведенные выше, свидетельствуют о системных проблемах в геометрической подготовке обучающихся, в частности, недостаточном уровне развития пространственных представлений.

Теоретические и методические аспекты проблемы развития пространственных представлений школьников в разное время исследовались разными отечественными учеными. А.П. Кузнецов описал основы развития пространственных представлений, Н.Я. Семаго, М.М. Семаго выявили психологические особенности развития пространственных представлений ребенка, М.В. Подаев охарактеризовал этапы формирования пространственных представлений обучающихся. Е.С. Троцкая исследует особенности развития пространственного мышления детей младшего школьного возраста, различным компонентам геометрической подготовки обучающихся посвящены работы В.А. Гусева. Более современные исследования описывают возможности использования информационных и цифровых технологий в процессе

формирования геометрических умений школьников, в том числе и пространственных представлений. В этом плане представляют интерес публикации В.Р. Майера, М.В. Шабановой и др. Несмотря на то, что вопросы пропедевтики основных геометрических понятий, функционально-графической линии в 1-6 классах и развития пространственных представлений школьников в школьном курсе математики исследуются в научно-методической литературе, состояние дел в реальной образовательной практике говорит о том, что существует необходимость поиска эффективных методических решений для формирования пространственных представлений обучающихся в 6-7 классах. В этом заключается **проблема** исследования.

Объект исследования: процесс формирования пространственных представлений обучающихся 6-7 классов.

Предмет исследования: методические особенности формирования пространственных представлений обучающихся 6-7 классов.

Целью исследования является разработка и апробация серии занятий по математике с использованием различных дидактических средств для развития пространственных представлений у обучающихся 6-7 классов.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Охарактеризовать содержание и структуру пространственных представлений обучающихся.
2. Описать психолого-педагогические условия для формирования пространственных представлений обучающихся и роль математики в этом процессе.
3. Разработать содержание занятий по математике, способствующих развитию пространственных представлений обучающихся 6-7 классов.
4. Провести апробацию занятий и разработать рекомендации для учителя.

Методы исследования: анализ, обобщение психолого-педагогической и научно-методической литературы, методического опыта развития пространственных представлений в процессе обучения математике в основной

школе, наблюдение, апробация, анализ результатов эмпирического исследования.

Практическая значимость исследования заключается в том, что результаты можно использовать в процессе изучения математики в общеобразовательных школах.

В первой главе рассмотрены теоретические основы исследования. Раскрыто понятие пространственного представления его структура и значимость развития пространственных представлений обучающихся для их дальнейшего обучения и опыта. Также обсуждаются психологические факторы, влияющие на формирование пространственных представлений в школьном возрасте и роль математики, как основного предмета, формирующего пространственное мышление.

Вторая глава посвящена анализу учебных пособий, оценке их эффективности в условиях постоянных изменений требований к учебным материалам. Затрагивается тема внедрения цифровых технологий на уроках математики, их влияния на формирование пространственного мышления. А также разрабатывается серия занятий по математике и апробируется.

В заключении представлены основные выводы по исследованию.

В приложениях представлены технологические карты разработанных занятий.

В ходе работы над исследованием были использованы инструменты искусственного интеллекта для генерации некоторых методических идей и формулировки возможных учебных ситуаций. Все предложенные ИИ варианты были проанализированы и скорректированы в соответствии с требованиями дидактики, теории и методики обучения математике.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ

1.1. Структура и содержание пространственных представлений

Задача формирования пространственных представлений является одной из ключевых в современном математическом образовании так как около 90% информации человек получает благодаря зрению [10]. Чтобы дать характеристику и разобраться в структуре пространственных представлений, рассмотрим несколько определений.

Понятие «представление» как психолого-педагогическая проблема представляет особый интерес в контексте формирования определенных представлений у обучающихся в процессе становления их личности [9, с. 1]. В одной из своих работ В.Б. Толстова пишет, что пространственные представления – это деятельность, включающая в себя определение формы, величины, местоположения и перемещения предметов относительно друг друга и собственного тела, относительно окружающих предметов [33]. А.П. Кузнецов напрямую связывает пространственные представления с пространственным мышлением и пишет, что пространственное мышление является специфическим видом умственной деятельности, который имеет место в решении задач, требующих ориентации в практическом и теоретическом пространстве. Термин “пространственное мышление” определяется психологами по-разному, но все они сводят пространственное мышление к мышлению образами [17, с. 158]. В.А. Гусев говорит об образном мышлении, определяя его как способность человека произвольно создавать (актуализировать) образы на основе некоторого заданного наглядного материала, сохранять и воспроизводить их в памяти (уже без опоры на наглядность), мысленно преобразовывать в заданном или самостоятельно выбранном под влиянием некоторых условий направлении и на этой основе создавать новые образы, которые могут существенно отличаться от исходных [8, с. 47]. С.Л. Рубинштейн считал, что представления, связанные с прошлым

опытом человека, являются динамическим образованием, которое отражает всю сложность и многообразие жизни личности. В процессе жизнедеятельности человека одни и те же представления расширяются и уточняются, на их основе появляются и новые. По его мнению, представления человека характеризуются наглядностью, большей или меньшей фрагментарностью и обобщенностью. Представления, обладающие изменчивостью и текучестью отдельных частей, позволяют обобщить образ того или иного предмета в сознании. Все представления человека появляются в результате обобщения несущественных и существенных признаков. Такое обобщение позволяет сформировать представления о целой категории или классе похожих предметов. Это обстоятельство позволяет человеку понимать предмет в общих чертах, когда отсутствует его визуальное восприятие [29]. Простыми словами образы не застывают навсегда, они меняются по мере накопления опыта человека.

Проанализировав несколько разных определений понятия, можно сделать вывод, что пространственные представления тесно связаны с пространственным мышлением и представляют собой специфический вид представлений, характеризующий свойства окружающих объектов, расстояние и перемещение в пространстве, как собственное, так и других предметов. Это не просто пассивное отражение пространства, это активный процесс конструирования модели происходящего, включающий в себе своевременное реагирование на любые изменения, которые происходят вокруг. С точки зрения психологии пространственные представления – это чувственно-наглядный образ объекта или явления, который возникает в сознании человека на основе уже имеющихся образов в памяти или воображении человека, без прямого воздействия этого объекта на органы чувств человека.

Для полного раскрытия понятия пространственные представления нужно разобраться в структуре этого понятия. В структуре пространственных представлений можно выделить четыре основных уровня, каждый из которых, в свою очередь, состоит из нескольких подуровней [31]. В структуре

пространственных представлений М.М. Семаго и Н.Я. Семаго выделяют четыре уровня:

Первый уровень. Пространственные представления о собственном теле

Подуровнями являются:

- ощущения, идущие от проприоцептивных рецепторов (темное мышечное чувство, по Сеченову),
- напряжение-расслабление;
- ощущения, идущие от «внутреннего мира» тела (например, голод, сытость);
- ощущения от взаимодействия тела с внешним пространством (сырости-сухости, тактильные ощущения от мокрых и сухих пеленок, складок пеленок и т.п.), а также от взаимодействия со взрослыми.

Второй уровень. Пространственные представления о взаимоотношении внешних объектов и тела (по отношению к собственному телу)

Подуровнями являются:

- представления о взаимоотношении внешних объектов и тела. В свою очередь, эти представления подразделяются на следующие:
 1. топологические представления (о нахождении того или иного предмета),
 2. координатные представления (о нахождении предметов с использованием понятий «верх-низ», «с какой стороны»),
 3. метрические представления (о дальности нахождения предмета);
- представления о пространственных взаимоотношениях между двумя и более предметами, находящимися в окружающем пространстве.

Итогом развития ребенка на этом этапе становится целостная картина мира в восприятии пространственных взаимоотношений между объектами и собственным телом (структурно-топологические представления).

Третий уровень. Уровень вербализации пространственных представлений

У ребенка вначале в импрессивном плане, а позже в экспрессивном (иногда параллельно) появляется возможность вербализации представлений

второго уровня. Существует определенная последовательность появления в речи обозначений топологического плана. Проявление пространственных представлений на вербальном уровне соотносится с законами развития движения в онтогенезе (закон основной оси).

Предлоги, обозначающие представления об относительном расположении объектов как по отношению к телу, так и по отношению друг к другу (в, над, под, за, перед и т.п.) появляются в речи ребенка позже, чем такие слова, как верх, низ, близко, далеко и т.п.

Четвертый уровень. Лингвистические представления (пространство языка)

Этот уровень является наиболее сложным и поздно формирующимся. Он уходит корнями в пространственные представления «низшего» порядка, формируется непосредственно как речевая деятельность, являясь в то же время одной из основных составляющих стиля мышления и собственно когнитивного развития ребенка [31]. Данная модель демонстрирует иерархичность и последовательность формирования пространственных представлений от физических (телесных) ощущений к абстрактным образам и лингвистическим представлениям, которые формируются сложнее всего.

А.П. Кузнецов подчеркивает сложность и необходимость формирования лингвистических представлений. Пространственное мышление, оперируя образом, нуждается в выражении, интерпретации образных преобразований. Таким средством выражения является слово. В пространственном мышлении само движение мысли, поиск и нахождение решения задачи осуществляется в виде чередования образов, их преобразования, получения новых. Работа над образами скрыта от наблюдателя. Её трудно объективизировать. Поэтому основной путь при изучении этого процесса - словесный или графический самоотчёт [17, с. 158].

Исходя из вышесказанного, можно описать структуру пространственных представлений с точки зрения видов деятельности, в которых они проявляются:

1. Представления, связанные с непосредственным восприятием объекта через физический контакт с ним (перцептивный).
2. Представления, связанные с воспроизведением, ранее воспринятого объекта, по памяти (репродуктивный).
3. Представления, которые дают возможность предсказать возможные изменения объекта в пространстве (прогностический) (рис. 1).



Рисунок 1 – Структура пространственных представлений

Таким образом, будем понимать **пространственные представления** как систему чувственно-наглядных образов, которые отражают свойства и взаиморасположение объектов в пространстве, включающую в себя восприятие формы, размера, расположения объекта, способность к мысленному и языковому воспроизведению образов, ранее воспринятых объектов, а также умение предсказывать возможные изменения объекта, воспринимать эти изменения и подстраиваться под данные изменения.

1.2. Психолого-педагогические условия формирования пространственных представлений обучающихся

Формирование пространственных представлений – сложный и не стихийный процесс, это целенаправленная педагогическая деятельность, которая требует системности и опоры на психологические особенности обучающихся в разном возрасте. В школе и в жизни формирование пространственных представлений происходит спонтанно так как никто не акцентирует на этом внимание [25]. Развитие пространственного мышления у школьников является основной задачей, требующей применения знаний из различных областей [3]. Степень развития пространственных представлений зависит от многих факторов, основным из них является возраст [37]. По мнению М.В. Подаева, сензитивным этапом для развития пространственных представлений является младший подростковый возраст. Для ребенка этого возраста задержка развития пространственного мышления может стать (и зачастую становится) причиной хронической неуспешности в учебной деятельности. Недостаток сформированности пространственных представлений может повлечь за собой проблемы со счетом, письмом, пересказом текста и вычислительными операциями [15]. В связи с этим большой интерес в плане развития пространственного мышления учащихся представляет обучение геометрии в 6-8-х классах [27]. Главная проблема, по мнению В.А. Гусева, состоит в том, что для этого возраста должен быть создан специальный «красивый» геометрический материал, соответствующий познавательной активности и широким возможностям, присущим ученикам 6–8-х классов. По мнению Е.С. Троцкой особое внимание развитию пространственного мышления следует уделять в младшем школьном возрасте, когда наиболее активно у ребенка развиваются когнитивные процессы: восприятие, память, мышление, речь, воображение [34]. О.Л. Вдовина тоже считает, что развитию пространственного мышления нужно уделять особое внимание в младшем подростковом возрасте, так как в этом возрасте происходят значительные изменения в психических процессах детей, в частности в плане развития их

произвольности. Это создает условия для развития пространственного мышления, где основное внимание уделяется целенаправленному преобразованию пространственных представлений или образов для решения жизненных задач [4]. Действительно, в младшем подростковом возрасте происходит огромное количество изменений в организме ребенка, что может положительно сказаться на процессе формирования его пространственных представлений, так как пространственные представления являются необходимыми для изучения математики, а математика в свою очередь необходима для большого спектра специальностей и профессий. В основе требований ФГОС лежит необходимость формирования пространственного мышления, которое необходимо, как при изучении математических наук, так и других отдельных предметов. А в дальнейшем является незаменимым компонентом практической деятельности по таким специальностям как инженер, архитектор, строитель, геодезист, топограф, чертежник, оператор, художник, модельер, дизайнер и многим другим [13].

5-6 класс является переходным этапом от начального к основному общему образованию. В этот период закладывается фундамент для систематического изучения геометрии, которое начнется в 7 классе. Развитие пространственных представлений в 6 и 7 классах носит пропедевтический (подготовительный) характер.

Согласно ФГОС ООО, одним из ключевых требований является формирование умения работать с геометрическими образами, читать чертежи и понимать взаимное расположение объектов. Для шестиклассников это означает переход от восприятия отдельных фигур к пониманию их свойств в пространстве и на плоскости, работу с координатами и симметрией.

Учащиеся 6 класса (11–12 лет) находятся в стадии перехода от наглядно-действенного к наглядно-образному мышлению. Абстрактно-логическое мышление еще только формируется.

Особенности восприятия пространства в 6 и 7 классах:

1. Опора на наглядность: Ученикам трудно решать задачи «в уме», им необходимы чертежи, модели, клетчатая бумага.
2. Эмоциональность: Восприятие усиливается через игровые элементы и практическую деятельность.
3. Трудности: Сложности возникают при переходе от объемного тела к его плоскому изображению (чертежу) и наоборот, а также при работе с отрицательными координатами.

Для того чтобы понять какие условия влияют на формирование пространственных представлений рассмотрим этапы формирования для различных возрастных групп детей, особое внимание уделим возрастной группе, советующей 6-7 классу.

Т.А. Мусейбова выделила следующие этапы формирования пространственных представлений для детей дошкольного возраста:

1. Ребенок выделяет предметы, которые расположены близко к нему, а само пространство еще не выделяется.
2. Ребенок начинает активно использовать свое зрение, благодаря чему расширяются границы воспринимаемого пространства.
3. Ребенок начинает осмыслять объекты, которые удалены от него.
4. Ребенок начинает лучше воспринимать пространство и объекты, благодаря рисованию [24].

Проанализировав данные этапы, можно сделать вывод, что ключевым этапом развития пространственных представлений у детей дошкольного возраста является этап, где они учатся рисовать. Благодаря работе с листом бумаги и изображением различных реальных объектов на нем, ребенок, сам того не понимая, учится соблюдать пропорции, расстояние между объектами, учится изображать различные фигуры, например, рисуя дом, ребенок использует прямоугольники и треугольники. То есть уже на начальных уровнях развития пространственных представлений, действия, связанные с геометрией, играют ключевую роль.

Е.В. Знаменская выделяет три этапа формирования пространственных представлений у детей школьного возраста:

1. Переход от манипулирования реальными объектами к созданию их пространственных образов.
2. Ребенок начинает понимать взаимосвязь между абстрактной геометрической формой объекта и его двумерным графическим изображением. На данном этапе ребенок учится делать и читать чертежи, строить модели и делать схемы.
3. Переход от восприятия двумерного изображения объекта к восприятию его трехмерной модели в рамках геометрического пространства [1].

На первом этапе важную роль играет, насколько хорошо ребенок научился соблюдать пропорциональность объектов, насколько хорошо он воспринимает их свойства, так как создание правильных образов без этого невозможно. На втором этапе важно, чтобы ребенок в дошкольном возрасте научился работать с листом бумаги, а именно рисовать, тогда у него не возникнет проблем с представлением абстрактной геометрической формы в виде двумерного графического изображения. Он с легкостью сможет освоить работу со схемами и чертежами. Третий этап является самым сложным, так как ребенку тяжело правильно перенести свойства двумерной модели на трехмерную и обратно. В младшем школьном возрасте происходит накопление пространственных представлений, ребёнок учится мысленно выполнять действия с трехмерными объектами, отображая результат деятельности на плоскости. «В период младшего школьного возраста происходят значительные изменения в психических процессах детей, в частности в плане развития их произвольности. Это создает условия для развития пространственного мышления, где основное внимание уделяется целенаправленному преобразованию пространственных представлений или образов для решения жизненных задач» [4, с. 10].

В процессе развития пространственного мышления обучающихся ключевую роль играет учитель, от него зависит насколько хорошо будет развито

пространственное мышление ученика, и именно учитель выбирает подходящую педагогическую методику преподавания.

Использование наглядных пособий является одной из самых распространенных методик. Наглядный материал, в котором выражаются пространственные свойства и отношения предмета, в развитии пространственного мышления школьников играет важную роль и является первичной основой создания образа. В процессе решения задачи над образом проводится неоднократное преобразование, видоизменение и трансформация. В результате, создание образов обеспечивает накопление представлений, которые по отношению к мышлению являются исходной базой, необходимым условием его осуществления [21]. Действительно, использование наглядных пособий выступает ключевым дидактическим средством, которое обеспечивает переход от чувственного восприятия предмета к абстрактному мышлению. Так же неоднократные преобразования над образом в процессе решения задачи развивают гибкость пространственного мышления. Визуализация пространственных свойств объекта позволяет создать базу для дальнейших мыслительных операций. Стоит заметить, что наглядные пособия могут быть не только плоскостными, так же в виде наглядных пособий могут выступать и объемные модели предметов. Объемные геометрические модели дает возможность не просто визуализировать объекты, но еще и производит с ними различные действия и преобразования. На уроках геометрии очень часто используют объемные модели геометрических тел, это помогает обучающимся быстрее понимать и решать задачи, в которых требуется найти сечение многогранника. Так же даются легче задачи на нахождение объема.

Создание на уроках разверток различных геометрических тел помогает обучающимся понять структуру многогранников, взаиморасположение граней и ребер. Использование на уроках интерактивных ресурсов, которые позволяют в реальном времени делать различные преобразования с геометрическими телами и фигурами, дает возможность увидеть и оценить как, например, будут меняться одни параметры при изменении других. Работать с различными

меняющимися характеристиками объектов важно так как восприятие и преобразование пространственных характеристик является одной из наиболее сложных задач [32].

Таким образом, использование наглядных пособий дает возможность ученику не просто пассивно наблюдать, а активно оперировать образами, делать эксперименты, наблюдать за изменениями и делать выводы. Но стоит учитывать индивидуальные особенности обучающихся при использовании наглядных пособий.

Пространственное мышление является специфическим видом умственной деятельности, который имеет место в решении задач, требующих ориентации в практическом и теоретическом пространстве [17]. Использование правильно подобранных практических заданий на уроках геометрии так же способствует развитию пространственному мышлению. Формирование умения изображать геометрическую фигуру, расположенную в пространстве, достаточно длительный процесс и требует определенных знаний и умений. Задачный подход, направленный на активизацию пространственного мышления, должен содержать последовательность таких прикладных задач, решение которых позволяет получить определенный опыт построения изображения пространственной геометрической фигуры на плоскости [38]. Курс геометрии в основной школе ограничен планиметрическими задачами, где все фигуры в одной плоскости. В старшей школе курс геометрии резко усложняется. Дополнительные построения, например, прямых в параллельных плоскостях, представляют для учащихся большую трудность – представить, что эти параллелограммы - плоскости, а прямые – в этих плоскостях. На первых уроках ученики видят все в одной плоскости, как в планиметрии. Перестроить свое мышление на видение пространства, без специальных упражнений крайне сложно. Пространственное мышление формируется в процессе выполнения рисунка, чертежа объемного тела на плоскости [38]. Именно о таких задачах и было сказано в начале, ярким примером подобных задач являются прикладные.

Обучающимся легче работать с объектами, которые они уже видели вживую и имеют представление об их свойствах.

Выделяют три вида прикладных задач для формирования у обучающегося пространственного мышления:

1. Задачи на формирование представлений, что плоская фигура может быть расположена в пространстве.
2. Изображение плоской фигуры в проекциях: диметрии и изометрии
3. Формирование умений изображать объемное тело в диметрической и изометрической проекциях. Но сначала дается понятие об изображении объемных тел [38].

Такие задачи способны повысить интерес обучающихся к изучению стереометрии, именно когда ученик поймет, что стереометрия напрямую может быть связана с повседневной жизнью, тогда этот раздел станет по-настоящему интересным для него.

Еще одним хорошим примером практических задач являются задачи, в которых необходимо, представить расположение тел после преобразований и различных действий, например, после поворота на определённый градус. Связано это с тем, что пространственное мышление нуждается в выражении и интерпретации образных преобразований [16]. Такие задачи развивают у учеников способность анализировать положение объектов и представлять их перемещение или преобразование в пространстве. Примеры включают задачи на построение симметричных фигур, нахождение проекций или определение объёма сложных пространственных тел [14].

Таким образом, можно сделать вывод, что практические геометрические задачи играют огромную роль в формировании пространственных представлений у школьников. Правильно подобранный учителем дидактический материал способствует лучшему усвоению и восприятию информации, а также повышает мотивацию у обучающихся.

В современном образовании очень часто и целесообразно интегрируют компьютерные технологии в изучение геометрии. Традиционно

пространственное мышление развивалось при помощи чертежей, моделей и физических объектов. Это обусловлено тем, что важнейшим средством развития пространственных представлений является чертеж [12]. В современной школе это по-прежнему актуально, но на помощь также приходят цифровые технологии и интерактивные визуализации. Использование компьютерных программ позволяет ученикам более подробно изучить сложные объекты и их проекции [14]. Использование цифровых технологий на уроке геометрии позволяют использовать геометрические 3D-модели. При формировании пространственного образа с использованием компьютерной анимации целесообразно выделить следующие этапы, на каждом из которых используются свои модели реального объекта:

1. Демонстрация реальной модели изучаемого объекта – макет, пример из окружающего мира, рисунок (статическая интерпретация).
2. Показ динамической интерпретации геометрического понятия.
3. Построение статического изображения (чертеж).
4. Решение заданий на мысленное оперирование геометрическими объектами без опоры на наглядный материал [27].

Несмотря на то, что внедрение цифровых технологий является очень действенным способом визуализации, начинать все равно стоит с изучения и демонстрации реальной модели и только потом переходить к ее цифровой версии.

Таким образом, процесс формирования пространственных представлений на уроках геометрии должен быть системным, а не стихийным, включать в себя сочетание трех групп средств: наглядные пособия, практические задачи и информационные технологии. Учитель играет главную роль в этом процессе, на нем лежит ответственность по подбору материалов и организации учебного процесса. Сформированное пространственное мышление является базовым условием не только для успешного изучения математики, но и для будущей профессиональной деятельности в инженерных, технических и творческих специальностях.

1.3. Роль различных содержательных линий школьного курса математики в развитии пространственных представлений обучающихся

Математика занимает одно из главных мест в системе общего образования, это положение закреплено в нормативных документах, регулирующих образовательную деятельность в Российской Федерации. В частности, Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования выделяет развитие пространственного мышления как один из ключевых предметных результатов курса математики [36].

Концепция математического образования ставит на первое место повышение уровня развития пространственных представлений у обучающихся, так как именно пространственные представления являются ключом к освоению многих технических профессий. Так же человек с развитыми математическим и пространственным мышлениями лучше ориентируется в пространстве и лучше понимает структуру окружающего мира. В течении последних нескольких лет в основу изучения школьного курса геометрии закладывается образное мышление. В то время как в течении предыдущих тридцати лет были попытки поставить на первое место логическое мышление [8].

Деятельность пространственного мышления направлена не столько на создание, сколько на оперирование пространственными образами [17]. Именно этот навык формируется на уроках геометрии. Традиционно школьный курс геометрии подразделяется на два раздела планиметрию и стереометрию. Планиметрия изучает фигуры на плоскости, а стереометрия изучает фигуры в пространстве. Однако современный курс предполагает пропедевтику стереометрической идей уже на этапе изучения планиметрии, что полностью соответствует идеи непрерывного развития пространственных представлений. Знания и навыки полученные в курсе планиметрии и стереометрии могут стать фундаментом для будущей профессиональной деятельности, в которой важны логика, критическое мышление и способность представлять объект с разных сторон, уметь делать различные геометрические преобразования над объектами. Пространственное мышление тесно связано с геометрией и особенно

проявляется в умении оперировать объектами и их характеристиками в уме, находить и объяснять их связи [14]. Курс школьной геометрии позволяет использовать различные цифровые технологии, что положительно сказывается на динамике обучения и развития пространственных представлений.

При правильной интеграции различных методик и технологий в уроки геометрии, она становится уникальным инструментом, позволяющим перейти от чувственного восприятия пространства к его абстрактному моделированию, что также положительно скажется в будущем при изучении других предметов.

Хоть геометрия и является основным инструментом для формирования пространственных представлений и пространственного мышления, раздел алгебры, такой как «функции и графики», вносит существенный вклад в этот процесс. Работа с графиками предполагает понимание системы координат, которая в свою очередь является моделью пространства.

В первую очередь изучение прямоугольной системы координат формирует у обучающихся метрическое представление о расположении объекта в пространстве. Обучающийся учится соотносить алгебраическое описание объекта с его геометрическим образом. Также система координат помогает лучше понять перемещение объекта в пространстве.

Построение и преобразование графиков напрямую связано с динамическими пространственными представлениями. Строя график функции $y = x^2 + 2$, обучающийся должен представить, как будет смещаться исходный график относительно осей, это требует способности к мысленному перемещению объекта. Исследования показывают, что проблема освоения решения задач, в которых требуется построить график, а затем выполнить с ним какие-либо преобразования связана с плохо развитым пространственным мышлением [27].

Итак, раздел алгебры, связанный с графиками функций, играет важную роль в формировании пространственных представлений обучающихся, но как показывает практика, дается гораздо сложнее, поэтому следует больше внимания уделять задачам, которые направлены на активизацию динамического

пространственного мышления. Такие задачи дают возможность работать с системой точек и динамичных образов. Умение мыслить в системе этих образов и характеризует пространственное мышление [17].

Современный подход к обучению математике, закреплённый в ФГОС и ФРП предполагает усиление прикладной направленности курса. Работа с задачами, связанными с реальными ситуациями, учит обучающихся преобразовывать реальные данные и свойства и переводить на геометрический язык. Последовательность геометрических прикладных задач, сюжет которых требует от обучающегося построения модели реального объекта и работы с ней способствует развитию пространственных представлений, так как ученик может «увидеть» геометрическую фигуру в реальном объекте [38]. Действительно, представление реального объекта в виде геометрической модели и работа с этой моделью может быть легче, чем просто работа с геометрической фигурой.

Задачи на нахождение объема, площади, расстояния для реальных объектов также занимают важное место в формировании пространственных представлений. Такие задачи позволяют четко понять свойства геометрических моделей при помощи реальных объектов.

Использование разверток объемных тел на уроках геометрии позволяет обучающимся представлять, как выглядит фигура, если её развернуть на плоскости, а затем - как собрать фигуру обратно. Задачи такого типа помогают школьникам развить воображение и способность представлять объёмные фигуры, анализировать их свойства, а также оценивать расстояния, углы и взаимное расположение граней. Эти навыки, несмотря на их абстрактность, могут пригодиться не только в учёбе, но и в быту, и в профессиональной жизни, например, при планировании пространства или проектировании [14].

Для того чтобы углубиться в изучении вопроса формирования пространственных представлений у обучающихся в 6-7 классах, обратимся к учебной программе.

В отличие от 8 класса, где геометрия выделена в отдельный предмет, в 6-7 классах пространственные представления развиваются в рамках интегрированного курса «Математика». Основные линии содержания в 6-7 классах:

1. Наглядная геометрия. Прямые на плоскости.

Основное содержание: Перпендикулярные прямые. Параллельные прямые. Расстояние между двумя точками, от точки до прямой, длина маршрута на квадратной сетке.

Это первое появление геометрии в программе 6 класса, здесь вводятся базовые понятия: прямая и точка. Вводится первая пространственная характеристика - расстояние.

2. Наглядная геометрия. Симметрия.

Основное содержание: Осевая симметрия. Центральная симметрия. Построение симметричных фигур. Симметрия в пространстве. К расстоянию добавляется еще одна пространственная характеристика объекта - симметрия.

Хочется отметить, что уже на данном этапе у обучающихся начинаются первые трудности, так как не все понимают саму идею симметрии.

3. Наглядная геометрия. Фигуры на плоскости.

Основное содержание: Четырёхугольник, примеры четырёхугольников, прямоугольник, квадрат: свойства сторон, углов, диагоналей. Измерение углов. Виды треугольников. Периметр многоугольника. Площадь фигуры. Формулы периметра и площади прямоугольника. Приближённое измерение площади фигур.

На данном этапе сильно возрастает объем информации, добавляются сразу несколько характеристик фигур: площадь и периметр. Так же добавляются свойства и виды различных n-угольников. Данный этап хоть и является очень объемным по содержанию, но гораздо реже вызывает трудности так как большая часть заданий решается шаблонными формулами.

4. Представление данных.

Основное содержание: Прямоугольная система координат на плоскости. Координаты точки на плоскости, абсцисса и ордината. На данном этапе к формированию пространственного мышления можно отнести только темы, связанные с координатной плоскостью.

Сама по себе координатная плоскость не вызывает проблем у обучающихся, они достаточно легко запоминают основные ее характеристики, вызывают проблемы задания, в которых фигуры на координатной плоскости меняют свое положение, и зная куда переместилась одна из вершин, нужно определить местоположение остальных вершин. Обучающимся трудно представить как перемещается фигура на координатной плоскости, а координатная плоскость фактически является моделью двумерного пространства. И вот здесь появляется необходимость усиленного развития пространственного мышления.

5. Наглядная геометрия. Фигуры в пространстве.

Основное содержание: Прямоугольный параллелепипед, куб, призма, пирамида, конус, цилиндр, шар и сфера. Изображение пространственных фигур. Примеры развёрток многогранников, цилиндра и конуса. Понятие объёма; единицы измерения объёма. Объём прямоугольного параллелепипеда, куба, формулы объёма. Здесь обучающиеся сталкиваются с еще одной пространственной характеристикой тел – объемом и знакомятся с геометрическими телами, которые обладают объемом. И вот здесь начинаются глобальные проблемы с восприятием подобных объектов. Если говорить о задачах на нахождение объема, где не требуется ничего строить и дополнительно находить, то особых проблем нет, но как только в задаче требуют построить объемную фигуру, многие начинают путаться в построениях, так как чтобы построить объемную фигуру на листке клетчатой бумаги, нужно сначала представить как расположены «невидимые» ребра. Здесь огромную роль играет воображение ребенка. Пространственное воображение входит в основу пространственного мышления [28].

6. Координаты и графики. Функции.

Основное содержание: Координата точки на прямой. Числовые промежутки. Расстояние между двумя точками координатной прямой. Прямоугольная система координат на плоскости. Примеры графиков, заданных формулами. Понятие функции. График функции. Свойства функций. Линейная функция. Построение графика линейной функции. Данная линия связана с развитием пространственных представлений непосредственно через функции и их графики, построение графиков данной функции требует навыка визуализации графика на координатной плоскости, а если функция задана нестандартно, например у графика будет сдвиг влево, вправо, вниз или вверх, то это требует более продвинутых навыков визуализации. Основные проблемы и связаны с подобными заданиями.

Рассмотрев основные линии содержания геометрии в школьном курсе математики 6 и 7 классах и выделив основные проблемы перейдем к изучению конкретных методов и приемов для формирования пространственных представлений у обучающихся.

С.Г. Самедова выделила основные методы и приемы:

1. Моделирование и конструирование.

Сюда можно отнести следующие варианты заданий: конструирование из кубиков и блоков, создание разверток. Для заданий с кубиками можно использовать конструктор LEGO, раздав обучающимся заранее подготовленные инструкции.

2. Работа с клетчатой бумагой и координатной плоскостью.

Сюда входят такие задания как: изображение объемных фигур по инструкции, рисование по координатам, построение чертежей к задачам, чертежей к реальным объектам, например, собственной комнате или садовому участку на даче, соединение точек для получения рисунка.

3. Практические задания с реальными объектами.

Оригами, складывание фигур из бумаги помогает лучше понять пространственные преобразования. Создание фигур из пластилина или конструктора.

4. Групповые практические и проектные задания.

Сюда можно включить различные игровые квесты с маршрутом или схемой передвижения или создание макетов парка, улицы, района или города. Важно постепенно увеличивать сложность заданий, например, переходить от плоских объектов к объемным [30, с. 211].

Рассмотрим примеры задач для 6 и 7 классов.

Задача 1 (Прямые на плоскости): Даны три прямые a , b , c . Известно, a перпендикулярна b , и b параллельна c . Укажите верное утверждение.

А. a перпендикулярна c

Б. a параллельна c

В. a , b , c проходят через одну точку

Г. a , b , c пересекаются в трех различных точках

Д. Все утверждения неверны

Выберите правильный вариант ответа и после сделайте чертеж. (Цель: умение визуализировать геометрические объекты и их взаимное расположение) [11, с. 6].

Задача 2 (Симметрия): Дана половина рисунка бабочки и ось симметрии. Достройте вторую половину бабочки так, чтобы она была симметрична первой. (Цель: понимание свойства равенства расстояний до оси симметрии).

Задача 3 (Координаты точки на плоскости): По заданным координатам точек, нужно построить в координатной плоскости объект: Самолет. [5].

$(-7;0)$ $(-5;2)$ $(7;2)$ $(9;5)$ $(10;5)$ $(10;1)$ $(9;0)$ $(-7;0)$

$(0;2)$ $(5;6)$ $(7;6)$ $(4;2)$

$(0;1)$ $(6;-3)$ $(8;-3)$ $(4;1)$ $(0;1)$ [5]. (Цель: понимание расположения точек на координатной плоскости и их взаиморасположение).

Задача 4 (Развертки): Даны 6 квадратов, соединенных друг с другом разными способами (всего 5 вариантов). Определите, какой из этих чертежей является разверткой куба. Вырежьте и проверьте. (Цель: развитие умения мысленно сворачивать плоскость в объем).

Задача 5 (Графики функций): Функция задана формулой $y = 3x - 6$. Найдите графически значение x , при котором $y = -9$. (Цель: связь алгебры и геометрии, визуализация функций).

Задача 6 (Фигуры на плоскости): Каждую башню из кубиков сфотографировали сверху, спереди и слева. Нарисуйте, какие изображения получились для каждой из башен (рис. 2) [26].

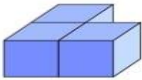
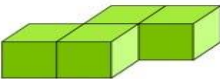
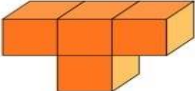
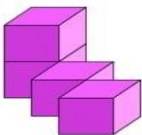
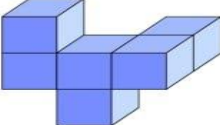
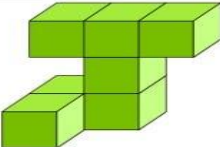
Башня	Вид спереди	Вид сверху	Вид слева
			
			
			
			
			
			
			

Рисунок 2. Задача с башнями

Задача 7 (Прямоугольная система координат на плоскости): Ручная черепашка находится в двумерном клетчатом пространстве и умеет выполнять следующие команды: вперед n (n -это число клеток, на которое черепашка

передвинется в указанном направлении), поворот вправо/влево на m (m -это градус, на который повернется черепашка на месте, в указанном направлении), напишите последовательность команд, выполняя которые черепашка прошла по данному маршруту (рис. 3):

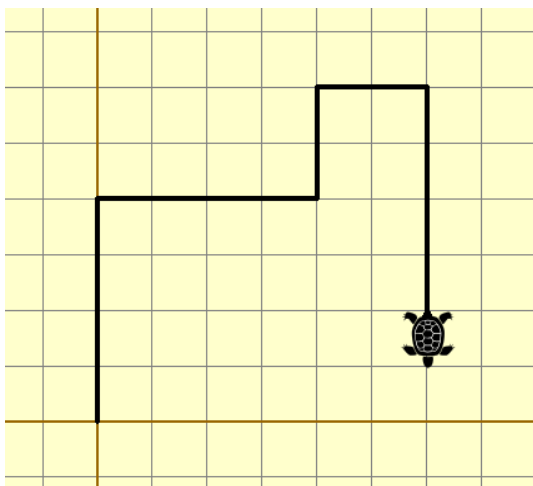


Рисунок 3. Задание с черепашкой

Можно делать и обратные задания, когда дана последовательность команд и нужно нарисовать маршрут на координатной плоскости. Главное, перед выполнением задания, запретить обучающимся, поворачивать листок или поворачиваться самим. Важно понимать, что в данном задании основным действием, которое формирует пространственные представления, является поворот объекта в определенную сторону, обучающийся легко представляет себе поворот на плоскости, когда объект, который поворачивает сонаправлен с обучающимся, но когда объект находится, например, перпендикулярно к обучающимся, то гораздо сложнее правильно определить направление поворота объекта, именно в такие моменты и начинает работать пространственное мышление.

Для определения уровня сформированности пространственных представлений рекомендуется диагностические задания. Мы должны выявить тот уровень, на котором произошел «сбой» в развитии ребенка, и определить «исходную точку» и объем работы с базовыми составляющими для их дальнейшего гармоничного формирования и развития [31]. В 6-7 классах диагностика должна быть менее формальной и более практической:

1. Практическая работа: Изготовление модели по чертежу. Данная работа сможет в полном объеме показать, насколько хорошо обучающийся умеет с помощью двумерной модели создавать трехмерную.

2. Координатный диктант: Проверка точности построения точек. Показывает, насколько хорошо обучающийся понимает концепцию координатной плоскости и умеет визуализировать числа.

3. Тест на узнавание: Соотнесение объемного тела и его развертки. Дает возможность проверить насколько хорошо обучающийся умеет представлять объемное тело в виде двумерной развертки.

4. Наблюдение: Умение ученика ориентироваться в тетради в клетку, аккуратно вести построения.

К концу прохождения курса математики в 6 класса обучающийся должен:

1. Соотносить точку на координатной прямой с соответствующим ей числом и изображать числа точками на координатной прямой, находить модуль числа.

2. Соотносить точки в прямоугольной системе координат с координатами этой точки.

3. Пользоваться масштабом.

4. Приводить примеры объектов окружающего мира, имеющих форму изученных геометрических плоских и пространственных фигур, примеры равных и симметричных фигур.

5. Изображать с помощью циркуля, линейки, транспортира на нелинованной и клетчатой бумаге изученные плоские геометрические фигуры и конфигурации, симметричные фигуры.

6. Находить, используя чертёжные инструменты, расстояния: между двумя точками, от точки до прямой, длину пути на квадратной сетке.

7. Распознавать на моделях и изображениях пирамиду, конус, цилиндр, использовать терминологию: вершина, ребро, грань, основание, развёртка.

8. Изображать на клетчатой бумаге прямоугольный параллелепипед.

9. Решать несложные задачи на нахождение геометрических величин в практических ситуациях.

К концу 7 класса:

1. Распознавать изученные геометрические фигуры, определять их взаимное расположение, изображать геометрические фигуры, выполнять чертежи по условию задачи.
2. Строить чертежи к геометрическим задачам.
3. Решать задачи на клетчатой бумаге.
4. Владеть понятием геометрического места точек.
5. Проводить основные геометрические построения с помощью циркуля и линейки.

Таким образом, развитие пространственных представлений в 6 и 7 классах – это не просто подготовка к геометрии, это развитие общего интеллекта ребенка. Программа выстроена таким образом, что развитие пространственного мышления происходит практически в каждом разделе математики. Практический каждый раздел содержит задания, которые так или иначе затрагивают геометрию. Это обусловлено тем, что умение ориентироваться в координатах, понимать симметрию и соотносить план с реальностью необходимо в жизни, например, в навигации, при чтении схем и в дизайне.

Учителю важно понимать, что 6-7 класс – это возраст, когда преимущественно нужно использовать наглядные, игровые, практические, проектные и групповые формы работ, на данном этапе практика важнее сухой теории. Чем больше обучающийся своими руками построит, вырежет и начертит, тем прочнее будут его пространственные представления, что обеспечит успешное обучение в старших классах. Но так же не стоит забывать про развитие речевых навыков обучающихся, давать им больше возможности объяснять, делать выводы и тому подобное. Речь во многом определяет эффективность всех видов деятельности, в том числе и деятельности, связанной с пространственным мышлением [19].

Выводы по главе 1

Внедрение цифровых технологий, развитие сложных технических профессий и повышение требований к профессиональным компетенциям специалистов вызывает огромную потребность в развитии пространственных представлений.

Уроки математики являются основным инструментом для развития и формирования пространственных представлений у обучающихся. Внедрение различных цифровых образовательных ресурсов и использование разных методик преподавания при изучении математики могут повысить эффективность обучения. Своевременная и правильная диагностика сформированности пространственных представлений у обучающихся поможет выявить места, где возникают основные проблемы и скорректировать методы преподавания и используемые технологии и ресурсы.

Основой для развития пространственных представлений является курс математики в 6-7 классах, в этих классах появляется планиметрия и стереометрия, начинается углубление в изучении координатной плоскости и графиков функций. Данный возраст обучающихся отлично подходит для использования интерактивных и наглядных технологий, обучающиеся 6-7 класса отлично воспринимают цифровые образовательные ресурсы. В совокупности это и делает курс математики в 6-7 классах основой для развития пространственных представлений.

Пространственные представления являются ключевым фактором для дальнейшей успешной профессиональной деятельности обучающихся, поэтому стоит уделять их развитию больше внимания и начинать это делать как можно раньше.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 6-7 КЛАССОВ

2.1. Анализ содержания школьных учебников математики основной школы в контексте развития пространственного мышления

Реализация требований ФГОС основного общего образования предполагает формирование метапредметных результатов, среди которых пространственное мышление занимает особое место. В структуре школьного математического образования линия развития пространственных представлений берет свое начало в пропедевтическом курсе математики 5-6 класса и начинает стремительно развиваться в 7 классе. Исходя из этого анализ учебно-методических комплектов для 6-7 классов позволит выявить их сильные и слабые стороны и оценить потенциал действующих учебных программ.

В качестве объектов анализа будут выступать учебники, рекомендованные Министерством образования и науки Российской Федерации.

Для 6 класса:

1. Математика 6 класс. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С и др. 3-е издание переработанное. АО Издательство «Просвещение», 2023-2024г. [6].

Для 7 класса:

1. Математика. Алгебра: 7-й класс: базовый уровень: учебник. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.; под ред. Теляковского С.А. 15-е издание, переработанное. АО Издательство «Просвещение», 2023-2024г [20].
2. Математика. Геометрия: 7-9 классы: базовый уровень: учебник. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. 14-е издание, переработанное. АО Издательство «Просвещение», 2024-2025г. [2].
3. Математика. Вероятность и статистика: 7-9 классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях. Высоцкий И.Р., Яценко И.В.; под ред. Яценко И.В. 1-е издание. АО Издательство «Просвещение», 2023-2024г. [40].

Анализ учебных материалов будем проводить с помощью критериев, адаптированных из работ И.С. Якиманской:

1. Наличие заданий на визуализацию и вращение объекта с помощью воображения.
2. Доля задач, требующих перехода от двумерных объектов к трехмерным и обратно.
3. Наличие заданий на работу с развертками, сечениями, проекциями и чертежами.
4. Наличие заданий на оперирование формой, величиной изображаемых объектов, их пространственными соотношениями.
5. Градация заданий по степени сложности, соответствие различным уровням развитости пространственных представлений [39].

Учебник для 6 класса представлен в 2 частях, 1 часть учебника включает в себя три главы: «Вычисления и построения», «Действия со смешанными числами», «Отношения и пропорции». Анализировать будем третью главу, так как именно там и содержатся темы, которые способствуют развитию пространственных представлений. Глава состоит из шести тем:

1. Отношения
2. Пропорция
3. Прямая и обратная пропорциональные зависимости
4. Масштаб
5. Симметрия
6. Длина окружности и площадь круга. Шар

Тема отношения направлена на формирования навыка сравнения различных величин. Стоит отметить, что материал в данной теме напрямую не связан с пространственными представлениями, но связь с ними имеется если правильно интегрировать образное мышление в решение задач. В теме много заданий, в которых есть возможность визуализировать числа в реальные объекты и сравнивать их. Например, для задачи (рис. 4) можно попросить обучающихся взять определенное количество карандашей и поделить на три

кучки в соответствии с отношением, данным в задаче и решать ее используя получившиеся кучки.

- 3.12** Картофель разложили в 3 ящика. В первый положили 0,2 всего картофеля, во второй — 0,5 всего картофеля, а в третий — 0,3 всего картофеля. Что показывает отношение:
 а) 0,2 к 0,5; б) 0,2 к 0,3; в) 0,5 к 0,3; г) $(0,5 + 0,3)$ к 0,2?

Рисунок 4 Задача с ящиками

Данный прием для подобных задач дает возможность визуализировать условия задачи и работать с отношениями реальных объектов. Визуализация чисел и сравнение их с помощью реальных моделей эффективна для начала развития пространственных представлений.

Еще одним примером визуализации чисел и сравнение их с помощью модели является задания подобные данному (рис. 5).

Рассмотрите рисунок 3.1 и ответьте на вопросы.

- Какую часть площадь дома составляет от площади участка?
- Во сколько раз площадь гаража меньше площади дома?
- Найдите отношение площади дома к площади огорода и отношение площади огорода к площади дома.
- Площадь выделенную под огород планируют разделить в отношении 1 : 5. Меньшую из полученных площадей займёт парник. Найдите площадь парника.

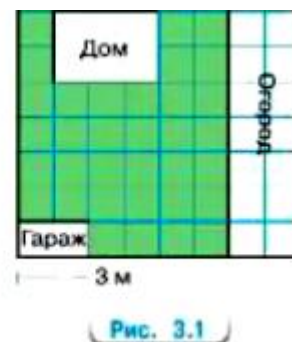


Рисунок 5 Задача на клетчатой бумаге

В подобных задачах уже дана готовая модель, то есть числа уже визуализированы и с помощью этой модели нужно сравнить числа.

Визуализация чисел является хорошей основой для развития пространственных представлений, так как в дальнейшем обучающимся предстоит работать с фигурами и телами, многие параметры которых будут выражены с помощью чисел. И для правильной визуализации различных тел с соблюдением пропорциональности, обучающийся должен уметь сравнивать числа и правильно визуализировать их в реальные параметры тела.

В следующей теме вводится понятие «пропорция» в алгебраическом контексте, но в дальнейшем это понятие будет и применимо к геометрическим фигурам. Сразу хочется обратить внимание на наличие заданий с развертками (рис. 6), которые очень грамотно интерпретированы в тему пропорции.

3.52 Какие фигуры (рис. 3.2) являются развёртками (штрихами отмечены равные отрезки):

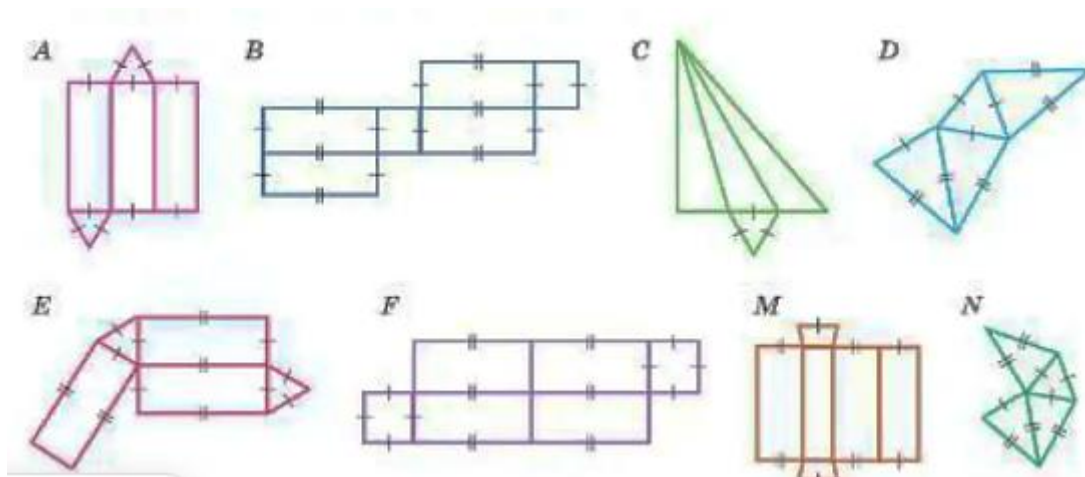


Рисунок 6 Задача с развёртками

Задания подобного типа соответствуют сразу нескольким критериям, во-первых, обучающийся работает с развёртками, во-вторых, обучающемуся нужно правильно оценить двумерную фигуру и определить возможность преобразования двумерного объекта в трехмерный, в-третьих, обучающийся оперирует формой, величиной изображаемых объектов, их пространственными соотношениями. На мой взгляд, для данной темы стоит добавить больше подобных заданий с визуализацией так как пропорцию проще и целесообразней изучать и понимать с различных моделей, как, например, в задании с развёртками. Деятельность пространственного мышления в большей мере направлена на оперирование образами, созданными на различной графической основе, чем на их создание [17]. Следовательно, если мы говорим про развитие пространственных представлений на уроках математики, то и упор нужно делать на задания, связанные с оперированием различными объектами.

Тема «масштаб» должна быть на прямую связана с работай над различными чертежами и картами, с оперированием над размерами объектов и их пространственными соотношениями. Однако же задания в данной теме носят алгебраический характер. Они хоть и связаны с картами и чертежами, но работы с ними нет. Примеры заданий из учебника (рис. 7):

3.101 Расстояние между Москвой и Владимиром 180 км. Найдите масштаб карты, если на ней это расстояние равно: а) 72 мм; б) 4,5 см; в) 12 см.

3.103 Расстояние между населёнными пунктами на карте равно 6,5 см. Найдите расстояние между этими пунктами на местности, если масштаб карты $\frac{1}{100\,000}$.

3.107 Длина Байкало-Амурской магистрали 4324 км. Какой длины получится линия, изображающая эту магистраль на карте, сделанной в масштабе:
1) 1 : 20 000 000; 2) 1 : 25 000 000?

3.108 Расстояние между Солнцем и Землёй равно 149,6 млн км и изображено на схеме отрезком, равным 6 см. Чему равно на этой схеме расстояние между Солнцем и Марсом, если между ними 227,9 млн км? Какое расстояние от Солнца до Юпитера, если на схеме оно равно 31 см? Результаты округлите до десятых.

Рисунок 7 Задачи по теме «масштаб»

Исключением являются задания, где присутствует работа с картой и чертежами. Вот пример из учебника (рис. 8):

- 3.102** а) Определите по карте (рис. 3.6) расстояния от леса (точка А) до посёлков Лесное (точка В) и Ягодное (точка С).
б) Определите размеры божьей коровки по рисунку 3.5.



1 : 100 000

Рис. 3.6

- 3.105** На рисунке 3.7 изображены два участка земли в масштабе 1 : 50 000. Найдите их действительные размеры, периметр и площадь.

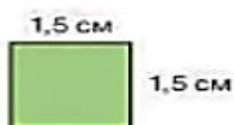


Рис. 3.7

Рисунок 8 Задачи по теме «масштаб»

Подобных заданий в теме учебника всего три, хотя такие задания позволяют лучше понять концепцию масштаба. Работа только с числами при изучении темы масштаб не дает реальных представлений о нем, обучающийся воспринимает масштаб как отношение между числами, а не как меру выражения соотношения между реальными объектами и моделями объектов. Правильное восприятие размеров объектов является неотъемлемой частью формирования пространственных представлений.

Тема «симметрия» основана на действиях с объектами в пространстве и на плоскости. Данная тема активизирует сразу три компонента пространственных представлений (таблица 1)

Таблица 1 – Реализация компонентов пространственных представлений в теме «Симметрия»

Компонент пространственных представлений	Реализация в теме «Симметрия»
Перцептивный (восприятие физических характеристик объекта)	Определение осей и центров симметрии в фигурах, фиксация равенства расстояний и углов.
Репродуктивный (воспроизведение по памяти или образцу)	Построение симметричных точек или объектов относительно данных с использованием оси симметрии.
Прогностический (предсказание возможных изменений)	Прогнозирование изменений положения объекта при его вращении на определенный градус, достраивание фигуры по ее половине.

Исходя из этого, тема «Симметрия» должна быть наполнена заданиями на вращение объектов, достраивание объектов по их части, изображение объекта симметричного данному относительно заданной оси(точки) симметрии. Учебник содержит много заданий на построение симметричных объектов с использованием заданной осью симметрии (рис. 9):

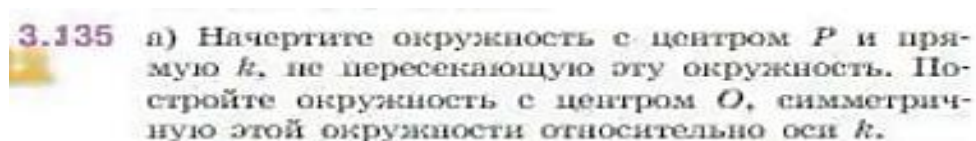


Рисунок 9. Задача на симметрию

Нет заданий на достраивание объектов по их части, так же не хватает заданий на нахождение центра или оси симметрии. Подобные задания

предполагают работу непосредственно с формой, размером и расположением объекта на плоскости, а как мы уже выяснили работа с физическими свойствами объектов способствует развитию пространственных представлений, накапливается база образов, которая в дальнейшем помогает работать с различными объектами.

Таким образом, учебник для 6 класса имеет некоторые дефициты с точки зрения развития пространственных представлений, не хватает разнообразия заданий. Учебник дает хорошую базу для развития пространственных представлений, формирует понятийный аппарат и способствует формированию базовых навыков, но для более широкого развития пространственных представлений следует использовать дополнительные задания с применением различных методик, дидактических материалов и цифровых образовательных ресурсов.

Перейдем к анализу учебника по геометрии для 7-9 классов. Часть для 7 классов состоит из 5 глав:

1. Начальные геометрические сведения.
2. Треугольники.
3. Параллельные прямые.
4. Соотношения между сторонами и углами треугольника.
5. Геометрические места точек. Симметричные фигуры.

В первой главе продолжает формироваться понятийный аппарат, формулируются базовые геометрические определения такие как: прямая, отрезок, луч и угол. Обучающиеся изучают составные части фигур и тел, чтобы в дальнейшем оперировать ими. Вторая тема «провешивание прямой на местности» отлично отражает прикладной характер геометрии и важность формирования пространственных представлений, повышает интерес у обучающихся к изучению геометрии, происходит это благодаря описанию процесса «проведения» длинных отрезков прямых на местности с использованием вех (веха – шесты длиной около 2 метров с заостренным

концом). Данный пример отлично показывает, что геометрия применима в реальной жизни и пространственные представления важны для ее изучения.

Далее идет серия тем, связанных с измерением и сравнением углов и отрезков. Данные темы важны тем, что они показывают, как сравнивать отдельные части фигуры и как они могут быть взаимосвязаны. При изучении данных тем важно выстроить процесс обучения так, чтобы обучающиеся воспринимали отрезки, углы и прямые как самостоятельные геометрические объекты, так и части разнообразных фигур и тел, тогда в дальнейшем будет проще организовать процесс формирования пространственных представлений.

Темы про перпендикулярные прямые непосредственно связаны с пространственными представлениями, рассматривается самый элементарный случай взаиморасположения двух объектов на плоскости. Описание способа построения прямых углов на местности повышает мотивацию у обучающихся, так как они видят практическую применимость геометрии в жизни. Так же это дает возможность потренировать пространственные представления на практике, например, попытаться построить прямой угол прямо в классе при помощи описанного способа.

Переходя к изучению тем про равенство треугольников важно понимать, что от изучения и сравнения составных элементов фигур происходит переход к сравнению целых фигур. Данный комплекс тем является одним из структурообразующим элементом пространственных представлений. Однако в учебнике данный комплекс реализуется больше в логико-дедуктивном, а не в пространственно-деятельностном ключе. Для описания потенциала данных тем, воспользуемся таблицей, где будут показаны потенциальные возможности для формирования каждого из компонентов пространственных представлений (таблица 2).

Таким образом, раздел «Треугольники» имеет огромный потенциал с точки зрения развития пространственных представлений, важно только правильно подобрать дополнительные задания и выбрать нужную методику.

Таблица 2 – Раскрытие потенциала тем по компонентам пространственных представлений

Компонент пространственных представлений	Реализация в разделе «Треугольники»	Потенциал
Перцептивный (восприятие физических характеристик объекта)	Распознавание равных треугольников, сравнение треугольников по отдельным частям.	Формирование геометрического зрения, развитие способности видеть и сравнивать фигуры при изменении их положения.
Репродуктивный (воспроизведение по памяти или образцу)	Построение треугольника по его элементам. Проверка равенства треугольников.	Проверка равенства путем физического или мысленного наложения
Прогностический (предсказание возможных изменений)	Прогнозирование равенства без измерений.	Прогнозирование равенства с помощью изменения положения фигуры на плоскости, достраивание недостающих элементов.

При изучении раздела «Параллельные прямые» развивается чувство направленности, распознавание параллельности в различных ориентациях. В учебнике акцент делается на вычисление углов, а не на визуализацию. Обучающиеся теряют пространственную интуицию, работая только с абстрактными прямыми, решение задач сводится к шаблонному применению признака, глава носит планиметрический характер, стереометрия встречается эпизодически.

Завершающая глава «Геометрические места точек. Симметричные фигуры» знакомит обучающихся со свойствами биссектрис, перпендикуляров, медиан, хорд и касательных. В данной главе обучающиеся работают с расположением фигур и различных отрезков, и при этом отрезок интерпретируется не как статичная линия, а как результат движения точки в определенном направлении. Здесь есть огромный потенциал для реализации различных дидактических средств и цифровых образовательных технологий, можно включать в процесс изучения задания на построения в виртуальной среде или задания на работу с реальными моделями фигур.

На основе проведенного анализа сделаны следующие выводы по учебнику геометрии для 7 класса:

1. Учебник хорошо способствует формированию базы понятий и навыков.
2. Доминируют задачи репродуктивного уровня. Преобладают упражнения с упором на шаблонное применения алгоритмов, теорем и свойств.
3. Задания локализованы в рамках плоскости, мало связи с пространством.
4. Недостаточно заданий на развитие прогностического компонента.

Пространственные представления можно развивать не только на уроках геометрии, но и на уроках других математических предметов: алгебры, вероятности и статистики. Раскроем потенциал других тем (таблица 3).

Таблица 3 – Потенциальные возможности математики в контексте развития пространственных представлений

Название главы	Потенциал главы для каждого компонента		
	Перцептивный	Репродуктивный	Прогностический
Функции и их графики	Распознавание функций по их графику, определение знаков коэффициентов функции по графику. Формирование геометрического зрения, развитие способности определять свойства функции по графику	Построение графика по заданным точкам, закрепление навыков работы с координатной плоскостью, перенос числовой информации в графическую	Предсказание изменений графика при изменении коэффициентов функции, мысленный сдвиг графиков на координатной плоскости, развитие способности динамического моделирования
Одночлены	Визуализация степени переменной как пространственной характеристики. x^1 -длина, x^2 -площадь, x^3 -объем.	Приведение символической записи в наглядный образ	Прогнозирование результатной размерности при умножении переменных
Квадрат суммы и квадрат разности	Визуализация формулы $(a + b)^2$ в виде квадрата со стороной $(a + b)$, формирование способности видеть структуру площади за символами	Построение геометрического доказательства формулы с помощью чертежа	Мысленное вычитание площадей для формулы $(a - b)^2$

Таким образом, при правильной интеграции заданий в различные темы учебных математических предметов, можно развивать пространственные представления. Можно выявить определенный потенциал для развития пространственных представлений в различных содержательных линиях школьного курса математики, не только геометрической.

При изучении курса «Вероятность и статистика» в классе так же можно активизировать пространственные представления, что положительно скажется на процессе обучения. Основой для активизации пространственных представлений является возможность визуализировать цифры и данные в таблицах или диаграммах. Следующий немаловажный момент связан с вероятностью, вероятность можно рассматривать как отношение площадей – благоприятной к общей. Так же можно развивать и прогностический компонент путем прогнозирования изменения данных в таблице при измененных условиях. Можно связывать представленные данные в виде графиков с координатной плоскостью. При работе с круговыми диаграммами важно указать на связь с градусной мерой угла.

Таким образом, «Вероятность и статистика» имеет потенциал для развития пространственных представлений, но раскрыть этот потенциал будет сложнее, чем в других содержательных линиях, так как сама по себе вероятность вызывает затруднения у обучающихся, а с интегрированной в нее геометрией получится создать более понятный контекст. При правильно подобранном совмещении содержания, адекватной методике и дидактических средствах, возможно развитие пространственных представлений обучающихся и обогащение обоих курсов.

В результате анализа мы выделили темы учебных курсов Математика, Алгебра, Геометрия, Вероятность и статистика, в процессе которых может быть сделан акцент на формирование пространственных представлений обучающихся 6-7 классов.

Математика, 6 класс:

1. Отношения

2. Пропорция
3. Прямая и обратная пропорциональные зависимости
4. Масштаб
5. Симметрия
6. Длина окружности и площадь круга. Шар

Геометрия, 7 класс:

1. Все темы раздела «Начальные геометрические сведения».
2. Первый признак равенства треугольников.
3. Перпендикуляр к прямой.
4. Окружность.
5. Построение циркулем и линейкой.
6. Практические способы построения параллельных прямых.
7. Расстояние от точки до прямой.
8. Построение треугольника по трем элементам.
9. Геометрические места точек.
10. Окружность. Касательная к окружности.
11. Симметричные фигуры.

Алгебра, 7 класс:

1. Функции и их графики.
2. Одночлены.
3. Квадрат суммы и квадрат разности.

Вероятность и статистика, 7 класс:

1. Таблицы.
2. Столбиковые диаграммы.
3. Круговые диаграммы.
4. Группировка данных и гистограммы

В процессе изучения перечисленных тем достаточно сделать на подходящем этапе урока акцент на том или ином моменте, связанном с пространственными представлениями. Покажем, как это можно реализовать на различных этапах урока.

2.2. Разработка серии занятий по математике, направленных на формирование пространственных представлений обучающихся 6-7 классов

Для раскрытия потенциала школьного курса математики в контексте развития пространственных представлений у обучающихся были разработаны восемь занятий различных содержательных линий, с использованием различных технологий и методик.

Занятие 1. Отношения. Полная технологическая карта занятия приведена в Приложении Г.

Цель занятия: раскрыть суть понятия «отношение» с точки зрения алгебры и геометрии.

Формируемые предметные УУД:

1. Сравнивать целые числа, обыкновенные и десятичные дроби.
2. Выполнять арифметические действия с обыкновенными и десятичными дробями.

Этапы урока с акцентом на развитие и активизацию пространственных представлений.

1 Этап мотивации и актуализации знаний.

Учитель:

- Посмотрите, пожалуйста на доску, там есть картинка с двумя квадратами, можете ли вы сказать, чем они отличаются? (рис. 10)

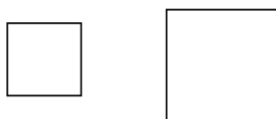


Рисунок 10. Квадраты для сравнения

Обучающиеся:

- Да, квадраты разных размеров

Учитель:

- А что мы сейчас сделали с этими квадратами, чтобы понять чем они отличаются?

Обучающиеся:

- Мы их сравнили.

Учитель:

- Все верно, мы сравнили два квадрата и выяснили как их размеры относятся друг к другу. И сегодня мы с вами будем изучать тему «Отношения». Предположите, что мы будем делать при изучении данной темы?

Обучающиеся:

- Мы будем сравнивать что-нибудь

На данном этапе активизировано геометрическое зрение обучающихся. Ученики проанализировали две фигуры на доске и сделали вывод касемо их размеров, это послужило небольшой подготовкой к дальнейшей работе наглядно-образного моления.

2 Этап первичной проверки понимания и закрепления.

На данном этапе обучающимся выдаются 3 задания для выполнения:

Задание 1.

Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольник с отношением сторон 1:2, рядом постройте прямоугольник с таким же отношением сторон, но с площадью в 4 раза больше.

Задание 2.

(Учитель просит каждого ученика достать 20 карандашей, ручек или фломастеров)

1) Поделите карандаши в отношении 2:3

2) В отношении 1:9

3) 1:1

Задание 3

(Учитель ставит на стол три ёмкости, в каждой емкости лежит некоторое число предметов, общее количество 20, по очереди каждый ученик подходит к столу и получает индивидуальное задание на распределение предметов по емкостям, остальные ученики в это время решают задания из учебника)

Примеры задания отношений:

1) В первой емкости в два раза больше, чем в третьей, во второй тоже в два раза больше чем в третьей.

2) Количество предметов в первой емкости в 5 раз меньше чем в 3, во второй в 4 раз больше чем в 1.

3) Отношение количества предметов в 1, 2, 3 емкостях 1:1:2

4) Отношение количества предметов в 1, 2, 3 емкостях 3:2:5

5) В 1 и 3 емкостях поровну, а во второй в 4 раза больше, чем в 1 и 2 вместе взятых.

Данные задания помогают закрепить пройденный материал новой темы, а так же способствуют развития пространственных представлений. Обучающиеся делят реальные объекты в заданном отношении, то есть у обучающихся появляется возможность визуализировать отношение, заданное в численной форме, они буквально могут физически ощутить, что значит отношение 1 к 2 и т.д.

Занятие 2. Длина окружности и площадь круга. Шар. Полная техкарта занятия приведена в Приложении Г.

Цель занятия: вывести формулу для длинны окружности, площади круга

Формируемые предметные УУД:

1. Оперировать определениями «длина окружности», «площадь круга».

2. Вычислять длину окружности, площадь круга.

Этапы урока с акцентом на развитие и активизацию пространственных представлений.

1 Этап мотивации.

Учитель раздает обучающимся различные круглые предметы и нитки и просит с помощью нити измерить длину круга и диаметр, затем поделить длину на диаметр и записать результаты вычислений.

Обучающиеся выполняют задания и получают, что отношение длины круга к диаметру всегда примерно равно 3,14

Учитель:

- Как вы думаете это совпадение или закономерность?

Обучающиеся:

- Скорее всего это какая-то закономерность.

Учитель:

- Все верно, это так называемое число π (пи), которое связывает длину края круга и диаметр. Теперь вы увидели, как математика окружает нас практически везде.

На данном этапе обучающиеся понимают, что число π - это не просто математическая константа, данная в учебнике, а число, которое можно получить с помощью измерений реальных объектов, в какой-то степени это является визуализацией числа с помощью реальных объектов. Так же если при объяснении теоретического материала учитель привлекает образы, то обучающиеся усваивают его лучше [18].

2 Этап закрепления.

На данном этапе обучающиеся получают 3 задания на закрепление:

Задание 1

Длина минутной стрелки часов 13см, какое расстояние проходит конец стрелки за час? Ответ дайте в сантиметрах.

Задание 2

Велосипедист при подъеме в горку за 1 секунду проезжает расстояние равное длине окружности колеса, известно, что в горку он движется с постоянной скоростью 120м в минуту, найдите диаметр его колеса. Ответ дайте в сантиметрах и округлите его до десятых.

Задание 3

В круглой беседке нужно покрасить пол, длина окружности беседки 12,56 метра, сколько краски потребуется если на 1м^2 нужно 0,16 кг краски? Ответ округлите до целого.

Данные задания вырабатывают у обучающихся привычку видеть математику в реальной жизни, обучающиеся начинают связывать математические действия и величины с реальными объектами, начинают

мыслить образами. Например, для решения задачи 1 обучающимся нужно представить настенные часы, дальше они мысленно рисуют траекторию движения стрелки и понимают, что конце стрелки при прохождении одного часа рисует окружность, а стрелка - это радиус той самой окружности. Подобные сопоставления создают базу образов, которыми обучающийся может оперировать в дальнейшем.

Занятие 3. Симметрии. Полная технологическая карта занятия приведена в Приложении Г.

Цель занятия: раскрыть тему «Симметрия» как инструмент формирования пространственного мышления

Формируемые предметные УУД:

1. Изображает с помощью циркуля, линейки, транспортира изученные конфигурации, симметричные фигуры.
2. Пользуется геометрическими понятиями: симметрия, использует терминологию, связанную с симметрией: ось симметрии, центр симметрии.

Этапы урока с акцентом на развитие и активизацию пространственных представлений.

1 Этап закрепления знаний.

На данном этапе обучающиеся получают задания:

Задание 1

Учитель:

- Давайте начнем с небольшой разминки, сядьте, пожалуйста по двое за парту. Вам понадобятся линейки либо циркули. Каждый на клетчатом листе бумаги рисует произвольную геометрическую фигуру, содержащую в себе 4 точки и задает ось либо центр симметрии, затем вы меняетесь листами с соседом по парте и каждый дорисовывает симметричный объект, после меняетесь обратно и проверяете друг друга. У вас на это есть 6 минут. (Пока обучающиеся выполняют задание, учитель ходит по классу и контролирует правильность выполнения, при необходимости помогает).

Учитель:

- 6 минут прошло, заканчиваем. Теперь давайте попробуем сделать более сложное упражнение. Задание так же будет в парах. Внимательно слушайте задание.

Задание 2

Вам нужно взять лист клетчатой бумаги, разрезать его пополам строго по границе клеточек. Каждый из вас берет свою половинку. Теперь представьте, что линия разреза - это ось симметрии, далее один из вас начинает построение и каждое действие проговаривает своему соседу.

Например: отступаю от верха листа две клетки, справа 3 и начинаю рисовать, далее черчу линию влево на 4 клетки, вниз на 3, вправо на 2, вниз, влево по диагонали клеток на 4. Ваш сосед должен повторять ваши построения, так что бы при обратном совмещении частей листа вы получили симметричные рисунки относительно оси симметрии (линии реза).

Рисунок должен строиться не менее чем по 6 действиям, не включая выбор начальной точки

Обратите внимание, что, когда ваш сосед двигается, например, влево, вы должны двигаться вправо чтобы получить симметричный рисунок. После построения одного рисунка, меняетесь ролями, тот, кто задавал рисунок - теперь повторяет. Главное не подсматривайте к соседу на его рисунок, старайтесь воспринимать все на слух. На выполнение задания у вас есть 10 минут. (Учитель ходит по классу, контролирует выполнения заданий, если необходимо - помогает)

Учитель:

- Время вышло, заканчиваем. Теперь попробуем поработать с объемными телами, точнее с их развертками.

Задание 3

Каждый из вас получает развертку фигуры (рис. 11), на одной из граней будет отмечена часть линии, которая проходить по нескольким граням, известно, что линия при переходе с одной грани на другую не меняет направление и для каждой грани линия является осью симметрии, ваша задача,

не собирая развертки, определить по каким граням будет проходить линия и правильно ее нанести. На выполнение задания вам дается 5 минут.

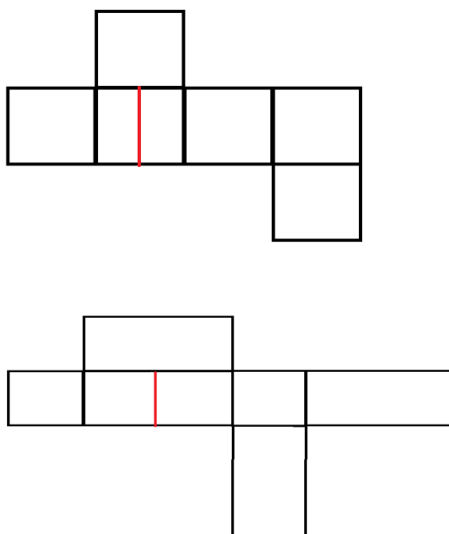


Рисунок 11. Развертки

Задание 1 помогает активизировать образное мышление и настроить обучающихся на активную работу с образами и фигурами. Задание 2 предполагает восприятие информации на слух и воспроизведение ее на клетчатом листе бумаги. Сначала обучающийся слышит информацию, затем в голове возникает образ, того, как эту информацию представить на листе и только потом обучающийся начинает рисовать. Инверсия движения вправо и влево создает дополнительное усложнение, что положительно сказывается на развитии пространственного мышления, то есть если сосед говорит, что движется влево, то обучающийся должен рисовать вправо, чтобы получить симметричный элемент. Задание 3 направлено на развитие прогностического компонента пространственных представлений. Обучающийся должен мысленно собрать развертку и спрогнозировать как пройдет линия.

2. Этап рефлексии.

Учитель:

- Давайте проведем рефлексию в необычной форме. Называется она: зеркало знаний. Вы выходите к доске со своим соседом, встает друг напротив друга и представляете, что между вами зеркало, один должен повторить позу

второго, в таком положении вы по очереди задаёте друг другу вопросы о том, что интересного было сегодня на уроке и в чём были трудности.

Подобная рефлексия включает в себя несколько действий, способствующих развитию пространственных представлений:

1. Мысленное моделирование плоскости симметрии.
2. Оперирование симметрией в трёхмерном пространстве.

Занятие 4. Осевая симметрия и её свойства. Полная технологическая карта занятия приведена в Приложении А.

Цель занятия: Вывести свойства симметрии

Формируемые предметные УУД:

1. Определяет взаимное расположение фигур, точек, отрезков.
2. Строит чертежи к геометрическим задачам.
3. Оперирует понятиями симметрия, ось симметрии, центр симметрии.

Этапы урока с акцентом на развитие и активизацию пространственных представлений.

1 Этап открытия новых знаний.

Учитель:

- В начале урока мы выяснили, что будем изучать свойства осевой симметрии. Давайте попробуем вывести эти свойства самостоятельно. Для этого нам понадобятся телефоны, чтобы отсканировать код.

Задание 1: Вам нужно попробовать построить разные варианты расположения двух прямых (AD и CF) относительно третьей (оси симметрии BE), чтобы определить симметричность прямых, у вас дано отношение расстояний между парами точек. Ваша задача, обязательно построить два варианта расположения прямых: 1) параллельны друг другу. 2) пересекаются. (Несколько различных построений). И посмотреть, как в первом случае расположены прямые относительно оси симметрии и как во втором располагается точка пересечения прямых.

Внимание: сначала выставляете точки A и D , а затем точки C и F . На выполнение 6 минут.

Скриншот задания с электронного ресурса представлен на рисунке (рис.12)

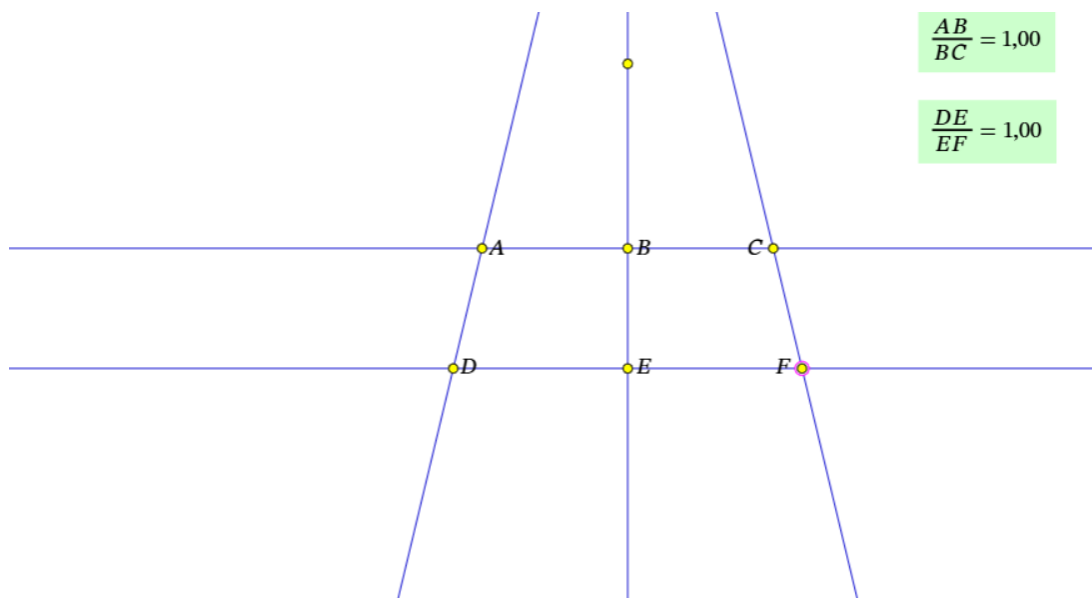


Рисунок 12. Инструмент для вывода свойства симметрии

Обучающиеся:

В ходе выполнения задания обучающиеся замечают, что если прямые пересекаются, то точка пересечения лежит на оси симметрии, а если прямые параллельны, то они параллельны оси симметрии, других вариантов у них не получается построить.

Учитель:

- Давайте тогда попробуем вывести первое свойство, опираясь на то, что мы только что выяснили.

Обучающиеся:

- Если две прямые симметричны относительно оси симметрии, то они либо параллельны, либо их точка пересечения лежит на оси симметрии.

Учитель:

- Но на этом не все, нужно вывести еще одно свойство. Давайте так же попробуете вывести его самостоятельно.

Для этого нужно выполнить задание

Задание 2: Для выполнения вам понадобится циркуль, линейка и раздаточный материал, который я вам выдам (рис. 13).

- 1) Вам нужно согнуть лист строго по отмеченной линии.
- 2) Циркулем аккуратно проколоть отмеченные точки так, чтобы след остался и на второй половине листа.
- 3) Подписать полученные точки, если точка получилась путем прокола точки A , то она подписывается A_1 .
- 4) Соединить все точки, сначала на одной половине листа, затем на второй.
- 5) С помощью линейки измерить отрезки, например AB и A_1B_1 и так далее.
- 6) Выяснить каким являются точки по отношению друг к другу (A и A_1 , B и B_1 и так далее) относительно линии сгиба листа.
- 7) Исходя из полученных измерений отрезков, выяснить каким они являются по отношению друг к другу (AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 и так далее).

На выполнение 7 минут.

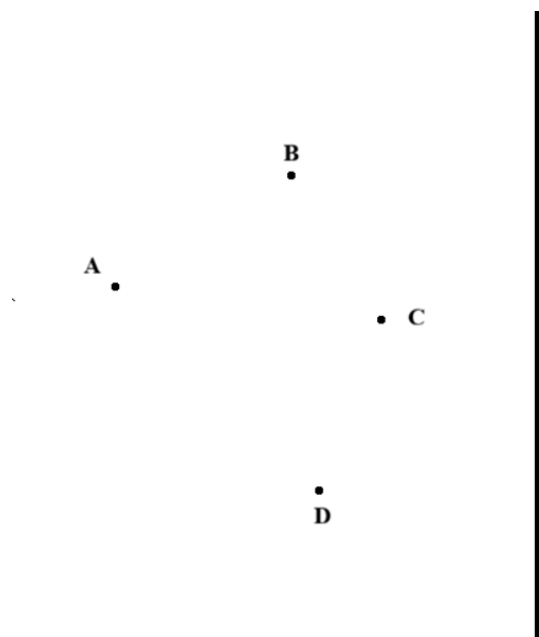


Рисунок 13. Инструмент для вывода второго свойства симметрии

Учитель:

- 7 минут прошло, завершайте выполнение и делитесь результатами.

Обучающиеся:

В ходе выполнения обучающиеся выясняют, что полученные точки симметричны данным точкам, и соответствующие отрезки равны.

Учитель:

- Попробуйте тогда сформулировать второе свойство.

Обучающиеся:

- Расстояние между двумя точками равно расстоянию между симметричными им точками

Учитель:

- Да, верно, расстояние между точками A и B равно расстоянию между симметричными им точками A_1 и B_1

Задание 1 позволяет в реальном времени, меняя положение точек, увидеть, как меняется конфигурация в целом, так же обучающиеся могут самостоятельно поэкспериментировать и рассмотреть несколько вариантов расположения симметричных прямых. Все это ускоряет переход материализованного действия к мысленному оперированию за счет мгновенной обратной связи. Задание 2 включает в себя систему чертёжно-графические действия преобразовательного характера, данная система является основой наглядно-образного мышления [35].

Занятие 5. Линейная функция и ее график. Полная технологическая карта занятия приведена в Приложении Б.

Цель занятия: Закрепить знания про линейную функцию.

Формируемые предметные УУД:

1. Строит графики линейных функций;
2. Находит значение функции по значению её аргумента.
3. Изображает на координатной плоскости точки, соответствующие заданным координатам.

Этапы урока с акцентом на развитие и активизацию пространственных представлений.

1 Этап актуализации знаний.

Учитель и обучающиеся схематично чертят возможные графики линейной функции вида $y = kx + b$.

Учитель:

- Так же, для проверки наших чертежей давайте воспользуемся цифровым ресурсом, который позволит нам в реальном времени, изменяя параметры k и b , понаблюдать за изменением графика (рис. 14).

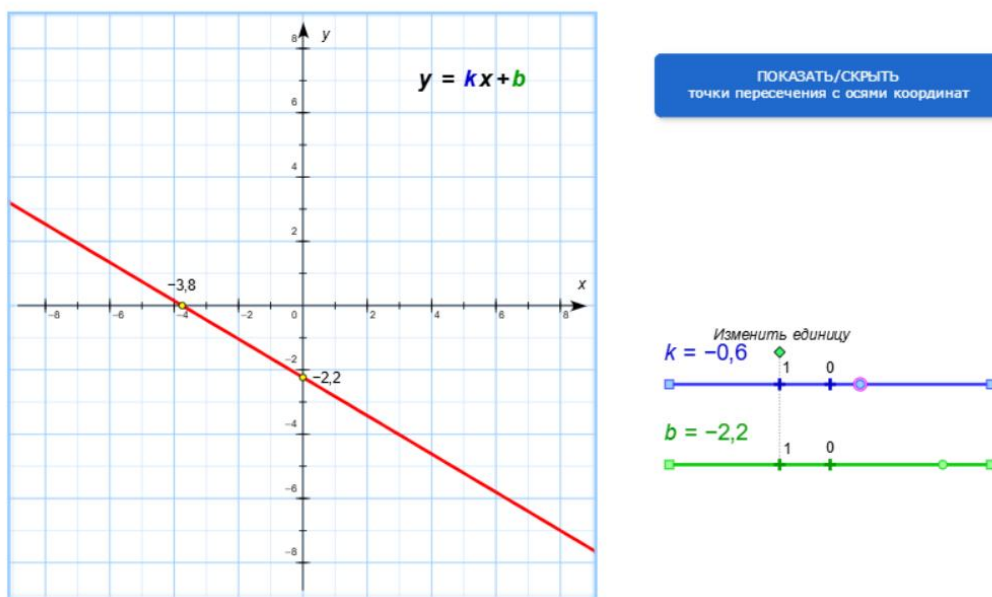


Рисунок 14. Модель графиков линейной функции вида $y = kx + b$.

2 Этап закрепления знаний.

Учитель:

- Давайте приступим к выполнению заданий.

Задание 1: Каждый из вас получает лист с графиками функций и самими функциями, ваша задача их правильно соотнести (рис. 15). На выполнение дается 5 минут.

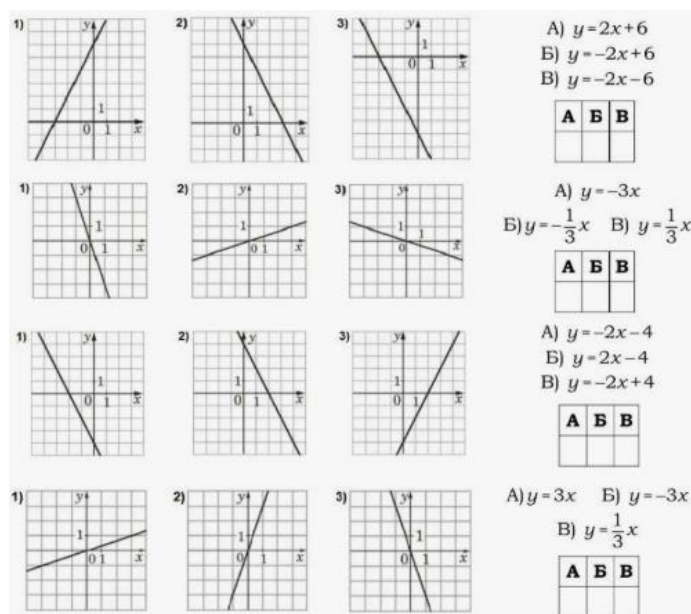


Рисунок 15. Задание на сопоставление графика с ее функцией

Задание 2: По данным точкам постройте графики функций, далее определите знак коэффициента k и напишите, чему равно b для каждого графика.

Точки:

- 1) (4;3), (2;0)
- 2) (-2;2), (2;-2)
- 3) (-1;3), (1;-3)
- 4) (-3;-2), (6;4)
- 5) (1;4), (-2;-2)

На выполнение 5 минут.

Задание 3: Попробуйте мысленно представить, что произойдет с графиками из задания 2 если поменять знак у коэффициента k на противоположный, запишите ваше предположение. Далее проведите эксперимент, возьмите любую функцию из задания 1, начертите ее график в тетради, затем поменяйте знак у k и начертите еще один график на той же координатной плоскости. Сделайте так с тремя функциями из задания 1, какую закономерность вы увидели? Что можно сказать про симметричность двух графиков одной функции, но с разными знаками при k , относительно прямой

параллельной оси x и проходящей через точку пересечения графика с осью y ?
На выполнение 8 минут.

Обучающиеся:

Делают свои предположения и записывают их. Далее проводят эксперимент, замечают, что точка пересечения с осью y не меняется, и замечают, что графики одной функции, но с разными знаками при k симметричны относительно оси проходящей через точку пересечения графика с осью y и параллельно оси x .

3. Этап рефлексии.

Учитель:

- Давайте мы проведем интересную рефлексию, которая поможет нам наглядно оценить свои возможности в теме «Линейная функция и ее график». Для этого я раздам вам заранее заготовленные листы самооценки, они в виде координатной плоскости. Ось y показывает нам насколько хорошо вы поняли тему (шкала от -10 до -1, где -10 – понял очень хорошо, -1 – не понял вообще), ось x показывает нам насколько вы уверены, что хотите и сможете изучить тему лучше и подтянуть свои знания (шкала от 1 до 10, где 1- уверен, что смогу лучше разобраться в теме и мне это интересно, 10 – не хочу разбираться в теме и мне она неинтересна). Соединив точки, вы получите график линейной функции, который будет показывать, насколько быстро вы сможете прогрессировать в теме «Линейная функция и ее график», чем быстрее ваш график возрастает, тем быстрее вы сможете полностью понять тему (рис. 16).

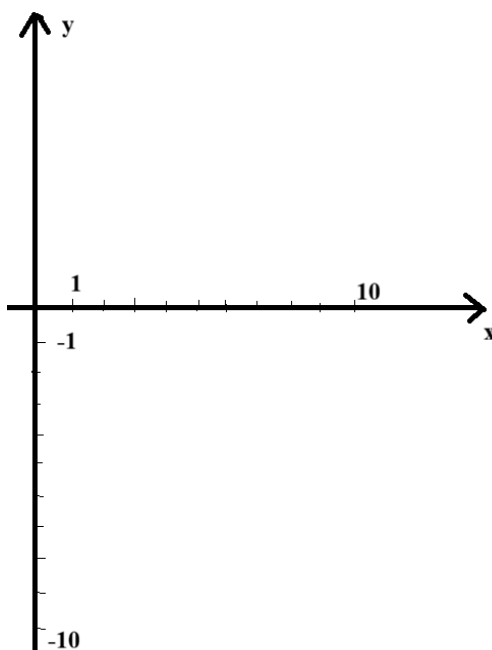


Рисунок 16. Лист для рефлексии

На этапе актуализации знаний для активизации пространственных представлений был взят тренажер с помощью которого обучающиеся смогли путём изменения коэффициента и свободного члена проследить за изменением графика функции, при сдвиге бегунков - график функции сразу же начинал двигаться – это позволяет сформировать наглядно-образную модель, которая в дальнейшем помогает лучше понять тему. Задания из этапа закрепления знаний были подобраны не случайно, каждое задание отвечало за развитие определенного компонента пространственных представлений. Задание 1 направлено на развитие перцептивного компонента, обучающиеся оценивали график функции по его расположению на координатной плоскости и искали соответствующую ему функцию, задание 2 направлено на развитие репродуктивного компонента - обучающиеся строили график функции по двум точкам, задание 3 направлено на развитие прогностического компонента - обучающиеся делали предположение, как изменится вид графика функции при изменении знака при k , а затем проверяли свои предположения.

Задание на этапе рефлексии позволяет визуализировать свой прогресс по пройденной теме в виде графика линейной функции.

Занятие 6. Возведение в квадрат суммы и разности. Полная технологическая карта занятия приведена в Приложении В.

Цель занятия: Вывести и доказать формулы квадрата суммы и квадрата разности.

Формируемые предметные УУД:

1. Выполняет умножение одночлена на многочлен и многочлена на многочлен;
2. Применяет формулы квадрата суммы и квадрата разности;
3. Умеет геометрически доказать формулу квадрата суммы и квадрата разности.

Этапы урока с акцентом на развитие и активизацию пространственных представлений.

1 Этап открытия новых знаний.

Для вывода формул квадрата суммы и квадрата разности используются интерактивные цифровые модели (рис. 17) и (рис. 18). Подробная инструкция по выведению формул с помощью моделей приведена в техкарте из приложения.

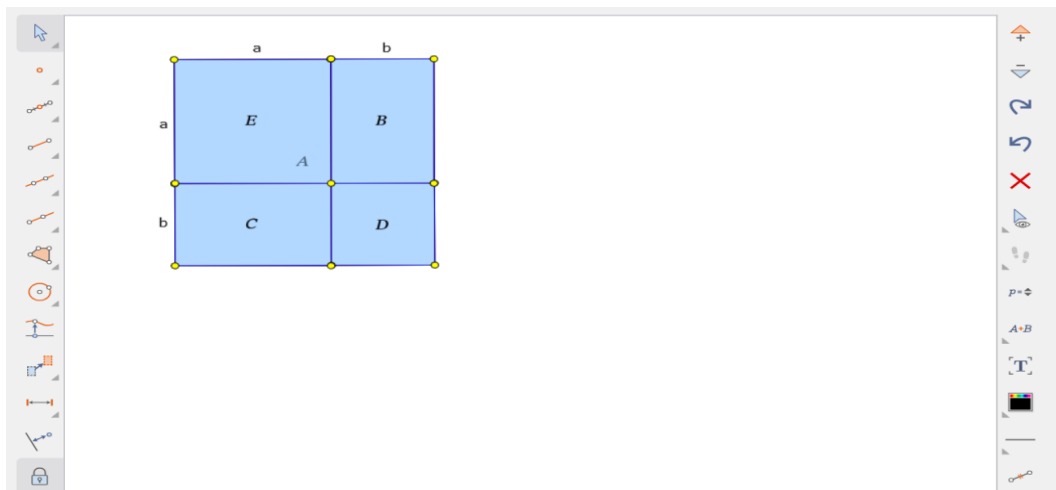


Рисунок 17. Модель для выведения формулы квадрата суммы

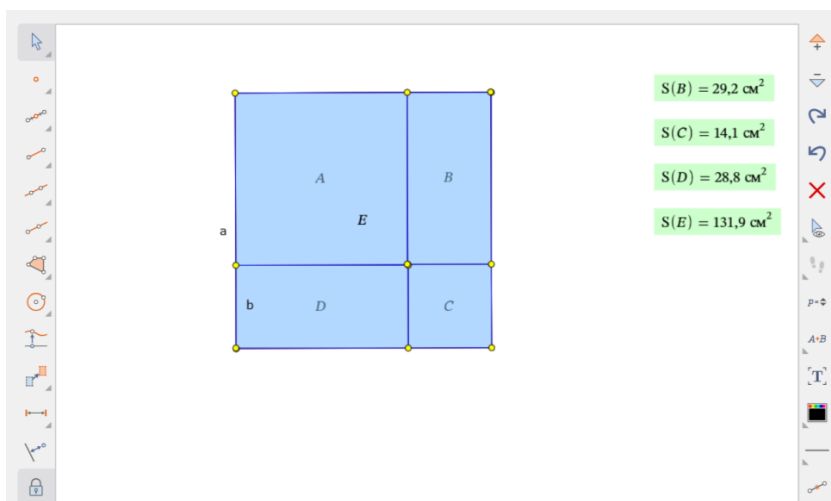


Рисунок 18. Модель для выведения формулы квадрата разности

2 Этап закрепления знаний.

Учитель:

- Я раздам вам готовые квадраты (рис.19), предположите, как изменится формула квадрата суммы a и b , если b увеличить в два раза, попробуйте дорисовать недостающую часть при увеличении b в два раза и с помощью рисунка записать формулу.

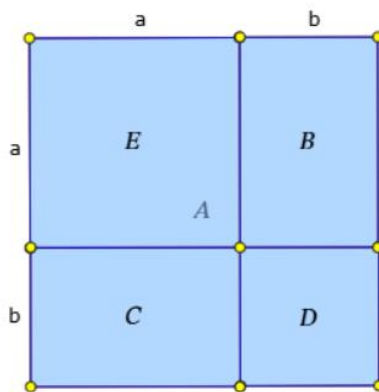


Рисунок 19. Раздаточный материал к заданию

Обучающиеся:

Делают рисунок (рис. 20) и записывают формулу $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$

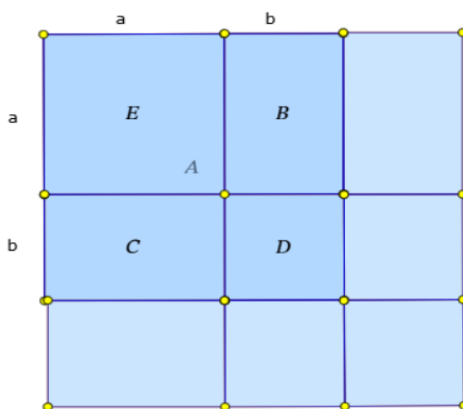


Рисунок 20. Готовый рисунок к заданию

На этапе открытия новых знаний используется интерактивный цифровой ресурс, это способствует созданию системы образов, показывающей взаимосвязь геометрии и алгебры, обучающиеся начинают замечать геометрический подтекст в алгебраических формулах. Создаются образы по типу: a^2 это площадь квадрата со стороной a .

На этапе закрепления знаний прогнозируют, как изменится рисунок, визуализируют свои предположения и уже на основе выявленной связи геометрии и алгебры и полученного рисунка пытаются без вычислений изменить формулу.

Занятие 7. Построение треугольника по трем элементам. Полная технологическая карта занятия приведена в Приложении Г.

Цель занятия: Научиться строить треугольник по трем элементам.

Формируемые предметные УУД:

1. Изображает геометрические фигуры, выполняет чертежи по условию задачи;
2. Пользуется свойством медианы, высот, биссектрис проведённой к гипотенузе в решении геометрических задач.

Этапы урока с акцентом на развитие и активизацию пространственных представлений.

1 Этап закрепления знаний.

На уроке используется электронный ресурс для выполнения 4 заданий. В Приложении Г будет технологическая карта с полной инструкцией для

пошагового выполнения заданий. На рисунках ниже представлены скриншоты заданий (рис. 21-24).

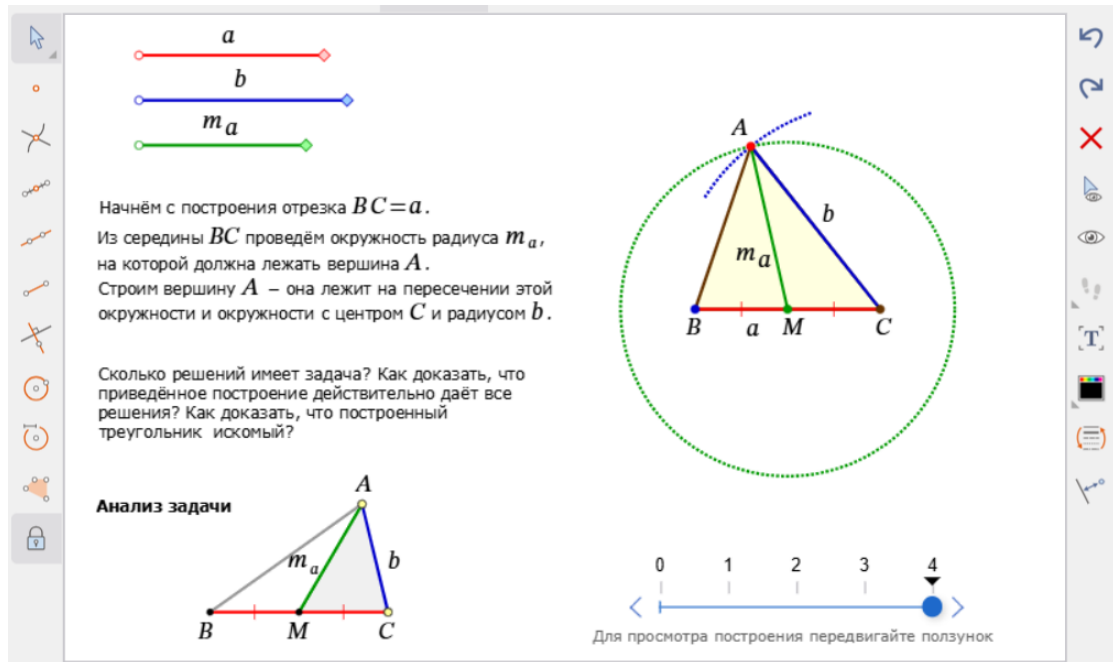


Рисунок 21. Построение треугольника по двум сторонам и медиане

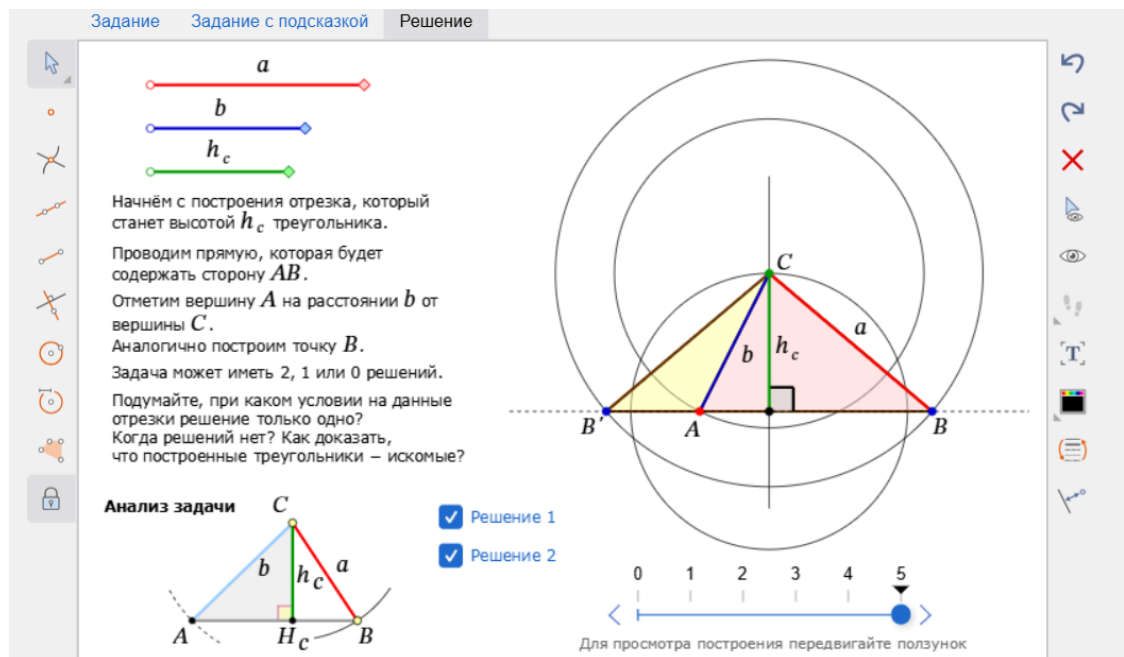


Рисунок 22. Построение треугольника по двум сторонам и высоте

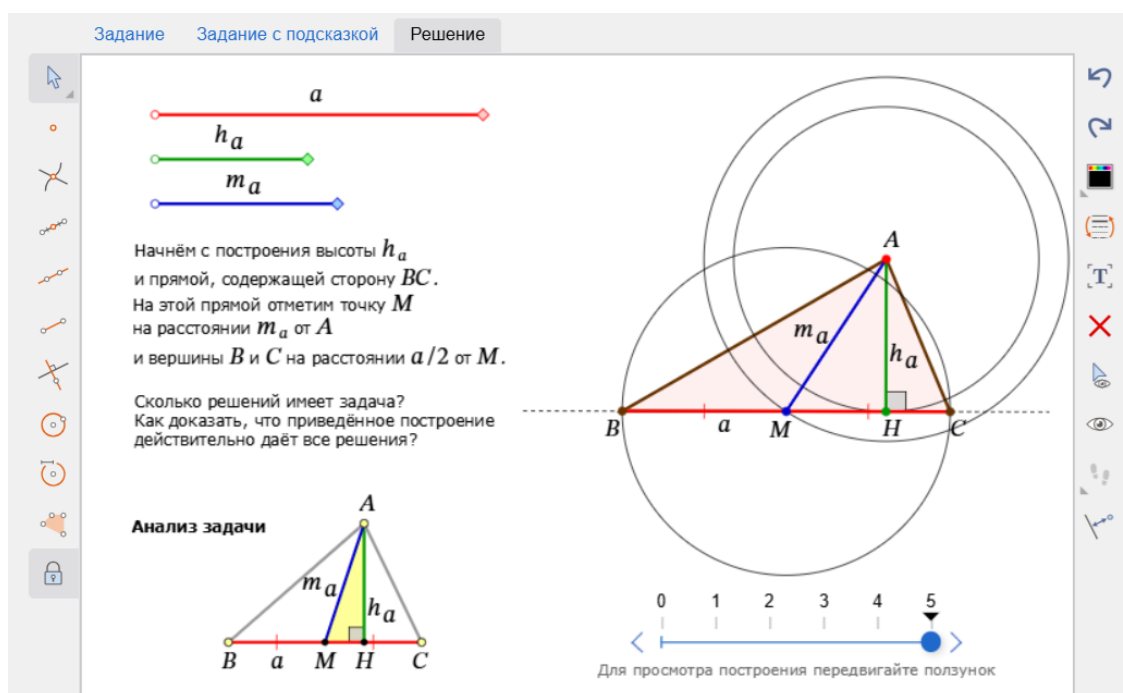


Рисунок 23. Построение треугольника по стороне, медиане и высоте

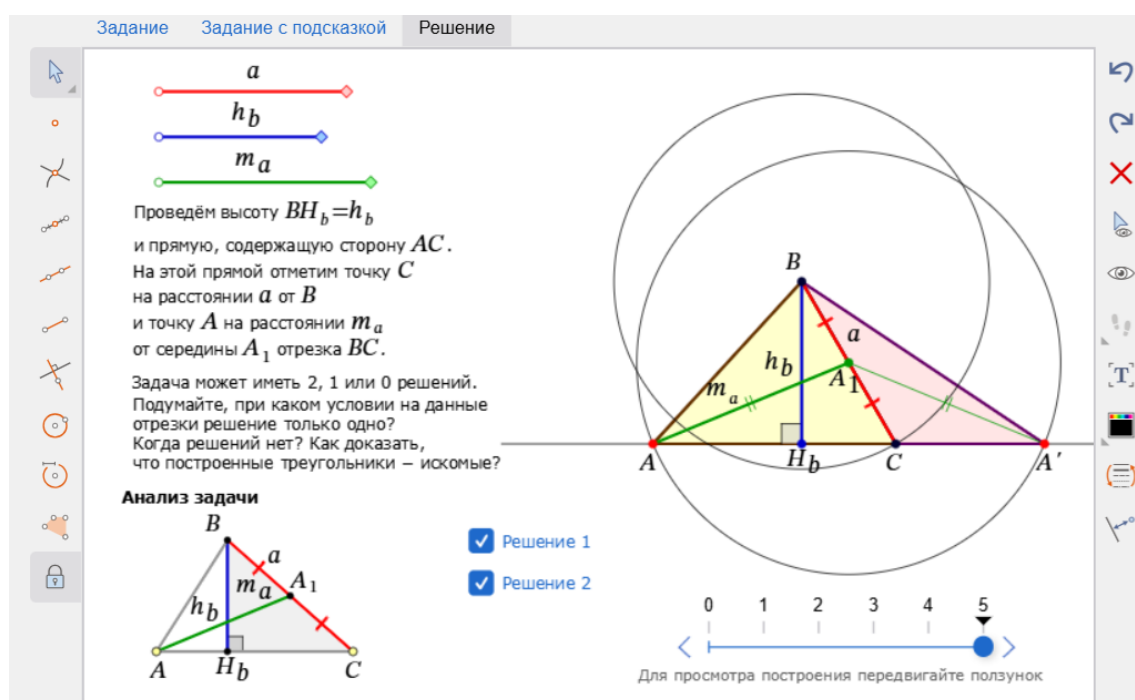


Рисунок 24. Построение треугольника по стороне, медиане и высоте

Данные задания дают возможность построить конфигурацию и в дальнейшем передвигать некоторые точки, чтобы посмотреть как меняется картинка в целом при изменении одного или нескольких параметров. Задания способствуют развитию математического зрения, способствуют развитию репродуктивного компонента, когда обучающиеся делают построения по инструкции учителя. Так же использование цифровой среды позволяет делать

некоторые эксперименты, например, обучающийся может посмотреть, как изменится картинка если сделать окружность чуть больше или чуть меньше и т.п., на листе бумаги же такое сделать гораздо сложнее.

Занятие 8. Столбиковые диаграммы. Полная технологическая карта занятия приведена в Приложении Г.

Цель занятия: Определить, что такое столбиковые диаграммы.

Формируемые предметные УУД:

1. Читает информацию, представленную на диаграммах;
2. Представляет данные в виде столбиковых диаграмм по массивам значений;
3. Описывает и интерпретирует реальные числовые данные, представленные на диаграммах

Этапы урока с акцентом на развитие и активизацию пространственных представлений.

1 Этап мотивации и целеполагания.

Учитель:

- На экране вы видите информацию про температуру в городе за неделю (рис. 25), представленную в двух различных формах. Где проще определить какой из дней был самым жарким?

Обучающиеся:

- Там, где информация показана столбиками, сразу видно самый высокий столбик у субботы.

Учитель:

- Теперь я раздам вам карточки (рис. 26), одну на парту, ваша задача данные из таблицы представить в виде столбиков, одна единица измерения равняется одной клетке, после сравниваете свою работу с соседом и проверяете правильно ли вы нарисовали высоту каждого столбика.

Обучающиеся выполняют задание.

Учитель:

- То, что вы только что построили называется столбиковой диаграммой.

2 этап первичной проверки понимания.

Учитель:

- Сейчас вам нужно пройти небольшой тест.

Тест представлен в приложении техкарты по данной теме.

Обучающиеся выполняют онлайн тест.

Учитель:

- Когда сделаете тест, говорите, я раздам вам листы с таблицей и заданиями к ней (рис. 27).

День недели	Груши(кг)
Пн	20
Вт	15
Ср	10
Чт	30

1) Не рисуя столбиковую диаграмму, скажите, какой столбик был бы самым высоким.
 2) Во сколько раз столбик «Вт» выше, чем «Ср»
 3) Если бы в пятницу продали 25 кг груши, то как бы располагался (по высоте) столбик «Пт» относительно остальных?
 4) Как бы изменилась диаграмма если бы в «Пн» продали на 15 кг меньше
 4.1) На чистом листе без клеток схематично нарисуйте столбиковую диаграмму «до» и «после»

Рисунок 27. Таблица с заданиями к ней

На этапе мотивации обучающиеся видят преимущество графической информации над словесной, появляется необходимость наглядно-образное мышление это мотивирует обучающихся развивать пространственные представления. Задание на самостоятельную работу способствует формированию у обучающихся способности интерпретировать словесную информацию в графическую. Задания с таблицей с этапа первичной проверки понимания способствуют развитию трех компонентов пространственных представлений. Пункт 1 и 2 способствуют развитию перцептивного компонента, обучающиеся работают с физическими характеристиками объекта к тому же все действия выполняют мысленно, опираясь на данные в таблице. Пункт 3 и 4 способствуют развитию прогностического компонента, обучающиеся мысленно прогнозируют как изменился бы вид диаграммы и делают выводы. Пункт 4.1 способствует развитию репродуктивного компонента, обучающиеся представляют информацию из таблицы в виде диаграммы.

Таким образом, можно сделать предварительный вывод о том, что разработанные занятия различных содержательных линий школьного курса

математики, с использованием различных технологий способствуют комплексному развитию пространственных представлений у обучающихся.

2.3. Апробация занятий на практике и методические рекомендации для учителя

Для выявления степени результативности разработанных занятий по разным содержательным линиям была проведена апробация. Исследование проводилось в МКОУ «Миндерлинская СШ» среди обучающихся 7 класса.

Обучение математике ведется по учебнику алгебры под редакцией С.А. Теляковского [20], по учебнику геометрии под руководством А.Н. Тихонова [2].

Для проведения апробации были привлечены 20 обучающихся 7 «А» класса.

Цель апробации – определить у обучающихся уровень сформированности пространственных представлений и результативность реализации разработанных занятий.

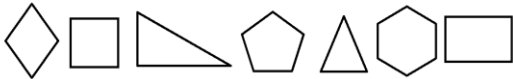
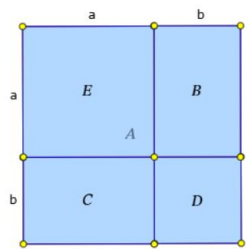
Задачи апробации:

- провести диагностику уровня сформированности пространственных представлений обучающихся 7 класса;
- включить в процесс обучения разработанные занятия;
- провести диагностику сформированности пространственных представлений после проведения разработанных занятий;
- анализ результатов исследования.

Для первоначальной диагностики сформированности у обучающихся пространственных представлений была разработана контрольная работа, включающая в себя два задания на восприятия физических характеристик объекта (перцептивный компонент), два задания на воспроизведение объекта или его свойств по памяти или образцу (репродуктивный компонент) и два задания на предсказание изменений объекта или его свойств (прогностический компонент). За каждое задание можно получить максимум 1 балл. Вариант контрольной работ для представлен в виде таблицы (таблица 4)

Таблица 4 – Контрольная работа для диагностики знаний обучающихся

Задание	Формулировка задания
---------	----------------------

1	Даны 7 фигур, отметьте те, которые имеют хотя бы одну ось симметрии, изобразите все возможные оси симметрии. 
2	Не изображая графики функций, определите, через какие четверти они будут проходить: а) $y = 2x + 1$ б) $y = 2x - 1$
3	Доказать равенство $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ можно с помощью рисунка (рис.1), изобразите подобный рисунок для доказательства равенства: $(2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$  Рисунок 3
4	Представьте, что вы со своим другом играете в «лабиринт», у вас есть листок, где словами описан маршрут до выхода, сообщить его другу вы не можете, вы должны нарисовать на листке бумаги карту для своего друга. Важно: запрещено поворачивать лист во время рисования. (1 клетка = 1 метру). Маршрут: Пройди вперед 4 метра, поверни налево, пройди вперед 2 метра, поверни направо, пройди вперед 4 метра, поверни направо, пройди вперед 1 метр, поверни направо, пройди вперед 3 метра, поверни еще раз направо, пройди 5 метров вперед, поверни налево, пройди 2 метра вперед, ты нашел выход.
5	Дан прямоугольник шириной 3 и длиной 4, как изменится форма прямоугольника если ширину увеличить в 2 раза, а длину в 1,5?

- 6 При расчете короба для низкочастотного динамика важно соблюдать ряд определённых правил, например, для определенного динамика нужен определенный внутренний объем короба для более качественного звучания. На рисунке ниже (рис. 2) изображен чертеж для динамика 12 размера, внутренний объем короба соответствует всем требованиям, но мастер ошибся и указал размеры деталей с учетом того, что короб будет изготовлен из материала толщиной 20мм, а заказчик приобрел материал толщиной 21мм. Помогите заказчику изменить размеры деталей, не меняя внутреннего объема короба и не меняя взаиморасположение деталей.

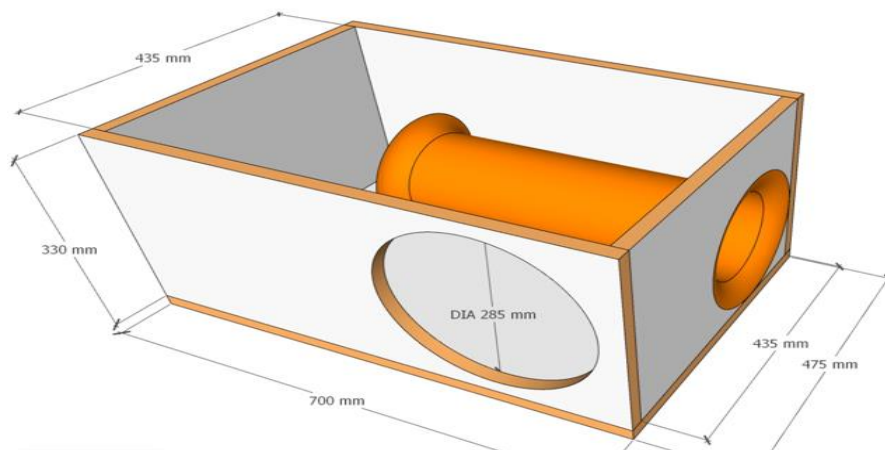


Рисунок 4

Также будет оцениваться сформированность предметных результатов, которые напрямую связаны с пространственным мышлением. Критерии оценки приведены в таблице ниже (таблица 5)

Таблица 5 – Критерии оценки предметных результатов.

Предметные результаты	Наличие результата	
	Присутствует	Отсутствует
Проводит основные геометрические построения с помощью линейки.	1	0
Извлекает и интерпретирует информацию из графиков	1	0
Оперирует понятиями симметрия, ось симметрии, центр симметрии	1	0
Умеет геометрически доказать формулу квадрата суммы и квадрата разности	1	0
Определяет взаимное расположение объектов	1	0
Выполнять чертежи по условию задачи	1	0

В совокупности с баллами за решение задач, обучающийся максимально может набрать 12 баллов. Исходя из этого мы определили несколько уровней сформированности пространственных представлений:

0-5 баллов - низкий;

6-9 баллов - средний;

10-12 баллов - высокий.

Ниже будет приведена таблица с результатами первичной диагностики (таблица 6).

Таблица 6 – Результаты первичной диагностики

Обучающийся №	Баллы за задания	Баллы за предметные результаты	Сумма баллов	Уровень
1	4	4	8	Средний
2	5	6	11	Высокий
3	3	3	6	Средний
4	3	4	7	Средний
5	3	3	6	Средний
6	2	3	5	Низкий
7	4	3	7	Средний
8	4	4	8	Средний
9	5	4	9	Средний
10	5	5	10	Высокий
11	3	3	6	Средний
12	3	4	7	Средний
13	3	4	7	Средний
14	4	4	8	Средний
15	2	2	4	Низкий
16	2	3	5	Низкий
17	5	5	10	Высокий
18	3	3	6	Средний
19	3	2	5	Низкий
20	3	4	7	Средний

В процентном соотношении к общему числу обучающихся в классе получены следующие результаты:

Высокий уровень - 15%

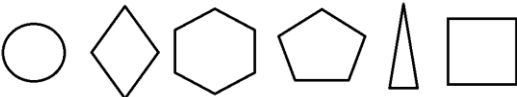
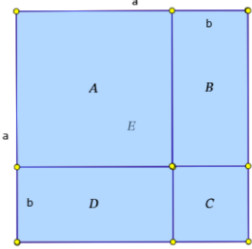
Средний уровень - 65%

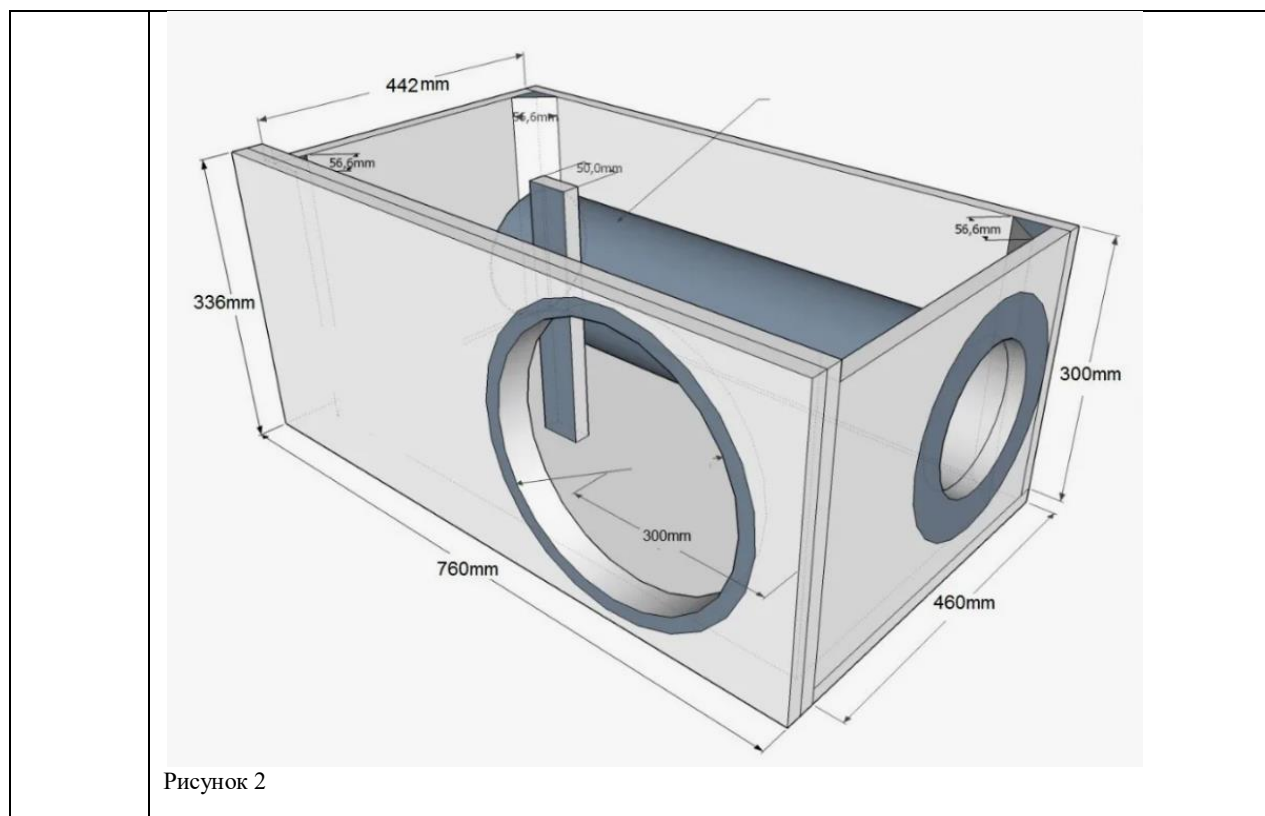
Низкий уровень - 20%

После проведения контрольной работы в процесс обучения были интегрированы некоторые разработанные занятия, описанные ранее. Проведен урок геометрии по теме «Осевая симметрия и ее свойства», урок алгебры по теме «Линейная функция и ее график» и в качестве дополнительного занятия проведен урок по теме «Возведение в квадрат суммы и разности». Все уроки

проводились с акцентом на развитие пространственных представлений. После чего в итоговую контрольную работу по геометрии включили задания, приведенные в таблице (таблица 7)

Таблица 7 – Задания для заключительной контрольной работы

Задание	Контрольный этап
1	Даны 6 фигур, отметьте те, которые имеют центр симметрии, изобразите его при помощи линейки. 
2	Не изображая графики функций, определите, через какие четверти они будут проходить: а) $y = -2x + 1$ б) $y = -2x - 1$
3	Доказать равенство $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ можно с помощью рисунка (рис. 1), изобразите подобный рисунок для доказательства равенства: $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$  Рисунок 1
4	Представьте, что вы со своим другом играете в «лабиринт», у вас есть листок, где словами описан маршрут до выхода, сообщить его другу вы не можете, вы должны нарисовать на листке бумаги карту для своего друга. Важно: запрещено поворачивать лист во время рисования. (1 клетка = 1 метру). Маршрут: Пройди вперед 3 метра, поверни направо, пройди вперед 3 метра, поверни направо, пройди вперед 4 метра, поверни налево, пройди вперед 1 метр, поверни налево, пройди вперед 5 метров, поверни еще раз налево, пройди 2 метра вперед, поверни направо, пройди 3 метра вперед, ты нашел выход.
5	Дан прямоугольник шириной 7 и длиной 10, как изменится форма прямоугольника если ширину увеличить в 2 раза, а длину в 1,5?
6	При расчете короба для низкочастотного динамика важно соблюдать ряд определённых правил, например, для определенного динамика нужен определенный внутренний объем короба для более качественного звучания. На рисунке ниже (рис. 2) изображен чертеж для динамика 12 размера, внутренний объем короба соответствует всем требованиям, но мастер ошибся и указал размеры деталей с учетом того, что короб будет изготовлен из материала толщиной 18мм, а заказчик приобрел материал толщиной 22мм. Помогите заказчику изменить размеры деталей, не меняя внутреннего объема короба и не меняя взаиморасположение деталей.



После проверки контрольных работ были получены следующие результаты (таблица 8)

Таблица 8 – Результаты выполнения заданий заключительной контрольной работы

Обучающийся №	Баллы за задания	Баллы за предметные результаты	Сумма баллов	Уровень
1	5	5	10	Высокий
2	6	6	12	Высокий
3	4	4	8	Средний
4	3	3	6	Средний
5	3	3	6	Средний
6	4	3	7	Средний
7	3	3	6	Средний
8	6	6	12	Высокий
9	6	6	12	Высокий
10	5	5	10	Высокий
11	4	4	8	Средний
12	4	4	8	Средний
13	3	3	6	Средний
14	5	5	10	Высокий
15	3	4	7	Средний
16	2	3	5	Низкий
17	6	6	12	Высокий
18	5	4	9	Средний
19	5	4	9	Средний
20	4	4	8	Средний

В процентном соотношении к общему числу обучающихся в классе получены следующие результаты:

Высокий уровень - 35%

Средний уровень - 60%

Низкий уровень - 5%

Для сравнения результатов до и после внедрения разработанных занятий, представим результаты таблицы 6 и таблицы 8 в виде сравнительной диаграммы на рисунке (рис. 28).

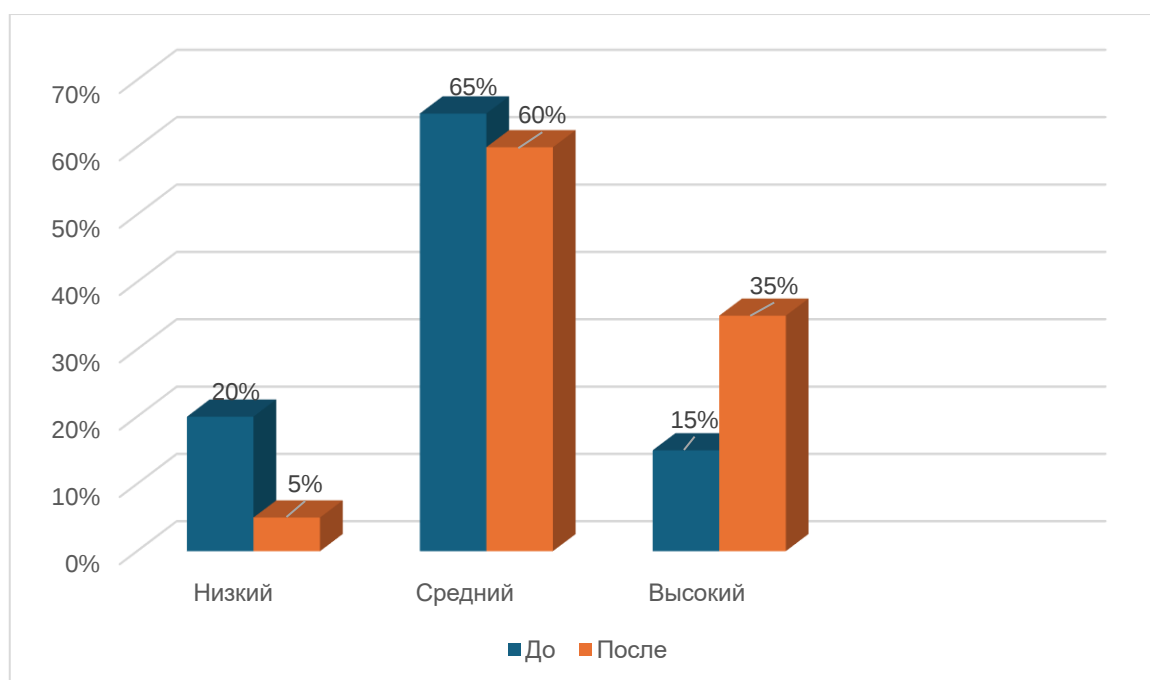


Рисунок 28. Результаты показателей обучающихся до и после занятий

После проведения разработанных занятий, уровень обучающихся с низким уровнем развития пространственных представлений снизился с 20 % до 5 %, число обучающихся со средним уровнем снизилось на 5 %, за то доля обучающихся с высоким уровнем развития пространственных представлений выросла на целых 20 %.

Так же для того, чтобы понять, как обучающиеся стали относиться к математике после проведения занятий был организован онлайн опрос, в ходе которого выяснилось, что обучающиеся видят в математике помощника для

реальной жизни, который мог бы помочь им в выполнении различных жизненных задач. Ссылка на порос прикреплена в Приложении Д.

Разработанная серия занятий будет эффективна для обучающихся 6-7 классов и направлена на развитие перцептивного, репродуктивного и прогностического компонентов пространственных представлений в условиях реализации ФГОС ООО. Представленная структура обусловлена результатами анализа теоретической и практической части действующих УМК, выявившими дефицит заданий на мысленное оперирование образами, на воспроизведение свойства и характеристик объекта по образцу и на прогнозирование возможных изменений пространственных характеристик объекта.

Принципы реализации разработанного комплекса:

1. Связь между материальным действием и мысленным оперированием.
2. Обязательная связь числовых данных, графических данных и геометрических конфигураций с образами.
3. Использование чертежей в сочетании с цифровыми ресурсами.
4. Формулировка пространственных гипотез и сравнение их с результатом.

Реализация принципов на различных этапах урока:

1. Этап мотивации: активизация геометрического зрения, организация проблемных ситуаций, требующих решения с помощью образов и различных преобразований.
2. Этап открытия нового знания: представление числовой информации с помощью геометрических тел и преобразований, то есть ее визуализация.
3. Этап закрепления знаний: включение серии заданий направленных на решение через построение, трансформацию, прогнозирование и визуализацию.
4. Этап рефлексии: использование тематических форм рефлексии: зеркало знаний, квадрат знаний, график линейной функции,

показывающий возможный прогресс в изучаемой теме и тому подобное.

Для мониторинга динамики рекомендуется использовать трехкомпонентные диагностические материалы, включающие в себя задания на распознавание объектов и их свойств, задания на алгоритмическое построение с соблюдением масштаба и пропорций, построение по образцу, задания на мысленное представление трансформаций без использования измерительных приборов.

Ожидаемые результаты:

1. Сформировано умение распознавать различные фигуры.
2. Обучающийся умеет прогнозировать возможные изменения пространственных характеристик объекта при изменяющихся условиях.
3. Обучающийся умеет визуализировать численную информацию в различных формах: график, таблица, диаграмма и так далее.
4. Обучающийся оперирует различными фигурами и их частями на бумаге, мысленно и в реальности.
5. Обучающийся умеет делать построения и рисунки по алгоритму или образцу.

Эффективность внедрения разработанных занятий определяется положительной динамикой во всех трех компонентах пространственных представлений и ростом учебной мотивации, что соответствует требованиям ФГОС ООО к предметным результатам обучения математике.

Таким образом, для апробации были разработаны: контрольная работа для первичной диагностики сформированности пространственных представлений, серия занятий для различных содержательных линий курса алгебры, геометрии и вероятности и статистики, с акцентом на пространственное мышление и задания итоговой контрольной работы для диагностики уровня сформированности пространственных представлений после проведения разработанных занятий. Были выделены критерии для оценки уровня

сформированности пространственных представлений. По результатам апробации видно, что изначально количество обучающихся с низким уровнем было больше, чем количество обучающихся с высоким уровнем. После проведения занятий количество обучающихся с низким уровнем сформированности пространственных представлений стало гораздо меньше, а количество обучающихся с высоким уровнем стало в семь раз больше, чем количество обучающихся с низким уровнем. Отсюда, можно сделать вывод, что разработанные занятия являются эффективным инструментом для развития пространственных представлений в ходе изучения различных содержательных линий школьного курса алгебры, геометрии и вероятности, и статистики.

Выводы по главе 2

На этапе анализа действующих УМК в контексте развития пространственных представлений, нами были выявлены некоторые дефициты заданий, а именно дефицит заданий на мысленные преобразования объектов, заданий на прогнозирование изменения объектов и их свойств и заданий на визуализацию численной информации. На основе выявленных дефицитов была разработана серия занятий различных содержательных линий школьного курса математики. При разработке занятий использовались различные дидактические средства и методы обучения. Были внедрены задания с использованием разверток, чертежей, рисунков и цифровых ресурсов.

Для оценки эффективности разработанных заданий была проведена апробация, включающая в себя четыре этапа: первоначальная диагностика уровня развития пространственных представлений, проведения разработанных занятий, диагностика уровня развития пространственных представлений после проведения разработанных занятий, сравнение результатов до и после проведения занятий.

Для этапов диагностики были разработаны два варианта контрольных работ, включающих в себя два задания на проверку сформированности перцептивного компонента, два задания для проверки репродуктивного компонента и два задания для прогностического компонента.

Апробация показала следующие результаты. До проведения занятий высокий уровень выявлен у 15% обучающихся, средний у 65% и низкий у 20% обучающихся. После проведения занятий результаты заметно улучшились. Высокий уровень выявлен у 35% обучающихся, средний у 60% и низкий у 5%.

Исходя из результатов апробации, можно сделать вывод, что разработанная серия занятий эффективна при развитии у обучающихся пространственных представлений.

Заключение

При изучении теоретических аспектов исследуемого предмета мы сформулировали определение пространственных представлений следующим образом: пространственные представления - это система чувственно-наглядных образов, которые отражают свойства и взаиморасположение объектов в пространстве, включающая в себя восприятие формы, размера, расположения объекта, способность к мысленному и языковому воспроизведению образов, ранее воспринятых объектов, а также умение предсказывать возможные изменения объекта, воспринимать эти изменения и подстраиваться под данные изменения. Данное определение сформулировано с опорой на определения В.Б. Толстой, А.П. Кузнецова, В.А. Гусева и С.Л. Рубинштейна.

Были выделены психолого-педагогические особенности формирования пространственных представлений, выявлены эффективные методики обучения и способы подачи учебной информации. Так же были приведены различные примеры заданий. Подчеркнута важность роли учителя при формировании пространственных представлений у обучающихся. Связующим элементом между теоретической и практической частями является описанная структура пространственных представлений, состоящая из трех компонентов: перцептивный, репродуктивный, прогностический.

Оценка действующих УМК в контексте развития пространственных представлений производилась с опорой на описанную структуру. Для каждого компонента в определённой теме описывались имеющиеся задания и описывалась перспектива данной темы для развития каждого из компонентов. После выявления всех имеющихся дефицитов заданий, была разработана серия занятий для различных содержательных линий школьного курса математики с внедрением заданий и упражнений, направленных на развитие каждого компонента пространственных представлений. Предполагалось, что развивать пространственные представления можно не только на уроках геометрии. Для подтверждения данного суждения и для оценки эффективности разработанных занятий была проведена апробация.

При проведении первичной диагностики уровня развития пространственных представлений было выявлено, что количество обучающихся с высоким уровнем меньше, чем количество обучающихся с низким уровнем на целых 5 %. После проведения занятий диагностика показала положительную динамику: количество обучающихся с низким уровнем уменьшилось на 15% и стало в семь раз меньше, чем количество обучающихся с высоким уровнем (35 %). Так же для того, чтобы понять, как обучающиеся относятся к математике был проведен онлайн опрос, который показал, что обучающиеся стали видеть в математике инструмент, который помогает им в реальной жизни и позволяет облегчить некоторые действия.

Таким образом, развивать пространственные представления можно не только на уроках геометрии, но на уроках алгебры и на уроках вероятности и статистики. Процесс формирования пространственных представлений не должен быть стихийным, а иметь определенную структуру, учитель играет ключевую роль в этом процессе - он определяет методику и влияет на мотивированность обучающихся.

Список используемых источников

1. Аллагулова Э.Р., Матраков О.С. Особенности развития пространственного мышления у младших школьников // Вестник науки. № 3 (84). Т. 3.
2. Геометрия. 7–9 классы: учебник для общеобразовательных организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 14-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2024–2025.
3. Вахрушева В.А. Развитие пространственного мышления младших школьников: теоретические основы // Педагогика и психология в XXI веке: современное состояние и тенденции исследования : сборник материалов XIII Всероссийской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов, молодых педагогов, Киров, 25 апреля 2025 года. – Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2025. – С. 369-376.
4. Вдовина О.Л. Формирование пространственного мышления младших школьников на уроке математики в рамках реализации ФГОС // Новая наука: Опыт, традиции, инновации. 2017. Т. 2. № 4. С. 19-22.
5. Вернер Е.К. Сборник заданий для 6 класса «Фигуры на координатной плоскости» [Электронный ресурс]. URL: <https://solncesvet.ru/opublikovannyye-materialyi/sbornik-zadaniy-dlya-6-klassa-figury-na-.12372086548/> (дата обращения: 5.03.2026).
6. Математика. 6 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков и др. 3-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2023–2024.
7. Вероятность и статистика. 7–9 классы: учебник для общеобразовательных организаций: в 2 ч. / И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко; под ред. И.В. Ященко. 1-е изд. М.: Просвещение, 2023–2024.
8. Гусев В.А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы. 2014. С. 47.
9. Гутарин М.М. Психолого-педагогические аспекты категории «представление» // Личностное и профессиональное развитие будущего

специалиста : Материалы XVIII Международной научно-практической Internet-конференции, Тамбов, 30 мая 2022 года. Тамбов: Издательский дом "Державинский", 2022. С. 12-18.

10. Долженкова, В. И. Теоретические основы визуального обучения / В. И. Долженкова // Проблемы педагогики. – 2015. – № 4(5). – С. 17-23.

11. Примерный банк заданий для подготовки к тестированию по математике (учебник Дорофеева Г.В.). Тема модуля «Прямые на плоскости и в пространстве». С. 6.

12. Иванова Е.В. Развитие пространственного представления учащихся на уроках стереометрии [Электронный ресурс]. URL: <https://multiurok.ru/files/razvitiie-prostranstviennogho-priedstavlieniia-uch.html> (дата обращения: 14.04.2026).

13. Илькив Я.В. Формирование пространственных представлений у учащихся на уроках математики: выпускная квалификационная работа [Электронный ресурс]. URL: <https://elar.uspu.ru/bitstream/ru-uspu/63866/1/Ilkiv2.pdf> (дата обращения: 10.02.2026).

14. Итяков Н.И. Геометрические задачи как средство развития пространственного мышления у учащихся [Электронный ресурс]. URL: https://solncesvet.ru/magazine_work/73977/ (дата обращения: 10.02.2026).

15. Костикова Д. А. Формирование пространственных представлений у детей дошкольного возраста в игре // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. 2019. № 7(140). С. 97-102.

16. Кузнецов А.П. Пространственное мышление как умственная деятельность // Обучение и воспитание: методики и практика. 2014. № 11. С. 13-16.

17. Кузнецов А.П. Пространственное мышление как умственная деятельность // Обучение и воспитание: методики и практика. 2014. №11. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prostranstvennoe-myshlenie-kak-umstvennaya-deyatelnost> (дата обращения: 01.02.2026).

18. Кухтинова А.П. Формирование наглядно-образного мышления на уроках математики в пятом классе на примере использования программной среды "1С: Математический конструктор" // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. 2018. Т. 15, № 1. С. 73-80.

19. Макарова В.Н., Фандеева Т.А. Формирование у старших дошкольников пространственных и временных представлений и языковых средств их выражения // Ученые записки Орловского государственного университета. 2017. № 1 (74). С. 173-177.

20. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др.; под ред. С.А. Теляковского. 15-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2023–2024.

21. Манзарова А.М. Развитие пространственного мышления школьников на уроках стереометрии средствами ИКТ // Молодой ученый. 2021. № 13 (355). С. 271–273.

22. Методический анализ результатов ЕГЭ-2025 по математике (базовый уровень) [Электронный ресурс]. URL: <https://coko24.ru/wp-content/uploads/2025/08/Методический-анализ-результатов-ЕГЭ-2025-по-МАТЕМАТИКЕ-БАЗОВОЙ.pdf> (дата обращения: 06.03.2026).

23. Методический анализ результатов ОГЭ-2025 по математике [Электронный ресурс]. URL: <https://coko24.ru/wp-content/uploads/2025/09/Методический-анализ-результатов-ОГЭ-2025-по-МАТЕМАТИКЕ.pdf> (дата обращения: 06.03.2026).

24. Мусейбова Т.А. Ориентировка в пространстве // Дошкольное воспитание. 1988. № 8. С. 53.

25. Николаева Ю.С., Баран М.И. Развитие пространственного мышления обучающихся // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2018. №14. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-prostranstvennogo-myshleniya-obuchayuschih-sya> (дата обращения: 12.04.2026).

26. Носикова Е. 7 задач на пространственное мышление от учителя математики [Электронный ресурс]. URL: <https://mel.fm/blog/yekaterina->

nosikova/37942-7-zadach-na-prostranstvennoye-myshleniye--ot-uchitelya-matematiki (дата обращения: 06.03.2026).

27. Подаев М. В. Динамическая визуализация геометрических понятий как средство развития пространственных представлений подростков // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2009. № 9(87). С. 91-93.

28. Раманкулов М.-Н.Э. Развитие пространственных представлений учащихся [Электронный ресурс]. URL: <https://multiurok.ru/files/razvitie-prostranstvennykh-predstavlenii-uchashchi.html> (дата обращения: 13.04.2026).

29. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. СПб.: Питер, 2000.

30. Самедова С.Г. Развитие пространственного мышления на уроках математики в 5-6 классов // Инновационная наука. 2025. № 5-2. С. 211-212.

31. Семаго Н., Семаго М. Пространственные представления ребенка // Школьный психолог. 2000. № 34.

32. Сунцова А.В., Курдюкова С.В. Методы развития пространственных представлений у детей дошкольного и младшего школьного возраста // Современное дошкольное образование: теория и практика. 2015. № 2(54). С. 34-43.

33. Толстова В.Б. Формирование пространственных представлений их вербализация – некоторые особенности функционирования грамматической системы у детей дошкольного возраста - теоретический взгляд // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения. 2011. №22. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-prostranstvennyh-predstavleniy-ih-verbalizatsiya-nekotorye-osobennosti-funktsionirovaniya-grammaticheskoy-sistemy-u> (дата обращения: 11.04.2026).

34. Троцкая Е.С. Особенности развития пространственного мышления младших школьников // Ребенок в современном образовательном пространстве мегаполиса : Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции, Москва, 07 апреля 2017 года / Редактор-составитель А.И. Савенков. М.: Издательство "Перо", 2017. С. 172-176.

35. Тулеева Г.Е. О формировании пространственно-образного мышления // Вопросы науки и образования. 2019. № 5(50). С. 175-186.

36. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования : утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г. № 287 ; ред. от 18.07.2022 № 568. – Текст : электронный // КонсультантПлюс : справочно-правовая система. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_389560/ (дата обращения: 17.05.2026).

37. Баранникова Д.Д., Притчина С.И. Формирование пространственного мышления с помощью интеграции проектной деятельности и информационных технологий на уроках геометрии // Математическое и информационное моделирование : Материалы Всероссийской конференции молодых ученых, Тюмень, 18–20 мая 2023 года. Том Выпуск 21. Тюмень: ТюмГУ-Press, 2023.

38. Чекулаева М.Е., Котова А.С. Прикладные задачи – одно из средств развития пространственного мышления учащихся // Наука и образование сегодня. 2022. №4 (73). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prikladnye-zadachi-odno-iz-sredstv-razvitiya-prostranstvennogo-myshleniya-uchaschihsya> (дата обращения: 16.02.2026).

39. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников [Электронный ресурс]. URL: <https://djvu.online/file/mzIc0mQdKtao2> (дата обращения: 15.03.2026).

40. Приложение 1 к приказу № 01-05-170 от 29.08.2025 [Электронный ресурс]. URL: https://sh145-krasnoyarsk-r04.gosweb.gosuslugi.ru/netcat_files/32/50/sig_UMK_2025_2026_MATEMATIKA.pdf (дата обращения: 13.03.2026).

Технологическая карта урока осевая симметрия и ее свойства

Общая информация	
Тема урока:	Осевая симметрия и ее свойства.
Тип урока:	Урок открытия новых знаний.
УМК	Геометрия: 7-9 классы: базовый уровень: учебник. Атанасян Л.С и др., 2024-2025г.
Цели урока:	Дидактическая цель: создать условия для введения новой учебной информации. Цели по содержанию: <u>Образовательные:</u> 1. Вывести свойства симметрии; 2. Усилить практическую направленность обучения. <u>Развивающие:</u> 1. Развивать мыслительную деятельность учащихся, самостоятельность, внимательность; 2. Развивать умение анализировать, обобщать, делать выводы; 3. Осуществлять контроль за своей деятельностью; 4. Развивать пространственные представления. <u>Воспитательные:</u> 1. Учить ясно и точно выражать свои мысли; 2. Проводить рефлексию деятельности ребенка; 3. Способствовать воспитанию в детях ответственности, взаимопонимания, взаимоуважения, взаимопомощи и поддержки.
Задачи урока:	Образовательные: 1. Закрепить понятийную базу. 2. Усилить практическую направленность обучения путем решения различных видов задач. 3. Развивать пространственные представления; Развивающие: развивать логическое мышление, зрительную память, математически грамотную речь, сознательное восприятие материала Воспитательные: воспитывать общую культуру; понимание важности геометрии, как одной из составляющих жизни каждого человека, прививать интерес к изучаемому предмету.

Планируемые результаты		
Предметные УУД	Личностные УУД	Метапредметные УУД
Пр1 - Определяет взаимное расположение фигур, точек, отрезков. Пр2 - Строит чертежи к геометрическим задачам. Пр3 - Опирается на понятия симметрия, ось симметрии, центр симметрии.	Л1 - Установка на активное участие в решении практических задач математической направленности. Л2 - Ясно, точно, грамотно излагает свои мысли, исправляет и дополняет ответы других учащихся.	Познавательные УУД П1 - Ориентируются в своей системе знаний, проводят анализ учебного материала. П2 - Строят логические рассуждения. Регулятивные УУД Р1 - Проговаривают последовательность действий на уроке; Р2 - Осуществляет контроль своей деятельности; Р3 - Анализируют степень усвоения нового учебного материала на основе сопоставления решения с эталоном. Коммуникативные УУД К1 - Корректировка и дополнение ответов одноклассников; К2 - Участвуют в диалоге и коллективном обсуждении вопроса.
Элементы содержания урока		
Основное содержание урока (что изучаем?)	1. Актуализировать понятия: симметричные точки, ось симметрии; 2. Решение практических задач.	
Основные термины и понятия (новые)	Два свойства симметрии.	
Организация пространства урока (учебно-методическое обеспечение урока)		
Методы обучения	Объяснительно-иллюстративный - О-И; Словесный - С; Наглядный - Н;	

	Практический - Пр.			
Средства обучения	Вербальные - В; Наглядные - Н; Технические - Т.			
Межпредметные связи		Формы организации работы	Ресурсы	Оборудование и ПО
Изучение темы, связанной с реальной жизнью, физикой, геометрией, информатикой.		Фронтальная - Ф; Индивидуальная - И. Групповая - Г.	Ручки, тетради, учебники, раздаточный материал	Интерактивная доска.
Контроль и оценка результатов деятельности				
Формы контроля		Диагностические задания:	Оценка результатов деятельности на уроке	
ФК1 - самоконтроль; ФК2 - взаимоконтроль.		ДЗ1 - самостоятельная работа; ДЗ2 - групповая работа.	Самооценка	Взаимооценка

План урока:

1.	Организационный этап	2 мин
2.	Мотивация и целеполагание	5 мин
3.	Актуализация знаний	7 мин
4.	Открытие новых знаний	18 мин
5.	Первичная проверка понимания	7 мин
6.	Домашняя работа	1 мин

Ход урока

Методы и формы обучения	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Доска	Средства обучения, ресурсы	Формы контроля. Способы оценки	Формируемые УУД
<i>Этап 1: организационный этап</i>						
<i>Цель этапа: Создание благоприятного настроения на работу.</i>						
Ф; С	Приветствие. Проверка	Настраиваются на учебную		В		К2

	готовности обучающихся к уроку. Достаньте учебники геометрии и присаживайтесь. Здравствуйте!	деятельность. Хорошо, здравствуйте!				
<i>Этап 2: Мотивация и целеполагание</i> <i>Цель этапа: Повысить интерес у обучающихся к теме.</i>						
Ф; С, Г, И-О	Ранее вы уже сталкивались с подобной темой в 6 классе, давайте вы сами попробуете назвать тему, посмотрев на доску(Приложение 1). Если будет совсем трудно, то можете попросить у меня подсказку. (Если дети попросят подсказку, то учитель просит их обратить внимание на внешний вид изображений) Все верно. А какой вид симметрии? Отлично, тогда предположите тему нашего урока. Все верно, тема урока:	Хорошо. Бабочка и слово симметричны. Осевая Тема урока связана с осевой симметрией.	 ПОТОП	В, Н, Т	ФК2, ФК1	П1, П2, К2, Л1 Л2

	«Осевая симметрия и ее свойства» Тогда какие цели мы поставим на этот урока? Такая формулировка мне нравится.	1)Изучить свойства осевой симметрии и научиться применять их.				
<i>Этап 3: Актуализация знаний</i> <i>Цель этапа: актуализировать знания, необходимые для дальнейшего обучения.</i>						
Ф, С, Г	В начале мы уже говорили про осевую симметрию, давайте вспомним, что такое ось симметрии. А какие фигуры называются симметричными? С этим я согласен. Но что тогда такое симметричные точки? А какой вид симметрии вы	Это прямая относительно которой располагаются симметричные фигуры или точки. Фигуры является симметричной относительно прямой если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой также принадлежит этой фигуре. Симметричные точки - это точки, которые находятся по разные стороны, на равном расстоянии от оси симметрии		В	ФК2, ФК1	К1, К2, П1, П2, Л1, Л2, Пр3

	еще знаете? Чем отличается центральная симметрия от осевой? Чем является центр симметрии? А могут быть симметричны две фигуры относительно прямой? В каком случае это возможно? Молодцы, что смогли все вспомнить.	Центральная симметрия! При центральной симметрии точки симметричны относительно центра симметрии. Точкой. Да. Если каждая точка одной фигуры симметрична точке другой фигуры и обратно.				
<i>Этап 4: Открытие новых знаний.</i> <i>Цель этапа: Создать условия для открытия новых знаний.</i>						
С, Пр, И-О, И	В начале урока мы выяснили, что будем изучать свойства осевой симметрии. Давайте попробуем вывести эти свойства самостоятельно. Для этого нам понадобятся	В ходе выполнения задания обучающиеся замечают, что если прямые пересекаются, то точка пересечения лежит на оси симметрии, а если прямые параллельны, то они параллельны оси		В, Н, Т, раздаточный материал	ФК2, ФК1, Д31	Пр1, Пр2, Пр3, Л2, П1, П2, К1

	телефоны, чтобы отсканировать код(Приложение 2) Задание 1: Вам нужно попробовать построить разные варианты расположения двух прямых(AD и CF) относительно третьей(оси симметрии BE), чтобы определить симметричность прямых, у вас дано отношение расстояний между парами точек. Ваша задача, обязательно построить два варианта расположения прямых: 1) параллельны друг другу. 2) пересекаются. (Несколько различных построений). И посмотреть, как в первом случае расположены прямые относительно оси симметрии и как во втором располагается точка пересечения прямых. Внимание: сначала выставляете точки A и D, а затем точки C и F. На выполнение 6 минут.	симметрии, других вариантов у них не получается построить. Если две прямые				
--	--	--	--	--	--	--

	Давайте тогда попробуем вывести первое свойство, опираясь на то, что мы только что выяснили. Молодцы, вы только что самостоятельно сформулировали первое свойство осевой симметрии. Но на этом не все, нужно вывести еще одно свойство. Давайте так же попробуете вывести его самостоятельно. Для этого нужно выполнить задание (Приложение 3) Задание 2: Для выполнения вам понадобится циркуль, линейка и раздаточный материал, который я вам выдам. 1) Вам нужно согнуть лист строго по отмеченной линии. 2) Циркулем аккуратно проколоть отмеченные точки так, чтобы след остался и на второй половине листа.	симметричны относительно оси симметрии, то они либо параллельны, либо их точка пересечения лежит на оси симметрии.				
--	---	---	--	--	--	--

	3)Подписать полученные точки, если точка получилась путем прокола точки А, то она подписывается A_1. 4)Соединить все точки, сначала на одной половине листа, затем на второй. 5)С помощью линейки измерить отрезки, например АВ и A_1B_1 и так далее. 6)Выяснить каким являются точки по отношению друг к другу (А и A_1, В и B_1 и так далее) относительно линии сгиба листа. 7)Исходя из полученных измерений отрезков, выяснить каким они являются по отношению друг к другу (АВ и A_1B_1, ВС и B_1C_1 и так далее). На выполнение 7 минут. 7 минут прошло, завершайте выполнение и делитесь результатами.	Хорошо В ходе выполнения обучающиеся выясняют, что полученные точки симметричны данным точкам, и соответствующие отрезки равны. Расстояние между двух				
--	--	--	--	--	--	--

	Попробуйте тогда сформулировать второе свойство. Да, верно, расстояние между точками А и В равно расстоянию между симметричными им точками A_1 и B_1	точек равно расстоянию между симметричными им точками				
<i>Этап 5: Первичная проверка понимания.</i> <i>Цель этапа: Оценить степень понимания нового материала.</i>						
Пр, И	Попробуйте сделать задание 387 из учебника и 388, на выполнение двух заданий 6 минут. Давайте вместе проверим, что у вас получилось. Отлично, во втором что получилось? Молодцы, поняли новую тему.	Хорошо. В 387 ответ 19,5 см, $B_1H = BH$, так как точки симметричны, $AB = AH - BH$, $AB = 27,3 - 7,8 = 19,5$ см, $AB = A_1B_1 = 19,5$ см Ответ: 10 см Задания очень похожи.		В, Н, Т	ФК2, ФК1, ДЗ1	Пр1, П1, Р2, Р3, Р1, К1, К2

Этап 6: Домашняя работа.

Ф	Дома сделайте задания 381 и 382 из учебника.	Записывают домашнее задание.	381, 382	В, Т		
---	--	------------------------------	----------	------	--	--

Приложение 1

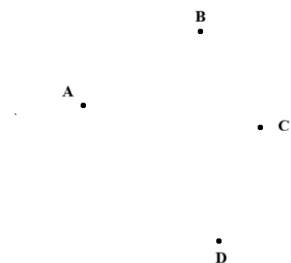


ПОТОП

Приложение 2



Приложение 3



Технологическая карта урока линейная функция и ее график

Общая информация	
Тема урока:	Линейная функция и ее график.
Тип урока:	Урок закрепления .
УМК	Алгебра: 7-й класс: базовый уровень: учебник. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.
Цели урока:	Дидактическая цель: создать условия для закрепления учебной информации. Цели по содержанию: <u>Образовательные:</u> 3. Закрепить знания про линейную функцию; 4. Способствовать развитию пространственных представлений. <u>Развивающие:</u> 5. развивать мыслительную деятельность учащихся, самостоятельность, внимательность; 6. развивать умение анализировать, обобщать, делать выводы; 7. осуществлять контроль за своей деятельностью. <u>Воспитательные:</u> 4. учить ясно и точно выражать свои мысли; 5. проводить рефлексии деятельности ребенка; 6. способствовать воспитанию в детях ответственности, взаимопонимания, взаимоуважения, взаимопомощи и поддержки.
Задачи урока:	Образовательные: 4. Актуализировать знания по графику линейной функции; 5. Усилить практическую направленность обучения путем решения различных видов задач; Развивающие: развивать логическое мышление, зрительную память, математически грамотную речь, сознательное восприятие материала Воспитательные: воспитывать общую культуру; понимание важности геометрии, как одной из составляющих жизни каждого человека, прививать интерес к изучаемому предмету.

Планируемые результаты		
Предметные УУД	Личностные УУД	Метапредметные УУД
Пр1 – Строит графики линейных функций; Пр2 – Находит значение функции по значению её аргумента; Пр3 –Изображает на координатной плоскости точки, соответствующие заданным координатам.	Л1 –Ясно, точно, грамотно излагать свои мысли, исправлять и дополнять ответы других учащихся Л2 – Развивают интеллектуальные способности, логическое мышление в процессе решения задач, сравнивают, выявляют закономерности, обобщают.	Познавательные УУД П1 – Ориентируются в своей системе знаний, проводят анализ учебного материала. П2 – Строят логические рассуждения. Регулятивные УУД Р1 – Проговаривают последовательность действий на уроке; Р2 – Осуществлять контроль своей деятельности ; Коммуникативные УУД К1 – Корректировка и дополнение ответов одноклассников; К2 – Участвуют в диалоге и коллективном обсуждении вопроса.
Элементы содержания урока		
Основное содержание урока (что изучаем?)	1. Актуализируем знания по графикам линейной функции;	
Основные термины и понятия	Линейная функция.	
Организация пространства урока (учебно-методическое обеспечение урока)		
Методы обучения	Объяснительно-иллюстративный – О-И; Словесный – С; Наглядный – Н; Практический – Пр.	
Средства обучения	Вербальные – В; Наглядные – Н; Технические – Т.	

<i>Межпредметные связи</i>	<i>Формы организации работы</i>	<i>Ресурсы</i>	<i>Оборудование и ПО</i>
Введение в науку. Связь с окружающим миром.	Фронтальная – Ф; Индивидуальная – И. Групповая – Г.	Ручки, тетради, раздаточный материал.	Доска, компьютер, экран.
Контроль и оценка результатов деятельности			
<i>Формы контроля</i>	<i>Диагностические задания:</i>	<i>Оценка результатов деятельности на уроке</i>	
ФК1 – самоконтроль; ФК2 – взаимоконтроль.	ДЗ1 – самостоятельная работа; ДЗ2 – групповая работа.	Самооценка: карточка рефлексии	Взаимооценка

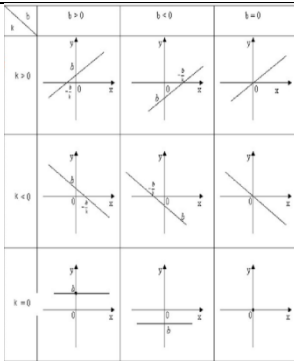
План урока:

7.	Организационный этап	2 мин
8.	Актуализация знаний	10 мин
9.	Закрепление	20 мин
10.	Рефлексия	6 мин
11.	Домашняя работа	2 мин

Ход урока

Методы и формы обучения	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Доска	Средства обучения, ресурсы	Формы контроля. Способы оценки	Формируемые УУД
<i>Этап 1: Организационный этап</i> <i>Цель этапа: Создание благоприятного настроения на работу.</i>						
Ф; С	Приветствие. Проверка готовности обучающихся к уроку.	Настраиваются на учебную деятельность.		В		К2

<i>Этап 2: Актуализация знаний</i> <i>Цель этапа: Актуализация опорных знаний и способов действий.</i>						
Ф; С, Н, О-И, Гр	Ребята, сегодня мы повторим графики линейных функций. Скажите, как выглядит уравнение линейной функции? Теперь скажите, как коэффициент k влияет на график функции Отлично, теперь скажите, что определяет b? Теперь давайте схематично начертим графики функций со всеми возможными k и b	Хорошо. $y=kx+b$, где k — угловой коэффициент, b – свободный член. Если $k>0$, график функции возрастает. Если $k<0$, график функции убывает Если $k=0$, график функции - горизонтальная прямая. Определяет точку пересечения графика с осью y.		В, Н, Т	ФК2, ФК1	П1, К1, К2 Л1, Пр1, Пр3

	Отлично, всю нужную информацию вспомнили. Так же, для проверки наших чертежей давайте воспользуемся цифровым ресурсом, который позволит нам в реальном времени, изменяя параметры k и b, понаблюдать за изменением графика. (Приложение 1)					
<i>Этап 3: Закрепление знаний.</i> <i>Цель этапа: Закрепить актуализированные знания.</i>						
Ф; С, Н, О-И, Пр	Давайте приступим к выполнению заданий. Задание 1(Приложение 2): каждый из вас получает лист с графиками функций и самими функциями, ваша задача их правильно соотнести. На выполнение дается 5 минут. Задание 2: По данным точкам постройте графики функций, далее определите знак коэффициента k и напишите, чему равно b для каждого графика. Точки:	Обучающиеся распределяют функции в соответствии с их графиками. Строят графики функций по заданным точкам.		В, Н, Т	ФК2, ФК1, Д31	Пр1,Пр2, Пр3, К1, К2, П1, П2, Л1, Л2, Р2

	1) (4;3), (2;0) 2) (-2;2), (2;-2) 3) (-1;3), (1;-3) 4) (-3;-2), (6;4) 5) (1;4), (-2;-2) На выполнение 5 минут. Задание 3: Попробуйте мысленно представить, что произойдет с графиками из задания 2 если поменять знак у коэффициента k на противоположный, запишите ваше предположение. Далее проведите эксперимент, возьмите любую функцию из задания 1, начертите ее график в тетради, затем поменяйте знак у k и начертите еще один график на той же координатной плоскости. Сделайте так с тремя функциями из задания 1, какую закономерность вы увидели? Что можно сказать про симметричность двух графиков одной функции, но с разными знаками при k, относительно прямой	Делают свои предположения и записывают их. Далее проводят эксперимент, замечают, что точка пересечения с осью y не меняется, и замечают, что графики одной функции, но с разными знаками при k симметричны относительно оси проходящей через точку пересечения графика с осью y и параллельно оси x.				
--	--	---	--	--	--	--

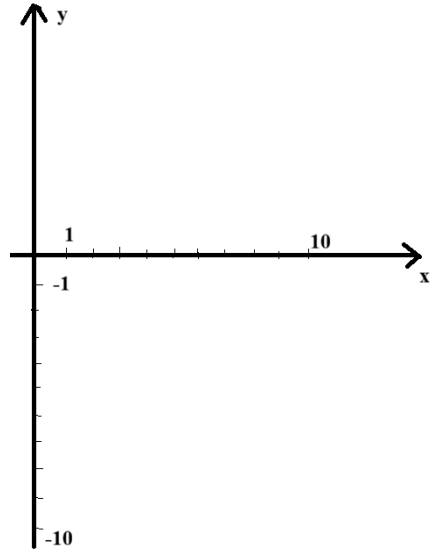
	параллельной оси x и проходящей через точку пересечения графика с осью y? На выполнение 8 минут. Совпали ли ваши предположения с результатом эксперимента?	Обсуждают результаты.				
<i>Этап 4: Рефлексия</i> <i>Цель этапа: Выявление дефицитов</i>						
Ф, С, Пр, И-О	Давайте проведем интересную рефлексия, которая поможет нам наглядно оценить свои возможности в теме «Линейная функция и ее график» Для этого я раздам вам заранее заготовленные листы самооценки, они в виде координатной плоскости. Ось y показывает нам насколько хорошо вы поняли тему (шкала от -10 до -1, где -10 – понял очень хорошо, -1 – не понял вообще), ось x показывает, насколько вы уверены, что хотите и сможете изучить тему лучше и подтянуть свои знания	Выполняют рефлексия.		В, Н, Т	ФК1	Р2, Пр1

	(шкала от 1 до 10, где 1-уверен, что смогу лучше разобраться в теме и мне это интересно, 10 – не хочу разбираться в теме и мне она неинтересна). Приложение 3 Соединив точки, вы получите график линейной функции, который будет показывать, насколько быстро вы сможете прогрессировать в теме «Линейная функция и ее график», Чем быстрее ваш график возрастает, тем быстрее вы сможете полностью понять тему.					
<i>Этап 5: Домашняя работа</i>						
Ф, И, Пр	На дом: учить графики линейных функций и выполнить задания из учебника 1065 все буквы	Записывают дз	1065			

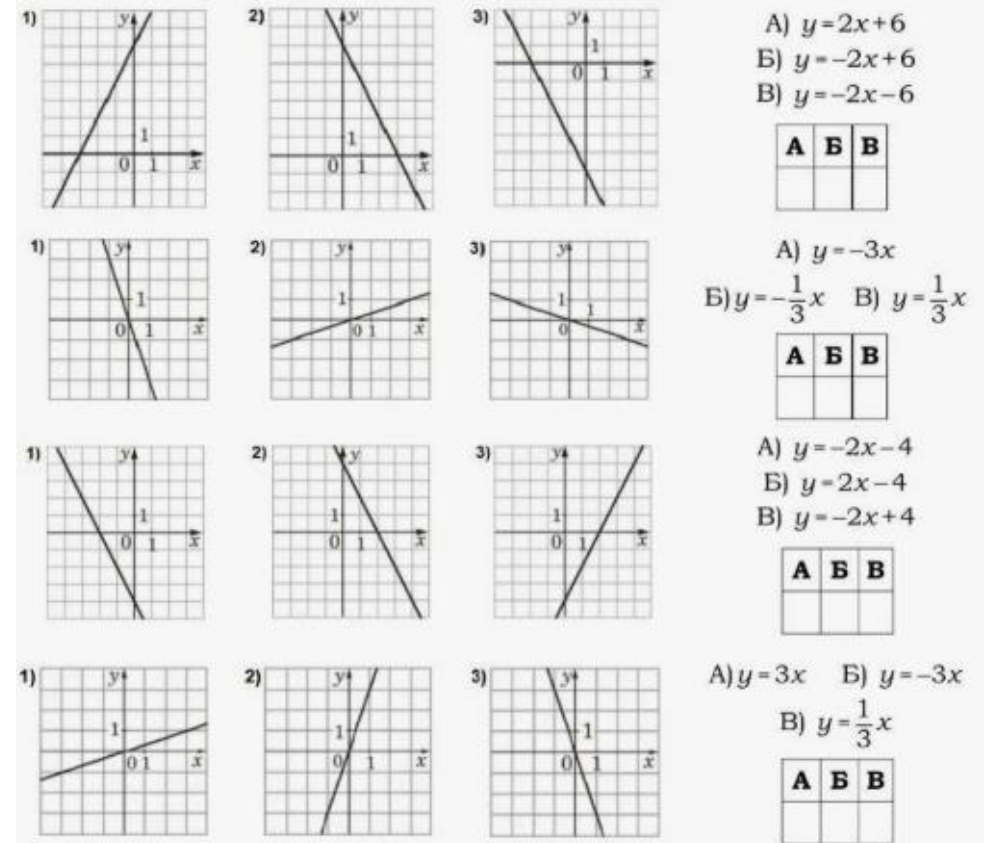
Приложение 1



Приложение 3



Приложение 2



Технологическая карта урока возведение в квадрат суммы и разности

Общая информация	
Тема урока:	Возведение в квадрат суммы и разности.
Тип урока:	Урок открытия новых знаний.
УМК	Алгебра: 7-й класс: базовый уровень: учебник. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.
Цели урока:	Дидактическая цель: создать условия для введения новой учебной информации. Цели по содержанию: <u>Образовательные:</u> 5. Вывести и доказать формулы квадрата суммы и квадрата разности; 6. Способствовать развитию пространственных представлений. <u>Развивающие:</u> 8. Развивать мыслительную деятельность учащихся, самостоятельность, внимательность; 9. Развивать умение анализировать, обобщать, делать выводы; 10. Осуществлять контроль за своей деятельностью. <u>Воспитательные:</u> 7. Учить ясно и точно выражать свои мысли; 8. Проводить рефлексии деятельности ребенка; 9. Способствовать воспитанию в детях ответственности, взаимопонимания, взаимоуважения, взаимопомощи и поддержки.
Задачи урока:	Образовательные: 6. Создать условия для самостоятельного вывода формул квадрата суммы и квадрата разности; 7. Усилить практическую направленность обучения путем решения различных видов задач; Развивающие: развивать логическое мышление, зрительную память, математически грамотную речь, сознательное восприятие материала Воспитательные: воспитывать общую культуру; понимание важности геометрии, как одной из составляющих жизни каждого человека, прививать интерес к изучаемому предмету.

Планируемые результаты		
Предметные УУД	Личностные УУД	Метапредметные УУД
Пр1 – Выполняет умножение одночлена на многочлен и многочлена на многочлен; Пр2 – Применяет формулы квадрата суммы и квадрата разности; Пр3 – Умеет геометрически доказать формулу квадрата суммы и квадрата разности.	Л1 – Ясно, точно, грамотно излагать свои мысли, исправлять и дополнять ответы других учащихся Л2 – Развивают интеллектуальные способности, логическое мышление в процессе решения задач, сравнивают, выявляют закономерности, обобщают.	Познавательные УУД П1 – Ориентируются в своей системе знаний, проводят анализ учебного материала. П2 – Строят логические рассуждения. Регулятивные УУД Р1 – Проговаривают последовательность действий на уроке; Р2 – Осуществлять контроль своей деятельности; Коммуникативные УУД К1 – Корректировка и дополнение ответов одноклассников; К2 – Участвуют в диалоге и коллективном обсуждении вопроса.
Элементы содержания урока		
Основное содержание урока (что изучаем?)	1. Выводим формулу квадрата суммы и квадрата разности; 2. Применяем формулу квадрата суммы и квадрата разности.	
Основные термины и понятия	1. Квадрат суммы; 2. Квадрат разности.	
Организация пространства урока (учебно-методическое обеспечение урока)		
Методы обучения	Объяснительно-иллюстративный – О-И; Словесный – С; Наглядный – Н; Практический – Пр.	
Средства	Вербальные – В;	

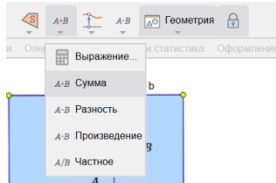
<i>обучения</i>	Наглядные – Н; Технические – Т.		
<i>Межпредметные связи</i>	<i>Формы организации работы</i>	<i>Ресурсы</i>	<i>Оборудование и ПО</i>
Введение в науку. Связь с окружающим миром.	Фронтальная – Ф; Индивидуальная – И. Групповая – Г.	Ручки, тетради, раздаточный материал.	Доска, компьютер, экран.
Контроль и оценка результатов деятельности			
<i>Формы контроля</i>	<i>Диагностические задания:</i>	<i>Оценка результатов деятельности на уроке</i>	
ФК1 – самоконтроль; ФК2 – взаимоконтроль.	Д31 – самостоятельная работа; Д32 – групповая работа.	Самооценка: карточка рефлексии	Взаимооценка

План урока:

12.	Организационный этап	2 мин
13.	Открытие новых знаний	20 мин
14.	Закрепление	13 мин
15.	Рефлексия	4 мин
16.	Домашняя работа	1 мин

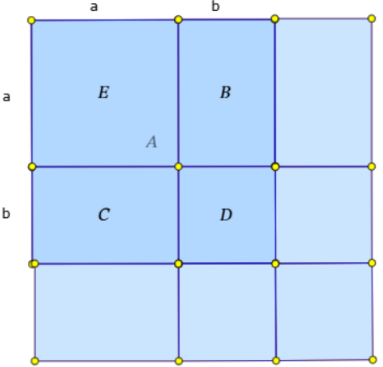
Ход урока

Методы и формы обучения	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Доска	Средства обучения, ресурсы	Формы контроля. Способы оценки	Формируемые УУД
<i>Этап 1: Организационный этап</i> <i>Цель этапа: Создание благоприятного настроения на работу.</i>						
Ф; С	Приветствие. Проверка готовности обучающихся к	Настраиваются на учебную деятельность.		В		К2

	Верно, тогда давайте работать дальше. Найдем площади всех прямоугольников, входящих в состав квадрата А. Для каждого прямоугольника проводим действия как для квадрата А. Справа у вас должны появиться значения площадей еще 4 прямоугольников. Далее давайте проверим действительно ли площадь квадрата А равна сумме площадей входящих в его состав прямоугольников. Для этого в верхней строке инструментов выбираем функцию «сумма» и нажимаем поочередно на все значения площадей, кроме квадрата А. Снизу у вас появится значение суммы площадей. Смотрим, действительно ли площадь квадрата А равна сумме площадей	Да Заметили	$S(A) = 86,5 \text{ см}^2$ $S(E) = 31,4 \text{ см}^2$ $S(B) = 20,7 \text{ см}^2$ $S(C) = 20,8 \text{ см}^2$ $S(D) = 13,7 \text{ см}^2$  $S(A) = 86,5 \text{ см}^2$ $S(E) = 31,4 \text{ см}^2$ $S(B) = 20,7 \text{ см}^2$ $S(C) = 20,8 \text{ см}^2$ $S(D) = 13,7 \text{ см}^2$ $S(E) + S(B) + S(C) + S(D) = 86,5 \text{ см}^2$			
--	--	---------------------------	---	--	--	--

	прямоугольников, из которых он состоит? Вы, наверное, заметили, что у всех прямоугольников известны стороны? Давайте попробуем записать площадь каждого из прямоугольников через произведение его сторон. Квадрат Е Прямоугольник С Прямоугольник В Квадрат D Отлично, а площадь квадрата А? То есть площадь А выражается квадратом чего? Верно. Мы уже с вами записали, что площадь А равна сумме	a^2 $a \cdot b$ $a \cdot b$ b^2 $(a + b)^2$ Суммы	$(a + b)^2 = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab$			
--	---	--	---	--	--	--

	площадей прямоугольников, давайте теперь подставим вместо значений площадь, то, что мы с вами только что написали. Давайте приведем подобные, что получим? Давайте проговорим с вами вслух, что получилось? Отлично, вы сейчас практически самостоятельно вывели с помощью геометрии формулу квадрата суммы. Осталось так же попробовать вывести формулу квадрата разности, давайте попробуем. (Приложение 2) Здесь вам будет дан квадрат Е со стороной a, вам надо будет выразить площадь квадрата со стороной $a - b$ с помощью данных прямоугольников.	Квадрат суммы a и b равен сумме квадрату a, удвоенному произведению a и b и квадрата b Обучающиеся выполняют задание по инструкции. 1) $S(B) = 29,2 \text{ см}^2$ $S(C) = 14,1 \text{ см}^2$ $S(D) = 28,8 \text{ см}^2$ $S(E) = 131,9 \text{ см}^2$ $S(E) - S(D) - S(C) - S(B) = 59,8 \text{ см}^2$
--	---	--

Ф; С, Н, О-И, Пр	Давайте сделаем несколько заданий на закрепление. Задания из учебника: 780 а, б, в, г 785 а, б, д, е Если что-то не будет получаться, просите помощи - я помогу Задание (Приложение 3) Я раздам вам готовые квадраты. Предположите, как изменится формула квадрата суммы а и б, если б увеличить в два раза, попробуйте дорисовать недостающую часть при увеличении б в два раза и с помощью рисунка записать формулу. Молодцы, вы справились со всеми заданиями.	Выполняют задания. Выполняют задание.  Делают рисунок и записывают формулу $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$		В, Н, Т, раздаточный материал	ФК2, ФК1, Д31	Пр1,Пр2, Пр3, К1, К2, П1, П2, Л1, Л2, Р2, Р1
<i>Этап 4: Рефлексия</i> <i>Цель этапа: Выявление дефицитов</i>						
Ф, С	Давайте сделаем небольшую рефлексию (Приложение 4) Вам нужно в этот квадрат распределить все, что вы			В, Н, Т, раздаточный материал	ФК1	П1, Р2

	сегодня делали на уроке 1)Выводили формулу квадрата суммы 2)Выводили формулу квадрата разности 3)Задания из учебника 4)Задание с увеличением квадрата					
<i>Этап 5: Домашняя работа</i>						
Ф, И, Пр	На дом: 780 д, е 785 в, г, ж, з	Записывают дз	780 д, е 785 в, г, ж, з			

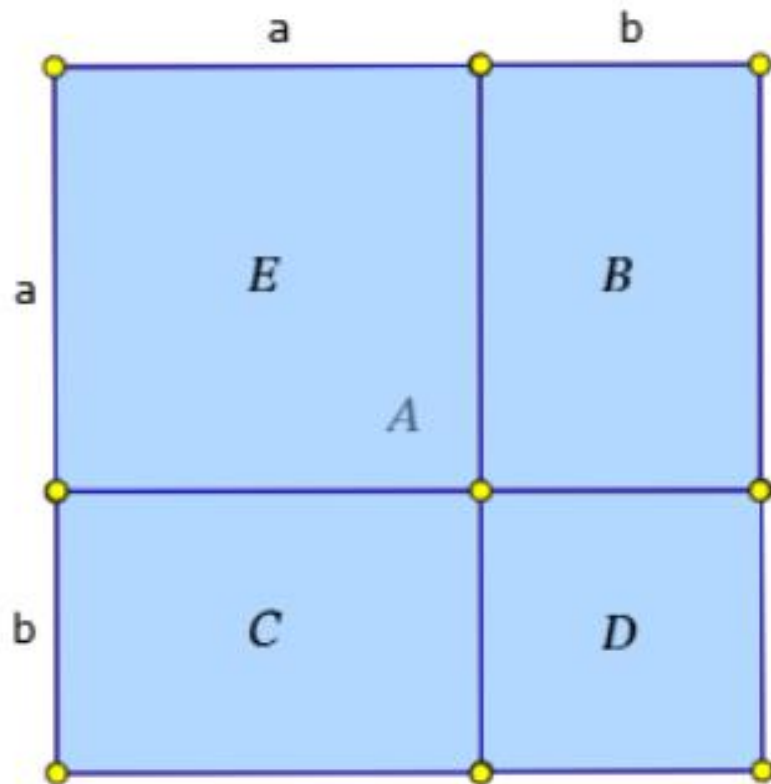
Приложение 1



Приложение 2



Приложение 3



Приложение 4

Знаю хорошо	Немного не понял
Немного не понял	Плохо понял

Технологические карты уроков





СПРАВКА

о результатах проверки текстового документа
на наличие заимствований

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.П.
АСТАФЬЕВА"

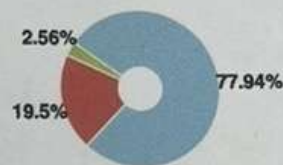
ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНА В СИСТЕМЕ АНТИПЛАГИАТ.ВУЗ

Автор работы: Дмитриенко Кирилл Игоревич
Самоцитирование
рассчитано для: Дмитриенко Кирилл Игоревич
Название работы: Dmitrienko_VKR
Тип работы: Выпускная квалификационная работа
Подразделение: кафедра математики и методики обучения математике

РЕЗУЛЬТАТЫ

СОВПАДЕНИЯ	19.5%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ	77.94%
ЦИТИРОВАНИЯ	2.56%
САМОЦИТИРОВАНИЯ	0%
ИИ-КОНТЕНТ	0%

ДАТА ПОСЛЕДНЕЙ ПРОВЕРКИ: 16.06.2026



Структура документа:

Модули поиска:

Проверенные разделы: основная часть с.8-31, 33-75, 99-103, 107, 110-111, приложение с.85-98, 104-106, 111-119, введение с.3-7, 98-99, 107-110, выводы с.32, 77-79, 106

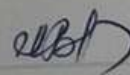
Переводные заимствования; Кольцо вузов; Профессиональная лексика. АПК и биотех; Профессиональная лексика. Юриспруденция; Шаблонные фразы; Цитирование; Профессиональная лексика. Медицина; СМИ России и СНГ; PubMed; IEEE; Публикации eLIBRARY; Коллекция НБУ; Патенты СССР, РФ, СНГ; Медицина; Публикации РГБ; СПС ГАРАНТ: аналитика; Сводная коллекция научных работ Беларуси; Перефразирования по базе публикаций открытого доступа PubMed; Перефразирования по Коллекции открытых публикаций международных издательств; Коллекция открытых публикаций международных издательств; Перефразирования по коллекции IEEE; Переводные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; Переводные заимствования IEEE; Переводные заимствования по коллекции Гарант: аналитика; Публик...

Работу проверил: Шашкина Мария Борисовна

ФИО проверяющего

Дата подписи:

16.06.2026



Подпись проверяющего



Чтобы убедиться
в подлинности справки, используйте QR-код,
который содержит ссылку на отчет.

Ответ на вопрос, является ли обнаруженное заимствование
корректным, система оставляет на усмотрение проверяющего.
Предоставленная информация не подлежит использованию
в коммерческих целях.