МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Коробейников Александр Николаевич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Обучение решению стереометрических задач на вычисление углов в 10 классе с использованием методической копилки динамических чертежей

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина

____
(дата, подпись)

Научный руководитель
д-р пед. наук, к.ф.-м.н., профессор
Майер Валерий Робертович

____
(дата, подпись)

Дата защиты
____

Обучающийся
А.Н. Коробейников

____
(дата, подпись)

Оценка________________________________
прописью

Красноярск 2026

Содержание

Введение

Актуальность исследования. В современном математическом образовании всё шире используются цифровые инструменты, интерактивные модели и системы динамической математики. В школьную практику входят цифровые инструменты, интерактивные модели, электронные ресурсы, системы динамической математики. Их значение особенно заметно там, где обычного рисунка на доске или в учебнике уже не хватает. Стереометрия относится именно к таким разделам.

В курсе геометрии 10 класса стереометрия традиционно вызывает у школьников серьёзные затруднения. Причина не только в большом количестве новых понятий. Сложность состоит в том, что школьнику приходится работать с объектами пространства, а видеть он их чаще всего может только на плоском изображении. Куб, призма, пирамида, плоскость, сечение, угол между прямыми или плоскостями изображаются в учебнике и тетради как проекции. Такая проекция помогает зафиксировать фигуру, но одновременно упрощает её. Одни элементы оказываются скрытыми, другие накладываются друг на друга, а истинное расположение прямых и плоскостей не всегда легко восстановить мысленно.

Особенно трудными для десятиклассников становятся задачи на вычисление углов в пространстве. Здесь мало знать определение и помнить нужную формулу. Сначала надо понять, какой именно угол требуется найти. Затем нужно выполнить вспомогательное построение и только после этого перейти к вычислениям. При нахождении угла между скрещивающимися прямыми приходится выполнять параллельный перенос одной из прямых. При нахождении угла между прямой и плоскостью необходимо построить ортогональную проекцию прямой на эту плоскость. При нахождении угла между двумя плоскостями требуется выделить линейный угол двугранного угла. Все эти действия опираются на пространственное представление, которое у десятиклассников формируется неравномерно.

В учебной практике именно построение часто становится главным слабым местом. Ученик может уверенно пользоваться теоремой Пифагора, теоремой косинусов или тригонометрическими соотношениями, но ошибиться раньше - на этапе выбора искомого угла. Дальше решение может выглядеть вполне убедительно: записаны формулы, выполнены вычисления, получен ответ. Но если исходный угол был выбран неверно, то вся работа теряет математический смысл. Поэтому обучение решению стереометрических задач должно включать не только вычислительную часть. Не менее важно учить школьника видеть пространственную конфигурацию, выделять в ней существенные элементы и переводить объёмную задачу в плоскую модель для расчётов.

Традиционный чертёж помогает, но его возможностей не всегда достаточно. Рисунок на доске или в тетради остаётся неподвижным. Его нельзя повернуть, рассмотреть с другой стороны, временно убрать лишние линии или отдельно выделить нужную плоскость. Учащемуся приходится многое достраивать в уме: положение скрытых рёбер, направление перпендикуляров, взаимное расположение прямых, вид нужного треугольника. Для школьников с недостаточно развитым пространственным воображением такая работа оказывается слишком трудной. В результате задача на вычисление угла превращается для них не столько в математическое рассуждение, сколько в попытку угадать правильный чертёж.

Здесь становятся полезны динамические чертежи, созданные в системах динамической математики. Они позволяют представить пространственную фигуру не как неподвижную картинку, а как модель, с которой можно работать. Её можно вращать, изменять, дополнять вспомогательными построениями, выделять нужные прямые и плоскости, измерять углы, наблюдать за изменением элементов при варьировании параметров. Такой чертёж уже не сводится к иллюстрации готового решения. Он помогает разобрать сам ход решения: откуда появляется искомый угол, почему используется именно этот треугольник, каким образом пространственная ситуация переходит в вычислительную задачу.

При этом важно понимать, что динамический чертёж сам по себе не решает методическую проблему. Если использовать отдельные модели случайно, только для внешней наглядности, эффект будет ограниченным. Нужна система, в которой каждый чертёж связан с определённым типом задачи и выполняет конкретную учебную функцию. Один чертёж может помогать при введении понятия, другой при объяснении способа построения, третий - при разборе типовой задачи, четвёртый - при самостоятельной работе обучающихся. Именно поэтому в данной работе рассматривается методическая копилка динамических чертежей. Она понимается не как набор красивых файлов, а как упорядоченный материал для обучения решению задач на вычисление углов в пространстве.

Актуальность исследования определяется противоречием между сложностью стереометрических задач на вычисление углов и ограниченными возможностями традиционного статического чертежа при их изучении. С одной стороны, школьный курс геометрии требует от школьников умения находить углы между прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями. С другой стороны, многие десятиклассники испытывают трудности ещё до начала вычислений, когда нужно построить нужный угол и понять пространственную конфигурацию. Значит, возникает необходимость в таких методических средствах, которые помогут сделать этот этап более понятным, наглядным и осознанным.

Проблема исследования заключается в определении того, каким образом может быть организовано обучение решению стереометрических задач на вычисление углов в 10 классе с использованием методической копилки динамических чертежей.

Объект исследования - процесс обучения стереометрии обучающихся 10 класса общеобразовательной школы.

Предмет исследования - методика использования методической копилки динамических чертежей при обучении решению стереометрических задач на вычисление углов в пространстве.

Цель исследования - разработать и описать методику обучения решению стереометрических задач на вычисление углов в 10 классе с использованием методической копилки динамических чертежей.

Гипотеза исследования состоит в том, что использование методической копилки динамических чертежей будет способствовать более осознанному обучению решению стереометрических задач на вычисление углов, если:

– динамические чертежи будут систематизированы в соответствии с основными типами углов в пространстве;

– каждая модель будет связана с конкретным алгоритмом построения искомого угла;

– работа с динамическими чертежами будет включена в разные этапы решения задачи: анализ условия, построение, вычисление и проверку результата;

– использование цифровой модели будет постепенно переводиться в умение выполнять построение на обычном статическом чертеже.

В соответствии с целью и гипотезой были определены следующие **задачи исследования:**

1. Раскрыть особенности обучения решению задач на вычисление углов в пространстве в курсе геометрии 10 класса.

2. Охарактеризовать методические возможности динамических чертежей при изучении стереометрии.

3. Определить ключевые идеи, лежащие в основе авторской методической копилки динамических чертежей на вычисление углов.

4. Описать технологии и методы создания динамических чертежей в системах динамической математики.

5. Разработать приёмы применения методической копилки динамических чертежей при обучении решению стереометрических задач на вычисление углов.

6. Провести апробацию разработанных материалов и проанализировать результаты их использования в учебном процессе.

Методологическую основу исследования составляют положения методики обучения математике, идеи деятельностного подхода к организации учебной работы обучающихся, положения о роли наглядности в обучении геометрии, а также представления о значении пространственного мышления при изучении стереометрии. Для данной работы важно рассматривать динамический чертёж не только как средство показа готовой фигуры. Он выступает как инструмент учебного действия: ученик наблюдает модель, анализирует её, выделяет нужные элементы и постепенно учится выполнять те же построения самостоятельно.

Для решения поставленных задач использовался комплекс методов исследования. К теоретическим методам относятся анализ научно-методической литературы по проблеме обучения стереометрии, изучение содержания школьного курса геометрии 10 класса, обобщение материалов по применению систем динамической математики. К практическим методам относятся разработка динамических чертежей, моделирование учебных ситуаций, педагогическое наблюдение, анализ выполнения обучающимися задач на вычисление углов в пространстве. Также применялись методы качественной обработки результатов апробации.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что обучение решению задач на вычисление углов в пространстве рассматривается через специально организованную методическую копилку динамических чертежей. В работе уточняется, какую роль такие чертежи могут выполнять на разных этапах решения стереометрической задачи: при анализе условия, построении искомого угла, переходе к вычислениям и проверке результата. Кроме того, предлагается структура копилки, построенная по основным типам пространственных углов и соответствующим алгоритмам их нахождения.

Практическая значимость исследования связана с тем, что разработанные материалы могут быть использованы учителем математики при изучении стереометрии в 10 классе. Методическая копилка динамических чертежей подходит для объяснения нового материала, разбора типовых задач, организации самостоятельной работы и повторения темы. Предложенные приёмы помогают сделать решение задач более наглядным, показывают связь между пространственной фигурой и плоским вычислительным чертежом, а также поддерживают более осознанное усвоение способов нахождения углов в пространстве.

Структура выпускной квалификационной работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДИЧЕСКОЙ КОПИЛКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

1.1 Динамические чертежи как средство обучения решению задач на вычисление углов в пространстве

Советский и российский учёный в области методики преподавания математики Виктор Алексеевич Далингер в учебном пособии [3] отмечает: «Одной из важнейших задач обучения учащихся геометрии в школе является формирование и развитие у них пространственных представлений, которые включают в себя создание и оперирование пространственными образами». В обучении стереометрии обычный чертёж всегда был главным помощником учителя. Через него вводятся фигуры, обозначаются вершины, рёбра, плоскости, дополнительные построения. Без чертежа задача на многогранник быстро превращается в набор слов, которые трудно удержать в голове. Но в задачах на вычисление углов в пространстве одного статического изображения часто оказывается недостаточно.

Причина состоит в самой природе стереометрического чертежа. Он изображает пространственную фигуру на плоскости. Поэтому часть элементов оказывается скрытой, истинные углы визуально искажаются, а отдельные прямые могут казаться пересекающимися, хотя в действительности они скрещиваются. Обучающийся видит не саму фигуру, а её условное изображение. Чтобы решить задачу, ему приходится мысленно восстановить объёмную конфигурацию и понять, какие элементы чертежа действительно нужны для вычисления [1]. Динамический чертёж помогает снять часть этой трудности. В отличие от рисунка в учебнике или тетради, он не закреплён в одном положении. Модель можно повернуть, приблизить, изменить, дополнить вспомогательными линиями. Можно скрыть лишние элементы и оставить только те прямые, плоскости или отрезки, которые участвуют в решении. За счёт этого геометрическая фигура становится не просто картинкой, а объектом учебного действия.

Особенно важно это при работе с углами в пространстве. В таких задачах школьнику нужно не только посчитать величину угла, но сначала правильно его построить. Для угла между скрещивающимися прямыми требуется выполнить параллельный перенос. Для угла между прямой и плоскостью - построить ортогональную проекцию прямой. Для угла между плоскостями - выделить линейный угол двугранного угла. Каждое из этих действий легче понять, когда оно показано не только словесно, но и через движение, изменение и последовательное появление элементов на модели. Например, при нахождении угла между скрещивающимися прямыми динамический чертёж позволяет показать сам смысл параллельного переноса. Учитель может выделить две исходные прямые, затем провести через выбранную точку прямую, параллельную одной из них, и показать получившийся плоский угол.

При вращении модели становится видно, что исходные прямые действительно не лежат в одной плоскости, а построенный угол уже можно измерять как обычный угол между пересекающимися прямыми. Это помогает обучающимся понять не только алгоритм, но и причину его применения.

При изучении угла между прямой и плоскостью динамическая модель даёт другой методический эффект. Она позволяет показать наклонную, перпендикуляр к плоскости и проекцию как связанные элементы одной конструкции. На статическом рисунке проекция часто теряется среди рёбер многогранника. В динамическом чертеже её можно выделить цветом, временно убрать лишние линии, повернуть фигуру так, чтобы прямоугольный треугольник стал хорошо виден. Тогда обучающийся лучше понимает, почему искомый угол находится именно между прямой и её проекцией, а не между произвольными близкими элементами фигуры.

Ещё более заметна польза динамических чертежей при работе с двугранными углами. Линейный угол двугранного угла требует точного построения: нужно выбрать точку на ребре двугранного угла и провести в каждой грани перпендикуляр к этому ребру. На обычном чертеже такая конструкция часто выглядит перегруженной. Динамическая модель позволяет сначала показать сами плоскости, затем их линию пересечения, после этого провести перпендикуляры и только в конце выделить искомый линейный угол. Получается не готовая схема, а последовательность осмысленных действий [12].

Такая поэтапность особенно важна для обучающихся, у которых пространственное мышление развито недостаточно устойчиво. Они могут запомнить определение, но не увидеть его в конкретной фигуре. Динамический чертёж в этом случае выполняет роль внешней опоры: он помогает удержать конфигурацию, увидеть взаимное расположение элементов и связать построение с определением.

Постепенно эта опора может сокращаться. Сначала школьник работает с готовой моделью, затем переносит построение в тетрадь, а позже выполняет аналогичные действия уже самостоятельно [16]. При этом динамические чертежи не должны превращаться в замену математического рассуждения. Их ценность не в том, что программа может сама измерить угол и выдать численное значение. Если использовать модель только ради готового ответа, методический эффект будет слабым.

Намного важнее другое: динамический чертёж позволяет разобрать путь к ответу. Он показывает, какие элементы выбраны, почему проведена именно эта прямая, как построение связано с теоремой или определением, в каком треугольнике дальше выполняется вычисление.

С этой точки зрения динамический чертёж можно рассматривать как средство соединения наглядности и строгости. Наглядность проявляется в том, что обучающийся видит пространственную фигуру, может изменить ракурс и проследить построение. Строгость сохраняется за счёт того, что каждый новый элемент строится по математическому правилу: параллельная прямая проводится как параллельная, перпендикуляр - как перпендикуляр, угол измеряется между заданными объектами. Это отличает динамическую модель от произвольной картинки, нарисованной «на глаз» [3].

Системы динамической математики дают учителю возможность создавать такие модели для разных типов задач. В GeoGebra, «1С: Математическом конструкторе» и других средах можно строить многогранники, задавать точки, прямые и плоскости, проводить вспомогательные линии, изменять параметры фигуры и наблюдать, как меняется результат.

Для задач на вычисление углов это особенно удобно, потому что один и тот же чертёж можно использовать не только для демонстрации, но и для исследования. Например, изменяя высоту пирамиды, можно наблюдать изменение угла между боковым ребром и плоскостью основания. Это помогает увидеть зависимость, которую трудно почувствовать по одному неподвижному рисунку [10].

Важной особенностью динамического чертежа является возможность возвращаться к каждому этапу решения.

Учитель может сначала показать только исходную фигуру, затем по одному добавлять вспомогательные построения, после этого выделить нужный треугольник и только в конце перейти к вычислению. Такой порядок снижает перегрузку чертежа. Обучающиеся не получают сразу сложную схему с большим количеством линий, а видят, как она постепенно возникает из условия задачи.

Динамические чертежи полезны и при организации самостоятельной работы. Обучающийся может проверить свою гипотезу: правильно ли выбрана проекция, действительно ли построенная прямая параллельна исходной, является ли отмеченный угол линейным углом двугранного угла. Это не отменяет роли учителя, но делает работу более исследовательской. Школьник получает возможность не только слушать объяснение, но и действовать с моделью.

Современные требования к обучению математике предполагают использование таких средств, которые помогают не механически воспроизводить готовый алгоритм, а понимать способ действия. Это особенно важно в геометрии, где качество решения во многом зависит от умения видеть структуру фигуры и обосновывать построения [9]. Концепция развития математического образования также ориентирует обучение на повышение качества математической подготовки и развитие осмысленного владения математическими методами [14]. Следовательно, динамические чертежи в обучении решению задач на вычисление углов в пространстве выполняют несколько важных функций. Они делают пространственную фигуру доступнее для восприятия, помогают поэтапно строить искомый угол, позволяют проверить правильность вспомогательных построений и связывают геометрический анализ с последующим вычислением. Именно поэтому дальнейшая работа с такими чертежами требует не случайного использования отдельных моделей, а их продуманного отбора и объединения в методическую копилку.

Динамический чертёж выступает не внешним украшением урока, а рабочим инструментом обучения стереометрии. Он помогает обучающемуся пройти самый трудный участок решения: от условного изображения многогранника к осознанному построению того угла, который затем можно вычислить. На этой основе становится возможной разработка авторской методической копилки динамических чертежей, ориентированной на основные типы задач на вычисление углов в пространстве.

1.2. Ключевые идеи, лежащие в основе авторской методической копилки динамических чертежей на вычисление углов

Методическая копилка динамических чертежей в данной работе понимается как специально организованный набор интерактивных моделей, предназначенных для обучения решению задач на вычисление углов в пространстве. Важно сразу отделить такую копилку от простой папки с файлами. Если учитель просто хранит несколько красивых 3D-чертежей, это ещё не даёт полноценного методического результата. Копилка начинает работать только тогда, когда каждый чертёж имеет своё место, свою учебную функцию и связан с конкретным типом задач.

Главная идея авторской копилки состоит в систематизации динамических чертежей по видам пространственных углов. В курсе стереометрии 10 класса эта тема естественно делится на три направления: углы между прямыми, углы между прямой и плоскостью, углы между плоскостями. Такое деление выбрано не формально. Для каждого вида угла требуется свой способ построения, своя логика перехода к плоскому треугольнику и свои типичные ошибки при решении [1].

Первый блок копилки связан с углами между прямыми. В него входят модели, показывающие различие между пересекающимися, параллельными и скрещивающимися прямыми. Особое место занимают чертежи, где визуализируется параллельный перенос одной из скрещивающихся прямых. Такой материал помогает обучающимся увидеть, почему искомый угол находится не «на глаз» по изображению, а через специально выполненное построение.

Второй блок посвящён углу между прямой и плоскостью. Здесь центральным элементом становится проекция прямой на плоскость. Поэтому в копилку включаются модели, где последовательно выделяются наклонная, перпендикуляр к плоскости, основание перпендикуляра и сама проекция. Такие чертежи особенно важны при работе с кубом, призмой и пирамидой, где нужный прямоугольный треугольник не всегда сразу виден на обычном рисунке.

Третий блок включает динамические чертежи к задачам на двугранные углы и углы между плоскостями. Здесь основная задача модели - показать построение линейного угла. Для этого в чертеже выделяется ребро двугранного угла, затем в каждой грани строятся перпендикуляры к этому ребру, после чего фиксируется полученный плоский угол. В статичном изображении такая конструкция часто выглядит тяжёлой и перегруженной. В динамической модели её можно раскрывать постепенно, шаг за шагом [12].

Внутри каждого блока модели также различаются по назначению. Одни чертежи служат для введения понятия. Они не перегружены вычислениями и показывают саму геометрическую идею: что является углом между прямыми, где находится проекция, как возникает линейный угол двугранного угла. Другие модели предназначены для разбора типовых задач на конкретных многогранниках. В них уже появляются ребра, диагонали, высоты, сечения, вспомогательные треугольники. Третий вид моделей - параметрические чертежи, где можно изменять размеры фигуры и наблюдать, как меняется величина угла.

Такая структура делает копилку удобной для урока. Учитель может выбрать не просто «чертёж к теме», а модель под конкретную учебную ситуацию. Например, при первом объяснении нужен простой чертёж без лишних элементов. При разборе задачи - модель с поэтапным появлением вспомогательных построений. При закреплении - чертёж, в котором обучающиеся сами проверяют, как меняется угол при изменении параметров фигуры.

Важной идеей копилки является движение от внешней опоры к самостоятельному решению. На начальном этапе динамический чертёж помогает увидеть то, что трудно представить мысленно. Модель показывает пространственную фигуру, нужные элементы и порядок построения. Затем обучающийся начинает проговаривать ход решения: какая прямая переносится, где строится проекция, какое ребро является ребром двугранного угла. Постепенно цифровая опора сокращается. В итоге школьник должен уметь выполнить аналогичное построение в тетради, уже без постоянного обращения к интерактивной модели.

Такой порядок согласуется с идеей поэтапного формирования учебных действий. Сначала действие выполняется во внешнем плане, с опорой на наглядность. Затем оно становится более осознанным: обучающийся объясняет, почему выполняется именно такое построение. После многократной работы с моделями часть действий переходит во внутренний план. Это особенно важно для стереометрии, где от умения мысленно удерживать пространственную конфигурацию зависит качество решения задачи [16].

Методическая копилка должна учитывать разный уровень подготовки обучающихся. В одном классе могут быть школьники, которые достаточно быстро видят нужный угол в пространстве, и те, кому требуется подробная внешняя опора. Поэтому модели целесообразно распределять по уровню сложности. Базовые чертежи помогают понять определение и порядок построения. Чертежи среднего уровня позволяют отработать стандартные задачи на кубах, призмах и пирамидах. Более сложные модели могут включать изменяемые параметры, нестандартные положения прямых и плоскостей, несколько возможных способов решения.

Отсюда вытекает ещё одна идея копилки - вариативность. Один и тот же многогранник может использоваться для разных учебных целей. Например, модель куба подходит для нахождения угла между диагоналями граней, угла между диагональю куба и плоскостью основания, угла между плоскостями граней или сечений. При этом меняется не сама фигура, а фокус внимания: учитель выделяет другие элементы и организует другую последовательность рассуждений.

Копилка должна быть открытой для пополнения. Это важный практический момент. Невозможно заранее подготовить абсолютно все модели, которые могут понадобиться учителю. В разных классах возникают разные трудности, разные темпы работы, разные учебные ситуации. Поэтому авторская копилка не должна быть закрытым набором файлов. Она должна задавать принцип отбора и построения динамических чертежей, чтобы учитель мог дополнять её новыми моделями, изменять уже созданные чертежи и адаптировать их под конкретный урок.

Для этого необходима понятная логика оформления моделей. Динамические чертежи должны иметь единый принцип обозначений, цветового выделения и последовательности построения. Например, исходные элементы задачи можно показывать одним способом, вспомогательные построения - другим, искомый угол - отдельно выделять цветом или толщиной линии. Такая единообразность не является мелочью. Она помогает обучающимся быстрее ориентироваться в модели и не тратить лишние усилия на расшифровку каждого нового чертежа.

Особую роль играет методическое сопровождение модели. Сам файл с динамическим чертежом ещё не объясняет, как именно его использовать на уроке. К нему должны быть привязаны формулировка задачи, краткое описание построения, вопросы для обучающихся, возможные затруднения и рекомендации для учителя. Например, к модели угла между прямой и плоскостью полезно добавить вопросы: какая точка уже лежит в плоскости, из какой точки проводится перпендикуляр, какой отрезок является проекцией, в каком треугольнике будет выполняться вычисление.

Методическая копилка не отменяет традиционные чертежи и письменное решение. Напротив, она должна помогать переходить к ним. Динамическая модель используется для того, чтобы прояснить пространственную ситуацию и порядок построения. После этого обучающиеся фиксируют ход решения в тетради: выполняют статичный чертёж, записывают обоснование, проводят вычисления. Такое сочетание важно, потому что итоговая проверка знаний чаще всего проходит без цифровой среды. Значит, интерактивная модель должна готовить к самостоятельному решению, а не заменять его.

Можно выделить несколько основных функций авторской копилки. Первая функция - поясняющая: модели помогают вводить определения и показывать смысл построений. Вторая - тренировочная: чертежи используются при решении типовых задач и закреплении алгоритмов. Третья - исследовательская: параметрические модели позволяют наблюдать изменение угла при изменении размеров фигуры. Четвёртая - диагностическая: работа с моделью помогает увидеть, на каком этапе возникает ошибка - при выборе угла, построении проекции, проведении перпендикуляра или переходе к вычислению.

Системы динамической математики дают техническую возможность реализовать такую структуру копилки. В них можно создавать модели многогранников, проводить прямые и плоскости, строить перпендикуляры и параллельные элементы, измерять углы, задавать изменяемые параметры. Однако в данном параграфе важна не техническая сторона, а сама методическая логика: чертёж включается в копилку не потому, что его можно построить в программе, а потому, что он помогает обучать конкретному действию при решении задачи [3; 10; 11].

Таким образом, авторская методическая копилка динамических чертежей строится на нескольких ключевых идеях: распределении моделей по видам пространственных углов, поэтапном раскрытии построения, связи с типовыми задачами, возможности дифференциации, открытости для пополнения и обязательном переходе от интерактивной модели к обычному письменному решению. Именно такая организация позволяет использовать динамические чертежи не случайно, а целенаправленно - как рабочий материал для обучения решению задач на вычисление углов в пространстве.

1.3. Основные технологии и методы создания методической копилки динамических чертежей на вычисление углов в пространстве

Создание методической копилки динамических чертежей начинается не с выбора цвета линий и даже не с запуска программы. Сначала учитель должен понять, какую именно геометрическую трудность должен снять будущий чертёж. В задачах на вычисление углов в пространстве эта трудность чаще всего связана с построением: нужно найти нужный угол, обосновать его появление и только потом перейти к вычислениям. Поэтому динамическая модель должна строиться не ради внешней наглядности, а как инструмент, который помогает пройти этот путь шаг за шагом.

Для создания таких моделей могут использоваться разные системы динамической математики. В школьной практике чаще всего обращаются к GeoGebra, «1С: Математическому конструктору» и «Живой математике». Эти среды различаются по возможностям, интерфейсу и степени удобства при работе с пространственными фигурами. Однако при разработке копилки важно не просто выбрать известную программу, а определить, насколько она подходит для конкретной задачи: можно ли в ней построить многогранник, провести параллельную прямую, выполнить перпендикуляр к плоскости (см. Приложение А), выделить угол и изменить параметры модели [2; 8; 10].

GeoGebra удобна тем, что имеет полноценное 3D-полотно. В нём можно задавать точки, строить прямые и плоскости, создавать кубы, призмы и пирамиды, проводить диагонали, измерять углы и вращать модель. Для задач на вычисление углов это особенно ценно. Учитель может показать не только итоговый чертёж, но и сам процесс построения: от исходной фигуры до выделения нужного треугольника.

«1С: Математический конструктор» тоже может быть полезен при подготовке материалов для копилки. Его преимущество связано с готовыми инструментами и наглядностью моделей. Такая среда хорошо подходит для базовых школьных задач, где требуется быстро построить каркас многогранника и показать основные элементы. Для урока это важный момент: техническая подготовка не должна заслонять методическую задачу [1].

«Живая математика» сильнее проявляет себя при работе с плоскими динамическими построениями. При создании полноценных пространственных моделей её возможности ограничены, поэтому для стереометрии она не всегда является самым удобным выбором. Но отдельные фрагменты решения - например, вычислительный треугольник, угол, проекция или вспомогательное построение на плоскости - с её помощью показать можно. Поэтому каждая программа должна использоваться там, где она действительно помогает, а не просто потому, что она есть в распоряжении учителя.

Технология создания динамического чертежа начинается с анализа задачи. Прежде всего определяется тип угла: между прямыми, между прямой и плоскостью или между двумя плоскостями. Это не формальность. От выбранного типа зависит весь дальнейший ход построения. Для одного случая нужен параллельный перенос, для другого - ортогональная проекция, для третьего - линейный угол двугранного угла. Если не развести эти случаи заранее, модель получится внешне красивой, но методически слабой.

Для задач на угол между прямыми главным становится выделение двух прямых и построение плоского угла между ними. Если прямые пересекаются, задача обычно не вызывает больших технических трудностей: достаточно показать точку пересечения и меньший из образованных углов. Иначе строится модель для скрещивающихся прямых. Здесь в чертеже нужно предусмотреть параллельный перенос одной из прямых через удобную точку многогранника. Лучше, если эта точка уже принадлежит фигуре: вершина куба, вершина призмы, точка на ребре или диагонали. Тогда построение не висит отдельно от задачи, а естественно включается в исходную конфигурацию [1].

В динамической модели такой перенос должен быть показан последовательно. Сначала выделяются исходные прямые. Затем появляется вспомогательная прямая, параллельная одной из них. После этого фиксируется плоский угол, который уже можно измерять и вычислять. Такой порядок важен: обучающийся видит, что угол между скрещивающимися прямыми не угадывается по рисунку, а получается через строгое построение.

Для задач на угол между прямой и плоскостью технология будет другой. Центральным элементом становится ортогональная проекция прямой на плоскость. В модели нужно показать наклонную, перпендикуляр к плоскости, основание этого перпендикуляра и отрезок-проекцию. После этого выделяется угол между исходной прямой и её проекцией. Именно этот угол затем включается в прямоугольный треугольник, где выполняются вычисления.

Такой чертёж особенно полезен в задачах с кубом и пирамидой. На обычном изображении проекция часто сливается с рёбрами или диагоналями фигуры. В динамической модели её можно выделить отдельно: сделать линию более заметной, показать прямой угол, временно убрать лишние элементы. Тогда обучающийся видит не просто «готовый треугольник», а связь между пространственной прямой, плоскостью и её проекцией.

При создании чертежей для задач на угол между плоскостями на первый план выходит построение линейного угла двугранного угла. Такая модель требует особенно аккуратной последовательности. Сначала выделяются две плоскости, затем их линия пересечения - ребро двугранного угла. После этого из одной точки на ребре строятся два перпендикуляра: каждый лежит в своей грани. Только угол между этими перпендикулярами является тем плоским углом, с которым дальше можно работать [12].

Если все элементы двугранного угла показать сразу, чертёж быстро становится перегруженным. Поэтому для таких моделей желательно использовать поэтапное отображение. На первом шаге видны только плоскости и их ребро. На втором появляются перпендикуляры. На третьем выделяется линейный угол. Затем можно показать треугольник, в котором будут найдены нужные стороны. Такая постепенность делает сложную конструкцию более доступной.

После определения типа задачи строится исходная фигура. Для куба и прямоугольного параллелепипеда удобно использовать координатное задание вершин или готовые инструменты построения многогранников. Для пирамиды сначала создаётся основание, затем фиксируется центр или нужная точка основания, после чего строится вершина и высота. На этом этапе важно не стремиться показать сразу всё. Исходная модель должна быть чистой: только фигура и обозначения, без лишних линий.

Следующий шаг - выделение объектов, которые даны в условии. Это могут быть диагонали граней, боковое ребро, плоскость основания, две боковые грани, ребро двугранного угла. Их лучше сразу оформить заметно: цветом, толщиной линии, пунктиром или подписью. В стереометрическом чертеже много элементов, и без такого выделения нужные прямые быстро теряются среди рёбер многогранника.

Затем выполняются вспомогательные построения. Они должны создаваться средствами самой программы, а не дорисовываться приблизительно. Если нужна параллельная прямая, используется инструмент построения параллели. Если нужен перпендикуляр к плоскости, он проводится как математически заданный перпендикуляр. Если строится угол, программа должна измерять его между указанными объектами. Это принципиально. «Динамическая модель ценна именно тем, что сохраняет строгость построения» [3].

Отдельно стоит продумать работу с вычислительным треугольником. В большинстве задач на углы в пространстве именно он становится мостом между пространственной фигурой и расчётами. Поэтому его нужно выделять не случайно, а методически ясно. Можно показать стороны треугольника более толстыми линиями, отметить прямой угол, временно скрыть лишние рёбра, подписать известные длины. Тогда становится видно, почему дальнейшее решение выполняется уже средствами планиметрии.

В параметрических моделях добавляется ещё один этап - настройка изменяемых величин. Например, можно задать ползунок для высоты пирамиды, длины ребра, положения точки на ребре или размера основания. При изменении параметра модель перестраивается, а вместе с ней меняется и угол. Такой чертёж позволяет показать не только один частный ответ, но и зависимость между элементами фигуры. В задачах на угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания это особенно наглядно: при увеличении высоты изменяется наклон ребра, а значит, меняется и искомый угол.

Но параметров не должно быть слишком много. Если всё на чертеже двигается одновременно, обучающийся начинает следить за движением модели, а не за математической идеей. Для базовой задачи достаточно одного изменяемого элемента. Более сложные модели с несколькими параметрами лучше использовать позже, когда основной способ построения уже освоен.

Оформление динамических чертежей должно быть единым для всей копилки. Это кажется мелочью, но на уроке такая мелочь быстро становится важной. Если в одной модели исходные элементы выделены красным, в другой - зелёным, в третьей - пунктиром без объяснения, обучающиеся каждый раз заново привыкают к правилам изображения. Поэтому лучше заранее задать общую логику: исходные элементы показываются одним способом, вспомогательные построения - другим, искомый угол - отдельно. Такой порядок облегчает чтение модели.

Кроме самого динамического файла, для каждого чертежа нужно подготовить краткое методическое сопровождение. В него входят формулировка задачи, цель модели, последовательность построения, вопросы для обучающихся и возможные ошибки. Например, к модели на угол между прямой и плоскостью можно добавить такие вопросы: какая точка прямой лежит в плоскости; из какой точки проводится перпендикуляр; какой отрезок является проекцией; в каком треугольнике находится искомый угол. Эти вопросы помогают использовать модель не как демонстрацию, а как материал для работы.

Копилка должна иметь понятную структуру хранения. Наиболее удобный вариант - распределить модели по трём разделам: углы между прямыми, углы между прямой и плоскостью, углы между плоскостями. Внутри каждого раздела можно выделить базовые чертежи, модели типовых задач и параметрические модели. Такой порядок облегчает подготовку к уроку. Учитель быстро выбирает нужный материал и понимает, для какого этапа занятия он подходит.

Важно сохранить возможность редактирования моделей. Методическая копилка не должна быть закрытым архивом. В реальной работе учителю может понадобиться изменить обозначения, убрать лишнюю линию, добавить новый элемент, заменить числовые данные или перестроить модель под другой вариант задачи. Поэтому желательно хранить не только демонстрационную версию, но и рабочий файл, который можно дорабатывать.

Создание динамического чертежа требует баланса между наглядностью и математической строгостью. Если модель слишком яркая и перегруженная, она отвлекает. Если она сухая и невыразительная, обучающемуся трудно понять, на что смотреть. Хорошая модель должна быть достаточно простой, но при этом точной. Все построения в ней должны иметь математическое основание, а каждый выделенный элемент - учебный смысл [6].

Создание методической копилки динамических чертежей включает несколько последовательных действий: анализ типа задачи, выбор программной среды, построение исходной фигуры, выделение объектов условия, выполнение вспомогательных построений, оформление искомого угла, настройку параметров, подготовку пояснений и организацию хранения моделей. При таком подходе динамический чертёж становится не случайной иллюстрацией, а продуманным учебным материалом для работы с задачами на вычисление углов в пространстве.

Вывод по первой главе

В первой главе были раскрыты теоретические и содержательные основания использования методической копилки динамических чертежей при обучении решению задач на вычисление углов в пространстве. Было показано, что в стереометрии особую трудность вызывает не само вычисление, а переход от пространственной фигуры к тому плоскому углу или треугольнику, с которым дальше можно работать средствами планиметрии. Именно здесь динамический чертёж становится важной учебной опорой: он помогает увидеть конфигурацию, выделить нужные элементы и проследить ход вспомогательного построения.

Методическая копилка динамических чертежей должна строиться с учётом трёх основных типов задач: на угол между прямыми, на угол между прямой и плоскостью, на угол между двумя плоскостями. Для каждого типа требуется своя логика работы: параллельный перенос, построение ортогональной проекции или выделение линейного угла двугранного угла. Поэтому копилка не может быть случайным набором моделей. Она должна иметь понятную структуру, единое оформление и связь с конкретными учебными действиями.

В первой главе также были определены основные требования к созданию таких чертежей: точность построений, поэтапное отображение элементов, возможность изменения параметров, удобство работы в выбранной программной среде и наличие методического сопровождения. Эти положения позволяют перейти от общего описания динамических моделей к их практическому применению. Во второй главе будут представлены приёмы работы с разработанной копилкой при решении задач на вычисление разных видов углов в пространстве.

ГЛАВА 2. ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С МЕТОДИЧЕСКОЙ КОПИЛКОЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ В 10 КЛАССЕ

2.1. Обучение решению задач на вычисление угла между прямыми в пространстве.

Задачи на вычисление угла между прямыми в пространстве требуют от обучающихся внимательной работы с чертежом. Главная трудность здесь обычно возникает не в вычислениях. Ошибка появляется раньше - когда нужно определить взаимное положение прямых.

Особенно часто затруднения вызывают скрещивающиеся прямые. На изображении куба, призмы или пирамиды они могут казаться пересекающимися. Иногда школьник, наоборот, воспринимает их как параллельные, потому что так выглядит рисунок. В стереометрии такой способ ненадёжен. Чертёж помогает увидеть фигуру, но не заменяет геометрическое рассуждение. Поэтому работа с задачами данного типа начинается с анализа прямых. Нужно определить, где расположена каждая из них, каким элементам многогранника она принадлежит, имеют ли прямые общую точку и можно ли провести через них одну плоскость. Только после этого можно переходить к построению угла.

В методической копилке для этого используется динамический чертёж, созданный в GeoGebra. Он позволяет повернуть фигуру, выделить нужные элементы, скрыть лишние рёбра и показать параллельный перенос одной из прямых. Это особенно важно, потому что угол между скрещивающимися прямыми нельзя брать по внешнему виду изображения. Его получают через прямую, параллельную одной из данных.

В качестве первой модели используется задача на куб.

Задача 1. *Дан куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Найти угол между прямыми* AC *и* B_1D_1.

На первом этапе учитель показывает исходную модель куба. На чертеже выделяются прямые AC и B_1D_1. Остальные рёбра можно сделать менее заметными, чтобы внимание класса было направлено только на данные прямые.

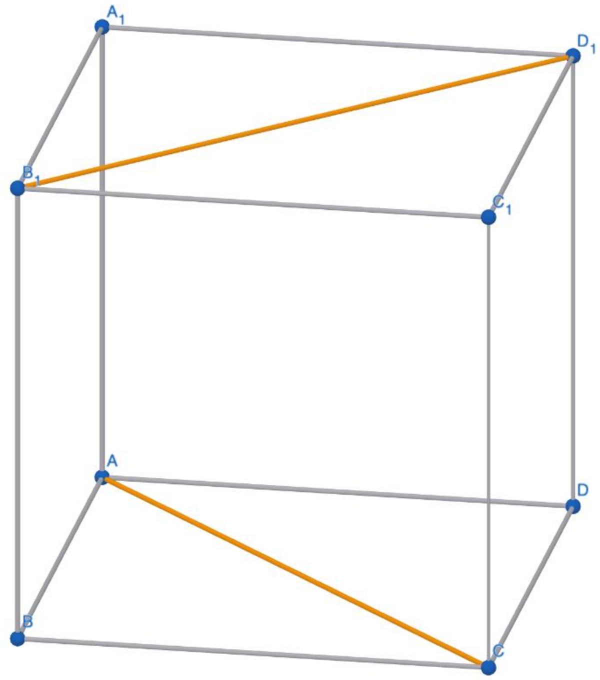


Рисунок 1 - Выделение прямых AC и B_1D_1 в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Работа начинается с вопросов. Где лежит прямая AC? Где расположена прямая B_1D_1? Имеют ли эти прямые общую точку? Можно ли считать их пересекающимися только потому, что на рисунке они зрительно сближаются?

После обсуждения фиксируется вывод: AC является диагональю основания ABCD, а B_1D_1 - диагональю верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Эти основания лежат в параллельных плоскостях. Общей точки у прямых нет. Значит, прямые AC и B_1D_1 являются скрещивающимися.

Затем модель поворачивается. Этот шаг нужен не для внешнего эффекта. При изменении ракурса обучающиеся видят, что прямые действительно не пересекаются. На обычном чертеже такой момент часто приходится принимать со слов учителя, а динамическая модель позволяет проверить его зрительно.

Рисунок 2 - Проверка взаимного положения прямых AC и B_1D_1 с помощью вращения модели

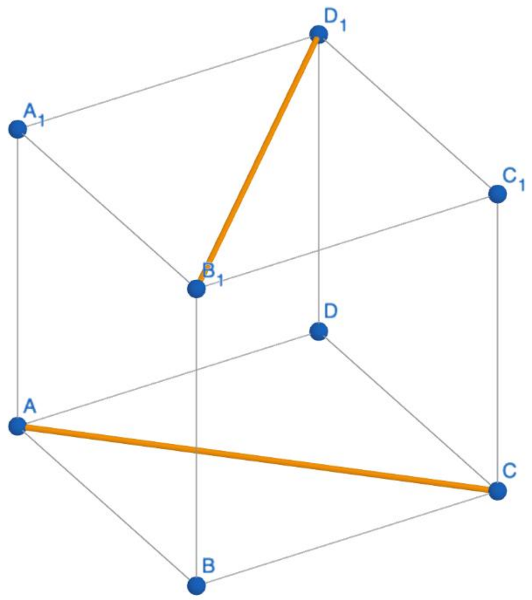


Рисунок 2 - Проверка взаимного положения прямых AC и B_1D_1 с помощью вращения модели

Следующий этап - построение угла. Прямую B_1D_1 удобно заменить параллельной ей прямой BD. Диагонали BD и B_1D_1 лежат в параллельных основаниях куба и имеют одно направление. Поэтому BD ∥ B_1D_1.

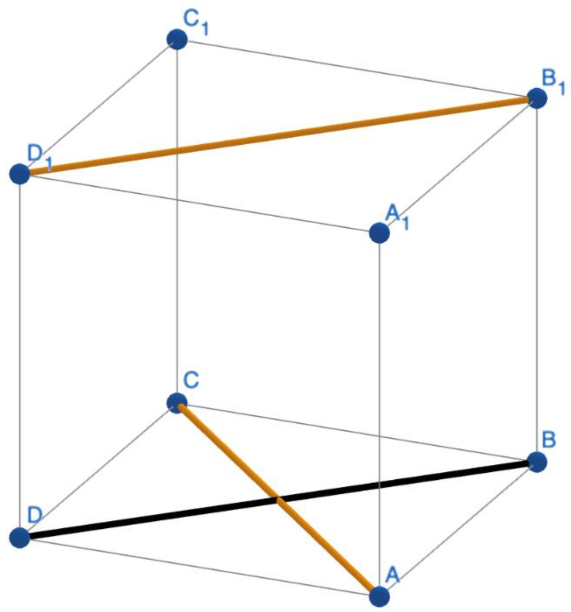


Рисунок 3 - Построение прямой BD, параллельной прямой B_1D_1

Теперь угол между прямыми AC и B_1D_1 заменяется углом между прямыми AC и BD. Обе прямые лежат в основании ABCD. Пространственная задача переходит к обычному квадрату.

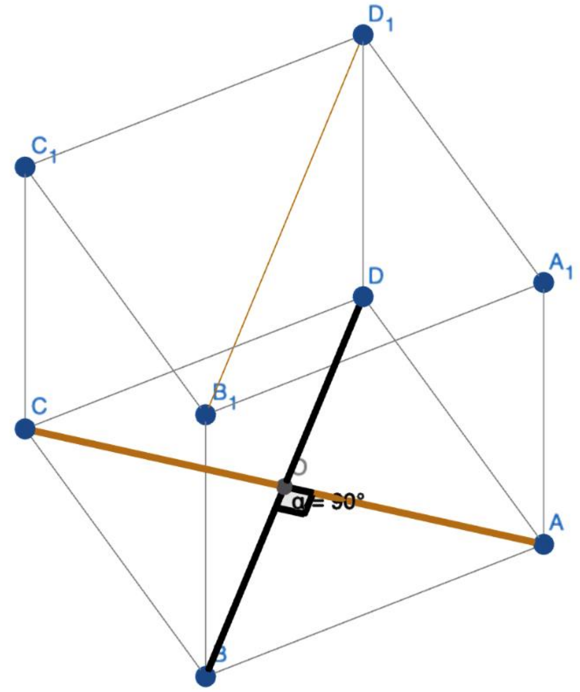


Рисунок 4 - Выделение угла между диагоналями AC и BD в основании куба

Письменное решение можно оформить так.

Прямая AC лежит в плоскости ABCD, прямая B_1D_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Эти плоскости параллельны. Прямые AC и B_1D_1 не имеют общей точки, поэтому они скрещиваются. Так как BD ∥ B_1D_1, то угол между AC и B_1D_1 равен углу между AC и BD.

В квадрате ABCD диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Следовательно,

$$\angle(AC; BD) = 90°.$$

Значит,

$$\angle(AC; B_1D_1) = 90°.$$

Ответ: 90°.

Эта задача удобна для первого объяснения. В ней вспомогательная прямая не выглядит искусственной: диагональ BD уже есть в основании куба. Обучающимся проще понять, что параллельный перенос не появляется случайно. Он нужен для того, чтобы заменить скрещивающиеся прямые пересекающимися и получить плоский угол.

После решения первой задачи полезно зафиксировать порядок действий. Его не нужно подавать как жёсткую схему для всех случаев. Это рабочая опора на начальном этапе.

Сначала выделяются данные прямые. Затем определяется их взаимное положение. Если прямые скрещиваются, одна из них заменяется параллельной прямой, проведённой через удобную точку. После этого выделяется плоский угол. Затем выполняется вычисление и записывается обоснование.

Далее можно предложить задачу для закрепления. Способ остаётся тем же, но обучающимся приходится активнее выбирать вспомогательную прямую.

Задача 2. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми A_1B и C_1D.*

Сначала на модели выделяются прямые A_1B и C_1D.

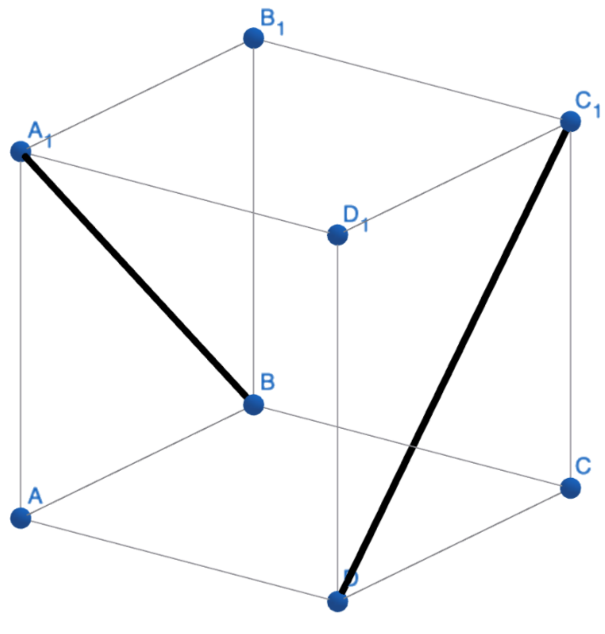


Рисунок 5 - Выделение прямых A_1B и C_1D в кубе

Учитель предлагает определить их взаимное положение. Прямая A_1B является диагональю боковой грани ABB_1A_1. Прямая C_1D является диагональю противоположной боковой грани DCC_1D_1. Они не имеют общей точки и не лежат в одной плоскости. Значит, это скрещивающиеся прямые.

Теперь нужно выполнить параллельный перенос. Прямую C_1D можно заменить параллельной ей прямой AB_1. Эти отрезки являются диагоналями параллельных боковых граней куба и имеют одинаковое направление. Поэтому $C_1D \parallel AB_1$.

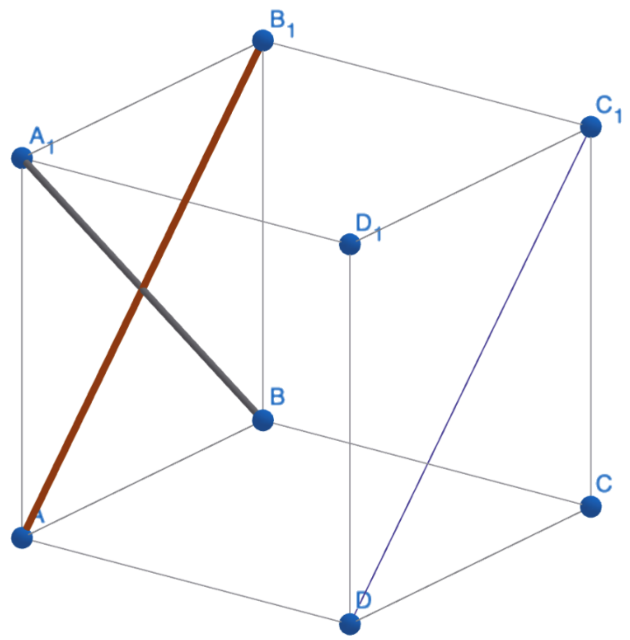


Рисунок 6 - Построение прямой AB_1, параллельной прямой C_1D

После этого искомый угол заменяется углом между прямыми A_1B и AB_1. Обе прямые лежат в грани ABB_1A_1. В этой грани они являются диагоналями квадрата. Диагонали квадрата перпендикулярны.

Письменное решение может быть кратким.

Прямые A_1B и C_1D скрещиваются. Так как $AB_1 \parallel C_1D$, то

$$\angle(A_1B;\ C_1D) = \angle(A_1B;\ AB_1).$$

В квадрате ABB_1A_1 отрезки A_1B и AB_1 являются диагоналями, поэтому

$$\angle(A_1B;\ AB_1) = 90°. \text{ Значит, } \angle(A_1B;\ C_1D) = 90°.$$

Ответ: 90°.

Эта задача подходит для закрепления. В первой задаче замена B_1D_1 на BD достаточно быстро считывается по основаниям куба. Здесь перенос менее очевиден. Нужно заметить параллельные боковые грани, найти соответствующую диагональ и только потом перейти к плоскому углу.

При работе с задачами на угол между прямыми чаще всего появляются одни и те же ошибки. Школьник может принять скрещивающиеся прямые за пересекающиеся. Может выбрать угол по внешнему виду рисунка. Иногда вспомогательная параллельная прямая проводится без объяснения: «так видно». Бывает и другая ситуация: параллельная прямая построена верно, но после этого не выделен плоский угол, с которым дальше нужно работать.

Эти ошибки лучше обсуждать сразу по ходу решения. Например, после выделения двух прямых учитель может спросить: что будет неверно, если считать эти прямые пересекающимися? Такой вопрос быстро показывает, что ошибка в начале решения ломает всю задачу.

Работу с моделью можно организовать поэтапно. Сначала учитель показывает построение на экране. Затем часть действий передаётся классу: обучающиеся предлагают, какую прямую нужно провести параллельно одной из данных. После этого построение выполняется в тетради. На этом этапе хорошо видно, кто понял ход решения, а кто просто следил за готовой моделью.

Можно использовать работу в парах. Один обучающийся объясняет построение по динамической модели, другой выполняет его на бумаге. Затем роли меняются. Такой приём заставляет проговаривать решение. В стереометрии это особенно важно: пока школьник не объяснил, почему прямая проведена именно так, построение часто остаётся механическим.

После двух разобранных моделей можно предложить задания для самостоятельной работы. Они сохраняют тот же способ действия, но постепенно уменьшают подсказку.

Для самостоятельной работы подходят следующие задания:

1. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми AC и B_1D_1.*
2. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми A_1B и C_1D.*
3. *В прямой призме найти угол между диагональю боковой грани и диагональю основания, если эти прямые являются скрещивающимися.*

4. *В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с основанием ABCD найти угол между рёбрами SA и CD.*

Первое задание можно использовать как повторение базовой модели. Второе проверяет, может ли обучающийся сам выбрать параллельную прямую. Третье переносит тот же способ с куба на прямую призму. Четвёртое сложнее: в пирамиде меньше готовых параллельных элементов, поэтому переход к плоскому углу требует более внимательного анализа.

Проверка таких заданий не должна сводиться только к ответу. В первую очередь оценивается ход построения: верно ли определено взаимное положение прямых, правильно ли выполнен параллельный перенос, выделен ли плоский угол. Если эти действия выполнены верно, вычислительная часть обычно становится понятной.

При использовании динамического чертежа учителю важно не показывать готовую перегруженную модель сразу. Сначала выделяются только данные прямые. Затем проверяется их взаимное положение. После этого появляется вспомогательная параллельная прямая. И только потом выделяется угол, который нужно найти. Измерение угла в GeoGebra можно использовать для проверки, но не вместо решения. Если программа сразу показывает величину угла, обучающиеся могут пропустить главный этап - построение.

Поэтому сначала идёт рассуждение, затем письменное оформление, а уже после этого допускается проверка результата по модели.

После работы с GeoGebra обязательно выполняется переход к обычному чертежу в тетради. Обучающиеся изображают куб, отмечают данные прямые, проводят вспомогательную параллельную прямую и выделяют полученный плоский угол. Затем записывают обоснование. Такой переход важен: на контрольной работе динамической модели не будет, значит, школьник должен уметь восстановить построение самостоятельно.

При обучении решению задач на угол между прямыми динамический чертёж помогает пройти самый сложный участок решения: от пространственного изображения к плоскому углу. Модель даёт возможность увидеть реальное взаимное положение прямых, выполнить параллельный перенос и подготовить письменное решение. Постепенно внешняя опора сокращается: сначала построение выполняется вместе с учителем, затем проговаривается классом, после этого переносится в тетрадь и выполняется самостоятельно.

2.2. Обучение решению задач на вычисление угла между прямой и плоскостью.

Задачи на вычисление угла между прямой и плоскостью требуют точного построения. Здесь нельзя выбирать угол по внешнему виду рисунка. Боковое ребро пирамиды, диагональ куба или наклонная в призме могут зрительно образовывать разные углы с линиями, лежащими в плоскости. Но искомым будет только угол между прямой и её ортогональной проекцией на эту плоскость.

Именно построение проекции чаще всего вызывает затруднение. Школьник может увидеть прямую и плоскость, но не понять, какую линию в этой плоскости нужно взять. Поэтому работа начинается с вопроса не «как считать?», а «где находится проекция?». Без этого вычисление быстро превращается в угадывание по картинке.

В методической копилке для таких задач используется динамический чертёж в GeoGebra. Он помогает поэтапно показать прямую, плоскость, перпендикуляр, проекцию и тот угол, который затем будет найден. Лишние элементы при этом лучше скрывать или делать менее заметными. Иначе чертёж перегружается, а главная линия - проекция - теряется среди рёбер фигуры.

В качестве первой модели используется задача на правильную четырёхугольную пирамиду.

Задача 1. *В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 6 см, высота SO равна 4 см. Найти угол между боковым ребром SA и плоскостью основания ABCD.*

На первом этапе учитель показывает исходную модель пирамиды. В GeoGebra выделяются ребро SA и плоскость основания ABCD. Остальные элементы фигуры можно сделать менее заметными. Внимание класса должно быть направлено на два объекта: прямую SA и плоскость ABCD.

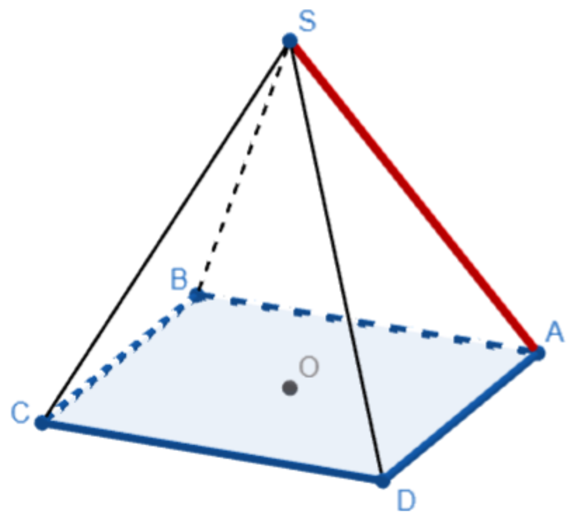


Рисунок 7 - Выделение бокового ребра SA и плоскости основания ABCD

Работа начинается с вопросов. Какая прямая дана в задаче? Какая плоскость указана? Какая точка прямой SA уже лежит в плоскости основания? После обсуждения фиксируется, что ребро SA пересекает плоскость ABCD в точке A. Эта точка уже принадлежит будущей проекции.

Далее строится перпендикуляр из вершины S к плоскости основания. Так как пирамида правильная, основание высоты находится в центре квадрата ABCD. Обозначим эту точку через O. На динамическом чертеже высота SO выделяется отдельно.

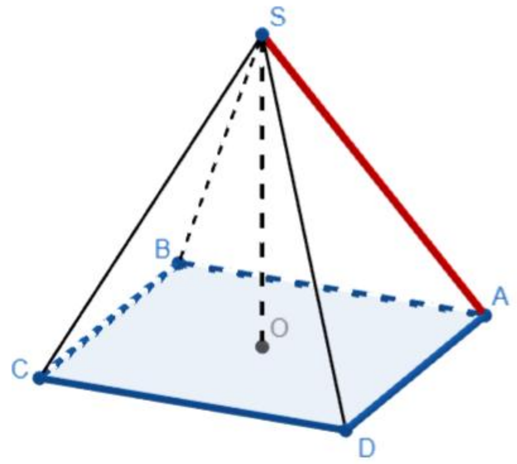


Рисунок 8 - Построение высоты SO, перпендикулярной плоскости основания ABCD

Важно показать, что SO не просто проведена внутри пирамиды. Это перпендикуляр к плоскости основания. Для этого модель можно повернуть. При смене ракурса лучше видно, как высота связана с основанием и почему точка S проектируется именно в точку O.

После этого выделяется проекция ребра SA на плоскость ABCD. Точка A уже лежит в основании, поэтому при проектировании остаётся на месте. Точка S проектируется в точку O. Значит, проекцией ребра SA на плоскость ABCD является отрезок AO.

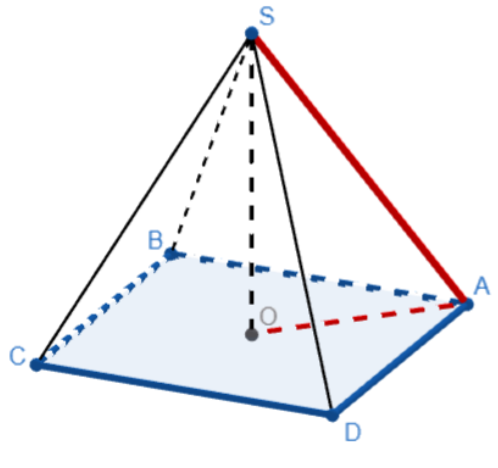


Рисунок 9 - Выделение проекции AO ребра SA на плоскость основания

Теперь можно выделить искомый угол. Это угол между ребром SA и его проекцией AO, то есть угол SAO.

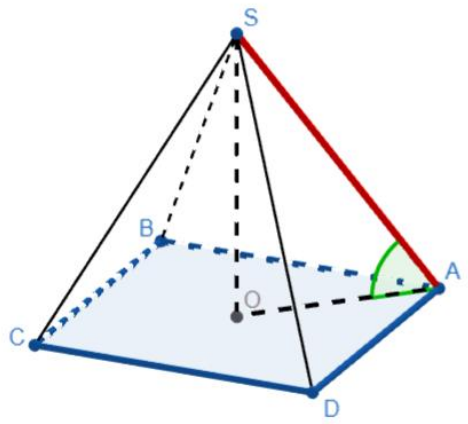


Рисунок 10 - Выделение угла SAO между прямой SA и плоскостью ABCD

На этом этапе полезно специально остановиться. Учитель может спросить: почему искомым не является угол между SA и AB? Почему нельзя взять угол между SA и диагональю AC? Эти вопросы нужны не для формальности. Они помогают убрать типичную ошибку: выбор любой удобной линии в плоскости вместо проекции.

После выделения угла задача сводится к прямоугольному треугольнику SAO. На модели можно временно скрыть лишние рёбра пирамиды и оставить только точки S, A, O и отрезки SA, SO, AO. Тогда становится видно, где именно выполняется вычисление.

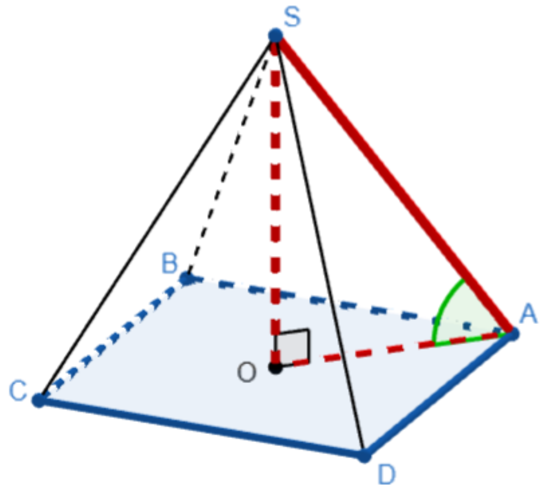


Рисунок 11 - Выделение прямоугольного треугольника SAO для вычисления угла

Письменное решение можно оформить так.

Так как SO ⊥ (ABCD), а AO лежит в плоскости ABCD, то SO ⊥ AO. Треугольник SAO прямоугольный.

Обозначим искомый угол через α:

$$\angle SAO = \alpha.$$

Так как ABCD - квадрат со стороной 6 см, то диагональ основания равна:

$$AC = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Точка O - центр квадрата ABCD, поэтому AO равна половине диагонали AC:

$$AO = \frac{1}{2}AC,$$

$$AO = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

В прямоугольном треугольнике SAO известны катеты:

$$SO = 4,$$

$$AO = 3\sqrt{2}.$$

Для нахождения угла α используем тангенс:

$$tg\ \alpha = \frac{SO}{AO},$$

$$tg\ \alpha = 4 / 3\sqrt{2},$$

$$tg\ \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Отсюда

$$\alpha = arctg\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

$$\alpha \approx 43°.$$

Ответ: угол между прямой SA и плоскостью ABCD равен примерно 43°.

Эта задача удобна для первого объяснения. В ней ясно видны все элементы построения: наклонная SA, перпендикуляр SO, проекция AO и прямоугольный треугольник SAO. Динамическая модель помогает не перескочить сразу к вычислениям, а сначала собрать сам угол.

После решения задачи полезно зафиксировать порядок работы. Сначала выделяется прямая и плоскость. Затем определяется точка, в которой прямая пересекает плоскость. После этого строится проекция второй точки прямой на плоскость. Полученные точки соединяются. Так появляется проекция прямой. Угол между прямой и этой проекцией становится искомым.

Далее можно предложить задачу на куб. Она нужна для закрепления: здесь проекция тоже строится достаточно понятно, но обучающимся уже приходится самостоятельно увидеть нужный треугольник.

Задача 2. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 6 см. Найти угол между диагональю куба A_1C и плоскостью основания ABCD.*

Сначала на динамической модели выделяются диагональ A_1C и плоскость основания ABCD.

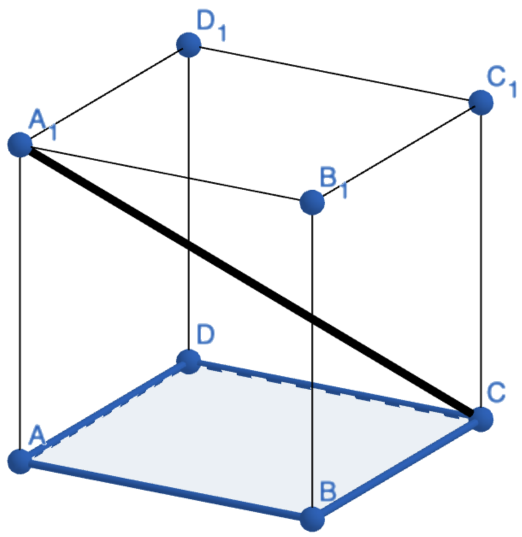


Рисунок 12 - Выделение диагонали A_1C и плоскости основания ABCD

Учитель задаёт вопросы: какая прямая дана в условии; какая плоскость рассматривается; какая точка прямой уже лежит в плоскости основания. Точка C принадлежит основанию ABCD. Точка A_1 находится вне этой плоскости.

Затем строится перпендикуляр из точки A_1 к плоскости ABCD. В кубе таким перпендикуляром является ребро A_1A. Значит, точка A_1 проектируется в точку A.

Теперь выделяется проекция диагонали A_1C на плоскость ABCD. Точка A_1 проектируется в точку A, а точка C уже лежит в основании. Значит, проекцией A_1C является отрезок AC.

Искомым является угол между A_1C и AC, то есть угол A_1CA.

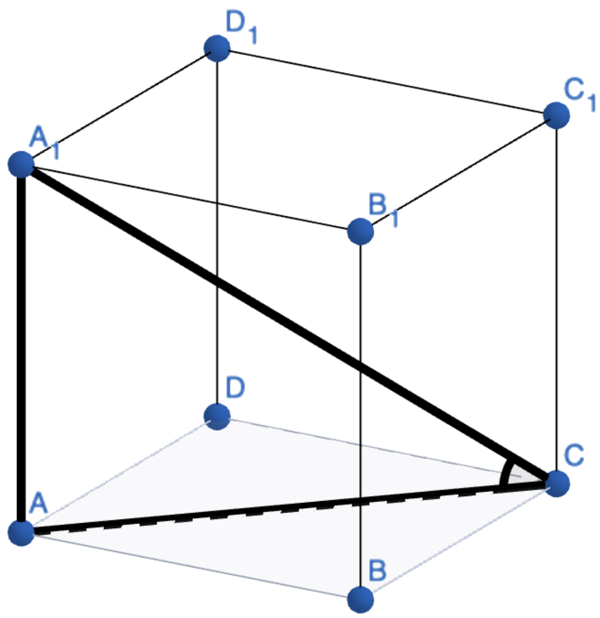


Рисунок 13 - Построение угла A_1CA между диагональю A_1C и плоскостью основания

После этого задача переходит к прямоугольному треугольнику A_1AC. В нём A_1A - ребро куба, AC - диагональ основания, A_1C - диагональ куба.

Письменное решение может быть таким.

Так как $A_1A \perp (ABCD)$, а AC лежит в плоскости ABCD, то $A_1A \perp AC$. Треугольник A_1AC прямоугольный.

Обозначим искомый угол через α:

$$\angle A_1CA = \alpha.$$

По условию ребро куба равно 6 см, значит,

$$A_1A = 6.$$

Диагональ основания ABCD равна:

$$AC = 6\sqrt{2}.$$

В прямоугольном треугольнике A_1AC:

$$tg\ \alpha = \frac{A_1A}{AC},$$

$$tg\ \alpha = \frac{6}{6\sqrt{2}},$$

$$tg\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\alpha \approx 35°.$$

Ответ: угол между диагональю A_1C и плоскостью ABCD равен примерно 35°.

Эта задача отличается от первой тем, что проекция прямой совпадает с диагональю основания. На рисунке это может казаться очевидным, но именно здесь часто появляется ошибка: школьник выбирает угол между диагональю куба и ближайшим ребром основания. Поэтому при работе с моделью важно отдельно проговорить, куда проектируется каждая точка прямой A_1C.

При решении задач на угол между прямой и плоскостью чаще всего встречаются несколько ошибок. Первая - выбор произвольной линии в плоскости вместо проекции. Вторая - отсутствие перпендикуляра к плоскости. Третья - неверный выбор вычислительного треугольника. Иногда обучающийся видит нужный угол, но не может объяснить, почему именно он является углом между прямой и плоскостью. В этом случае решение выглядит как догадка.

Эти ошибки удобно разбирать прямо на динамической модели. Например, учитель может показать несколько линий в основании и спросить, какая из них является проекцией данной прямой. После этого лишние линии скрываются, остаётся только правильная проекция. Такой приём хорошо работает: он показывает, что искомый угол выбирается не по удобству, а по определению.

Работу с моделью можно организовать в несколько этапов.

Сначала учитель сам показывает прямую и плоскость. Затем класс определяет, какая точка прямой уже лежит в плоскости. После этого строится перпендикуляр из второй точки прямой. Затем выделяется проекция и искомый угол. Когда построение стало понятным, обучающиеся переносят его в тетрадь.

На этапе закрепления можно использовать работу в парах. Один обучающийся называет шаг построения, другой выполняет его на бумаге. Затем они проверяют себя по динамической модели. Такая форма работы помогает увидеть, где появляется ошибка: при выборе точки проекции, при проведении перпендикуляра или при выделении угла.

После двух разобранных моделей можно предложить задания для самостоятельной работы:

1. *В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD найти угол между боковым ребром SA и плоскостью основания ABCD.*
2. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между диагональю A_1C и плоскостью основания ABCD.*
3. *В прямоугольном параллелепипеде найти угол между пространственной диагональю и плоскостью основания.*
4. *В правильной треугольной пирамиде найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.*

Первое задание можно использовать как возвращение к разобранной модели с пирамидой. Второе показывает тот же способ на кубе, где проекция совпадает с диагональю основания. Третье задание усложняет ситуацию: в прямоугольном параллелепипеде длины рёбер могут быть разными, поэтому вычислительная часть становится менее шаблонной. В четвёртом задании основная трудность переносится на выбор точки проекции вершины на основание.

При проверке таких работ важно сначала смотреть не на численный ответ, а на ход построения.

В решении должны быть видны три элемента: данная прямая, её ортогональная проекция на плоскость и угол между ними. Если проекция построена неверно, дальнейшее вычисление уже не имеет смысла, даже если формулы записаны правильно.

На уроке динамическую модель лучше использовать как средство поиска проекции. Сначала класс видит исходную фигуру и данную прямую, затем обсуждает, какая точка прямой уже лежит в плоскости, а какая должна быть спроецирована. После этого появляется перпендикуляр к плоскости и только затем сама проекция. Такой порядок помогает убрать частую ошибку, когда вместо проекции выбирается ближайшее или наиболее заметное ребро основания.

После работы с GeoGebra построение обязательно переносится в тетрадь. В этом фрагменте уже не важна сама программа, важен способ действия: найти точку пересечения прямой с плоскостью, построить проекцию второй точки, соединить полученные точки и отметить искомый угол. Тогда динамический чертёж работает не как готовая подсказка, а как опора для самостоятельного решения. В задачах на угол между прямой и плоскостью главное методическое значение динамического чертежа состоит в том, что он делает проекцию видимой. Когда проекция найдена, задача становится значительно понятнее: появляется нужный прямоугольный треугольник, а вычисление угла уже опирается на конкретную геометрическую конструкцию.

2.3. Обучение решению задач на вычисление угла между двумя плоскостями.

Задачи на вычисление угла между двумя плоскостями обычно оказываются сложнее предыдущих типов. Причина понятна: искомый угол почти никогда не виден на чертеже сразу. На рисунке можно увидеть грани пирамиды, основание, боковые рёбра, линию пересечения плоскостей. Но сам угол между плоскостями ещё нужно построить.

Главный шаг здесь связан с линейным углом двугранного угла. Если этот шаг пропущен, решение быстро становится формальным. Школьник может выбрать угол между двумя рёбрами, угол внутри боковой грани или любой другой заметный угол на рисунке. Внешне такой выбор иногда выглядит убедительно. Но он не отражает определения угла между плоскостями.

При работе с динамическим чертежом важно не перегружать модель. Сначала лучше показать только две плоскости. Затем - их линию пересечения. И уже после этого строить два перпендикуляра к этой линии из одной точки. Угол между этими перпендикулярами и становится тем самым линейным углом, с которым дальше можно работать.

В качестве первой модели используется задача на правильную четырёхугольную пирамиду.

Задача 1. *В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 6 см, высота SO равна 4 см. Найти угол между боковой гранью SAB и плоскостью основания ABCD.*

На динамическом чертеже сначала выделяются две плоскости: боковая грань SAB и плоскость основания ABCD. Остальные грани можно сделать менее заметными. На этом этапе важно, чтобы класс видел: речь идёт не об отдельных рёбрах, а именно о двух плоскостях.

Далее определяется линия пересечения этих плоскостей. В данной задаче боковая грань SAB и основание ABCD пересекаются по прямой AB. Это ребро нужно выделить отдельно, потому что все дальнейшие построения будут выполняться относительно него.

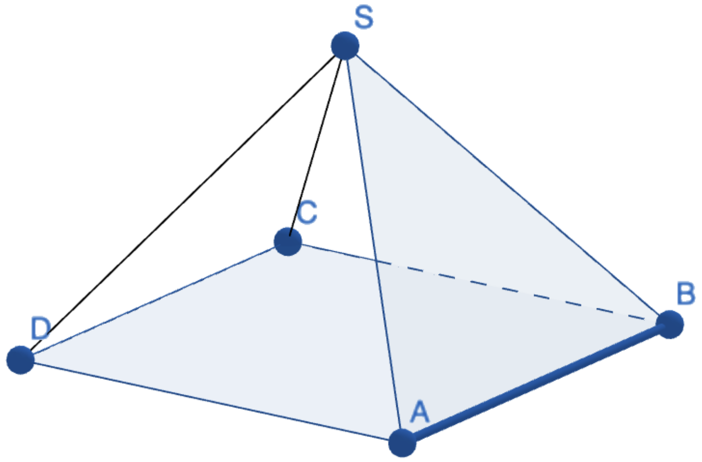


Рисунок 14 - Выделение плоскостей SAB и ABCD и линии их пересечения AB

Теперь выбирается точка на ребре AB. Удобнее взять середину AB и обозначить её через M. Такой выбор не случаен. В правильной четырёхугольной пирамиде боковая грань SAB является равнобедренным треугольником, поэтому отрезок SM, проведённый к середине основания AB, будет перпендикулярен AB. В основании квадрат ABCD имеет центр O, а отрезок OM, проведённый к середине стороны AB, также перпендикулярен AB.

Сначала на модели выделяется отрезок OM. Он лежит в плоскости основания ABCD и перпендикулярен ребру AB.

Затем строится отрезок SM в боковой грани SAB. Он тоже перпендикулярен AB, но уже лежит в другой плоскости.

После этого можно убрать лишние элементы и оставить ребро AB, отрезки SM и OM. Именно здесь появляется нужный угол. Отрезки SM и OM выходят из одной точки M, каждый лежит в своей плоскости, и оба перпендикулярны общей линии пересечения AB. Значит, угол SMO является линейным углом двугранного угла между плоскостями SAB и ABCD.

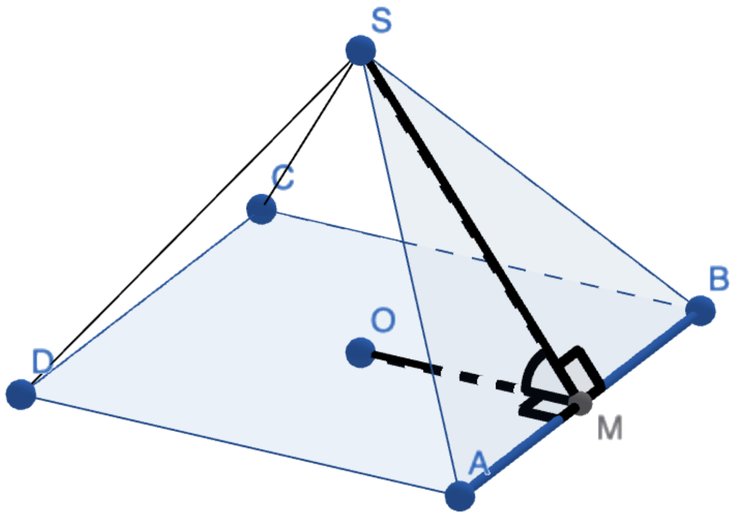


Рисунок 15 - Построение линейного угла SMO

Дальше пространственная часть задачи закончена. Остаётся вычисление в треугольнике SOM.

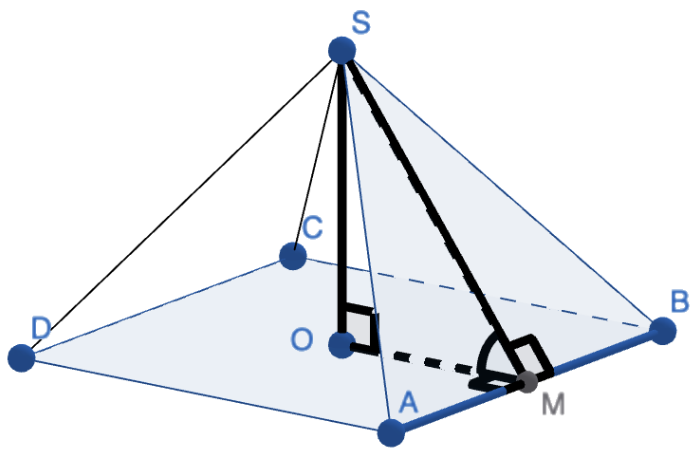


Рисунок 16 - Выделение прямоугольного треугольника SOM для вычисления угла

Письменное решение можно оформить так.

Плоскости SAB и ABCD пересекаются по прямой AB.

Пусть M - середина AB. Так как пирамида SABCD правильная, точка O является центром квадрата ABCD, а SO - высотой пирамиды. В плоскости ABCD отрезок OM перпендикулярен AB. В плоскости SAB отрезок SM перпендикулярен AB.

Значит, угол SMO является линейным углом двугранного угла между плоскостями SAB и ABCD. Обозначим искомый угол через α:

$$\angle SMO = \alpha.$$

Так как сторона квадрата ABCD равна 6 см, расстояние от центра квадрата до середины стороны равно половине стороны:

$$OM = \frac{AB}{2},$$

$$OM = \frac{6}{2} = 3.$$

В треугольнике SOM отрезок SO перпендикулярен плоскости основания, а OM лежит в этой плоскости, поэтому SO ⊥ OM. Треугольник SOM прямоугольный. По условию:

$$SO = 4,$$

$$OM = 3.$$

Используем тангенс угла α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SO}{OM},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

Отсюда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right),$$

$$\alpha \approx 53°.$$

Ответ: угол между боковой гранью SAB и плоскостью основания ABCD равен примерно 53°.

Эта задача хорошо показывает саму природу угла между плоскостями. Здесь нельзя ограничиться тем, что на рисунке видны грань и основание. Нужно найти их общее ребро, выбрать точку на этом ребре, построить два перпендикуляра и только потом получить угол для вычисления. Динамическая модель помогает разложить это построение на отдельные действия.

Особое внимание стоит уделить выбору точки M. Если не объяснить, почему берётся именно середина AB, построение может показаться случайным. В этой задаче точка M удобна потому, что через неё проходят оба нужных перпендикуляра: OM в основании и SM в боковой грани. Это делает линейный угол хорошо видимым.

Для закрепления можно использовать задачу на куб. Она отличается от первой тем, что линейный угол не связан с боковой гранью пирамиды, а строится через сечение куба. Такая задача помогает показать, что способ остаётся тем же: сначала линия пересечения плоскостей, затем два перпендикуляра к ней.

Задача 2. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной a. Найти угол между плоскостью A_1BD и плоскостью основания ABCD.*

На динамической модели выделяются плоскости A_1BD и ABCD. Их линия пересечения - прямая BD.

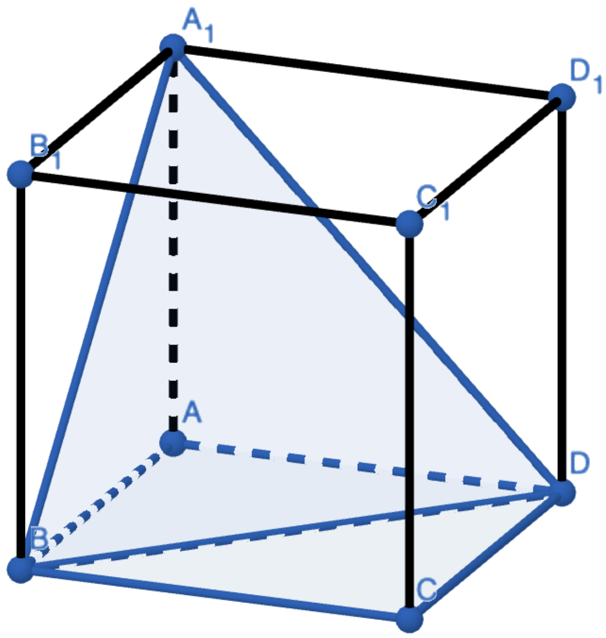


Рисунок 17 - Выделение плоскостей A_1BD и ABCD в кубе

Далее отмечается точка O - точка пересечения диагоналей основания ABCD. Она лежит на прямой BD. Через эту точку удобно строить линейный угол.

В плоскости основания ABCD проводится отрезок AO. Диагонали квадрата AC и BD взаимно перпендикулярны, а точка O лежит на диагонали BD. Поэтому $AO \perp BD$.

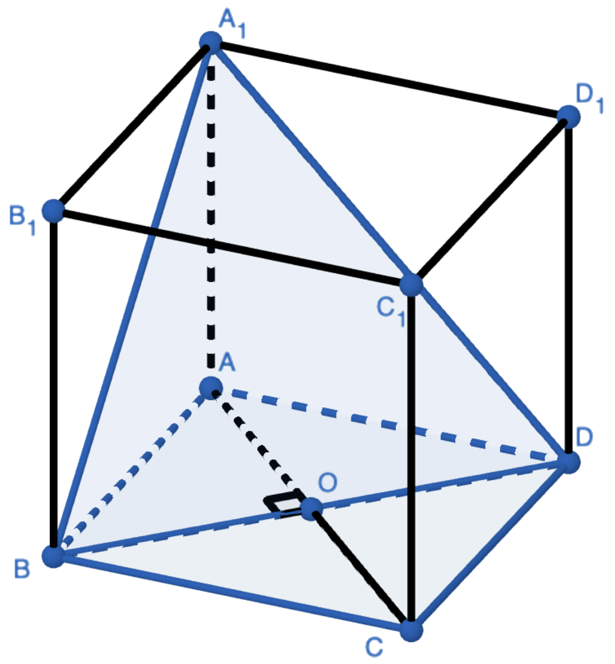


Рисунок 18 - Построение отрезка AO, перпендикулярного BD в плоскости основания

В плоскости A_1BD проводится отрезок A_1O. Нужно показать, что он также перпендикулярен BD. Это можно объяснить через положение диагоналей основания и вертикального ребра куба. Прямая BD перпендикулярна AC, а также перпендикулярна AA_1, так как AA_1 перпендикулярна плоскости основания. Значит, BD перпендикулярна плоскости AA_1C. Отрезок A_1O лежит в этой плоскости, поэтому $A_1O \perp BD$.

Теперь угол A_1OA является линейным углом двугранного угла между плоскостями A_1BD и ABCD.

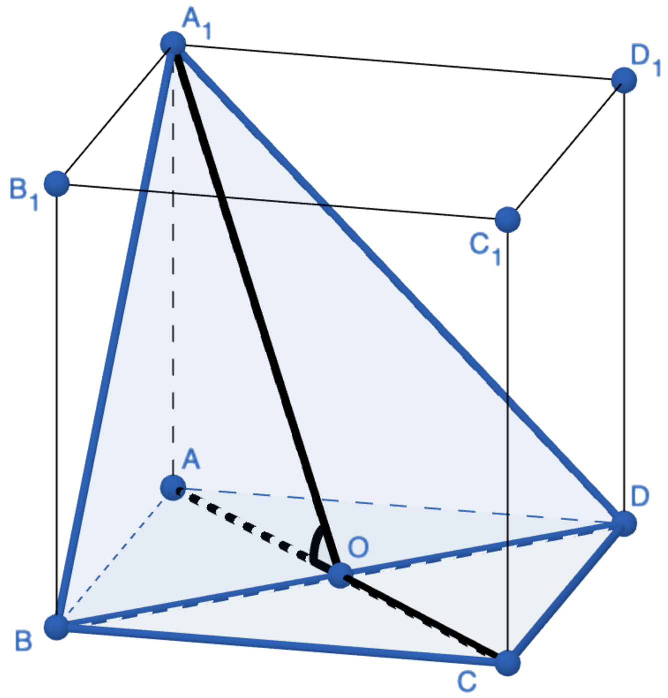


Рисунок 19 - Построение отрезка A_1O и линейного угла A_1OA

Письменное решение можно записать так.

Плоскости A_1BD и $ABCD$ пересекаются по прямой BD. Пусть O - точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. Тогда O лежит на BD. В плоскости $ABCD$ отрезок AO перпендикулярен BD, так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.

Докажем, что $A_1O \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна AC и перпендикулярна AA_1. Прямые AC и AA_1 пересекаются и лежат в плоскости AA_1C. Значит, BD перпендикулярна плоскости AA_1C. Отрезок A_1O лежит в этой плоскости, поэтому $A_1O \perp BD$. Значит, угол A_1OA является линейным углом двугранного угла между плоскостями A_1BD и $ABCD$.

Обозначим искомый угол через α:

$$\angle A_1OA = \alpha.$$

В прямоугольном треугольнике A_1AO:

$$AA_1 = a.$$

Так как AC - диагональ квадрата со стороной a, то

$$AC = a\sqrt{2}.$$

Точка O - середина AC, поэтому

$$AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Используем тангенс угла α:

$$tg\ \alpha = \frac{AA_1}{AO},$$

$$tg\ \alpha = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}},$$

$$tg\ \alpha = \sqrt{2}.$$

Отсюда

$$\alpha = arctg\sqrt{2},$$

$$\alpha \approx 55°.$$

Ответ: угол между плоскостью A_1BD и плоскостью ABCD равен примерно 55°.

Во второй задаче появляется более серьёзное обоснование. Недостаточно просто увидеть угол A_1OA на рисунке. Нужно доказать, что обе его стороны перпендикулярны линии пересечения плоскостей. Здесь динамический чертёж особенно полезен: можно выделить прямую BD, показать плоскость AA_1C и отдельно проследить, почему A_1O перпендикулярен BD.

При решении задач на угол между двумя плоскостями часто повторяются одни и те же ошибки. Школьник может взять угол между рёбрами, которые просто хорошо видны. Может забыть найти линию пересечения плоскостей. Иногда строится только один перпендикуляр к этой линии, а второй заменяется произвольным отрезком. Ещё одна ошибка - переход к вычислениям без доказательства, что выбранный угол действительно является линейным углом двугранного угла.

Эти ошибки удобно предупреждать с помощью вопросов. По какой прямой пересекаются данные плоскости? Где выбрана точка на этой прямой? Какие два отрезка проведены из этой точки? В каких плоскостях они лежат? Почему оба перпендикулярны линии пересечения? Если на один из этих вопросов нет ответа, значит, линейный угол ещё не построен.

Для самостоятельной работы можно предложить задания разного уровня.

1. *В правильной четырёхугольной пирамиде найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.*
2. *В кубе найти угол между плоскостью диагонального сечения и плоскостью основания.*
3. *В прямой призме найти угол между боковой гранью и плоскостью, проходящей через диагональ основания.*
4. *В правильной треугольной пирамиде найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.*

Первое задание закрепляет базовую модель с пирамидой. Второе переносит построение на куб и требует более аккуратного доказательства перпендикулярности. Третье задание полезно для тех, кто уже уверенно находит линию пересечения плоскостей. Четвёртое сложнее из-за другой формы основания: точку для построения линейного угла приходится выбирать внимательнее.

Проверять такие задания лучше не только по численному ответу. Важнее увидеть, построен ли линейный угол. Для этого в решении должны быть указаны линия пересечения плоскостей, точка на этой линии, два перпендикуляра и обоснование их положения. Если эти элементы есть, вычисление обычно становится технической частью.

При работе с GeoGebra не стоит сразу показывать готовую конструкцию.

Двугранный угол и так труден для восприятия. Если открыть все линии одновременно, школьник увидит сложную фигуру, но не поймёт, откуда она взялась. Лучше двигаться постепенно: две плоскости, линия пересечения, точка на ней, первый перпендикуляр, второй перпендикуляр, линейный угол.

Измерение угла в программе можно оставить для проверки. Основная работа должна происходить до измерения: нужно построить угол и объяснить его происхождение. Иначе GeoGebra превращается в калькулятор, а не в средство обучения. После динамической модели обязательно выполняется обычный чертёж. Обучающиеся переносят построение в тетрадь: отмечают плоскости, выделяют их линию пересечения, выбирают точку, проводят два перпендикуляра и обозначают линейный угол. Затем записывают вычисления.

Такой переход помогает закрепить не картинку, а сам способ действия.

В задачах на угол между двумя плоскостями динамический чертёж особенно ценен тем, что позволяет увидеть рождение линейного угла. Не готовую схему, а именно построение: от двух плоскостей к линии пересечения, от линии пересечения к двум перпендикулярам, от них - к углу, который уже можно вычислять.

2.4. Апробация результатов исследования

Апробация разработанных материалов проводилась на внеурочных занятиях «Стереометрия на компьютере» по математике в 10 и 11 классах в МАОУ Гимназия №14 «Экономики, управления и права». Методическая копилка апробировалась в 10 классе. На каждом из четырёх уроках в компьютерном классе присутствовало 15 человек, в распоряжении каждого ученика был персональный компьютер. Апробация носила качественный характер. Она не предполагала контрольной группы, подсчёта процентов и статистической обработки. Главная задача была практической: проверить, можно ли использовать подготовленную методическую копилку на уроках и помогает ли она организовать работу с задачами на углы в пространстве.

На первом уроке был проведён диагностический фрагмент апробации. Классу предложили задачи трёх типов: на угол между прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями. Это не была отдельная контрольная работа. Учитель наблюдал, как школьники начинают решение, какие элементы чертежа выбирают и в какой момент возникают затруднения.

Уже на этом этапе стало заметно: основная трудность появляется до вычислений. Формулы школьники вспоминали увереннее, чем сами построения. В задачах на угол между прямыми часть класса пыталась определить угол по рисунку. Если прямые на изображении зрительно сближались, их нередко принимали за пересекающиеся. Параллельный перенос предлагали не сразу.

В задачах на угол между прямой и плоскостью чаще всего возникал вопрос с проекцией. Некоторые школьники выбирали любую заметную линию в основании: сторону, диагональ, ребро. Само слово «проекция» было знакомо, но на конкретной фигуре нужный отрезок находился не всегда. Задачи на угол между двумя плоскостями оказались самыми трудными. Класс быстрее называл сами плоскости, но дальше появлялась пауза. Линия пересечения плоскостей выделялась не сразу. Ещё сложнее было построить два перпендикуляра к этой линии. В нескольких ответах за угол между плоскостями принимался угол внутри боковой грани.

После диагностического фрагмента были проведены три урока с использованием методической копилки.

Работа строилась по трём направлениям: угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями. На каждом уроке динамический чертёж использовался не вместо обычного решения, а перед ним. Сначала модель, затем обсуждение, потом чертёж в тетради.

На уроке по углу между прямыми использовалась модель куба. Учитель выделял две скрещивающиеся прямые и менял ракурс фигуры. Это сразу снимало часть ошибок: становилось видно, что прямые не пересекаются, хотя на плоском рисунке могли казаться близкими. После этого показывался параллельный перенос одной из прямых. Готовый чертёж сразу не открывался. Это было важно. Если показать все линии одновременно, класс видит сложную картинку, но не всегда понимает, откуда она появилась. Поэтому построение раскрывалось постепенно: сначала данные прямые, затем вспомогательная параллельная прямая, потом плоский угол. После такого показа школьники легче переносили построение на статичный чертёж.

На уроке по углу между прямой и плоскостью основное внимание было направлено на проекцию. Учитель показывал наклонную, плоскость, перпендикуляр и основание перпендикуляра. Когда лишние рёбра временно скрывались, нужный прямоугольный треугольник становился заметнее. Класс быстрее понимал, почему угол берётся не с любой линией в плоскости, а именно с проекцией. В ходе обсуждения учитель специально предлагал неверные варианты: например, взять угол между боковым ребром пирамиды и стороной основания. Такой приём оказался полезным.

Школьники сравнивали варианты и объясняли, почему выбранная линия не является проекцией. Ошибка переставала быть просто «неправильным ответом» и становилась частью разбора.

На уроке по углу между двумя плоскостями динамическая модель была особенно нужна. На обычном чертеже линейный угол двугранного угла часто теряется среди рёбер. В GeoGebra учитель сначала оставлял только две плоскости и их линию пересечения. Потом выбиралась точка на этой линии. Затем строились два перпендикуляра. Только после этого выделялся сам угол. Здесь класс включался не сразу. При первом обсуждении многие ждали готового построения. Но после нескольких вопросов работа пошла активнее: по какой прямой пересекаются плоскости, где удобно взять точку, какие отрезки должны быть перпендикулярны общей прямой. Когда модель поворачивалась, смысл построения становился заметнее.

Важным оказалось постоянное возвращение к тетради. После работы с GeoGebra школьники выполняли тот же чертёж на бумаге. Это не всегда получалось сразу.

Некоторые пытались перенести только итоговую картинку, без промежуточных построений. Поэтому учитель обращал внимание не только на ответ, но и на порядок: что появилось первым, что было построено потом, почему именно этот угол стал искомым.

После проведения уроков был организован итоговый учебный фрагмент. Классу предложили задачи тех же типов, но с другими обозначениями и фигурами. Проверялось не запоминание конкретного примера, а умение перенести способ действия: выполнить параллельный перенос, построить проекцию, выделить линейный угол. Работа на итоговом фрагменте уже отличалась от начальной. Школьники быстрее включались в обсуждение. В задачах на угол между прямыми чаще звучало предложение провести параллельную прямую. В задачах на угол между прямой и плоскостью стали чаще начинать с поиска проекции. При работе с двумя плоскостями больше внимания уделялось линии пересечения.

Изменились и устные ответы. Вначале многие рассуждали по принципу «этот угол видно». После работы с динамическими чертежами чаще появлялись объяснения другого типа: «нужно перенести прямую параллельно», «надо построить проекцию», «сначала ищем линию пересечения плоскостей». Это важное изменение. В стереометрии правильное решение начинается именно с такого действия. При этом выбор точки для построения линейного угла всё ещё вызывал затруднения у части класса.

Апробация показала и ограничение динамических чертежей. Сама модель не решает задачу за школьника. Если после демонстрации не выполнить построение в тетради, часть класса запоминает только движение картинки. Поэтому работа с моделью должна обязательно завершаться обычным чертежом и письменным обоснованием.

Отмечлось, что удобнее всего использовать динамический чертёж не в конце решения, а в его середине. Когда модель появляется только после объяснения, она работает как иллюстрация. Больше пользы она даёт в момент поиска: какую прямую перенести, где проекция, какая линия является ребром двугранного угла.

По итогам апробации были уточнены несколько приёмов работы с копилкой. Динамический чертёж лучше раскрывать по частям. Лишние элементы нужно временно скрывать. Измерение угла в программе стоит оставлять только для проверки. После модели обязательно нужен переход к тетрадному чертежу. К уже использованным моделям полезно возвращаться при разборе ошибок. В конце каждого из уроков была проведена рефлексия: Каждому ребенку раздавались листы «Плюс – минус – интересно»**.** Ученики заполняют таблицу из трёх граф: в графу «П» — то, что понравилось и показалось полезным; в «М» — то, что вызвало затруднение или показалось скучным; в «И» — любопытные факты или вопросы, которые возникли.

Итоги апробации показали, что методическая копилка динамических чертежей может использоваться при изучении углов в пространстве в 10 классе. Она помогает сделать видимыми те построения, которые на обычном чертеже часто остаются неясными: параллельный перенос, ортогональную проекцию, линейный угол двугранного угла.

Вывод по второй главе

Во второй главе были разработаны приёмы применения методической копилки динамических чертежей при обучении решению задач на вычисление углов в пространстве. Работа была выстроена по трём типам задач: угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями. Для каждого типа были подобраны задачи, описаны динамические модели, выделены основные построения и типичные ошибки.

Показано, что при нахождении угла между прямыми ключевым действием является параллельный перенос одной из прямых. При нахождении угла между прямой и плоскостью основное внимание должно быть направлено на построение ортогональной проекции. При нахождении угла между двумя плоскостями главным становится выделение линии пересечения плоскостей и построение линейного угла двугранного угла.

Апробация разработанных материалов показала, что динамические чертежи помогают организовать работу с задачей более последовательно: от анализа пространственной фигуры - к построению искомого угла, затем к вычислению и проверке результата. Особенно важным оказался переход от модели GeoGebra к обычному чертежу в тетради, поскольку именно он помогает обучающимся освоить способ построения, а не просто увидеть готовую картинку.

Следовательно, методическая копилка динамических чертежей может использоваться на уроках стереометрии в 10 классе как практический инструмент обучения. Её применение помогает сделать этап построения более понятным и поддерживает работу с основными видами задач на вычисление углов в пространстве.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа была посвящена обучению решению стереометрических задач на вычисление углов в 10 классе с использованием методической копилки динамических чертежей.

Выбор темы связан с тем, что при изучении стереометрии десятиклассники часто испытывают трудности не столько при вычислениях, сколько при построении искомого угла. Ошибка обычно появляется в самом начале решения: неверно определяется взаимное положение прямых, не строится проекция прямой на плоскость, неправильно выделяется линейный угол двугранного угла. После этого даже верные вычисления уже не приводят к правильному решению.

В ходе исследования была достигнута поставленная цель: разработана и описана методика обучения решению стереометрических задач на вычисление углов в 10 классе с использованием методической копилки динамических чертежей. В соответствии с целью были решены основные задачи работы: раскрыты особенности обучения решению задач на вычисление углов в пространстве, охарактеризованы методические возможности динамических чертежей, определены ключевые идеи авторской методической копилки, описаны способы создания динамических моделей, разработаны приёмы их применения и проведена апробация подготовленных материалов.

В первой главе были проанализированы особенности задач на вычисление углов в пространстве. Было показано, что каждый тип таких задач требует своего вспомогательного построения. Для угла между скрещивающимися прямыми важен параллельный перенос одной из прямых. Для угла между прямой и плоскостью главным действием становится построение ортогональной проекции. Для угла между двумя плоскостями необходимо выделить линейный угол двугранного угла. Именно эти действия чаще всего вызывают затруднения у обучающихся. Также в первой главе были охарактеризованы методические возможности динамических чертежей. Динамическая модель позволяет не показывать сразу перегруженный чертёж, а раскрывать построение постепенно. Это важно для задач на углы в пространстве: обучающийся видит не только итоговый треугольник, но и путь к нему.

В работе подчёркнуто, что GeoGebra и другие системы динамической математики не должны заменять математическое рассуждение. Их роль состоит в том, чтобы поддержать анализ фигуры и помочь перейти к обычному письменному решению.

Были определены ключевые идеи авторской методической копилки динамических чертежей. Копилка строится по трём типам задач: угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями. Для каждого типа выделены учебные действия, возможные ошибки и способы работы с динамической моделью. Такая организация позволяет использовать чертежи не случайно, а в связи с конкретной задачей урока: объяснением нового материала, закреплением, самостоятельной работой или разбором ошибок.

Во второй главе были разработаны приёмы применения методической копилки динамических чертежей.

Для задач на угол между прямыми показано, как динамическая модель помогает определить взаимное положение прямых, выполнить параллельный перенос и выделить плоский угол. Для задач на угол между прямой и плоскостью описана работа с проекцией прямой на плоскость и переходом к прямоугольному треугольнику. Для задач на угол между двумя плоскостями раскрыт порядок построения линейного угла двугранного угла через линию пересечения плоскостей и два перпендикуляра к ней.

Практическая часть работы включила конкретные задачи, методические комментарии, вопросы для обсуждения, типичные ошибки и задания для самостоятельной работы. Особое значение имеет переход от динамической модели к обычному чертежу в тетради. Именно этот переход показывает, что цифровая модель не подменяет решение, а помогает обучающемуся освоить нужное геометрическое действие.

Результаты апробации позволяют говорить о методической применимости разработанной копилки. Динамические чертежи оказались полезны прежде всего на этапе анализа пространственной конфигурации. Они помогали сделать видимыми те элементы, которые на статичном рисунке часто остаются неочевидными. При этом было установлено, что работа с моделью обязательно должна завершаться построением в тетради и письменным обоснованием. Без этого цифровой чертёж может остаться только наглядной картинкой, а не средством формирования способа решения.

Гипотеза исследования получила подтверждение на уровне проведённой апробации. Использование методической копилки динамических чертежей может способствовать более осознанному обучению решению задач на вычисление углов в пространстве, если модели систематизированы по типам задач, связаны с конкретными алгоритмами построения, применяются на разных этапах решения и постепенно переводятся в умение работать с обычным статическим чертежом.

Практическая значимость работы состоит в том, что разработанные материалы могут быть использованы учителем математики при изучении стереометрии в 10 классе. Методическая копилка подходит для объяснения нового материала, закрепления способов построения, организации самостоятельной работы и разбора типичных ошибок. В дальнейшем материалы можно дополнять новыми динамическими чертежами, задачами другого уровня сложности и заданиями для самостоятельной работы обучающихся.

Проведённая работа показала, что обучение решению задач на вычисление углов в пространстве требует особого внимания к этапу построения. Именно здесь динамические чертежи дают заметную методическую поддержку. Они помогают не просто увидеть пространственную фигуру, а понять, какие действия нужно выполнить, чтобы перейти от неё к вычислению. Поэтому методическая копилка динамических чертежей может рассматриваться как практический инструмент обучения стереометрии в 10 классе.

Итак, цель исследования достигнута, поставленные задачи решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. 1С: Математический конструктор : официальный сайт. – Москва : ООО «1С». – URL: https://obr.1c.ru/math/(дата обращения: 19.04.2026). – Текст : электронный.

2. Атанасян, Л. С. Геометрия. 10–11 классы : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – Москва : Просвещение, 2020. – 255 с. – Текст : непосредственный.

3. Далингер, В. А. Геометрия: стереометрические задачи на построение : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. – 2-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2025. – 186 с. – (Профессиональное образование). – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/558119

4. Далингер, В. А. Использование систем динамической геометрии в обучении математике / В. А. Далингер. – Текст : непосредственный // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 7-1. – С. 23–25.

5. Далингер, В. А. Методика обучения стереометрии посредством решения задач : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2026. – 370 с. – (Высшее образование). – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: urait.ru

6. Далингер, В. А. Цифровые образовательные ресурсы на службе у методики обучения геометрии в школе / В. А. Далингер. – Текст : электронный // Информация и образование: границы коммуникаций INFO. – 2020. – № 12 (20). – С. 47–50.

7. Дубровский, В. Н. Математический конструктор / В. Н. Дубровский. – Текст : непосредственный // Математика. – 2010. – № 16. – С. 14–21.

8. Живая математика : учебно-методический комплекс / Институт новых технологий (ИНТ). – URL: http://www.int-edu.ru/ (дата обращения: 19.04.2026). – Текст : электронный.

9. Концепция развития математического образования в Российской Федерации : утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. – Текст : электронный // Официальный интернет-портал правовой информации : [сайт]. – URL: pravo.gov.ru

10. Официальный сайт системы динамической геометрии GeoGebra. – URL: https://www.geogebra.org (дата обращения: 19.04.2026). – Текст : электронный.

11. Сергеева, Т. Ф. Системы динамической математики в обучении геометрии / Т. Ф. Сергеева, А. В. Шабанова. – Текст : непосредственный // Математика в школе. – 2021. – № 4. – С. 34–40.

12. Смирнова, И. М. Геометрия. Стереометрия : пособие для учителей / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – Москва : Прометей, 2018. – 250 с. – Текст : непосредственный.

13. УМК Математический конструктор : программный комплекс для интерактивного моделирования математических объектов / Версия 4.5. – Электрон. прогр. – Москва : ООО «1С-Паблишинг». – Текст : электронный.

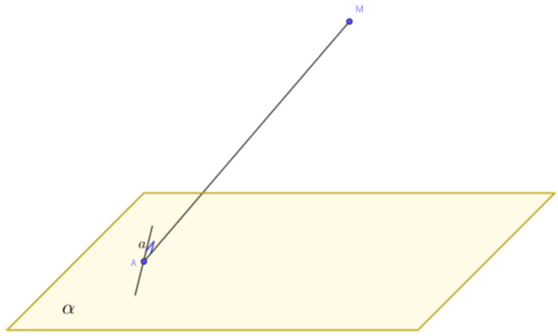
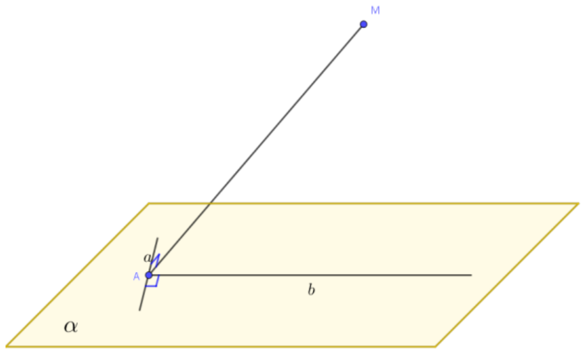
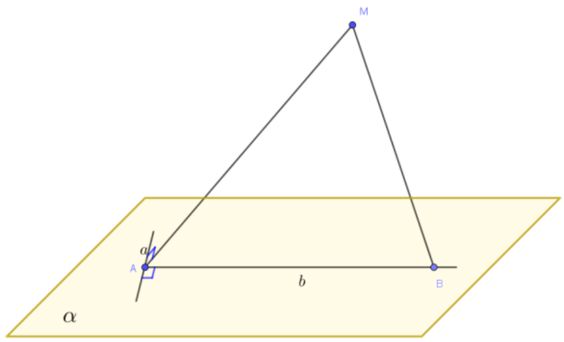
14. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования : утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413 (с изменениями и дополнениями). – URL: https://fgos.ru/ (дата обращения: 19.04.2026). – Текст : электронный.

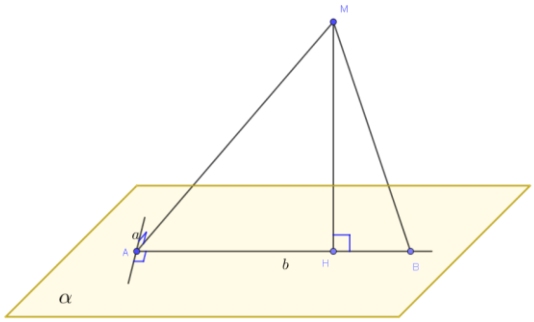
15. Федеральный институт педагогических измерений : официальный сайт. – Москва : ФИПИ, 2004–2026. – URL: https://fipi.ru/ (дата обращения: 19.04.2026). – Текст : электронный.

16. Якиманская, И. С. Развитие пространственного мышления школьников / И. С. Якиманская. – Москва : Педагогика, 1980. – 240 с. – Текст : непосредственный.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

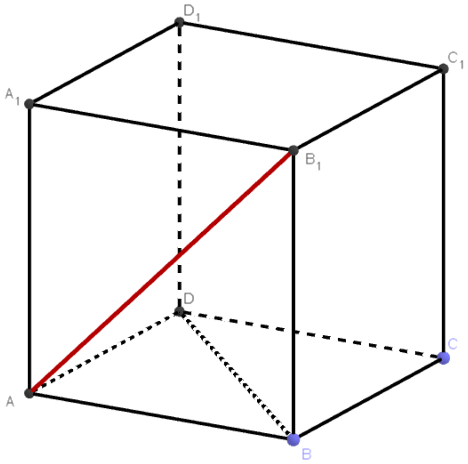
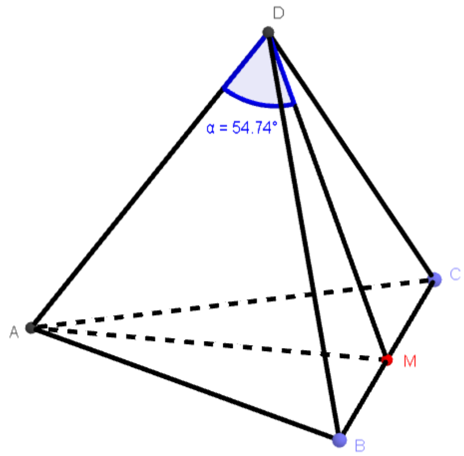
Таблица 1. Алгоритм построения перпендикуляра из точки на плоскость

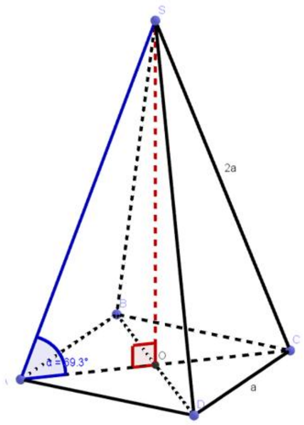
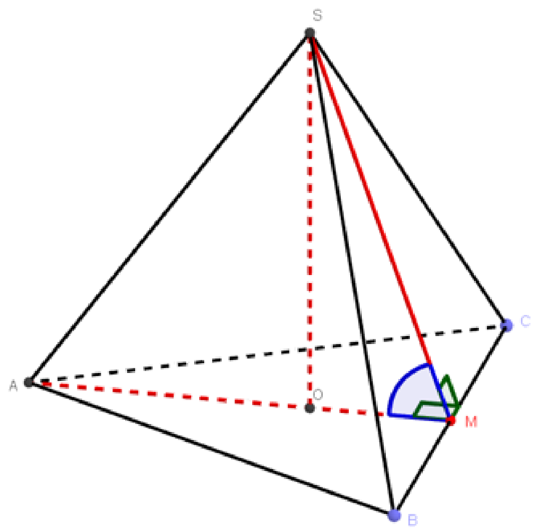
<table>
<tr><td>1. Проведем произвольную прямую a, лежащую в плоскости α.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Построим перпендикуляр МА к прямой a.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Через точку А восстанавливаем перпендикуляр b ⊂ α.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4. Выбираем любую точку В на прямой b (А≠ В) и проводим отрезок МВ.</td><td>
</td></tr>
</table>

5. В полученном треугольнике АМВ опускаем высоту из точки М на прямую АВ. Высота МН – искомый перпендикуляр.	

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица 1. Динамические чертежи на вычисление углов

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми AB_1 и BD. 	QR-код на модель:
Задача 2. В правильном тетраэдре $ABCD$ длины всех ребер равны a. Точка M является серединой ребра основания. Определить значение косинуса угла между прямыми AD и DM 	QR-код на модель:
Задача 3. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 4, а длина бокового ребра 8. Требуется определить градусную меру угла между боковым ребром SA и плоскостью основания ABCD.	QR-код на модель:

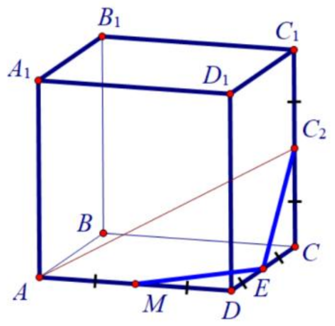
<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Задача 4. В правильной треугольной пирамиде SABC длина стороны основания равна 5, а длина каждого бокового ребра равна 7. Требуется определить точное значение двугранного угла между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания ABC.

</td><td>QR-код на модель:</td></tr>
</table>

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Таблица 2. Дополнительные задачи

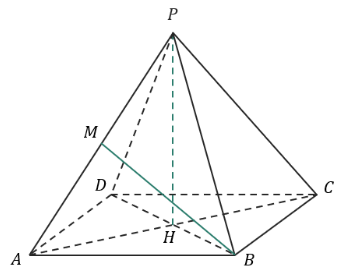
<table>
<tr>
<td>

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите двугранный угол AC_2EM, где C_2, E, M - середины рёбер CC_1, CD и AD, соответственно.



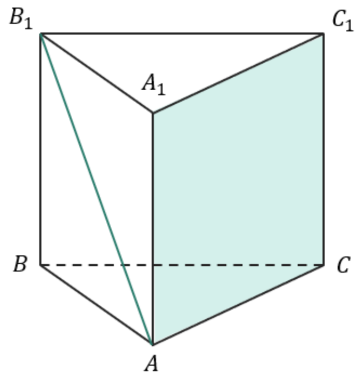
</td>
<td>

Длины всех ребер пирамиды $PABCD$ равны между собой. Отрезок PH – высота данной пирамиды, точка M – середина ее бокового ребра AP. Найдите угол между прямыми PH и BM.



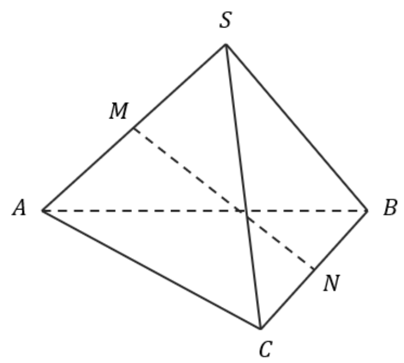
</td>
</tr>
<tr>
<td>

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C.



</td>
<td>

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны все ребра: $AB = 7\sqrt{3}$, $SC = 25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.



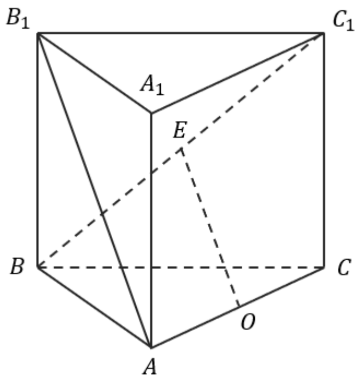
</td>
</tr>
<tr>
<td>

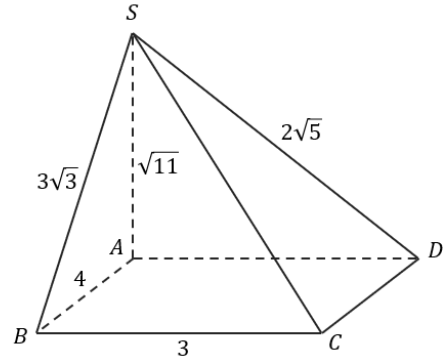
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1.
а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.
б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

</td>
<td>

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

</td>
</tr>
</table>

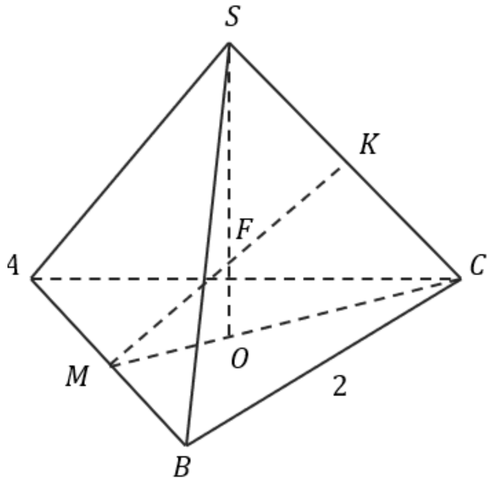




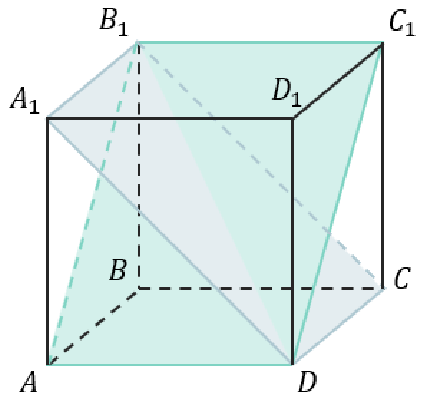
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все ребра которой равны 2, точка M – середина ребра AB, точка O – центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении 3:1 считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая MF перпендикулярна прямой SC.

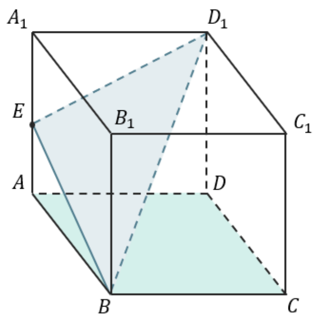
б) Найдите угол между плоскостью MBF и плоскостью ABC.



В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D.



Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 2:3$.



В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью грани AA_1B и плоскостью BC_1D.