МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики
(наименование института/факультета)
Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕНО	ОДОБРЕНО
На заседании кафедры Протокол № 8 от «06» мая 2026 Шашкина Мария Борисовна ФИО зав. кафедрой	На заседании научно-методического совета специальности (направления подготовки) Протокол № 8 от 14 мая 2026

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся

по Числовым системам

наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) математика и информатика
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию
«Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составитель: С.И. Калачева, доцент
(ФИО, должность)

ВХОДНОЙ КОНТРОЛЬ

1. Приведите примеры: натурального числа, целого не натурального, рационального не целого, иррационального числа.

2. Приведите пример обыкновенной дроби и запишите ее в виде периодической десятичной дроби

3. Приведите пример периодической десятичной дроби и запишите ее в виде обыкновенной.

4. Приведите пример доказательства методом полной математической индукции.

5. Приведите примеры конечной, периодической и непериодической десятичных дробей.

6. Разделите с остатком 27 (-27) на 23 (-23).

7. Приведите примеры сложения, вычитания, умножения и деления двух комплексных чисел.

ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ

ЗАЧЕТНЫЕ ТЕСТЫ

1. Что такое бинарное отношение на непустом множестве A?

   1.1. Это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.

   1.2. Это прямое произведение множеств $A \times A$.

   1.3. Это подмножество прямого произведения множеств $A \times A$.

   1.4. Это функция.

2. Что такое бинарная операция на непустом множестве A?

   2.1. Отображение множества A в множество A.

   2.2. Отображение множества A на множество A.

   2.3. Отображение множества A в множество $A \times A$.

   2.4. Отображение множества $A \times A$ в множество A.

3. Что называется натуральным рядом?

3.1. Система $\langle N,'\rangle$, удовлетворяющая трем аксиомам Пеано.

3.2. Система $\langle N,'\rangle$, удовлетворяющая аксиоме индукции.

3.3. Система $\langle N,'\rangle$, удовлетворяющая аксиомам Пеано.

3.4. Множество чисел, которые используются при счете.

4. Как формулируется принцип полной математической индукции?

4.1. $(T(1)-u,(T(n)-u \Rightarrow T(n')-u)) \Rightarrow (\forall n\, T(n)-u)$.

4.2. Из предположения о том, что $T(n)$ истинно следует, что $T(n')$ истинно.

4.3. $T(1)$ истинно и $T(n)$ истинно и $T(n')$ истинно.

4.4. Если $T(1)$ истинно, $T(n)$ истинно и $T(n')$ истинно, то $T(n)$ истинно для любого n.

5. Как определяется сложение натуральных чисел?

5.1. $m+1=m'$, $(n+m')=(n+m)'$ для любых $m,n \in N$.

5.2. $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m}+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m+n}$.

5.3. $m+n'=(m+n)'$.

5.4. $m+1=m'$, $m+n'=(m+n)'$ для любых $m,n \in N$.

6. Как определяется умножение натуральных чисел?

6.1. $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{n}=m \cdot n$.

6.2. $m \cdot 1=m'$, $m \cdot n'=(m \cdot n)'$ для любых $m,n \in N$.

6.3. $m \cdot 1=m'$, $m \cdot n'=m \cdot n+m$ для любых $m,n \in N$.

6.4. $m \cdot 1=m$, $m \cdot n'=m \cdot n+m$ для любых $m,n \in N$.

7. Как доказать, что дважды два — четыре?

7.1. $2 \cdot 2=2+2=4$.

7.2. $2 \cdot 2 = 2 + 1' = (2+1)' = 3' = 4$.

7.3. $2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 2 + 1' = (2+1)' = (2')' = 3' = 4$.

7.4. $2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 + 1' = (2+1)' = (2')' = 3' = 4$.

8. Как формулируется усиленный принцип полной математической индукции?

8.1. Утверждение $T(n)$ истинно для любого натурального числа n, если оно истинно для $n = 1$ и из предположения о том, что оно истинно для всех натуральных чисел, меньших n, следует истинность его для n.

8.2. $(T(1) - u, (T(m) - u \Rightarrow T(n) - u \text{ для } n > m)) \Rightarrow T(n) - u \text{ длялюбого } n \in N$.

8.3. Ели $T(1)$ истинно и $T(n)$ истинно для любого натурального числа, меньшего n, то $T(n)$ истинно для любого натурального числа n.

8.4. Ели $T(1)$ истинно и $T(m)$ истинно для любого натурального числа $m < n$, то $T(n)$ истинно для любого натурального числа n.

9. Что называется системой целых чисел?

9.1. Поле, которое содержит полукольцо натуральных чисел, и всякий элемент которого представим в виде разности натуральных чисел.

9.2. Кольцо, которое содержит полукольцо натуральных чисел, и элементы которого исчерпываются натуральными числами, нулем и числами, противоположными натуральным.

9.3. Коммутативное кольцо, которое содержит полукольцо натуральных чисел, и всякий элемент которого представим в виде разности натуральных чисел.

9.4. Кольцо, которое содержит полукольцо натуральных чисел, и всякий элемент которого представим в виде суммы натуральных чисел.

10. Что называется системой рациональных чисел?

10.1. Кольцо, содержащее кольцо целых чисел, и всякий элемент которого представим в виде отношения двух целых чисел.

10.2. Поле, содержащее кольцо целых чисел, и всякий элемент которого представим в виде разности двух целых чисел.

10.3. Поле, содержащее кольцо целых чисел, и всякий элемент которого представим в виде отношения двух целых чисел.

10.4. Множество всех дробей вида $\frac{a}{b}$, где $a, b \in Z$, $b \neq 0$.

11. Что называется упорядоченным полем?

11.1. Система $\langle P, +, \cdot, < \rangle$, где $\langle P, +, \cdot \rangle$ есть поле, $\langle P, < \rangle$ есть линейно упорядоченное множество, и операции сложения и умножения монотонны.

11.2. Система $\langle P, +, \cdot, < \rangle$, где $\langle P, +, \cdot \rangle$ есть поле, $\langle P, < \rangle$ есть линейно упорядоченное множество, и для любых $a, b, c \in P$, если $a < b$, то $a + c < b + c$ и $a \cdot c < b \cdot c$.

11.3. Система $\langle P, +, \cdot, < \rangle$, где $\langle P, + \rangle$ – коммутативная группа, $\langle P, \cdot \rangle$ – коммутативная группа, для любых $a, b, c \in P$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, система $\langle P, < \rangle$ есть линейно упорядоченное множество и если $a < b$, то $a + c < b + c$, и если $a < b$ и $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.

11.4. Система $\langle P, +, \cdot, < \rangle$, где $\langle P, +, \cdot \rangle$ есть поле, отношение $<$ транзитивно, для любых $a, b \in P$ одно и только одно из трех: либо $a < b$, либо $a = b$, либо $b < a$ и если $a < b$, то $a + c < b + c$ и $a \cdot c < b \cdot c$.

12. Каково наименьшее числовое поле?

12.1. Наименьшего числового поля не существует.

12.2. Поле рациональных чисел.

12.3. Целые числа.

12.4. Поле действительных чисел.

13. Что называется системой действительных чисел?

13.1. Упорядоченное поле, удовлетворяющее аксиоме Архимеда.

13.2. Поле, удовлетворяющее аксиоме Архимеда и аксиоме Кантора.

13.3. Упорядоченное поле, в котором для любого элемента a и любого элемента b существует натуральное число n такое, что $na > b$, и для всякой последовательности вложенных отрезков существует элемент, принадлежащий всем отрезкам последовательности.

13.4. Непрерывное упорядоченное поле.

14. Что такое сечение линейно упорядоченного множества?

14.1. Пара непустых подмножеств, пересечение которых пусто, а объединение есть данное упорядоченное множество.

14.2. Сечением линейно упорядоченного множество $\langle M,<\rangle$ называется упорядоченная пара подмножеств $A,B\subseteq M$ таких, что $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$; $A\cap B=\varnothing$: $A\cup B=M$; для любого $a\in A$ и любого $b\in B$ $a<b$.

14.3. Сечением линейно упорядоченного множество $\langle M,<\rangle$ называется пара подмножеств $A,B\subseteq M$ таких, что $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$; $A\cap B\neq\varnothing$: $A\cup B=M$; для любого $a\in A$ и любого $b\in B$ $a<b$.

14.4. 14.2. Сечением линейно упорядоченного множество $\langle M,<\rangle$ называется упорядоченная пара подмножеств $A,B\subseteq M$ таких, что $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$; $A\cap B=\varnothing$: $A\cup B=M$; для любого $a\in A$ и любого $b\in B$ $a\leq b$.

15. Что такое граничный элемент сечения?

15.1. Граничным элементом сечения (A,B) называется элемент c, расположенный между A и B.

15.2. Граничным элементом сечения (A,B) называется элемент c такой, что для любого $a\in A$ и любого $b\in B$ имеем $a\leq c\leq b$.

15.3. Граничным элементом сечения (A,B) называется наибольший элемент множества A.

15.4. Элемент c называется граничным элементом сечения (A,B), если он является наибольшим элементом множества A или наименьшим элементом множества B.

16. Как определяется система действительных чисел по Дедекинду?

16.1. Системой действительных чисел называется поле, в котором выполняется аксиома Дедекинда.

16.2. Системой действительных чисел называется упорядоченной поле, в котором для всякого сечения существует граничный элемент.

16.3. Системой действительных чисел называется упорядоченной поле, в котором для всякого сечения существует не более одного граничного элемента.

16.4. Системой действительных чисел называется упорядоченной поле, в котором для всякого сечения существует не менее одного граничного элемента.

17. Как определяется система действительных чисел с помощью понятия точной верхней границы?

17.1. Системой действительных чисел называется упорядоченной поле, в котором для всякого непустого ограниченного сверху подмножества существует наибольший элемент.

17.2. Системой действительных чисел называется упорядоченной поле, в котором для всякого непустого ограниченного сверху подмножества существует наименьший элемент.

17.3. Системой действительных чисел называется упорядоченной поле, в котором для всякого непустого ограниченного сверху подмножества существует точная верхняя граница.

17.4. Системой действительных чисел называется упорядоченной поле, в котором для всякого непустого ограниченного сверху подмножества существует точная нижняя граница.

18. Что означает «действительное число представимо в виде десятичной дроби»?

18.1. Действительное число a представимо в виде десятичной дроби $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots$, если $a = \frac{a}{b}$ и при делении a на b получаем данную десятичную дробь.

18.2. Действительное число a представимо в виде десятичной дроби $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots$, если для любого номера n имеет место неравенство $a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \le a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$.

18.3. Действительное число a представимо в виде десятичной дроби $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots$, если для любого номера n имеет место неравенство $a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \le a \le a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$.

18.4. Действительное число a представимо в виде десятичной дроби $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots$, если для любого номера n имеет место неравенство $a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} < a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$.

19. Какой десятичной дробью представимо рациональное число?

19.1. Конечной десятичной дробью.

19.2. Бесконечной непериодической десятичной дробью.

19.3. Бесконечной периодической десятичной дробью.

19.4. Чисто периодической десятичной дробью.

20. Какой десятичной дробью представимо иррациональное число?

20.1. Непериодической десятичной дробью.

20.2. Периодической десятичной дробью.

20.3. Бесконечной десятичной дробью с 9 в периоде.

20.4. Иррациональной десятичной дробью.

21. Верно ли, что сумма двух непериодических десятичных дробей является непериодической десятичной дробью?

21.1. Нет.

21.2. Верно.

21.3. Иногда верно.

21.4. В некоторых случаях неверно.

22. Верно ли, что произведение двух непериодических десятичных дробей является непериодической десятичной дробью?

22.1. Нет.

22.2. Верно.

22.3. Иногда верно.

22.4. В некоторых случаях неверно.

23. Что называется системой комплексных чисел?

23.1. Упорядоченное поле, состоящее из чисел вида $a+bi$, где $a,b \in R$, i – мнимая единица.

23.2. Упорядоченное поле, содержащее упорядоченное поле действительных чисел, мнимую единицу i такую, что $i^2=-1$, и всякий элемент которого представим в виде $a+bi$, где $a,b \in R$.

23.3. Поле, содержащее упорядоченное поле действительных чисел, мнимую единицу i такую, что $i^2=-1$, и всякий элемент которого представим в виде $a+bi$, где $a,b \in R$.

23.4. Поле, содержащее поле действительных чисел, мнимую единицу i такую, что $i^2=-1$, и всякий элемент которого представим в виде $a+bi$, где $a,b \in R$.

24. Зачем строится модель кольца целых чисел?

24.1. Для аксиоматического построения теории целых чисел.

24.2. Для доказательства независимости аксиом, определяющих систему целых чисел.

24.3. Для доказательства непротиворечивости теории целых чисел.

24.4. Для доказательства того, что множество целых чисел образует кольцо.

25. Как определяется сложение произвольных десятичных дробей?

25.1. По правилу сложения «столбиком».

25.2. Если даны десятичные дроби $\alpha=a_0,a_1a_2...$ и $\beta=b_0,b_1b_2...$, то $\alpha+\beta=\gamma$, где $\gamma=c_0,c_1c_2...$ и $c_0=a_0+b_0$, $c_1=a_1+b_1$, и так далее.

25.3. Если даны десятичные дроби $\alpha=a_0,a_1a_2...$ и $\beta=b_0,b_1b_2...$, причем $\alpha_n=a_0,a_1a_2...a_n$, $\alpha'_n=\alpha_n+10^{-n}$ и $\beta_n=b_0,b_1b_2...b_n$, $\beta'_n=\beta_n+10^{-n}$, то $\alpha+\beta$ есть та единственная десятичная дробь, которая принадлежит всем отрезкам последовательности $([\alpha_n+\beta_n,\alpha'_n+\beta'_n])$.

25.4. Если даны десятичные дроби $\alpha = a_0, a_1a_2...$ и $\beta = b_0, b_1b_2...$, причем $\alpha_n = a_0, a_1a_2...a_n$, $\alpha'_n = \alpha_n + 10^{-n}$ и $\beta_n = b_0, b_1b_2...b_n$, $\beta'_n = \beta_n + 10^{-n}$, то $\alpha + \beta = \gamma$ тогда и только тогда, когда для любого номера n имеем $\alpha_n + \alpha'_n \le \gamma \le \beta_n + \beta'_n$

26. Как определяется умножение десятичных дробей?

26.1. Если даны десятичные дроби $\alpha = a_0, a_1a_2...$ и $\beta = b_0, b_1b_2...$, причем $\alpha_n = a_0, a_1a_2...a_n$, $\alpha'_n = \alpha_n + 10^{-n}$ и $\beta_n = b_0, b_1b_2...b_n$, $\beta'_n = \beta_n + 10^{-n}$, то $\alpha \cdot \beta$ есть та единственная десятичная дробь, которая принадлежит всем отрезкам последовательности $([\alpha_n\beta_n, \alpha'_n\beta'_n])$.

26.2. Если даны десятичные дроби $\alpha = a_0, a_1a_2...$ и $\beta = b_0, b_1b_2...$, причем $\alpha_n = a_0, a_1a_2...a_n$, $\alpha'_n = \alpha_n + 10^{-n}$ и $\beta_n = b_0, b_1b_2...b_n$, $\beta'_n = \beta_n + 10^{-n}$, то при $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ $\alpha \cdot \beta$ есть та единственная десятичная дробь, которая принадлежит всем отрезкам последовательности $([\alpha_n\beta_n, \alpha'_n\beta'_n])$. Если же $\alpha \ge 0$, $\beta < 0$, то $\alpha \cdot \beta$ есть дробь $-(\alpha \cdot (-\beta))$, а если $\alpha < 0$, $\beta \ge 0$, то $\alpha \cdot \beta$ есть дробь $-((-\alpha) \cdot \beta)$, если же $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то $\alpha \cdot \beta$ есть дробь $(-\alpha) \cdot (-\beta))$.

26.3. Произведение находится по правилу умножения «столбиком».

26.4. При неотрицательных α и β произведение находится «столбиком», а в остальных случаях используем «правила знаков».

27. Что такое тело?

27.1. Тело – это некоммутативное поле.

27.2. Тело – это кольцо с делением.

27.3. Тело – это кольцо без делителей нуля.

27.4. Тело – это коммутативное кольцо.

28. Что такое тело кватернионов?

28.1. Это множество чисел вида $a + bi + cj + dk$, где $a, b, c, d \in R$, $i^2 = j^2 = k^2 = (ij)^2 = -1$.

28.2. Это множество чисел вида $a + bi + cj + dk$, где $a, b, c, d \in R$, $i^2 = j^2 = k^2 = (ij)^2 = -1$ относительно покомпонентного сложения и умножения.

28.3. Тело кватернионов – это такое тело, которое содержит поле комплексных чисел C, содержит мнимую единицу j, причем всякий элемент тела представим в виде $a+bj$, где $a,b\in C$.

28.4. Тело кватернионов – это такое тело, которое содержит поле комплексных чисел C с мнимой единицей i, содержит новую мнимую единицу j, причем $j^2=-1$, $(ij)^2=-1$ и всякий элемент тела представим в виде $a+bj$, где $a,b\in C$.

29. Всякое рациональное число представимо в виде

29.1. конечной десятичной дроби;

29.2. бесконечной десятичной дроби;

29.3. непериодической десятичной дроби;

29.4. периодической десятичной дроби.

30. Укажите пример поля между Q и R.

30.1. $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Z\}$;

302. $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$;

30.3. $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in R\}$;

30.4. $\{a+b\sqrt{2}\mid a\in Q, b\in R\}$.

31. Выполняется ли в упорядоченном поле рациональных чисел аксиома Кантора?

31.1. Да.

31.2. Да, если поле рациональных чисел рассматривать как подполе поля действительных чисел.

31.3. Да, если рациональные числа рассматривать в виде десятичных дробей.

31.4. Нет.

32. Нарисуйте диаграмму, изображающую множества Q, R, C и множество алгебраических чисел A.

33. Нарисуйте диаграмму, изображающую множества N, $2Z$, $Z+Zi$.

34. Нарисуйте диаграмму, изображающую множества $Z+Zi$, R, C.

35. Нарисуйте диаграмму, изображающую множество всех групп G, множество всех колец K, множество всех полей P и множество всех упорядоченных полей U.

36. Изобразите на одной диаграмме множество всех колец, кольцо целых чисел, множество всех полей и поле рациональных чисел.

Текущий контроль

Домашняя контрольная работа «Задачи на индукцию»

Подобрать и решить задачи на доказательства методом полной математической индукции по следующим темам:

1. Доказательства равенств.
2. Доказательства неравенств.
3. Доказательства делимости.
4. Доказательство формулы общего члена рекуррентной последовательности.
5. Доказательство геометрических утверждений.

Примерный перечень задач

1. Доказательство равенств

1) Докажите, что сумма первых n натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

2) Докажите, что сумма квадратов первых n натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

4) Докажите, что $5+45+325+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^{n}$.

5) Докажите, что

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n$

6) Докажите тождества

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}};$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^{n-1}})=1+x^2+x^3+\ldots+x^{2^n-1}.$$

7) Найдите и докажите формулы:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k,\quad \begin{pmatrix}\alpha&0&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\alpha&0\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}^k,\quad \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}^k,\quad \begin{pmatrix}0&1&0&0&\ldots&0\\0&0&1&0&\ldots&0\\0&0&0&1&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}^k.$$

2. Доказательство неравенств

Докажите неравенства: 1) $5^n>7n-3$ при любом натуральном n;

2) $2^n-1>n(n+1)$ при любом натуральном $n\ge 7$;

3) $3^n\ge 2^n+n$ при любом натуральном n;

4) $4^n\ge 3^n+n^2$ при любом натуральном n;

5) $4^n>3^n+2^n+n$ при $n\ge 2$; 6) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$

7) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}>\frac{4^n}{n+1}$; 8) $|\sin n\alpha|\le n|\sin\alpha|$;

9) $x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\ldots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\ge n+1$.

10) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n>1$.

3. Доказательство делимости

Докажите, что для любого натурального числа n:

1) $6^{2n-1}+1 \vdots 7$; 2) $7^n+3n-1 \vdots 9$; 3) $7^{n+2}+8^{2n+1} \vdots 57$; 4) $4^n+15n-1 \vdots 9$; 5) $5^n-3^n+2n \vdots 4$; 6) $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ кратно 17.

4. Доказательство формулы общего члена последовательности, заданной рекуррентно

1) Дано: $a_1=4$, $a_{n+1}=3a_n-2$. Докажите, что $a_n=3^n+1$.

2) Дано: $a_1=1$, $a_2=9$, $a_{n+2}=9a_{n+1}-20a_n$. Докажите, что $a_n=5^n-4^n$.

3) Дано: $a_1=3$, $a_2=15$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$. Докажите, что $a_n=4^n-1$.

4) Дано: $a_1=29$, $a_2=85$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$. Докажите, что $a_n=2^n+3^{n+2}$.

5) Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_{n-1}+a_n$. Докажите, что: $a)$ $a_1+a_3+...+a_{2n+1}=a_{2n+2}$, $b)$ $1+a_2+a_4+...+a_{2n}=a_{2n+1}$.

6) Последовательность задана рекуррентно: $a_1=5$, $a_2=7$, $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=0$. Выразите a_n через n.

7) Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$ с начальными значениями $a_1=3$, $a_2=15$. Докажите, что: $a)$ все члены последовательности делятся на 3;

$b)$ все члены последовательности с четными номерами делятся на 5.

5. Доказательства по индукции в геометрии

1) На сколько частей разделят плоскость n прямых плоскости, проходящих через одну точку?

2) На сколько интервалов разделят прямую n ее точек?

3) Докажите, что n плоскостей пространства, из которых каждые три пересекаются и никакие четыре не имеют общей точки, делят пространство на $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+n+1$ частей.

4) В плоскости проведено n окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три не имеют общей точки. Докажите, что при этом плоскость разбивается на n^2-n+2 частей.

5) Докажите, что сторона правильного 2^n-угольника выражается через радиус R описанной окружности выражается формулой: $a_n = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n}}$.

6) На сколько треугольников n-угольник может быть разбит своими непересекающимися диагоналями?

7) Докажите, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $2d(n-2)$.

Вопросы к зачету

1. Определение натурального ряда, независимость аксиом Пеано. Доказательство принципа полной математической индукции.
2. Определение сложения натуральных чисел, доказательство существования и единственности сложения.
3. Основные свойства сложения и умножения натуральных чисел. (3 свойства доказать).
4. Вспомогательные свойства, позволяющие ввести отношение «меньше» для натуральных чисел.
5. Определение отношения «меньше» для натуральных чисел, его основные свойства.
6. Определение отношения «меньше» для натуральных чисел, доказательство существования наибольшего числа для ограниченного сверху множества натуральных чисел. Линейно упорядоченное множество натуральных чисел вполне упорядочено.
7. Доказательство существования наименьшего числа для непустого множества натуральных чисел. Усиленный принцип полной математической индукции.
8. Определение системы целых чисел. Основные свойства: свойство нуля, правила знаков, коммутативность умножения целых чисел. Отсутствие делителей нуля.
9. Непротиворечивость теории целых чисел.
10. Определение системы рациональных чисел. Представление рационального числа десятичной дробью.
11. Определение системы действительных чисел. Включение Q в R. Существование и единственность целой части действительного числа.
12. Целая часть действительного числа. Представление действительных чисел десятичными дробями.
13. Линейно упорядоченное множество десятичных дробей. Конечные десятичные дроби. Свойство усиленной плотности.
14. Последовательность стягивающихся отрезков. Определение сложения и умножения десятичных дробей.

15. Свойство слабой монотонности сложения. Доказательство свойств сложения и умножения десятичных дробей.
16. Различные определения системы действительных чисел и их эквивалентность.
17. Определение системы комплексных чисел. Непротиворечивость теории комплексных чисел. Основные свойства поля комплексных чисел.
18. Кватернионы. Группа кватернионов.
19. Теорема Фробениуса.
20. Изоморфизм одноименных числовых систем.