МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики
(наименование института/факультета)
Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕНО

На заседании кафедры
Протокол № 8 от «06» мая 2026
Шашкина Мария Борисовна

ОДОБРЕНО

На заседании научно-методического совета специальности (направления подготовки)
Протокол № 8 от 14 мая 2026

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся

по ГЕОМЕТРИИ
наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки:
44.03.01 Педагогическое образование, "Математика"
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) «Математика и информатика», «Физика и математика», «Математика и дополнительное образование (экономика и финансовая грамотность)»
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию «Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составитель: Е.А. Аёшина, доцент, В.Р. Майер, профессор
(ФИО, должность)

**Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости**

**по дисциплине «Геометрия»**

### *Самостоятельная работа*
### *«Скалярное произведение векторов»*

### Вариант 1

1. Дан квадрат *ABCD*, $AB=c,\ AC\cap BD=F$. Найдите: 1) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BD}$.
2. Известно, что $(2\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=9,\ |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2$. Найдите: 1) $\angle(\vec{a},\vec{b})$; 2) $|2\vec{a}+\vec{b}|$.
3. Известно, что $\vec{m}=3\vec{p}-x\vec{q},\ \vec{n}=\vec{p}+2\vec{q},\ \vec{p}(1;-2),\ \vec{q}(3;0)$. Найдите число $x$, если $\vec{m}\perp\vec{n}$.
4. $A(-6;0),\ B(0;2),\ C(1;1)$. Докажите, что треугольник *ABC* – тупоугольный. Найдите $\cos BCM$, где *CM* – медиана треугольника *ABC*.
5. $\vec{p}(6;-8),\ \vec{m}\perp\vec{p},\ |\vec{m}|=1$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$.

### Вариант 2

1. Дан квадрат *ABCD*, $AB=a,\ AC\cap BD=K$. Найдите: 1) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Известно, что $(\vec{m}-3\vec{n})^2-(2\vec{m}+\vec{n})^2=8,\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=1$. Найдите: 1) $\angle(\vec{m},\vec{n})$; 2) $|\vec{m}-3\vec{n}|$.
3. Известно, что $\vec{m}=x\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{n}=2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}(2;-2),\ \vec{b}(1;3)$. Найдите число $x$, если $\vec{m}\perp\vec{n}$.
4. $A(-3;1),\ B(2;3),\ C(4;-1)$. Докажите, что треугольник *ABC* – тупоугольный. Найдите $\cos BAM$, где *AM* – медиана треугольника *ABC*.
5. $\vec{a}(-3;4),\ \vec{b}\perp\vec{a},\ |\vec{b}|=1$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$.

### *Индивидуальная домашняя работа*
### *«Векторы на плоскости»*

Задан треугольник *ABC* координатами своих вершин.

1. Найти:
   - длины сторон;
   - величины углов (приближенные значения).
2. Определить вид треугольника.
3. Найти координаты:
   - *M* – центра тяжести;
   - *H* – ортоцентра;
   - *P* – центра описанной окружности.

4. Показать, что точки *M*, *H*, *P* лежат на одной прямой.
5. Вычислить высоту $h_b$.
6. Найти площадь треугольника.
7. В прямоугольной декартовой системе координат построить: треугольник *ABC*, точки *M, H*, *P*.

Варианты:

1. A(4;6), B(-4;0), C(-1;-4)
2. A(1;2), B(3;7), C(5;-13)
3. A(-2;-2), B(-1;4), C(3;1)
4. A(2;0), B(8;4), C(5;-3)
5. A(6;4), B(0;-4), C(-4;-1)
6. A(2;1), B(7;3), C(-13;5)
7. A(-2;-2), B(4;-1), C(1;3)
8. A(0;2), B(4;8), C(-3;5)
9. A(-4;0), B(4;6), C(-1;-4)
10. A(3;7), B(1;2), C(5;-13)
11. A(-1;4), B(-2;-2), C(3;1)
12. A(8;4), B(2;0), C(5;-3)
13. A(-4;0), B(-1;-4), C(4;6)
14. A(3;7), B(5;-13), C(1;2)
15. A(-1;4), B(3;1), C(-2;-2)
16. A(8;4), B(5;-3), C(2;0)
17. A(4;8), B(-3;5), C(0;2)
18. A(0;-3), B(1;5), C(6;0)
19. A(-3;0), B(5;1), C(0;6)
20. A(0;3), B(2;6), C(-4;-2)
21. A(3;0), B(6;2), C(-2;-4)

## ***Индивидуальная домашняя работа «Прямая на плоскости»***

Задан треугольник *ABC* координатами своих вершин.

*1.* Написать уравнения всех сторон треугольника.
*2.* Найти координаты:
   - *M* – центра тяжести;
   - *H* – ортоцентра;
   - *P* – центра описанной окружности;
   - *K* – центра вписанной окружности.
*3.* Доказать, что точки *M*, *H*, *P* лежат на одной прямой.
*4.* Написать уравнение окружности (*P*; *R*), описанной около треугольника.

5. Вычислить высоту $h_b$.
6. Найти $\rho(B, m_a)$.
7. Записать систему неравенств, задающих внутреннюю область треугольника.
8. Написать уравнение биссектрисы угла *A*.
9. Написать уравнение окружности (*K*; *r*), вписанной в треугольник.
10. В прямоугольной декартовой системе координат построить: треугольник *ABC*, точки *M, H*, *P*, *K*, вписанную и описанную окружности.

Варианты:

1. A(4;6), B(-4;0), C(-1;-4)
2. A(1;2), B(3;7), C(5;-13)
3. A(-2;-2), B(-1;4), C(3;1)
4. A(2;0), B(8;4), C(5;-3)
5. A(6;4), B(0;-4), C(-4;-1)
6. A(2;1), B(7;3), C(-13;5)
7. A(-2;-2), B(4;-1), C(1;3)
8. A(0;2), B(4;8), C(-3;5)
9. A(-4;0), B(4;6), C(-1;-4)
10. A(3;7), B(1;2), C(5;-13)
11. A(-1;4), B(-2;-2), C(3;1)
12. A(8;4), B(2;0), C(5;-3)
13. A(-4;0), B(-1;-4), C(4;6)
14. A(3;7), B(5;-13), C(1;2)
15. A(-1;4), B(3;1), C(-2;-2)
16. A(8;4), B(5;-3), C(2;0)
17. A(4;8), B(-3;5), C(0;2)
18. A(0;-3), B(1;5), C(6;0)
19. A(-3;0), B(5;1), C(0;6)
20. A(0;3), B(2;6), C(-4;-2)
21. A(3;0), B(6;2), C(-2;-4)

## ***Самостоятельная работа «Эллипс»***

Вариант №1

Эллипс задан своим каноническим уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{6}=1$. Найдите:

1. координаты точек пересечения эллипса с координатными осями;
2. полуоси эллипса;
3. эксцентриситет эллипса;
4. координаты фокусов эллипса;
5. координаты концов диаметра, образующего с осью *OX* угол $60^0$;

6. уравнение прямой, содержащей диаметр, сопряженный с предыдущим.

Вариант №2

Эллипс задан своим каноническим уравнением $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$. Найдите:

1. координаты точек пересечения эллипса с координатными осями;
2. полуоси эллипса;
3. эксцентриситет эллипса;
4. координаты фокусов эллипса;
5. координаты концов диаметра, образующего с осью *OX* угол $120^0$;
6. уравнение прямой, содержащей диаметр, сопряженный с предыдущим.

### *Самостоятельная работа «Гипербола»*

**Вариант №1**

1. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Найдите: а) координаты фокусов; б) эксцентриситет; 3) уравнения асимптот.
2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точки $M(4;0)$ и $N(4\sqrt{17};4)$

**Вариант №2**

1. Дана гипербола $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. Найдите: а) координаты фокусов; б) эксцентриситет; 3) уравнения асимптот.
2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точку $M(-5;3)$ и имеет эксцентриситет равный $\sqrt{2}$ .

### *Самостоятельная работа «Парабола»*

1. Определите координаты фокуса и составьте уравнение директрисы для параболы $y^2=-18x$. Постройте параболу.
2. Напишите каноническое уравнение параболы, если фокус имеет координаты (4;0).

### *Индивидуальная домашняя работа «Уравнения прямых и плоскостей»*

Даны точки *A*, *B*, *C*, *D* координатами своих вершин в прямоугольной декартовой системе координат.

1. Доказать, что точки *A*, *B*, *C*, *D* не лежат в одной плоскости.
2. Найти $S_{\Delta ABC}$ .
3. Определить вид треугольника *ABC*.

Найти:

4. Площадь полной поверхности.
5. Объем тетраэдра.
6. Высоту тетраэдра *DH*.
7. Координаты точки *H*.
8. Высоту *DT* грани *ABD*.
9. Координаты точки *T*.
10. Угол наклона ребра *DA* к плоскости *ABC*.
11. Величину двугранного угла *DABC*.
12. Построить в прямоугольной декартовой системе координат:
    - тетраэдр *ABCD*;
    - точки *H*, *T*;
    - показать на чертеже:
      *1)* $\angle(AD,(ABC))$;
      *2)* линейный угол двугранного угла *DABC*.

15. Найти $\rho(AB, CD)$.

Варианты:

22. A(2;0;1), B(2;2;0), C(-1;1;-1) D(1;-1;3)
23. A(-2;0;1), B(2;2;0), C(-1;1;-1) D(2;-1;3)
24. A(2;1;0), B(-1;1;1), C(1;-1;0) D(1;-1;3)
25. A(-2;0;1), B(-1;1;1), C(1;-1;0) D(2;-1;3)
26. A(3;2;0), B(0;2;1), C(1;1;3) D(-2;1;-3)
27. A(3;-2;0), B(0;2;1), C(1;1;3) D(2;-1;3)
28. A(3;2;0), B(-1;2;3), C(1;-1;0) D(-2;1;-3)
29. A(3;-2;0), B(-1;2;3), C(1;-1;0) D(2;-1;3)
30. A(2;0;1), B(-2;2;3), C(1;-1;0) D(2;-1;3)
31. A(2;0;1), B(-1;1;1), C(1;1;3) D(2;-1;3)
32. A(0;2;1), B(2;2;0), C(1;-1;-1) D(-1;1;3)
33. A(0;-2;1), B(2;2;0), C(1;-1;-1) D(-1;2;3)
34. A(1;2;0), B(1;-1;1), C(-1;1;0) D(-1;1;3)
35. A(0;-2;1), B(1;-1;1), C(-1;1;0) D(-1;2;3)
36. A(2;3;0), B(2;0;1), C(1;1;3) D(1;-2;-3)
37. A(-2;3;0), B(2;0;1), C(1;1;3) D(-1;2;3)
38. A(3;2;0), B(2;-1;3), C(-1;1;0) D(1;-2;-3)
39. A(-2;3;0) B(2;-1;3), C(-1;1;0) D(-1;2;3)
40. A(0;2;1), B(2;-2;3), C(-1;1;0) D(-1;2;3)

***Самостоятельная работа***
***«Поверхности второго порядка»***

**Вариант 1**

1. Напишите каноническое уравнение эллипсоида, который прогходит через точку A(2;0;1) и пересекает плоскость XOY по линии $x^2 + 8y^2 - 8 = 0$
2. Исследуйте методом сечения плоскостями и постройте изображение поверхности $x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$.
3. Определите вид поверхности, которая задана уравнением $x^2 - 2x + y^2 = 8$.

**Вариант 2**

1. Напишите каноническое уравнение эллипсоида, который прогходит через точку A(-2;0;-1) и пересекает плоскость XOY по линии $x^2 + 8y^2 + 18 = 0$.
2. Исследуйте методом сечения плоскостями и постройте изображение поверхности $x^2 +2 y^2 - 6z^2 + 24 = 0$.
3. Определите вид поверхности, которая задана уравнением $x^2 + y^2 -9z = 0$.

***Самостоятельная работа***
***«Решение элементарных задач на построение»***

**Вариант № 1**

1. Постройте с помощью циркуля и линейки серединный перпендикуляр к данному отрезку.
2. Постройте с помощью циркуля и линейки биссектрису данного угла.
3. Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по трем его сторонам.

**Вариант № 2**

1. Постройте с помощью циркуля и линейки угол, равный данному.
2. Постройте с помощью циркуля и линейки прямую, параллельную данной и проходящей через данную точку.
3. Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

## Самостоятельная работа
## Вариант №1

1. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и медиане, проведенной к основанию.
2. Постройте треугольник $ABC$ по следующим элементам: $a$, $b$, $h_c$.
3. Постройте отрезок $x=\sqrt{\dfrac{ab\sqrt{3b^2-c^2}}{c}}$, где $a$, $b$, $c$ – данные отрезки.
4. Постройте квадрат, равновеликий данному треугольнику.

## Вариант №2

1. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, проведенной к основанию.
2. Постройте треугольник $ABC$ по следующим элементам: $a$, $h_a$, $m_a$.
3. Постройте отрезок $x=\dfrac{a\sqrt{b\sqrt{3b^2-a^2}}}{c}$, где $a$, $b$, $c$ – данные отрезки.
4. Постройте прямоугольник равновеликий данному квадрату при условии, что одна сторона прямоугольника – данный отрезок.

## Вариант №3

1. Постройте квадрат по его диагонали.
2. Постройте треугольник $ABC$ по следующим элементам: $b$, $m_b$, $\angle A$.
3. Постройте отрезок $x=\dfrac{\sqrt{3a^2+b^2}\cdot\sqrt{ab}}{c}$, где $a$, $b$, $c$ – данные отрезки.
4. Постройте равнобедренный треугольник, основание которого равно данному отрезку, а площадь равна площади данного прямоугольника.

## Вариант №4

1. Постройте ромб по стороне и острому углу.
2. Постройте треугольник $ABC$ по следующим элементам: $a$, $h_b$, $\angle B$ .
3. Постройте отрезок, $x=\dfrac{a\sqrt{b\sqrt{5c^2+a^2}}}{c}$ где $a$, $b$, $c$ – данные отрезки.
4. Постройте квадрат, равновеликий данному ромбу.

## *Самостоятельная работа «Движения»*

### Вариант 1

1. Движение задано формулами $\begin{matrix} x_1 = -x - 6 \\ y_1 = y \end{matrix}$. Найдите:

1) образ точки $M(3;2)$;
2) прообраз точки $M$;
3) неподвижные точки;
4) образ окружности $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

2. Напишите аналитическое задание центральной симметрии с центром $O(1;3)$.

### Вариант 2

1. Движение задано формулами $\begin{matrix} x_1 = -x + 1 \\ y_1 = -y \end{matrix}$. Найдите:

1) образ точки $M(3;2)$
2) прообраз точки $M$;
3) неподвижные точки;
4) образ окружности $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

2. Напишите аналитическое задание центральной симметрии с центром $O(-2;0)$.

## *Контрольная работа «Решение задач методом движения»*

### Вариант 1

1. Дан треугольник $ABC$ и точка $O$. Постройте:

   а) $\Delta A_1B_1C_1 = \beta_O^{60^\circ}(\Delta ABC)$;

   б) образ средней линии треугольника $ABC$, параллельной стороне $AC$.

2. Даны две равные неконцентрические окружности $\omega_1$ и $\omega_2$. Назовите все движения, при которых $\omega_1$ отображается на $\omega_2$.

3. Окружность, вписанная в угол, касается его сторон в точках $M$ и $N$. Докажите, что $M$ и $N$ – соответственные точки при осевой симметрии, ось которой содержит биссектрису данного угла.

4. Даны точка $A$, прямая $l$ и окружность $\omega$. постройте равносторонний треугольник $ABC$, вершины $B$ и $C$ которого принадлежат соответственно прямой $l$ и окружности $\omega$.

**Вариант 2**

1. Дан треугольник *ABC* и точка *O*. Постройте:

   а) $\Delta A_1B_1C_1 = \beta_O^{45^\circ}(\Delta ABC)$;

   б) образ центра окружности, описанной около треугольника *ABC*.

2. *ABCDEF* – правильный шестиугольник. Назовите все движения, при которых отрезок *AB* отображается на отрезок *DE*.

3. Точка *C* принадлежит внутренней области прямого угла *AOB*. $C_1 = \sigma_{OA}(C)$, $C_2 = \sigma_{OB}(C)$. Докажите, что точки $C_1$, $C_2$ и *O* принадлежат одной прямой.

4. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* ($\angle C = 90^\circ$), вершина *C* которого – данная точка, а вершины *A* и *B* принадлежат соответственно данной прямой *l* и данной окружности $\omega$.

**Вариант 3**

1. Дан треугольник ABC и вектор $\vec{a}$. Постройте:

   а) $\Delta A_1B_1C_1 = p_{\vec{a}}(\Delta ABC)$;

   б) образ центра тяжести треугольника *ABC*.

2. *ABCDE* – правильный пятиугольник. Назовите все движения, при которых отрезок *AB* отображается на отрезок *CD*.

3. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.

4. Даны прямая *l*, окружности $\omega_1$ и $\omega_2$. Постройте точки *A* и *B*, принадлежащие соответственно $\omega_1$ и $\omega_2$ такие, что отрезок *AB* перпендикулярен прямой *l* и делится ею пополам.

**Вариант 4**

*11.* Дан треугольник ABC и вектор $\vec{a}$. Постройте:

а) $\Delta A_1B_1C_1 = p_{\vec{a}}(\Delta ABC)$;

б) образ ортоцентра треугольника *ABC*.

*12.* *ABCDEF* – правильный шестиугольник. Назовите все движения, при которых отрезок *AB* отображается на отрезок *CD*.

*13.* *ABCD* – равнобедренная трапеция (*BC*||*AD*). Докажите, что прямые *AB* и *DC* пересекаются в точке, принадлежащей прямой, проходящей через середины оснований трапеции.

*14.* Даны две пересекающиеся прямые и точка, не принадлежащая этим прямым. Постройте отрезок, концы которого принадлежат данным прямым, а данная точка – середина этого отрезка.

**Вариант 1**

***Самостоятельная работа «Подобия»***

1. Пользуясь определением гомотетии, найдите образ точки $M(-7;2)$, если $S(0;-5)$ – центр гомотетии, коэффициент которой равен (-2).
2. Постройте образ параллелограмма в гомотетии, центр которой – одна из вершин параллелограмма, а $k=\frac{m}{n}$ (*m*, *n* – данные отрезки).
3. Через точку касания двух окружностей проведены две секущие, пересекающие первую окружность в точках *A* и *B*, вторую – в точках *C* и *D*. Докажите, что *AB* || *CD*.
4. Постройте прямоугольный треугольник по отношению катетов $m:n$, где *m* и *n* – данные отрезки, и гипотенузе.

**Вариант 2**

1. Пользуясь определением гомотетии, найдите прообраз точки $M(-5;1)$, если $S(0;1)$ – центр гомотетии, коэффициент которой равен (-3).
2. Постройте образ угла *ABC* в гомотетии с центром *S* и коэффициентом $k=\frac{m}{n}$ (*m*, *n* – данные отрезки).
3. *ABCD* – параллелограмм. Через вершину *C* проведена прямая, параллельная диагонали *BD* и пересекающая продолжения сторон *AB* и *AD* в точках *N* и *K*. Докажите, что точка *C* – середина отрезка *NK*.
4. Постройте равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме боковой стороны и основания.

**Вариант 3**

1. Пользуясь определением гомотетии, найдите ее центр, если коэффициент гомотетии равен (-2), а $A(-1;5)$ и $A_1(3;2)$ – пара соответственных точек.
2. Постройте образ окружности в гомотетии, центр которой – внутренняя точка окружности, а $k=\frac{m}{n}$ (*m*, *n* – данные отрезки).
3. Каждая из диагоналей квадрата разделена на три равные части. Докажите, что точки деления являются вершинами квадрата и найдите отношение площадей данного квадрата и полученного.
4. Постройте прямоугольный треугольник, если дан один из его острых углов и биссектриса, проведенная из вершины прямого угла.

**Вариант 4**

1. Пользуясь определением гомотетии, найдите ее центр, если коэффициент гомотетии равен 5, а $M(-1;3)$ и $M_1(4;1)$ – пара соответственных точек.

2. Постройте образ ромба в гомотетии, центр которой – точка пересечения диагоналей ромба, а $k=\frac{m}{n}$ (*m*, *n* – данные отрезки).

3. Пусть $P$ – произвольная точка плоскости, $A_1, B_1, C_1$ – точки, симметричные точке $P$ относительно середин сторон *BC*, *CA*, *AB* треугольника *ABC* соответственно. Докажите, что отрезки $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке.

4. Постройте треугольник по двум углам и радиусу описанной окружности.

## *Индивидуальная домашняя работа «Аффинные преобразования»*

Родственное преобразование задано уравнением оси родства в аффинной системе координат. Точка *M* переходит в точку $M_1$ в данном родстве.

1. В аффинной системе координат $O, E_1, E_2$ построить ось родства, точки *M* и $M_1$.
2. Построить образы точек $O, E_1, E_2$. Выделить реперы $R$ и $R_1$.
3. Определить род аффинного преобразования.
4. Определить вид родства.
5. Записать координатные формулы этого аффинного преобразования.
6. Определить координаты точки $O_1$ и координаты образов векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ в репере *R*.

1. $x+2y-2=0$, $M(1;-2)$, $M_1(3;2)$
2. $3x-y+1=0$, $M(1;-2)$, $M_1(0;4)$
3. $2x+y+3=0$, $M(1;0)$, $M_1(0;1)$
4. $3x-y+6=0$, $M(2;-1)$, $M_1(3;2)$
5. $x+y-3=0$, $M(-1;0)$, $M_1(3;4)$
6. $2x+y-4=0$, $M(-1;1)$, $M_1(3;2)$
7. $2x+y+4=0$, $M(1;1)$, $M_1(2;-1)$
8. $x-2y-2=0$, $M(-1;1)$, $M_1(1;2)$
9. $x+2y+2=0$, $M(2;-1)$, $M_1(0;-2)$
10. $3x+y+6=0$, $M(1;0)$, $M_1(0;-1)$
11. $3x-y-6=0$, $M(0;-1)$, $M_1(3;-2)$
12. $x+y-2=0$, $M(-1;1)$, $M_1(-2;2)$
13. $x+y+2=0$, $M(2;1)$, $M_1(0;-7)$
14. $x-y+2=0$, $M(-1;0)$, $M_1(0;4)$
15. $x+y-1=0$, $M(-2;0)$, $M_1(0;-2)$
16. $x+y+1=0$, $M(1;-1)$, $M_1(-2;2)$
17. $x-y-1=0$, $M(1;1)$, $M_1(0;3)$
18. $x-y+1=0$, $M(1;0)$, $M_1(0;2)$
19. $2x+y=0$, $M(-1;0)$, $M_1(0;2)$
20. $2x-y=0$, $M(2;0)$, $M_1(0;2)$
21. $x+y-2=0$, $M(2;-1)$, $M_1(3;1)$

Вопросы по темам раздела «Методы изображений»

1. Как определяется параллельное проектирование? Назовите его основные инварианты.
2. Какая фигура является изображением квадрата при параллельном проектировании?
3. Какая фигура является изображением правильной треугольной пирамиды при параллельном проектировании?
4. Какой метод построения чертежа называется аксонометрией?
5. В каком случае чертёж пространственной фигуры является полным?
6. Какие задачи теории изображений относятся к позиционным?

Вопросы по темам раздела «Обоснование евклидовой геометрии»

1. В каком случае говорят, что теория построена на основе аксиоматического метода?
2. Какие требования предъявляются к системам аксиом?
3. По какой причине требование независимости не является обязательным в аксиоматиках планиметрии и стереометрии в школьных учебниках?
4. В каком труде впервые была предпринята попытка аксиоматического обоснования геометрии?
5. Как формулируется пятый постулат Евклида?
6. В чём суть проблемы пятого постулата?
7. Какие группы аксиом лежат в основе обоснования Д.Гильбертом евклидовой геометрии.
8. Какую геометрию принято называть абсолютной геометрией?
9. В каком случае два утверждения называются эквивалентными относительно некоторой системы аксиом?
10. Приведите примеры утверждений, эквивалентных аксиоме параллельности Плейфера.
11. Как формулируются первые две аксиомы системы аксиом Вейля евклидова пространства?
12. Как определяется прямая в аксиоматике Вейля?

Вопросы по темам раздела «Элементы геометрии Лобачевского»

1. Как формулируется аксиома Лобачевского?
2. Какая система аксиом лежит в основе планиметрии Лобачевского?
3. Чему равна сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского?
4. Почему сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского не является постоянной величиной?
5. Какие прямые Лобачевский называет параллельными?
6. Чем отличаются сверхпараллельные прямые от параллельных на плоскости

Лобачевского?
7. Какие пучки прямых существуют на плоскости Лобачевского?
8. В каком случае две точки называются сопряжёнными относительно пучка прямых на плоскости Лобачевского?
9. Что такое траектория точки относительно пучка прямых на плоскости Лобачевского?
10. Как определяется эквидистанта на плоскости Лобачевского?
11. Как определяется орицикл на плоскости Лобачевского?
12. Какие модели системы аксиом плоскости Лобачевского вам известны?

**Тесты** по темам раздела «Обоснование евклидовой геометрии»

1. **Группа аксиом, содержащих основное отношение «принадлежности»**:
   **1) соединения**;
   2) параллельных;
   3) соответствия;
   4) непрерывности
   Правильный ответ: 1
2. **Группа аксиом, содержащих основное отношение «между»**:
   **1) порядка**
   2) связности
   3) сочетания
   4) метрики
   Правильный ответ: 1

*3*. Группа аксиом, содержащих основное понятие «равенство»:
   **1) конгруэнтности**
   2) принадлежности
   3) измеримости
   4) предшествования
   Правильный ответ: 1

*4*. Аксиома, эквивалентная пятому постулату Евклида:
   1) непрерывности
   **2) параллельности**
   3) конгруэнтности
   4) принадлежности
   Правильный ответ: 2

*5*. Название четырехугольника ABCD, в котором углы A и D прямые и AB=CD:
   1) Евклида
   2) Бельтрами
   **3) Саккери**
   4) Пуанкаре
   Правильный ответ: 3

*6*. Утверждение, эквивалентное аксиоме параллельности:

**1) около любого треугольника можно описать окружность**
2) в любой треугольник можно вписать окружность
3) сумма внутренних углов четырехугольника > 360°
4) через любую точку вне прямой проходит прямая, параллельная ей
Правильный ответ: 1

*7.* Доказательством непротиворечивости систем аксиом является существование в ней:

**1) модели заданной системы аксиом**
2) противоречащих друг другу аксиом
3) эквивалентных предложений
4) предложений, эквивалентных пятому постулату
Правильный ответ: 1

*8.* Метод, лежащий в основе построения математической теории:

1) аналитический
2) геометрический
3) эмпирический
**4) аксиоматический**
Правильный ответ: 4

*9.* Утверждение, эквивалентное аксиоме параллельности:

1) через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость
**2) прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и вторую**
3) не существует общего перпендикуляра для двух параллельных прямых
4) если углы одного квадрата равны углам другого квадрата, то квадраты равны
Правильный ответ: 2

*10.* Утверждение, эквивалентное аксиоме параллельности:

1) сумма углов треугольника < 180°
2) сумма углов треугольника > 180°
**3) теорема Пифагора**
4) теорема Паскаля
Правильный ответ: 3

*11.* Критерий, по которому система аксиом является независимой:

**1) ни одну из аксиом нельзя вывести из остальных аксиом системы**
2) в ней не существует противоречащих друг другу аксиом
3) в ней не существует эквивалентных предложений
4) ее нельзя пополнить другими эквивалентными аксиомами
Правильный ответ: 1

*12.* Критерий, по которому система аксиом является полной:

1) в ней нет исключающих друг друга положений
2) ни одна из аксиом не является следствием остальных

3) в ней нет зависимых предложений
**4) к ней нельзя добавить независимую от них аксиому**
Правильный ответ: 4

## Промежуточный контроль

### Вопросы к экзамену

1. Аксиоматический метод построения теории. Непротиворечивость системы аксиом. Критерий непротиворечивости. Примеры.
2. Независимость системы аксиом. Критерий независимости. Примеры независимых систем аксиом.
3. Полнота системы аксиом. Критерий полноты. Примеры полных и неполных систем аксиом.
4. «Начала» Евклида. Аксиоматический метод в «Началах» Евклида. Первые следствия из системы аксиом Евклида.
5. Группа аксиом соединения (принадлежности) Д. Гильберта, простейшие следствия группы аксиом соединения, непротиворечивость этой группы аксиом.
6. Группа аксиомы порядка Д. Гильберта. Простейшие следствия групп аксиом соединения и порядка.
7. Группы аксиом конгруэнтности и непрерывности Д. Гильберта. Простейшие следствия групп аксиом соединения, порядка, конгруэнтности и непрерывности.
8. Аксиома параллельности, простейшие следствия, эквивалентность аксиомы параллельности пятому постулату.
9. Система аксиом плоскости Лобачевского. Простейшие следствия о треугольниках и четырехугольниках на плоскости Лобачевского.
10. Параллельность прямых на плоскости Лобачевского, определение и простейшие следствия.
11. Свойства параллельных прямых на плоскости Лобачевского. Поведение параллельных прямых на бесконечности.
12. Угол параллельности, существование и единственность прямой перпендикулярной одной и параллельной другой стороне острого угла, свойства угла параллельности.
13. Сверхпараллельные (расходящиеся) прямые, определение, свойства и признаки сверхпараллельных прямых.
14. Пучки прямых на плоскости Лобачевского. Принадлежность одному пучку прямых серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Соответствующие точки пучков.
15. Траектория точки относительно пучка прямых на плоскости Лобачевского. Эквидистанта, некоторые свойства эквидистанты.

16. Траектория точки относительно пучка прямых на плоскости Лобачевского. Орицикл, некоторые свойства орицикла.
17. Непротиворечивость планиметрии Лобачевского. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Движения на модели Кэли-Клейна. Проверка некоторых аксиом первой, второй, третьей и пятой групп аксиом.
18. Расстояние между точками на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, свойства расстояний между точками. Проверка четвертой группы аксиом.
19. Величина угла на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, перпендикулярность прямых. Вывод формулы для угла параллельности.
20. Многомерные пространства. Система аксиом Вейля, непротиворечивость.

**Тесты**

по темам раздела «Элементы геометрии Лобачевского»

*1.* Угол параллельности на плоскости Лобачевского:

**1) острый**
2) тупой
3) прямой
4) развернутый
Правильный ответ: 1

*2.* Свойство S - суммы углов треугольника на плоскости Лобачевского:

**1) S < 2d**
2) S > 2d
3) S = 2d
4) S >= 2d
Правильный ответ: 1

*3.* Свойство S -суммы углов четырехугольника на плоскости Лобачевского:

1) S = 4d
2) S > 4d
**3) S < 4d**
4) S >= 4d
Правильный ответ: 3

*4.* Свойство внешнего угла $\alpha$ и внутренних, не смежных с ним углов $\beta$ и $\gamma$ треугольника в плоскости Лобачевского

1) $\alpha < \beta + \gamma$
**2)** $\boldsymbol{\alpha > \beta + \gamma}$
3) $\alpha = \beta + \gamma$
4) $\alpha \geq \beta + \gamma$
Правильный ответ: 2

*5.* Треугольники плоскости Лобачевского, у которых равны соответственные углы:

**1) равные**
2) подобные

3) прямоугольные
4) равнобедренные
Правильный ответ: 1

*6.* Свойство S - суммы углов четырехугольника Саккери в абсолютной геометрии:

1) S >= 4d
2) S > 4d
3) S = 4d
**4) S <= 4d**
Правильный ответ: 4

*7.* Углы B и C в четырехугольнике Саккери на плоскости Лобачевского, если углы A и D – прямые:

**1) острые**
2) тупые
3) прямые
4) различные
Правильный ответ: 1

*8.* Модель, которая является доказательством непротиворечивости геометрии Лобачевского:

1) Гильберта
2) Евклида
**3) Кели-Клейна**
4) Архимеда
Правильный ответ: 3

*9.* Взаимное расположение двух прямых на плоскости Лобачевского, перпендикулярных третьей прямой:

1) параллельны
**2) сверхпараллельны**
3) перпендикулярны
4) совпадают
Правильный ответ: 2

*10.* Название общей части геометрии Евклида и Лобачевского:

1) относительная
**2) абсолютная**
3) собственная
4) несобственная
Правильный ответ: 2

*11.* Фигура плоскости Лобачевского, которая является множеством точек, удаленных от прямой на данное расстояние и лежащих в одной полуплоскости относительно ее:

1) парабола
2) орицикл

**3) эквидистанта**
4) гипербола
Правильный ответ: 3

*12.* Результаты абсолютной геометрии, справедливые на плоскости Лобачевского:

**1) признаки равенства треугольников**
2) сумма углов треугольника < 2d
3) сумма углов четырехугольника < 4d
4) теорема о средней линии треугольника
Правильный ответ: 1

*13.* Изменение значения угла параллельности на плоскости Лобачевского при увеличении расстояния от точки до прямой:

1) не существует
2) увеличивается
3) не изменяется
**4) уменьшается**
Правильный ответ: 4

*14.* Верное утверждение на плоскости Лобачевского:

**1) через любые две точки проходит прямая**
2) через любые три точки проходит окружность
3) сумма углов треугольника равна 2d
4) существуют подобные неравные треугольники
Правильный ответ: 1

## Индивидуальные домашние / контрольные работы

**№1.** Построить на эпюре Монжа фронтальную и горизонтальную проекции сферы и многогранника, которые находятся друг по отношению к другу в заданном отношении. Используя эти проекции, построить ортогональную аксонометрию данных фигур (традиционное изображение фигур на листе бумаги рекомендуется сопроводить компьютерной версией чертежа, например, в одной из систем динамической математики):

1. В сферу вписан правильный тетраэдр.
2. В правильную треугольную призму вписана сфера.
3. Сфера описана около прямой призмы, основанием которой является прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой, равной высоте призмы.
4. В сферу вписана правильная шестиугольная призма, высота которой в два раза больше длины стороны основания.
5. Куб вписан в сферу.
6. Сфера описана около правильного октаэдра.
7. Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду, высота которой

## Самостоятельная работа
## Теорема Дезарга

1. Используя теорему Дезарга, доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
2. Используя теорему Дезарга, доказать, что если противоположные вершины параллелограмма расположены соответственно на противоположных сторонах второго, то оба параллелограмма имеют общий центр симметрии.

## Самостоятельная работа
## «Теоремы Паскаля и Брианшона»

1. Овальная линия задана пятью точками общего положения. Используя теорему Паскаля, построить шестую точку линии.
2. Овальная линия задана пятью точками общего положения. Используя теорему Паскаля (предельный случай), построить касательную в одной из данных точек.
3. Овальная линия задана тремя неколлинеарными точками и двумя касательными в двух из них. Используя теорему Паскаля (предельный случай), построить касательную в третьей точке.
4. Овальная линия задана пятью касательными. Используя теорему Брианшона, построить шестую касательную.
5. Овальная линия задана пятью касательными. Используя теорему Брианшона (предельный случай), построить точку касания одной из них.
6. Используя проективную модель аффинной плоскости доказать, что в параллелограмме диагонали делятся точкой пересечения пополам.

## Темы индивидуальных домашних заданий

1. Теорема Дезарга и ее приложения в системах динамической геометрии «GeoGebra» и «Живая геометрия».
2. Применение основных фактов проективной геометрии в решении задач элементарной математики.
3. Поддержка аналитической проективной геометрии с помощью систем динамической геометрии «GeoGebra» и «Живая геометрия».
4. Проективные и перспективные отображения прямых и пучков в системах динамической геометрии «GeoGebra» и «Живая геометрия».
5. Теорема Штейнера и ее приложения в системах динамической геометрии «GeoGebra» и «Живая геометрия».
6. Прямая и обратная теоремы Паскаля, их приложения и предельные случаи в системах динамической геометрии «GeoGebra» и «Живая геометрия».

7. Прямая и обратная теоремы Брианшона, их приложения и предельные случаи в системах динамической геометрии «GeoGebra» и «Живая геометрия».
8. Конечные модели проективных плоскостей, разработка соответствующих элективных курсов для старшеклассников.