

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования**  
**«Красноярский государственный педагогический университет  
им. В.П. Астафьева»**  
**(КГПУ им. В.П. Астафьева)**

## ПРЕДМЕТНАЯ ЧАСТЬ Геометрия

### рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой	<b>D10 Математики и методики обучения математике</b>		
Учебный план	44.03.01 Математика (з, 2026).plx 44.03.01 Педагогическое образование Направленность (профиль) образовательной программы Математика		
Квалификация	<b>бакалавр</b>		
Форма обучения	<b>заочная</b>		
Общая трудоемкость	<b>11 ЗЕТ</b>		
Часов по учебному плану	396	Виды контроля в семестрах:	
в том числе:			
аудиторные занятия	0		
самостоятельная работа	334		
контактная работа во время промежуточной аттестации (ИКР)	0		

**Распределение часов дисциплины по семестрам**

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	1 (1.1)		2 (1.2)		3 (2.1)		4 (2.2)		Итого	
	Неделя		Неделя		Неделя		Неделя			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	2	2	4	4	6	6	4	4	16	16
Практические	2	2	6	6	8	8	8	8	24	24
Контроль на промежуточную аттестацию (зачет)					0,15	0,15			0,15	0,15
Контроль на промежуточную аттестацию (экзамен)			0,33	0,33			0,33	0,33	0,66	0,66
Итого ауд.	4	4	10	10	14	14	12	12	40	40
Контактная работа	4	4	10,33	10,33	14,15	14,15	12,33	12,33	40,81	40,81
Сам. работа	68	68	53	53	126	126	87	159	334	406
Часы на контроль			8,67	8,67	3,85	3,85	8,67	8,67	21,19	21,19
<b>Итого</b>	<b>72</b>	<b>72</b>	<b>72</b>	<b>72</b>	<b>144</b>	<b>144</b>	<b>108</b>	<b>180</b>	<b>396</b>	<b>468</b>

Программу составил(и):

*дпн, Профессор, Майер Валерий Робертович; кпн, Доцент, Аёшина Екатерина Андреевна*

Рабочая программа дисциплины

разработана в соответствии с ФГОС ВО:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (приказ Минобрнауки России от 22.02.2018 г. № 121)

составлена на основании учебного плана:

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы Математика

утвержденного учёным советом вуза от 24.06.2026 протокол № 10 .

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры

Протокол от 06.05.2026 г. № 8

Зав. кафедрой Шашкина Мария Борисовна

Согласовано с представителями работодателей на заседании НМС УГН(С), протокол № 8 от 14.05.2026 г.

### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

освоение теоретических положений и математического аппарата разделов геометрии, имеющих приложения к понимаемому в широком смысле школьному курсу геометрии.

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Цикл (раздел) ОП:	Б1.О.07.01
<b>2.1</b>	<b>Требования к предварительной подготовке обучающегося:</b>
2.1.1	Школьный курс геометрии
2.1.2	Ознакомительная практика по профилю Математика
<b>2.2</b>	<b>Дисциплины (модули) и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:</b>
2.2.1	Элементарная математика
2.2.2	Профильное исследование в математике
2.2.3	Педагогическая практика
2.2.4	Дифференциальная геометрия

### 3. ФОРМИРУЕМЫЕ КОМПЕТЕНЦИИ И ИНДИКАТОРЫ ИХ ДОСТИЖЕНИЯ

**УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач**

**УК-1.2: Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности**

**Знать:**

Уровень 1	теоретические основы логического анализа рассуждений и методы логического обоснования выводов в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	теоретические основы логического анализа рассуждений и методы логического обоснования выводов в достаточном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	теоретические основы логического анализа рассуждений и методы логического обоснования выводов в неполном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)

**Уметь:**

Уровень 1	правильно самостоятельно применять логические формы и процедуры, осуществлять рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	применять логические формы и процедуры в достаточном объеме, осуществлять рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности допуская неточности (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	решать задачи по заданному алгоритму, частично осуществлять рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности (правильно выполнено более 60% заданий)

**Владеть:**

Уровень 1	навыками применения логических форм и процедур, рефлексивной деятельности в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	навыками применения логических форм и процедур, рефлексивной деятельности в достаточном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	навыками применения логических форм и процедур, рефлексивной деятельности в неполном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)

**ПК-1: Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач**

**ПК-1.1: Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)**

**Знать:**

Уровень 1	структуру, состав и дидактические единицы разделов геометрии в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	структуру, состав и дидактические единицы разделов геометрии в достаточном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	структуру, состав и дидактические единицы разделов геометрии в неполном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)

**Уметь:**

Уровень 1	правильно самостоятельно решать все типовые задачи геометрии (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	решать типовые задачи геометрии допуская неточности (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	решать простейшие типовые задачи геометрии по заданному алгоритму (правильно выполнено более 60% заданий)
<b>Владеть:</b>	
Уровень 1	навыками решения всех типовых задач геометрии (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	навыками решения типовых задач геометрии (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	навыками решения простейших типовых задач геометрии (правильно выполнено более 60% заданий)
<b>ПК-1.2: Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО</b>	
<b>Знать:</b>	
Уровень 1	теоретический материал разделов геометрии, имеющий отношение к школьному курсу геометрии в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	теоретический материал разделов геометрии, имеющий отношение к школьному курсу геометрии в полном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	теоретический материал разделов геометрии, имеющий отношение к школьному курсу геометрии в полном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)
<b>Уметь:</b>	
Уровень 1	правильно самостоятельно осуществлять отбор учебного содержания из разделов геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	правильно самостоятельно осуществлять отбор учебного содержания из разделов геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	правильно самостоятельно осуществлять отбор учебного содержания из разделов геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО (правильно выполнено более 60% заданий)
<b>Владеть:</b>	
Уровень 1	навыками дидактического анализа учебного содержания разделов геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	навыками дидактического анализа учебного содержания разделов геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в полном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	навыками дидактического анализа учебного содержания разделов геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в полном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)
<b>ПК-3: Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов</b>	
<b>ПК-3.1: Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.)</b>	
<b>Знать:</b>	
Уровень 1	межпредметные связи вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	межпредметные связи вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) в полном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	межпредметные связи вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) в полном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)
<b>Уметь:</b>	
Уровень 1	правильно самостоятельно применять способы интеграции содержания разделов вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)

	др.) (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	правильно самостоятельно применять способы интеграции содержания разделов вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	правильно самостоятельно применять способы интеграции содержания разделов вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) (правильно выполнено более 60% заданий)
<b>Владеть:</b>	
Уровень 1	навыками интеграции содержания разделов вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	навыками интеграции содержания разделов вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) в полном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	навыками интеграции содержания разделов вузовского курса геометрии и школьного курса геометрии для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) в полном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература и эл. ресурсы	Инте ракт.	Примечание
	<b>Раздел 1. Элементы векторной алгебры</b>						
1.1	Направленные отрезки и векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Линейная зависимость и независимость векторов, ее геометрический смысл. Векторное пространство. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов /Лек/	1	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.2	Направленные отрезки и векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Линейная зависимость и независимость векторов, ее геометрический смысл. Векторное пространство. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов /Пр/	1	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.3		индивидуальная домашняя работа
1.3	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	1	20	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
	<b>Раздел 2. Прямые и плоскости</b>						

2.1	Координаты точек на плоскости. Формулы преобразования аффинной и прямоугольной систем координат. Уравнения линий. Уравнение прямой на плоскости, ее расположение относительно системы координат, взаимное расположение двух прямых, метрические задачи на прямую. Координаты точек в пространстве. Уравнения линий и поверхностей. Уравнение плоскости. Взаимное расположение плоскости и системы координат, двух плоскостей. Уравнение прямой в пространстве, взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости. Метрические задачи. /Лек/	1	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.2	Координаты точек на плоскости. Формулы преобразования аффинной и прямоугольной систем координат. Уравнения линий. Уравнение прямой на плоскости, ее расположение относительно системы координат, взаимное расположение двух прямых, метрические задачи на прямую. Координаты точек в пространстве. Уравнения линий и поверхностей. Уравнение плоскости. Взаимное расположение плоскости и системы координат, двух плоскостей. Уравнение прямой в пространстве, взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости. Метрические задачи. /Пр/	1	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1			индивидуальная домашняя работа
2.3	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	1	24	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
	<b>Раздел 3. Линии второго порядка на плоскости. Поверхности вращения второго порядка.</b>						
3.1	Линии второго порядка (эллипс, гипербола, парабола). Приведение линий второго порядка к каноническому виду. Цилиндрические, конические поверхности. Поверхности вращения второго порядка. /Лек/	1	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
3.2	Линии второго порядка (эллипс, гипербола, парабола). Приведение линий второго порядка к каноническому виду. Цилиндрические, конические поверхности. Поверхности вращения второго порядка. /Пр/	1	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1			
3.3	Самостоятельная работа по теме раздела /Ср/	1	24	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
	<b>Раздел 4. Движения плоскости и пространства</b>						
4.1	Отображения и преобразования множества. Композиция и группа преобразований. Движения плоскости: перенос, поворот, осевая и скользящая симметрии. Примеры движений пространства. Свойства движений общего вида. /Лек/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		

4.2	Отображения и преобразования множества. Композиция и группа преобразований. Движения плоскости: перенос, поворот, осевая и скользящая симметрии. Примеры движений пространства. Свойства движений общего вида. /Пр/	2	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		самостоятельная работа
4.3	Представление движений плоскости в виде композиции осевых симметрий. Классификация движений первого рода (т. Шаля). Классификация движений второго рода. /Лек/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1			
4.4	Представление движений плоскости в виде композиции осевых симметрий. Классификация движений первого рода (т. Шаля). Классификация движений второго рода. /Пр/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1			
4.5	Геометрически равные фигуры и их свойства. Аналитическое задание движений. Группа движений и ее подгруппы. Группа симметрии фигуры. Решение задач методом движений, в том числе задач на построение циркулем и линейкой. /Лек/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
4.6	Геометрически равные фигуры и их свойства. Аналитическое задание движений. Группа движений и ее подгруппы. Группа симметрии фигуры. Решение задач методом движений, в том числе задач на построение циркулем и линейкой. /Пр/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1			самостоятельная работа
4.7	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	2	19	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
	<b>Раздел 5. Подобия</b>						
5.1	Гомотетия и ее свойства. Аналитическое задание гомотетии. Подобие плоскости и пространства. Свойства подобия. Аналитическое задание подобия. /Лек/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
5.2	Гомотетия и ее свойства. Аналитическое задание гомотетии. Подобие плоскости и пространства. Свойства подобия. Аналитическое задание подобия. /Пр/	2	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		самостоятельная работа
5.3	Представление подобия в виде композиции движения и гомотетии. Аналитическое задание подобия. Группа подобий и ее подгруппы. Подобные фигуры. Решение задач методом подобия, в том числе задач на построение циркулем и линейкой. /Лек/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
5.4	Представление подобия в виде композиции движения и гомотетии. Аналитическое задание подобия. Группа подобий и ее подгруппы. Подобные фигуры. Решение задач методом подобия, в том числе задач на построение циркулем и линейкой. /Пр/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
5.5	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	2	17	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
	<b>Раздел 6. Аффинные преобразования плоскости. Инверсия</b>						

6.1	Аффинные преобразования плоскости, свойства. Аффинные реперы и координаты. Теорема о задании аффинных преобразований парой реперов. Аналитическое задание аффинного преобразования. /Лек/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
6.2	Аффинные преобразования плоскости, свойства. Аффинные реперы и координаты. Теорема о задании аффинных преобразований парой реперов. Аналитическое задание аффинного преобразования. /Пр/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1			
6.3	Аффинный образ вектора, неподвижные точки и векторы. Родство, свойства родства. Представление аффинного преобразования композицией не более 2 родственных. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы. /Лек/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
6.4	Аффинный образ вектора, неподвижные точки и векторы. Родство, свойства родства. Представление аффинного преобразования композицией не более 2 родственных. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы. /Пр/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		индивидуальная домашняя работа
6.5	Инверсия. Построение инверсного образа точки. Аналитическое задание инверсии. Свойства инверсии. Построение образов окружностей и прямых при инверсии. Применение инверсий при решении задач элементарной геометрии. /Лек/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1			
6.6	Инверсия. Построение инверсного образа точки. Аналитическое задание инверсии. Свойства инверсии. /Пр/	2	0,5	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
6.7	Построение образов окружностей и прямых при инверсии. Применение инверсий при решении задач элементарной геометрии. /Пр/	2	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-3.1			
6.8	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	2	17	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
6.9	Экзамен /КРЭ/	2	0,33	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
6.10	/Экзамен/	2	8,67				
	<b>Раздел 7. Построения на плоскости циркулем и линейкой. Методы изображений</b>						
7.1	Аксиомы построения циркулем и линейкой. Основные построения. Схема решения задач на построение. Конструктивные множества/геометрические места точек. Метод конструктивных множеств (метод ГМТ, метод пересечений) при решении задач на построение. /Лек/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.2 Л1.4 Л1.5		

7.2	Аксиомы построения циркулем и линейкой. Основные построения. Схема решения задач на построение. Конструктивные множества/геометрические места точек. Метод конструктивных множеств (метод ГМТ, метод пересечений) при решении задач на построение. /Пр/	3	2	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.2 Л1.4 Л1.5		Самостоятельная работа
7.3	Алгебраический метод решения задач на построение. Критерий разрешимости задач на построение циркулем и линейкой. Задачи на построения, неразрешимые циркулем и линейкой. /Лек/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.2 Л1.4 Л1.5		
7.4	Алгебраический метод решения задач на построение. /Пр/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.2 Л1.4 Л1.5		Самостоятельная работа
7.5	Параллельное проектирование и его свойства. Изображение плоских и пространственных фигур при параллельном проектировании. Теорема Польке-Шварца. /Лек/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.2 Л1.4 Л1.5		
7.6	Параллельное проектирование и его свойства. Изображение плоских и пространственных фигур при параллельном проектировании. Теорема Польке-Шварца. /Пр/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.2 Л1.4 Л1.5		
7.7	Аксонометрия. Полные и неполные изображения. Позиционные задачи, понятие о методе Монжа /Лек/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1	Л1.2 Л1.4 Л1.5		
7.8	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	3	126	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
7.9	Зачет /КРЗ/	3	0,15	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
7.10	Центральное проектирование, проективная плоскость, ее модели. /Лек/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
7.11	Теорема Дезарга, обратная теорема, ее приложения /Лек/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
7.12	Теорема Дезарга, обратная теорема, ее приложения /Пр/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
7.13	Координаты точек и прямых, сложные отношения, гармонические четверки. /Пр/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
7.14	Проективные преобразования, гомология, проективные и перспективные отображения прямых и пучков. /Пр/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
7.15	Линии второго порядка, их пересечения с прямой, касательные, полюсы и поляры. Теоремы Штейнера, Паскаля и Бриансона /Пр/	3	1	УК-1.2 ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-3.1			
7.16	/Зачёт/	3	3,85				
	<b>Раздел 8. Обоснование евклидовой геометрии</b>						

8.1	О логическом построении геометрии. Требования к системе аксиом: непротиворечивость, независимость, полнота. Система аксиом проективной плоскости порядка 2 (плоскость Фано), ее непротиворечивость, независимость и полнота. /Лек/	4	1	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
8.2	О логическом построении геометрии. Требования к системе аксиом: непротиворечивость, независимость, полнота. Система аксиом проективной плоскости порядка 2 (плоскость Фано), ее непротиворечивость, независимость и полнота. /Пр/	4	1	ПК-1.1			тест
8.3	Попытка аксиоматического построения геометрии в Началах Евклида. Аксиомы и постулаты, простейшие следствия. Проблема пятого постулата. Метод ГМТ и алгебраический метод в задачах конструктивной геометрии /Пр/	4	1	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		индивидуальная домашняя работа
8.4	Развитие аксиоматического метода. Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии. Аксиомы соединения и порядка, следствия. /Лек/	4	0,5	ПК-1.1			
8.5	Развитие аксиоматического метода. Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии. Аксиомы соединения и порядка, следствия. /Пр/	4	0,5	ПК-1.1			
8.6	Аксиомы конгруэнтности и непрерывности. Абсолютная геометрия, теоремы Лежандра о сумме углов треугольника. Аксиома параллельности Плейфера и пятый постулат Евклида, предложения, эквивалентные аксиоме параллельности. /Лек/	4	0,5	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
8.7	Аксиомы конгруэнтности и непрерывности. Абсолютная геометрия, теоремы Лежандра о сумме углов треугольника. Аксиома параллельности Плейфера и пятый постулат Евклида, предложения, эквивалентные аксиоме параллельности. /Пр/	4	1	ПК-1.1			
8.8	Система аксиом Вейля аффинного и евклидова пространства, простейшие следствия, ее непротиворечивость. /Лек/	4	0,5	ПК-1.1			
8.9	Система аксиом Вейля аффинного и евклидова пространства, простейшие следствия, ее непротиворечивость /Пр/	4	0,5	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
8.10	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	4	80	УК-1.2 ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
	<b>Раздел 9. Элементы геометрии Лобачевского</b>						
9.1	Планиметрия Лобачевского. Аксиома Лобачевского, первые следствия. Свойства параллельных и сверхпараллельных прямых. /Лек/	4	0,5	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
9.2	Планиметрия Лобачевского. Аксиома Лобачевского, первые следствия. Свойства параллельных и сверхпараллельных прямых. /Пр/	4	0,5	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		тест

9.3	Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского. Окружность, эквидистанта и орицикл, их свойства. /Лек/	4	0,5	ПК-1.1			
9.4	Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского. Окружность, эквидистанта и орицикл, их свойства. /Пр/	4	1	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
9.5	Непротиворечивость системы аксиом Лобачевского. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Измерение отрезков и углов на модели Кели-Клейна. Угол параллельности. /Лек/	4	0,5	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
9.6	Непротиворечивость системы аксиом Лобачевского. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Измерение отрезков и углов на модели Кели-Клейна. Угол параллельности. /Пр/	4	0,5	ПК-1.1			
9.7	Обзор аксиоматик планиметрии и стереометрии в школьных учебниках. Понятие длины отрезка, площади многоугольника и объёма многогранника. /Пр/	4	2	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		индивидуальная домашняя работа
9.8	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	4	79	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
9.9	Экзамен /КРЭ/	4	0,33	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3		
9.10	/Экзамен/	4	8,67				

## 5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 5.1. Контрольные вопросы и задания

#### ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ

Самостоятельная работа

Тема: «Скалярное произведение векторов»

1. Вычислить скалярное произведение векторов по их координатам.
2. Вычислить углы треугольника по координатам его вершин.
3. Доказать перпендикулярность двух векторов.

Индивидуальная домашняя работа

Тема: «Векторы на плоскости»

1. Задан треугольник ABC координатами своих вершин. Найдите длины его сторон.
2. Вычислите координаты центра тяжести, ортоцентра и центра описанной окружности в треугольнике.
3. Постройте треугольник и все найденные точки в прямоугольной декартовой системе координат.

Индивидуальная домашняя работа

Тема: «Прямая на плоскости»

1. Задан треугольник ABC координатами своих вершин. Напишите уравнения всех его сторон.
2. Задан треугольник ABC координатами своих вершин. Напишите уравнения всех его медиан (биссектрис, высот).
3. Напишите уравнение окружности вписанной (описанной) в треугольник.

Самостоятельная работа

Тема: «Линии второго порядка»

1. Линия задана своим каноническим уравнением. Найдите: координаты точек пересечения с координатными осями; полуоси; эксцентриситет эллипса.
2. Напишите уравнение линии второго порядка по заданным элементам.
3. Приведите линию второго порядка к каноническому виду.

Индивидуальная домашняя работа

Тема: «Уравнения прямых и плоскостей»

1. Даны точки A, B, C, D координатами своих вершин в прямоугольной декартовой системе координат. Докажите, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.
2. Найдите площадь полной поверхности тетраэдра ABCD.
3. Напишите уравнения граней тетраэдра.

Самостоятельная работа

Тема: «Поверхности второго порядка»

1. Напишите каноническое уравнение поверхности второго порядка по определенным элементам.
2. Постройте поверхность второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат.
3. Определите вид поверхности по ее уравнению.

## Самостоятельная работа

Тема: «Движения»

1. Движение задано аналитически. Найдите образ (прообраз) данной точки.
2. Движение задано аналитически. Найдите образ данной окружности.
3. Движение задано аналитически. Найдите неподвижные точки.

## Самостоятельная работа

Тема: «Решение задач методом движения»

1. Окружность, вписанная в угол, касается его сторон в точках M и N. Докажите, что M и N – соответственные точки при осевой симметрии, ось которой содержит биссектрису данного угла.
2. ABCDEF – правильный шестиугольник. Назовите все движения, при которых отрезок AB отображается на отрезок DE.
3. Даны две пересекающиеся прямые и точка, не принадлежащая этим прямым. Постройте отрезок, концы которого принадлежат данным прямым, а данная точка – середина этого отрезка.

## Самостоятельная работа

Тема: «Подобия»

1. Постройте образ параллелограмма в гомотетии, центр которой – одна из вершин параллелограмма, а коэффициент задан отношением отрезков.
2. ABCD – параллелограмм. Через вершину C проведена прямая, параллельная диагонали BD и пересекающая продолжения сторон AB и AD в точках N и K. Докажите, что точка C – середина отрезка NK.
3. Постройте прямоугольный треугольник, если дан один из его острых углов и биссектриса, проведенная из вершины прямого угла.

## Индивидуальная домашняя работа

Тема: «Аффинные преобразования»

1. Родственное преобразование задано уравнением оси родства в аффинной системе координат. Постройте образы точек.
2. Определить вид родства.
3. Записать координатные формулы этого аффинного преобразования.

## Самостоятельная работа.

1. Поделить отрезок пополам.
2. Построить биссектрису угла.
4. Построить перпендикуляр к отрезку, проходящий через данную точку.

## Самостоятельная работа.

1. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведенной к основанию.
2. Построить ромб по стороне и диагонали.
3. построить трапецию по боковым сторонам, диагонали и разности оснований.

## Самостоятельная работа.

1. Построить круг, площадь которого в два раза больше площади данного круга.
2. Построить круг, площадь которого равна площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями.
3. Разделите треугольник прямой, параллельной одной из его сторон, на равновеликие части.

## Индивидуальная домашняя работа

Тема: "Методы изображений"

Построить на эшоре Монжа фронтальную и горизонтальную проекции сферы и многогранника, которые находятся друг по отношению к другу в заданном отношении. Используя эти проекции, построить ортогональную аксонометрию данных фигур (традиционное изображение фигур на листе бумаги рекомендуется сопроводить компьютерной версией чертежа, например, в одной из систем динамической математики):

1. В сферу вписан правильный тетраэдр.
2. В правильную треугольную призму вписана сфера.
3. Сфера описана около прямой призмы, основанием которой является прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой, равной высоте призмы.

## Индивидуальная домашняя работа

Тема: "Обоснование евклидовой геометрии"

Доказать, что следующее утверждение эквивалентно аксиоме параллельности:

1. Любые перпендикуляр и наклонная к некоторой прямой всегда пересекаются.
2. Через любую внутреннюю точку угла всегда можно провести прямую, пересекающую стороны угла и не проходящую через вершину.
3. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним.

Контрольная работа в форме теста

Тема: "Общие вопросы аксиоматики"

1. Группа аксиом, содержащих основное отношение «принадлежности»
2. Группа аксиом, содержащих основное отношение «между»
3. Группа аксиом, содержащих основное понятие «равенство»

Индивидуальная домашняя работа

Тема: "Аксиоматики школьного курса геометрии"

1. Изучить и сопоставить аксиоматику школьного курса геометрии по каждому из трех учебников: Л.С. Атанасян и др. Геометрия 7-9, 10-11 (последние издания); А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. Геометрия 7-9, 10-11 (последние издания); А. В. Погорелов. Геометрия 7-11.
2. Изучить и провести сопоставительный анализ доказательств теорем (по выбору) в каждом из указанных учебников (например: теорема Пифагора, признаки равенства треугольников и т.д.).
3. Итоги сравнительного анализа кратко изложить в заключении (в пределах 1 стр.)

Индивидуальная домашняя работа

Тема: "Длина, площадь, объём"

1. Изучить изложение темы «Площадь» по каждому из трех учебников: Л.С. Атанасян и др. Геометрия 7-9 (последние издания); А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. Геометрия 7-9 (последние издания); А. В. Погорелов. Геометрия 7-11.
2. Составить план изучения темы. Изучить и законспектировать доказательство теоремы о площади прямоугольника (квадрата).
3. Итоги сравнительного анализа кратко изложить в заключении (в пределах 1 стр.).

Самостоятельная работа в форме теста

Тема: "Элементы геометрии Лобачевского"

1. Угол параллельности на плоскости Лобачевского
2. Свойство суммы углов треугольника на плоскости Лобачевского
3. Свойство суммы углов четырехугольника на плоскости Лобачевского

## 5.2. Темы письменных работ

## 5.3. Фонд оценочных средств

Аналитическая геометрия и векторная алгебра

1. Направленные отрезки и векторы. Сложение векторов и его свойства. Разность двух векторов.
2. Умножение вектора на число и его свойства.
3. Системы линейно зависимых и линейно независимых векторов и их свойства. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.
4. Векторное пространство. Базис векторного пространства. Координаты вектора в данном базисе.
5. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Вычисление скалярного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе
6. Ориентация плоскости и пространства. Векторное произведение векторов и его свойства.
7. Смешанное произведение векторов и его свойства.
8. Координаты точек на плоскости и в пространстве. Решение простейших задач в координатах. Формулы преобразования аффинной и прямоугольной систем координат на плоскости. Формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве.
9. Уравнения линий и поверхностей.
10. Применение векторно-координатного метода к решению задач элементарной геометрии.
11. Уравнение прямой на плоскости, заданной разными способами. Условие параллельности вектора и прямой. Расположение прямой относительно системы координат
12. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
13. Аналитическое задание полуплоскости. Метрические задачи теории прямой на плоскости.
14. Уравнения плоскости, заданной различными способами. Взаимное расположение плоскости и системы координат. Взаимное расположение двух плоскостей.
15. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
16. Аналитическое задание полупространства. Метрические задачи теории прямых и плоскостей.
17. Приложение теории прямых и плоскостей к решению задач элементарной геометрии.
18. Эллипс, свойства эллипса.
19. Гипербола, свойства гиперболы.
20. Директориальное свойство эллипса и гиперболы
21. Парабола, свойства параболы.
22. Общее уравнение кривой второго порядка. Пересечение кривой второго порядка и прямой. Асимптотические направления.

23. Центры кривых второго порядка.
24. Касательные к кривым второго порядка. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.
25. Диаметры кривых второго порядка. Теорема о сопряженных диаметрах кривой второго порядка. Главные диаметры и главные направления кривой второго порядка.
26. Характеристическое уравнение кривой второго порядка Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка.
27. Поверхности второго порядка. Метод сечений.
28. Цилиндрические и конические поверхности в пространстве.
29. Поверхности вращения в пространстве.
30. Эллипсоиды и гиперболоиды, и их свойства.
31. Параболоиды и их свойства.
32. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

#### Геометрические преобразования

1. Отображения и преобразования множеств. Произведение (композиция) преобразований, группа преобразований.
2. Движения плоскости: параллельный перенос, вращение, осевая симметрия, скользящая симметрия, их свойства.
3. Свойства движений общего вида.
4. Основная теорема движений плоскости.
5. Геометрически равные фигуры и их свойства.
6. Аналитическое выражение движений плоскости. Группа движений плоскости и ее подгруппы. Группа симметрий геометрической фигуры.
7. Классификация движений плоскости первого рода. Теорема Шаля.
8. Классификация движений плоскости второго рода.
9. Гомотетия и ее свойства.
10. Подобия плоскости, свойства подобия. Классификация подобий плоскости. Группа подобий и ее подгруппы. Подобные фигуры.
11. Аффинные преобразования плоскости. Свойства аффинных преобразований плоскости
12. Основная теорема об аффинных преобразованиях плоскости.
13. Аналитическое выражение аффинных преобразований плоскости.
14. Перспективно-аффинные преобразования плоскости: свойства, виды.
15. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы.
16. Инверсия плоскости относительно окружности. Свойства инверсии. Аналитическое выражение инверсии плоскости.
17. Понятия о движениях пространства. Свойства движений пространства. Примеры движений пространства.
18. Приложение теории геометрических преобразований плоскости к решению задач элементарной геометрии.

#### Построения на плоскости циркулем и линейкой. Основания геометрии

1. Аксиомы построения циркулем и линейкой. Основные построения. Схема решения задач на построение
2. Конструктивные множества/геометрические места точек
3. Метод конструктивных множеств (метод ГМТ, метод пересечений) при решении задач на построение.
4. Применение свойств движений к решению задач на построение.
5. Применение свойств гомотетии и подобия к решению задач на построение.
6. Алгебраический метод решения задач на построение.
7. Применение свойств инверсии к решению задач на построение.
8. Критерий разрешимости задач на построение циркулем и линейкой.
9. Задачи на построения, неразрешимые циркулем и линейкой.

#### Методы изображения

1. Параллельное проектирование и его свойства. Понятие о центральном проектировании.
2. Изображение плоских фигур при параллельном проектировании.
3. Изображение многогранников при параллельном проектировании. Теорема ПолькеШварца.
4. Изображение круглых тел при параллельном проектировании.
5. Аксонометрия и ее свойства.
6. Полные и неполные изображения.
7. Решение позиционных задач на полных изображениях.
8. Понятие о методе Монжа.

#### Основания геометрии и элементы геометрии Лобачевского

1. Понятие об аксиоматическом методе. Требования, предъявляемые к системе аксиом. Непротиворечивость системы аксиом на примере аксиоматики Вейля.
2. Полнота и независимость системы аксиом на примере аксиоматики Вейля.
3. Система аксиом Гильберта и следствия из аксиом.
4. Построение евклидовой геометрии на основе аксиом Вейля
5. Непротиворечивость аксиоматики Гильберта.
6. Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности Плейфера.

7. Сумма углов треугольников и пятый постулат Евклида.
8. Первая и вторая теоремы Лежандра.
9. Предложения, эквивалентные аксиоме параллельности (существование треугольника, сумма углов которого равна двум прямым; существование четырехугольника, сумма углов которого равна четырем прямым; существование подобных, но неравных треугольников; коллинеарность трех точек, равноудаленных от прямой; возможность описать окружность вокруг любого треугольника; пересечение любого перпендикуляра к стороне острого угла со второй стороной).
10. Аксиома параллельности Лобачевского. Сумма углов треугольника и четырехугольника на плоскости Лобачевского. Признаки равенства треугольников на плоскости Лобачевского.
11. Параллельные прямые по Лобачевскому. Признак параллельности. Существование параллельных прямых по Лобачевскому. Угол параллельности и его свойства. Функция Лобачевского.
12. Свойства четырехугольников на плоскости Лобачевского.
13. Свойства параллельных прямых на плоскости Лобачевского. Расходящиеся прямые на плоскости Лобачевского: признак и свойства.
14. Окружность, эквидистанта и орицикл на плоскости Лобачевского и их свойства.
15. Интерпретация плоскости Лобачевского (модель Келли-Клейна на евклидовой плоскости, модель Пуанкаре на полуплоскости и др.). Непротиворечивость планиметрии Лобачевского. Независимость аксиомы параллельности Плейфера от остальных аксиом Гильберта.
16. Понятия длины отрезка, площади многоугольника и объема многогранника.
17. Обзор аксиоматик планиметрии и стереометрии, представленных в школьных учебниках.

#### 5.4. Перечень видов оценочных средств

### 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

#### 6.1. Рекомендуемая литература

##### 6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Кузовлев В. П.	Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии: учебное пособие	Москва: Физматлит, 2012
Л1.2	Будак Б. А., Золотарева Н. Д., Федотов М. В., Федотов М. В.	Геометрия: углубленный курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие	Москва: Лаборатория знаний, 2018
Л1.3	Барсукова Л. В.	Геометрия: практикум	Минск: РИПО, 2020
Л1.4	Далингер В. А.	Геометрия: планиметрические задачи на построение: учебное пособие для вузов	Москва: Юрайт, 2023
Л1.5	Воронина, Л. В.	Основы математики : Часть 2: учебное пособие	Екатеринбург : УрГПУ, 2015

##### 6.3.1 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства

Для освоения дисциплины необходим компьютер с графической операционной системой, офисным пакетом приложений, интернет-браузером, программой для чтения PDF-файлов, программой для просмотра изображений и видеофайлов и программой для работы с архивами.

##### 6.3.2 Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем

1. Elibrary.ru: электронная библиотечная система : база данных содержит сведения об отечественных книгах и периодических изданиях по науке, технологии, медицине и образованию. Адрес: <http://elibrary.ru>. Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.
2. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн». Адрес: <https://biblioclub.ru>. Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.
3. Электронно-библиотечная система издательства «ЛАНЬ». Адрес: [e.lanbook.com](http://e.lanbook.com). Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.
4. Образовательная платформа «Юрайт». Адрес: <https://urait.ru>. Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.
5. ИС Антиплагиат: система обнаружения заимствований. Адрес: <https://krasspu.antiplagiat.ru>. Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.

## 7. МТО (оборудование и технические средства обучения)

Перечень учебных аудиторий и помещений закрепляется ежегодным приказом «О закреплении аудиторий и помещений в

### 8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Сформулируем основные рекомендации по каждому разделу дисциплины:

Раздел № 1. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Чтобы успешно освоить материал данного раздела студентам необходимо:

- овладеть технологией использования векторного и координатного методов решения задач на построение и исследование прямых и линий второго порядка на плоскости, решения метрических задач по теме линии первого и второго порядка.
- овладеть технологией использования векторного и координатного методов решения задач на построение и исследование прямых и поверхностей первого и второго порядка в пространстве, решения метрических задач в пространстве.

В итоге изучения данного раздела студенты должны:

- владеть методами аналитической геометрии при решении планиметрических задач и стереометрических задач.

Раздел № 2. Преобразования плоскости и пространства.

В данном разделе студенты должны усвоить понятия отображения множества в множество, а также отображение множества на множество, уметь отличать их друг от друга. Знать определения: 1) преобразования множества; 2) обратное преобразование» 3) композиция преобразований. Должны хорошо знать определение движения, виды движений, свойства движений; уметь представлять всякое движение в виде композиции не более трех осевых симметрий, уметь различать движения первого и второго родов. В ходе решения задач студенты должны освоить основные построения, связанные с движениями, приобрести навыки построения образов и преобразованных точек и фигур при том или ином движении, уметь находить пары соответственных точек на соответствующих фигурах. важно, чтобы при решении задач студенты могли четко перечислять те свойства движений, которые ими были использованы при решении. студент должен уметь задать всякое движение аналитически.

Студенты должны знать определение подобия, свойства, аналитическое задание. Знать, что всякое подобие есть либо движение, либо гомотетия, либо композиция гомотетии и движения. Знать определение гомотетии, свойства, уметь строить соответственные элементы при различных заданиях гомотетии, знать, что основным понятием геометрии подобия являются понятие подобных фигур.

Знать определение аффинного преобразования, свойства, уметь задавать аффинное преобразование аналитически. Задав аффинное преобразование тремя парами соответственных точек, уметь строить соответственные элементы. Знать понятие родства, уметь строить соответствующие фигуры в родстве. Уметь строить эллипс по его сопряженным диаметрам, а также фигуру, родственную окружности. Уметь строить сечение призмы плоскостью, используя родство. Уметь отличать полный чертеж от неполного, знать достаточный признак полноты чертежа, уметь решать позиционные задачи на полном чертеже. Студенты должны знать определение метрически определенного чертежа, уметь решать задачи метрического характера, на метрически определенном чертеже.

Рекомендации по выполнению следующих контрольных мероприятий модуля, связанных с использованием информационных технологий:

- 1) Решение задач на применение движений в среде Живая математика. Для выполнения этого контрольного мероприятия необходимо хорошо знать возможности Живой математики по построению образов фигур под действием соответствующих движений плоскости, уметь создавать собственные движения, решать задачи на применение движений.
- 2) Решение задач на применение подобий в среде Живая математика. Для выполнения этого контрольного мероприятия необходимо хорошо знать возможности Живой математики по построению образов фигур под действием гомотетии и композиции движения и гомотетии, уметь создавать собственные подобия, решать задачи на применение подобий.

Раздел № 3. Построения циркулем и линейкой. методы изображения.

Чтобы успешно освоить материал данного раздела студентам необходимо: 1) завести свой словарь по геометрии, в котором систематизировать свойства и признаки основных понятий, связанных с такими объектами, как треугольник, параллелограмм, окружность; 2) чтобы успешно решать задачи на построение методом выделения вспомогательной фигуры, необходимо самостоятельно отработать основные построения с помощью циркуля и линейки; 3) метод пересечения множеств требует умения строить основные множества, поэтому необходимо отработать навыки построения этих множеств; 4) алгебраический метод решения задач на построение, как метод в школьном курсе геометрии не рассматривается. Однако построение некоторых отрезков, заданных формулами, присутствует в школьном курсе. Необходимо уметь строить отрезки, заданные формулами. Данный метод решения задач на построение позволяет ответить на вопрос: разрешима ли данная задача с помощью циркуля и линейки.

В итоге изучения данного раздела студенты должны: уметь решать задачи на построение, четко выделяя четыре этапа; уметь решать задачи на вычисление и доказательство; знать основные аффинные и метрические свойства треугольника, параллелограмма, четырехугольника и окружности; правильно строить изображения плоских и пространственных фигур;

Раздел № 4. Основания геометрии

Одним из основных понятий раздела является аксиоматический метод построения теории. Необходимо четко уяснить, что в

теории, которую предполагается построить на основе аксиоматического метода, должны быть чётко перечислены основные (неопределяемые) понятия. Никаких определений им давать не нужно. А вот все остальные понятия (производные) должны быть обязательно определены через основные понятия или понятия ранее определённые. Никаких понятий третьего вида быть не должно.

Основное содержание теории составляют утверждения о свойствах понятий. Их тоже разбивают на два вида. К первому виду относят те утверждения о свойствах понятий, которые принимаются без доказательства. Их называют аксиомами. Все остальные утверждения должны быть обязательно доказаны на основании аксиом и (или) ранее доказанных утверждений. Их называют теоремами, леммами или предложениями.

Основными требованиями, которые предъявляются к системам аксиом, на базе которых строится та или иная теория, являются непротиворечивость, независимость и полнота. Надо хорошо усвоить не только определение каждого из этих требований, но и знать критерии, используя которые можно выяснить, удовлетворяет ли та или иная система аксиом этим требованиям.

Чтобы разобраться в этом важном вопросе, необходимо актуализировать понятие модели (или интерпретации) системы аксиом. Говорят, что на базе некоторой известной теории построена модель системы аксиом, если в этой теории удалось придать конкретный смысл основным понятиям, о которых идёт речь в аксиомах, в результате чего все аксиомы исследуемой системы оказались выполненными.

Обязательным требованием к любой системе аксиом является её непротиворечивость, которая означает, что из этой системы аксиом нельзя вывести два противоречащих друг другу утверждения. Критерием непротиворечивости системы аксиом является наличие у этой системы модели, построенной на базе либо непротиворечивой теории, либо теории, непротиворечивость которой подтверждена длительной практикой.

Следующим требованием, которое не является обязательным, это требование независимости системы аксиом. Это естественное требование возникает из потребности минимизировать список аксиом. Систему аксиом называется независимой, если ни одну из аксиом этой системы нельзя вывести из остальных аксиом как теорему. Можно доказать, что система аксиом независима, если для любой её аксиомы новая система, полученная заменой в данной системе этой аксиомы на её логическое отрицание, будет непротиворечивой. Это и есть критерий независимости системы аксиом. Из методических соображений система аксиом в большинстве школьных учебников по геометрии не является независимой.

Последним требованием, которое в большинстве современных математических теорий (например, в теории групп, в конечных геометриях) не выполняется, это требование полноты системы аксиом. Система аксиом называется полной, если к ней нельзя добавить ни одного утверждения, претендующего на роль новой аксиомы, которое нельзя вывести как теорему из этих аксиом, и которое вместе с данными аксиомами образует непротиворечивую систему. Критерием полноты системы аксиом является изоморфизм всех её моделей.

Изучение попыток аксиоматического построения геометрии, предпринятого Евклидом в его 13 книгах «Начала», рекомендуется провести по следующей схеме: сформулировать некоторые определения, с которых начинается первая его книга, перечислить постулаты и некоторые аксиомы, доказать теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, познакомиться с проблемой пятого постулата.

Рассматривая обоснование евклидовой геометрии по Д.Гильберту, сформулировать аксиомы первой группы соединения, обосновать непротиворечивость этой группы аксиом, построив её дискретную модель. Обратит особое внимание на те его утверждения, которые имеют аналоги в школьном курсе геометрии. Рекомендуется, например, разобраться с доказательством теоремы о том, что каждой плоскости принадлежит, по меньшей мере, три неколлинеарные (не лежащие на одной прямой) точки.

Рассматривая вторую группу аксиом порядка Д.Гильберта, рекомендуется обратить особое внимание на основное понятие, свойства которого описываются в аксиомах этой группы. Проанализировать доказательство «очевидных» на первый взгляд теорем, например теоремы о том, что никакая прямая не может пересечь все стороны треугольника в их внутренних точках.

Завершается построение системы аксиом абсолютной геометрии группой аксиом конгруэнтности (5 аксиом) и группой аксиом непрерывности (2 аксиомы). С помощью аксиом этих групп удаётся не только определить измерение длин отрезков и площадей многоугольников, но и доказать теоремы (например, первая и вторая теоремы Лежандра), связанные с измерением суммы внутренних углов треугольника. Отметим, что система аксиом абсолютной геометрии не является полной, в аксиоматике Гильберта она состоит из 19 аксиом

Дальнейшее развитие теории во многом зависит от того, какую дополнительную аксиому в качестве двадцатой мы добавим к системе аксиом абсолютной геометрии. Если этой аксиомой будет аксиома параллельности Плейфера (через точку, не лежащую на прямой, в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, можно провести не более одной прямой, не пересекающей данную прямую), то мы получим хорошо знакомую нам по школьному курсу геометрии евклидову геометрию.

Если же в качестве двадцатой аксиомы мы добавим к абсолютной геометрии аксиому Лобачевского (существуют прямая и точка, ей не принадлежащая, что через эту точку проходит не менее двух прямых, не пересекающих данную прямую и лежащих с ней в одной плоскости), то мы получим геометрию Лобачевского. При изучении раздела «Элементы геометрии

Лобачевского» рекомендуется особое внимание обратить на определение параллельных и расходящихся (сверхпараллельных) прямых, их свойства. Такое разнообразие во взаимном расположении прямых приводит к трём пучкам прямых: пучок пересекающихся прямых, пучок параллельных прямых и пучок сверхпараллельных прямых. Рассматривая траекторию точки относительно первого пучка, мы получим знакомую нам окружность, относительно второго пучка – орицикл, относительно третьего пучка – эквидистанту (линию равных расстояний).

Завершается раздел обзором аксиоматик планиметрии и стереометрии в школьных учебниках, аксиоматическим подходом к определению понятия длины отрезка, площади многоугольника и объёма многогранника. Отметим, что в модуле будет рассмотрен более короткий путь обоснования евклидовой геометрии, предложенный Германом Вейлем. В основу этого подхода будет положен вектор и операции над векторами, а геометрическая часть системы аксиом Вейля будет состоять всего из двух аксиом: аксиомы откладывания вектора и аксиомы треугольника.