МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики
(наименование института/факультета)
Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕНО

На заседании кафедры
Протокол № 8 от «06» мая 2026
Шашкина Мария Борисовна
ФИО зав. кафедрой

ОДОБРЕНО

На заседании научно-методического совета специальности (направления подготовки)
Протокол № 8 от 14 мая 2026

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся

по дополнительным главам алгебры

наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) «математика» и «информатика»
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию
«Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составитель: С.И. Калачева, доцент
(ФИО, должность)

Работа 1. В-1

1. Образует ли группу множество G относительно указанной операции? Доказать.
   1) $G = \langle \{3z \mid z \in Z\}, + \rangle$; 2) $G = \langle \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in 2Z\}, + \rangle$;
   3) $G = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Q, a \neq 0, b \neq 0 \right\}, \bullet \right\rangle$.
2. Будет ли множество $G = \{(a,b) \mid a,b \in Q, b \neq 0\}$ группой относительно операции $(a,b) \cdot (c,d) = (a + bc, bd)$?
3. Доказать, что пересечение двух подгрупп является подгруппой.
4. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 16 найти
   - порядок элемента a^2;
   - подгруппу $H = \langle a^2 \rangle$;
   - доказать, что $H < G$ и построить фактор-группу G/H.
5. Записать элементы смежного класса $(123)\langle(23)\rangle$ в группе S_3.
6. Приведите пример группы, содержащей подгруппу порядка 5 индекса 3. Приведите пример группы с бесконечной подгруппой индекса 2, выпишите ее фактор-группу.
7. Доказать, что порядки взаимно обратных элементов равны. Доказать, что порядки сопряженных элементов равны.

Работа 1. В-2

1. Образует ли группу множество G относительно указанной операции? Доказать.
   1) $G = \langle \{nz \mid z \in Z\}, + \rangle$; 2) $G = \langle \{1, -1, i, -i\}, \bullet \rangle$;
   3) $G = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in Q, a \neq 0, b \neq 0 \right\}, \bullet \right\rangle$.
2. Будет ли множество $G = \{(a,b) \mid a,b \in Q, b \neq 0\}$ группой относительно операции $(a,b) \cdot (c,d) = (a + bc, b + d)$?
3. Доказать, что подгруппа циклической группы - циклическая.
4. Описать все подгруппы и фактор-группы циклической подгруппы порядка 14.
5. Записать элементы смежного класса $(123)\langle(134)\rangle$ в группе S_4.
6. Приведите пример группы, содержащей подгруппу порядка 6 индекса 3. Приведите пример группы с бесконечной подгруппой индекса 3, выпишите ее фактор-группу.
7. Доказать, что порядки взаимно обратных элементов равны. Доказать, что порядки сопряженных элементов равны.

Работа 2.

1. Доказать, что множество всех квадратных матриц над полем P одинаково порядка образует кольцо.
2. Построить автоморфизм кольца целых гауссовых чисел $Z[i]$ (с доказательством).
3. Избавиться от иррациональности в знаменателе $\dfrac{1}{\sqrt[3]{36} - 2\sqrt[3]{6} - 1}$.
4. Доказать, что число 4 простое в кольце $Z[i]$.
5. Доказать, что $\dfrac{3 + \sqrt[3]{6}}{2}$ алгебраический элемент над полем Q. Найти минимальный многочлен и степень этого элемента над Q. Как устроено расширение $Q\left(\dfrac{3 + \sqrt[3]{6}}{2}\right)$? Верно ли, что $Q\left(\dfrac{3 + \sqrt[3]{6}}{2}\right) = Q\left(\sqrt[3]{6}\right)$?

Экспресс-опрос

1. Бинарная алгебраическая операция на множестве.
2. Группа.
3. Порядок группы.
4. Свойства группы.
5. Подгруппа.
6. Признак подгруппы.
7. Аддитивная группа.
8. Мультипликативная группа.
9. Изоморфизм групп.
10. Изоморфные группы.
11. Циклическая группа.
12. Порядок элемента.
13. Подгруппа циклической группы.
14. Смежный класс.
15. Свойства смежных классов.
16. Теорема Лагранжа.
17. Нормальная подгруппа.
18. Признак нормальной подгруппы.
19. Фактор группа.
20. Гомоморфный образ группы.
21. Ядро гомоморфизма.
22. Нормальные делители и ядра гомоморфизмов.
23. Теорема о гомоморфном образе группы.
24. Кольца
25. свойства кольца.
26. Делители нуля.
27. Подкольцо.
28. Признак подкольца.
29. Правила знаков.
30. Область целостности.
31. Делимость к кольце.
32. Свойства делимости.
33. Делители единицы (обратимые элементы).
34. Ассоциированные элементы кольца К.
35. Простой элемент.
36. Составной элемент.
37. Евклидово кольцо.
38. Идеал кольца.
39. Главный идеал.
40. Кольцо главных идеалов.
41. Изоморфизм колец.
42. Изоморфные кольца.
43. Гомоморфизм колец.
44. Фактор-кольцо.
45. Ядро гомоморфизма.
46. Связь между ядром гомоморфизма кольца и его идеалом.
47. Поле, подполе.
48. Свойства поля.
49. Расширение поля.
50. Алгебраическое расширение.
51. Минимальный многочлен.

52. Разрешимость уравнения в квадратных радикалах.
53. Разрешимость кубического уравнения в квадратных радикалах.
54. Три знаменитые задачи древности.
55. Алгебраические числа. Поле алгебраических чисел.
56. Трансцендентные числа.

Вопросы к зачету

1. Бинарная алгебраическая операция. Группа, основные свойства. Аддитивная и мультипликативная группы. Абелева группа.
2. Подгруппа. Решетка группы.
3. Порядок элемента группы. Порядок группы. Циклическая группа, подгруппа циклической группы.
4. Таблица Кэли. Порождающие элементы и определяющие соотношения.
5. Смежные классы: определение, примеры, основные свойства, разбиение группы на смежные классы.
6. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Примеры применения.
7. Нормальная подгруппа: определение, примеры. Сопряженные элементы. Признак нормальной подгруппы.
8. Фактор-группа. Фактор-группа циклической группы.
9. Изоморфизм групп. Изоморфизм бесконечных и конечных циклических групп.
10. Гомоморфизм групп. Ядро гомоморфизма. Теорема о гомоморфизме. (без доказательства)
11. Кольцо. Подкольцо.
12. Идеал кольца, фактор-кольцо по идеалу.
13. Изоморфизм колец.
14. Гомоморфизм колец, ядро гомоморфизма. Теорема о гомоморфизме колец (без доказательства).
15. Область целостности. Обратимые элементы. Делимость в области целостности.
    Простые элементы области целостности.
    Ассоциированные элементы: определение, примеры. Отношение ассоциированности является отношением эквивалентности. НОД в области целостности.
16. Евклидово кольцо: определение, примеры. Основные свойства простых элементов евклидова кольца. Разложение на простые множители в евклидовом кольце (теорема о факторизации).
17. Главный идеал: определение, примеры. Кольцо главных идеалов.
18. Поле. Расширения колец и полей. Поле отношений области целостности.
19. Алгебраические и трансцендентные элементы. Минимальный многочлен алгебраического элемента и его свойства. Освобождение от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби.
20. Алгебраические расширения. Алгебраичность конечного расширения поля. Простые расширения. Простые алгебраические расширения.