МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики

Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО	ОДОБРЕНО
На заседании кафедры	на заседании НМСС(Н) ИМФИ
Протокол № 8 от «06» мая 2026	протокол № 8 от 14 мая 2026
Зав кафедрой М.Б. Шашкина	Председатель Е.А. Аёшина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся

по дополнительным главам математического анализа

наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки) Математика и дополнительное образование
(экономика и финансовая грамотность)
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию
«Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составитель: М.Б. Шашкина, доцент
(ФИО, должность)
Н.А. Журавлева, доцент
(ФИО, должность)

Красноярск 2026

Фонд оценочных средств по дисциплине «Дополнительные главы математического анализа»

Тест входного контроля

1. Формула $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x<0, \\ x+1, & \text{если } 0<x\le 2, \\ x^2, & \text{если } x\ge 2 \end{cases}$ задает функцию на:

а) $(-\infty;\ 0]$;
б) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 2]$;
в) $[2;\ +\infty)$;
г) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

2. Число a называется пределом числовой последовательности x_n, если

а) для $\varepsilon=\frac{1}{2}$ существует такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$;
б) для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$;
в) для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что для всех четных $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$;
г) для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $x_n<a+\varepsilon$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}$ равен: а) 0; б) 2; в) 4; г) 1.

4. Функция f, определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если:
а) существует $\varepsilon>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;
б) для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$ и такие x, что из неравенства $|x-x_0|<\delta$ следует справедливость неравенства $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;
в) для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x<x_0+\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;
г) для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

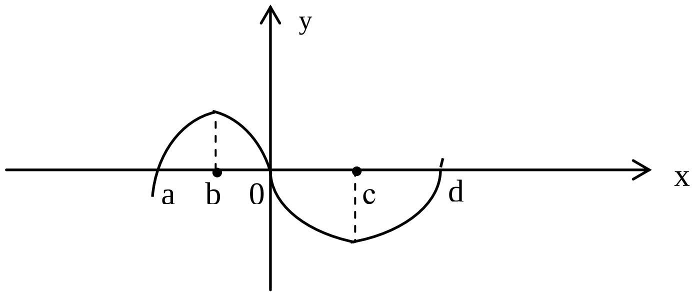
5. Функция $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{если } x<0, \\ 2x, & \text{если } 0\le x\le 1, \\ 4x-2, & \text{если } x>1 \end{cases}$

а) имеет две точки разрыва;
б) непрерывна в области определения;

в) имеет точку разрыва второго рода;
г) имеет точку разрыва первого рода.

6. Каким условием является непрерывность функции для ее дифференцируемости?
а) необходимым и достаточным; в) необходимым;
б) достаточным; г) ни необходимым, ни достаточным.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Производная этой функции $y' = 0$ в точках
а) a,o,d;
б) b,c;
в) b,o,c;
г) a,b,c,d.



8. Угловой коэффициент касательной, проведенный к кривой $y=\dfrac{2x+1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ равен: а) 0; б) 1; в) –1; г) 3.

9. Дифференциал функции $y = \arcsin 2x$ равен
а) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; б) $\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $\dfrac{dx}{2\sqrt{1-4x^2}}$; г) $\dfrac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. В какой точке функция $y = x^2 \cdot e^{-x}$ имеет минимум?
$а)\left(-2;\ 4e^2\right)$; $б)\left(1;\ \dfrac{1}{e}\right)$; $в)\left(2;\ \dfrac{4}{e^2}\right)$; $г)\left(0;\ 0\right)$.

11. Первообразной для функции $y = ctg\ x$ в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ является функция
а) $y = -\ln\cos x$; б) $y = \ln\cos x$; в) $y = \ln\sin x$; г) $y=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

12. В семействе интегральных кривых функции $y=\sqrt{x}$ через точку М(9;18) проходит кривая
а) $y=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$; $б)\ y=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{56}{3}$; $в)\ y=x\sqrt{x}-9$; $г)\ y=\sqrt{x}+15$.

13. Для интегрируемости функции на отрезке условие ее непрерывности на нем является:
а) необходимым; б) необходимым и достаточным;
в) достаточным; г) ни необходимым, ни достаточным.

14. Площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = x$ от параболы $y = 2x - x^2$ равна
$а)\dfrac{2}{3}$; $б)\dfrac{1}{6}$; $в)\dfrac{5}{6}$; $г)\dfrac{9}{2}$.

15.Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$, где a_0 и q фиксированные действительные числа сходится, если:

а) $q = \pm 1$; в) $|q| < 1$;
б) $|q| > 1$; г) расходится при всех q.

16. Сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ равна:

а) $+\infty$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 2.

17. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$ равен:

а) $\frac{1}{3}$; б) 3; в) $+\infty$; г) 0.

18. Если у ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то верно утверждение:

а) ряд сходится; б) ряд расходится;
в) ничего определенного о сходимости или расходимости ряда сказать нельзя;
г) сумма ряда может равняться нулю.

Проверочная работа № 1 по разделу «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

1. Найти частные производные и дифференциал функции $z = \frac{x^3 + y^2}{x} \cdot arctg\, \frac{x}{y}$ в точке (1;1).

2. $U(x, y) = \ln\cos\frac{xy}{x+y}$, $x = t + s$. *Найти* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$z = x^3 + y + 2x - 3y$ в точке (0;0;0).

4. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{x+2y}(x^2-y^2)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y - 3 = 0$.

6. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $f(x,y) = x^2y^2$ в точке (2,2), если $\Delta x = 0{,}01$ и $\Delta y = -0{,}02$, сравнить их.

Проверочная работа № 2 по разделу «*Интегральное исчисление функций нескольких переменных*»

1. Изменить порядок интегрирования и построить область интегрирования:

   $а)\ \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$; $б)\ \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить интегралы:

   $а)\ \iint_D \sin(x+y)dxdy,\ D: y=0, y=x, x+y=\dfrac{\pi}{2}$;

   $б)\ \int_L (xy-y^2)dx + xdy,\ \ L:$ дуга параболы $y=2x^2$ от A(0;0) до B(1;2).

3. С помощью формулы Грина преобразовать данный криволинейный интеграл к двойному (не вычислять): $\oint_L \dfrac{\ln x}{x}\cdot y^2 dx + (x^2\ln y + \ln^2 x)dy$.
4. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями: $x + y = 6$, $y = \sqrt{3x}$, $z = 4y$, $z = 0$.
5. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь фигуры, лежащей в первой координатной четверти и ограниченной частью эллипса: $x = 3\cos t,\ \ y = 2\sin t$.

Индивидуальное задание по разделу «Ряды Фурье»

Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье в интервале (-π; π)

1. $f(x) = x + 1.$

2. $f(x) = 5x + 2.$

3. $f(x) = 7 - \dfrac{3}{2}x.$

4. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}.$

5. $f(x) = 9 - 4x.$

6. $f(x) = x^2.$

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

8. $f(x) = |x|.$

9. $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ -2, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

11. $f(x) = |\sin x|.$

12. $f(x) = \sin a\, x.$

13. $f(x) = \cos a\, x.$

Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на отрезке [-π; π].

14. $f(x) = x^2.$

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

16. $f(x) = |x|$.

17. $f(x)=\begin{cases} -\pi - x, & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

19. Функцию $f(x) = x$ разложить в ряды Фурье на отрезке $[0; \pi]$ по синусам и по косинусам.

20. Функцию $f(x)=\dfrac{\pi - x}{2}$ разложить в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по синусам.

21. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье в промежутке $[0; \pi)$ по синусам.

Функцию $y = f(x)$ разложить в ряд Фурье в указанном промежутке.

22. $f(x) = x^2 + 1$, $(-2; 2)$.

23. $f(x) = |x| + 1$, $(-1; 1)$

24. $f(x) = 10 - x$, $(5; 15)$.

25. $f(x) = |1 - x|$, $(-2; 2)$.

26. $f(x) = x - 1$, $(-1; 1)$.

27. $f(x) = x^2$, $(0; 2\pi)$.

28. $f(x) = e^x$, $(-e; e)$.

29. Разложить в ряд Фурье по синусам и по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

30. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{e}{2}, \\ e - x, & \dfrac{e}{2} \le x \le e. \end{cases}$$

Написать формулу Парсеваля.

Вопросы к зачету

1. Понятие функций нескольких переменных. Предел функций двух переменных.
2. Понятие непрерывности функций двух переменных, непрерывность сложной функции. Основные теоремы о непрерывных функциях двух переменных.
3. Определение частной производной. Теорема смешанных производных.
4. Производные сложных функций нескольких переменных.
5. Полное приращение и полный дифференциал функций двух переменных.
6. Дифференциалы высших порядков, нарушение инвариантности их формы.
7. Задача об объеме цилиндрического тела.

8. Понятие о двойном интеграле, его геометрический смысл.
9. Условия существования и свойства двойного интеграла.
10. Вычисление двойных интегралов (случай прямоугольной и криволинейной области).
11. Замена переменных в двойных интегралах.
12. Двойной интеграл в полярных координатах.
13. Понятие о тройных интегралах и их вычисление.
14. Криволинейные интегралы по координатам, свойства криволинейного интеграла.
15. Вычисление криволинейных интегралов.
16. Приложение криволинейного интеграла к вычислению площади плоской фигуры. Примеры.
17. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
18. Связь двойного и криволинейного интеграла. Формула Грина-Остроградского.
19. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.
20. Задача о разложении функции в ряд по данной ортогональной системе функций. Ряд Фурье.
21. Сходимость ряда Фурье. Теорема Дирихле.