

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Красноярский государственный педагогический университет  
им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики

Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО

На заседании кафедры  
Протокол № 8 от «06» мая 2026  
Зав кафедрой М.Б. Шашкина

ОДОБРЕНО

на заседании НМСС(Н) ИМФИ  
протокол № 8 от 14 мая 2026  
Председатель Е.А. Аёшина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации обучающихся

по дополнительным главам математического анализа

---

наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование  
(с двумя профилями подготовки) Математика и информатика  
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию  
«Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составитель: М.Б. Шашкина, доцент  
(ФИО, должность)

Н.А. Журавлева, доцент  
(ФИО, должность)

Красноярск 2026

**Фонд оценочных средств по дисциплине  
«Дополнительные главы математического анализа»**

**Тест входного контроля**

1. Формула  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ x + 1, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x^2, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$  задает функцию на:

- а)  $(-\infty; 0]$ ;
- б)  $(-\infty; 0) \cup (0; 2]$ ;
- в)  $[2; +\infty)$ ;
- г)  $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$ .

2. Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $x_n$ , если

а) для  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  существует такой номер  $n_0$ , что для всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$

б) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n_0$ , что для всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ ;

в) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n_0$ , что для всех четных  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ ;

г) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n_0$ , что для всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $x_n < a + \varepsilon$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{1 - \cos x}$  равен: а) 0; б) 2; в) 4; г) 1.

4. Функция  $f$ , определенная в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если:

а) существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;

б) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$  и такие  $x$ , что из неравенства  $|x - x_0| < \delta$  следует справедливость неравенства  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;

в) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x < x_0 + \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;

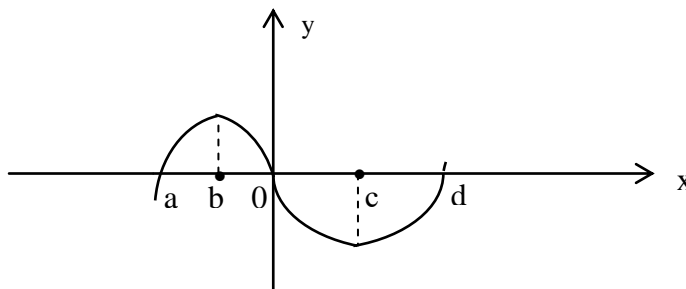
г) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , справедливо неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

5. Функция  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 4x - 2, & \text{если } x > 1 \end{cases}$

- а) имеет две точки разрыва;
- б) непрерывна в области определения;

- в) имеет точку разрыва второго рода;  
 г) имеет точку разрыва первого рода.
6. Каким условием является непрерывность функции для ее дифференцируемости?  
 а) необходимым и достаточным;                      в) необходимым;  
 б) достаточным;    г) ни необходимым, ни достаточным.

7. На рисунке изображен график функции  $y=f(x)$ . Производная этой функции  $y' = 0$  в точках  
 а)  $a, o, d$ ;  
 б)  $b, c$ ;  
 в)  $b, o, c$ ;  
 г)  $a, b, c, d$ .



8. Угловым коэффициентом касательной, проведенной к кривой  $y = \frac{2x+1}{x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = -1$  равен: а) 0; б) 1; в) -1; г) 3.

9. Дифференциал функции  $y = \arcsin 2x$  равен  
 а)  $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ ;    б)  $\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ ;    в)  $\frac{dx}{2\sqrt{1-4x^2}}$ ;    г)  $\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

10. В какой точке функция  $y = x^2 \cdot e^{-x}$  имеет минимум?

- а)  $(-2; 4e^2)$ ;    б)  $(1; \frac{1}{e})$ ;    в)  $(2; \frac{4}{e^2})$ ;    г)  $(0; 0)$ .

11. Первообразной для функции  $y = \operatorname{ctg} x$  в интервале  $(0; \frac{\pi}{2})$  является функция

- а)  $y = -\ln \cos x$ ;    б)  $y = \ln \cos x$ ;    в)  $y = \ln \sin x$ ;    г)  $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

12. В семействе интегральных кривых функции  $y = \sqrt{x}$  через точку  $M(9;18)$  проходит кривая

- а)  $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$ ;    б)  $y = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{56}{3}$ ;    в)  $y = x\sqrt{x} - 9$ ;    г)  $y = \sqrt{x} + 15$ .

13. Для интегрируемости функции на отрезке условие ее непрерывности на нем является:

- а) необходимым;    б) необходимым и достаточным;  
 в) достаточным;    г) ни необходимым, ни достаточным.

14. Площадь сегмента, отсекаемого прямой  $y = x$  от параболы  $y = 2x - x^2$  равна

- а)  $\frac{2}{3}$ ;    б)  $\frac{1}{6}$ ;    в)  $\frac{5}{6}$ ;    г)  $\frac{9}{2}$ .

15. Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ , где  $a_0$  и  $q$  фиксированные действительные числа сходится, если:

- а)  $q = \pm 1$ ;      в)  $|q| < 1$ ;  
б)  $|q| > 1$ ;      г) расходится при всех  $q$ .

16. Сумма ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  равна:

- а)  $+\infty$ ;      б)  $\frac{1}{2}$ ;      в) 1;      г) 2.

17. Радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$  равен:

- а)  $\frac{1}{3}$ ;      б) 3;      в)  $+\infty$ ;      г) 0.

18. Если у ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то верно утверждение:

- а) ряд сходится;      б) ряд расходится;  
в) ничего определенного о сходимости или расходимости ряда сказать нельзя;  
г) сумма ряда может равняться нулю.

**Проверочная работа № 1 по разделу «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»**

1. Найти частные производные и дифференциал функции  $z = \frac{x^3 + y^2}{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  в точке (1;1).

2.  $U(x, y) = \ln \cos \frac{xy}{x+y}$ ,  $x = t + s$ . Найдите  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial s}$ .

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^3 + y + 2x - 3y \text{ в точке } (0;0;0).$$

4. Исследовать на экстремум функцию  $z = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$ .

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y$  в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой  $x + y - 3 = 0$ .

6. Найти полное приращение и полный дифференциал функции  $f(x, y) = x^2 y^2$  в точке (2,2), если  $\Delta x = 0,01$  и  $\Delta y = -0,02$ , сравнить их.

## Проверочная работа № 2 по разделу «Интегральное исчисление функций нескольких переменных»

1. Изменить порядок интегрирования и построить область интегрирования:

$$a) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy; \quad б) \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y f(x, y) dx.$$

2. Вычислить интегралы:

$$a) \iint_D \sin(x+y) dx dy, \quad D: y=0, y=x, x+y=\frac{\pi}{2};$$

$$б) \int_L (xy - y^2) dx + x dy, \quad L: \text{дуга параболы } y = 2x^2 \text{ от } A(0;0) \text{ до } B(1;2).$$

3. С помощью формулы Грина преобразовать данный криволинейный интеграл к двойному (не вычислять):  $\oint_L \frac{\ln x}{x} \cdot y^2 dx + (x^2 \ln y + \ln^2 x) dy.$

4. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями:  $x + y = 6, y = \sqrt{3x}, z = 4y, z = 0.$

5. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь фигуры, лежащей в первой координатной четверти и ограниченной частью эллипса:  $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t.$

## Индивидуальное задание по разделу «Ряды Фурье»

Разложить функцию  $y = f(x)$  в ряд Фурье в интервале  $(-\pi; \pi)$

1.  $f(x) = x + 1.$

2.  $f(x) = 5x + 2.$

3.  $f(x) = 7 - \frac{3}{2}x.$

4.  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$

5.  $f(x) = 9 - 4x.$

6.  $f(x) = x^2.$

7.  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

8.  $f(x) = |x|.$

9.  $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ -2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

10.  $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

11.  $f(x) = |\sin x|.$

12.  $f(x) = \sin a x.$

13.  $f(x) = \cos a x.$

Разложить функцию  $y = f(x)$  в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .

14.  $f(x) = x^2.$

15.  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$

16.  $f(x) = |x|$ .

$$17. f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

18.  $f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$

19. Функцию  $f(x) = x$  разложить в ряды Фурье на отрезке  $[0; \pi]$  по синусам и по косинусам.

20. Функцию  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(0, \pi)$  по синусам.

21. Функцию  $f(x) = x^2$  разложить в ряд Фурье в промежутке  $[0; \pi)$  по синусам.

Функцию  $y = f(x)$  разложить в ряд Фурье в указанном промежутке.

22.  $f(x) = x^2 + 1, \quad (-2; 2).$

23.  $f(x) = |x| + 1, \quad (-1; 1)$

24.  $f(x) = 10 - x, \quad (5; 15).$

25.  $f(x) = |1 - x|, \quad (-2; 2).$

26.  $f(x) = x - 1, \quad (-1; 1).$

27.  $f(x) = x^2, \quad (0; 2\pi).$

28.  $f(x) = e^x, \quad (-e; e).$

29. Разложить в ряд Фурье по синусам и по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

30. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{e}{2}, \\ e - x, & \frac{e}{2} \leq x \leq e. \end{cases}$$

Написать формулу Парсеваля.

### Вопросы к зачету

1. Понятие функций нескольких переменных. Предел функций двух переменных.
2. Понятие непрерывности функций двух переменных, непрерывность сложной функции. Основные теоремы о непрерывных функциях двух переменных.
3. Определение частной производной. Теорема смешанных производных.
4. Производные сложных функций нескольких переменных.
5. Полное приращение и полный дифференциал функций двух переменных.
6. Дифференциалы высших порядков, нарушение инвариантности их формы.
7. Задача об объеме цилиндрического тела.

8. Понятие о двойном интеграле, его геометрический смысл.
9. Условия существования и свойства двойного интеграла.
10. Вычисление двойных интегралов (случай прямоугольной и криволинейной области).
11. Замена переменных в двойных интегралах.
12. Двойной интеграл в полярных координатах.
13. Понятие о тройных интегралах и их вычисление.
14. Криволинейные интегралы по координатам, свойства криволинейного интеграла.
15. Вычисление криволинейных интегралов.
16. Приложение криволинейного интеграла к вычислению площади плоской фигуры. Примеры.
17. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
18. Связь двойного и криволинейного интеграла. Формула Грина-Остроградского.
19. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.
20. Задача о разложении функции в ряд по данной ортогональной системе функций. Ряд Фурье.
21. Сходимость ряда Фурье. Теорема Дирихле.