

Осенняя научная сессия КГПУ им. В.П. Астафьева
«Система педагогического образования –
ресурс развития общества»

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ

Материалы XIV Всероссийской
с международным участием
научно-методической конференции,
посвященной 90-летию
физико-математического факультета
КГПУ им. В.П. Астафьева

Красноярск, 13–14 ноября 2025 г.

Электронное издание

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.П. Астафьева»

Осенняя научная сессия КГПУ им. В.П. Астафьева
«Система педагогического образования –
ресурс развития общества»

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ

**Материалы XIV Всероссийской с международным участием
научно-методической конференции,
посвященной 90-летию физико-математического факультета
КГПУ им. В.П. Астафьева**

Красноярск, 13–14 ноября 2025 г.

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2025

Редакционная коллегия:

В.Р. Майер (отв. ред.)

В.В. Абдулкин

Е.Н. Михалкин

М.Б. Шапкина

М 34 Математика и математическое образование в эпоху цифровизации: материалы XIV Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 90-летию физико-математического факультета КГПУ им. В.П. Астафьева. Красноярск, 13–14 ноября 2025 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2025. – Систем. требования: РС не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz, 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-770-6

Представлены статьи секций «Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений в фундаментальных исследованиях по математике», «Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке школьников и студентов», «Информационные технологии в занимательной, школьной и неэлементарной математике» и «Современные подходы и технологии обучения математике в эпоху цифровизации».

Предназначены специалистам в области математики и математического образования, а также всем интересующимся данными проблемами.

ББК 22.1

ISBN 978-5-00102-770-6

(Осенняя научная сессия
КГПУ им. В.П. Астафьева
«Система педагогического образования –
ресурс развития общества»)

© Красноярский государственный
педагогический университет
им. В.П. Астафьева, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ 1

Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений в фундаментальных исследованиях по математике

Давыдовская В.В. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MATHCAD И MATLAB	10
Ермаков О.В., Гумбатова С.Ф., Рожков А.В. ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА В ДУХЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ МЕРТЕНСА.....	14
Жартовский В.Ю., Бабурский Ю.К. ИНТЕГРАЦИЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ	19
Жартовский В.Ю., Швадкова А.А. ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ПАРАДИГМ ПРОГРАММИРОВАНИЯ И СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	23
Жучков И.А., Турчин В.А., Филиппов Я.С. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ	27
Ибрагимова М.С. ОБ ОДНОМ АСПЕКТЕ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ В ШКОЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MATHCAD.....	32
Киселева У.С. О СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГЕЛЬДЕРА	36
Левский А.Б. ОБ ОДНОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ГАРМОНИЧЕСКИХ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ	39
Леонов А.В. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМ ОСЛУЖИВАНИЕМ И РЕМОНТОМ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ.....	42
Лихолетов А.Е. О ФОРМУЛЕ КАРЛЕМАНА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА КОШИ-РИМАНА	46
Рожков А.В., Гумбатова С.Ф., Экажев Д.Б. ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА – ВАРИАЦИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ МЕРТЕНСА	51

Рожков А.В., Гумбатова С.Ф. КВАНТОВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ	57
Чувашов С.Ю., Антипова И.А. О СРЕЗКАХ ДИСКРИМИНАНТА СИСТЕМЫ ТРИНОМОВ: ПРОДОЛЖЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	64
Якименко В.В. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ ДЕФЕКТОВ.....	68

СЕКЦИЯ 2

Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке студентов и школьников

Бабурский Ю.К., Жартовский В.Ю. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СРЕД ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В ШКОЛЕ И ВУЗЕ.....	72
Бороненко Т.А., Федотова В.С. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ В ИЗУЧЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	76
Бочкарева Д.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ В СРЕДЕ GEOGEBRA.....	86
Вербичева Е.А., Курашова Е.В. РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНОГО ТРЕНАЖЕРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ НА RUTHON	89
Журавлева Н.А., Кейв М.А. ИНСТРУМЕНТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПРЕДМЕТНОЙ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ.....	92
Игнатушина И.В., Ракитина А.В. РИСКИ ПОВЕРХНОСТНОГО ПОНИМАНИЯ МАТЕМАТИКИ ПРИ ЧРЕЗМЕРНОЙ АВТОМАТИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ.....	97
Князева Н.К., Носков М.В., Ефимкина А.И. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ АНИМАЦИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ	101
Козловская И.С., Василевский К.В. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ И ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ».....	106
Ксензова Н.И. РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОГЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	111
Майер В.Р. СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МЕТОДАМ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФИГУР В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ	115

Тестов В.А., Попков Р.А. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ТРЕНД В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ	121
Турчин В.А., Дейкун Д.Г., Жучков И.А. РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ НА БАЗЕ СПО «РЕДАКТОР ЭУ/ЭОК».....	126
Фирстова Н.И. ДИНАМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ	132
Хилюк Е.А. КОНСТРУКТОР ИНТЕРАКТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ «1С:УРОК» КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ	136
Хотенко И.В. МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ ИНТЕРАКТИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА НА БАЗЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПЛАТФОРМЫ «1С: УРОК» НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА»	140
Чиркова В.В., Игнатушина И.В. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАТФОРМЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ	145
Яворская А.М., Золотых С.Г. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ РЕФЛЕКСИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	149
СЕКЦИЯ 3	
Информационные технологии в школьной математике	
Вергилюш С.С., Павлова М.А. ИТОГИ ПРОВЕДЕНИЯ XI ТУРНИРА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ	159
Волошин В.Д., Хотенко И.В. ТВОЯ ПЕРЕМЕННАЯ «Х». УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ЗА КУРС СЕДЬМОГО КЛАССА	162
Гамова Я.Н. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ ЭКСПОНАТА «ЗАДАЧА О СЕМИ КЕНИГСБЕРСКИХ МОСТАХ» ДЛЯ МУЗЕЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ.....	165
Жартовский В.Ю., Щипицин М.В. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ	171
Перминова В.С., Хотенко И.В. ТОЧКИ, КОТОРЫЕ ДВИГАЮТСЯ: ИЗУЧАЕМ ГМТ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ»	174
Теплухина В.С. ИСТОРИКО-НАУЧНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ТЕМЫ «ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ» В КУРСЕ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА».....	178

СЕКЦИЯ 4

Современные подходы и технологии обучения математике в эпоху цифровизации

Аниськин В.Н., Богословский В.И., Добудько Т.В., Пугач О.И. AI-ТЕХНОЛОГИИ В ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ.....	186
Баранова М.Ю., Горохова В.С. РИСКИ И ВОЗМОЖНОСТИ ЦИФРОВОЙ СРЕДЫ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ У ВТОРОКЛАССНИКОВ.....	192
Безумова О.Л., Шутрова И.В. ИНТЕРАКТИВНЫЕ КОНТЕКСТНЫЕ ЗАДАЧИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ	198
Белов М.С. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В ВУЗЕ: ВЫБОРОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ С RUTHON	203
Борзенкова О.А., Лысогорова Л.В. НЕКОТОРЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИИ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ – БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ.....	211
Букреева А.Е. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИИ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МАСТЕРСКАЯ» В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ	217
Букушева А.В., Бурмистрова Н.А. РЕШЕНИЕ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ	222
Васильева М.В. ОТЕЧЕСТВЕННЫЙ ОПЫТ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И СОВРЕМЕННЫЕ ТРЕБОВАНИЯ	226
Волк А.М., Соловьева И.Ф. О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К СОВРЕМЕННОМУ ОБУЧЕНИЮ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В УНИВЕРСИТЕТАХ БЕЛАРУСИ.....	232
Ганжа А.А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ДЕМОСТРАЦИОННЫХ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ УРОКОВ ОБОБЩЕНИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ	236
Гиматдинова Г.Н. ПОДГОТОВКА ОБУЧАЮЩИХСЯ 10–11 КЛАССОВ К РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ.....	241
Дуничев К.П. ГЕНЕРАТОР ЗАДАНИЙ СО СЛОЖНЫМ ГРАФИЧЕСКИМ КОНТЕНТОМ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ СТУДЕНТОВ ПО РАЗДЕЛУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»	245
Егоров В.А., Поличка А.Е. ВОЗМОЖНОСТИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ШКОЛЬНИКОВ С ТРУДНОСТЯМИ В ОСВОЕНИИ МАТЕМАТИКИ	249

Зарывных Н.Ф., Блинова Т.Л. К ВОПРОСУ ОРГАНИЗАЦИИ ГИБРИДНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ.....	254
Иконникова Т.К., Крупицын Е.С. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММЫ WOLFRAM MATHEMATICA И ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ ГЕНЕРИРОВАНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	262
Кейв М.А., Журавлева Н.А. ОБ УРОВНЕ ВЛАДЕНИЯ БУДУЩИМИ УЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ ИНСТРУМЕНТАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ	267
Кириллова Н.А., Михалкина Е.А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ.....	273
Киркина Е.Г. ПРОВЕДЕНИЕ МЕРОПРИЯТИЙ ПО РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРАЕВЕДЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....	277
Лапшина Е.М. ЦИФРОВОЙ РАБОЧИЙ ЛИСТ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ	280
Логиновская Т.Н., Лозовая Н.А. К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ИНТЕГРАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ.....	284
Макеева О.В., Ашихмин А.С. ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ: ПРИМЕР ФОРМИРОВАНИЯ ОПЫТА ПО СОЗДАНИЮ ЦИФРОВЫХ УЧЕБНЫХ МАТЕРИАЛОВ	288
Матюшкин Д.Р. СМЕШАННОЕ ОБУЧЕНИЕ В РОССИЙСКОЙ ШКОЛЕ В КОНТЕКСТЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССОВ	293
Михалкина Е.А., Кириллова Н.А., Курганова И.А., Целуйко А.В., Боцман С.Р. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА ДЕТЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ	299
Могилева А.М. ЦИФРОВАЯ КОМПЕТЕНТНОСТЬ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ КАК КЛЮЧЕВОЙ ФАКТОР МОДЕРНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ	303
Некрасова Д.М., Дюкина Н.Г. РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КАК ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ПРОФИОРИЕНТАЦИИ ШКОЛЬНИКОВ	306
Петров А.А. ФОРМИРОВАНИЕ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ ЧЕРЕЗ ГЕЙМИФИКАЦИЮ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ОНЛАЙН-ПЛАТФОРМ	310

Потылицын Д.А. РАЗВИТИЕ КОГНИТИВНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	314
Прояева И.В., Веселовский В.А. О РАЗРАБОТКЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ.....	319
Путинцева И.В. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СОВРЕМЕННОГО ПОКОЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ В УЧРЕЖДЕНИЯХ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ	323
Солдаева М.В. ПРЕОДОЛЕНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ ЗАТРУДНЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ КАК УСЛОВИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ЦЕЛОСТНОГО ПОДХОДА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ.....	326
Табинова О.А., Шашкина М.Б. НЕЙРОДИДАКТИКА КАК ОСНОВА ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДИК ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ.....	331
Торопова С.И. РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ.....	338
Трофимец Е.Н. ОТ РУЧНЫХ РАСЧЕТОВ К АВТОМАТИЗИРОВАННЫМ: ЦИФРОВЫЕ ШАБЛОНЫ В ИНЖЕНЕРНО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ	342
Трофимов И.Л. ВАРИАНТ ЦИФРОВОГО ИНСТРУМЕНТАРИЯ ПРОВЕРКИ УРОВНЯ СФОРМИРОВАННОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ СТУДЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ РАЗДЕЛА «МАТРИЦЫ».....	347
Ушакова К.Е. ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ИГРОФИКАЦИИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ЦИФРОВОГО ИНСТРУМЕНТАРИЯ	351
Шабанова М.В., Удовенко Л.Н. НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДИЧЕСКИХ ИДЕЙ В.А. ГУСЕВА ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ НА СТУПЕНИ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ.....	355
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	361

Секция 1

**ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ
КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ,
СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MATHCAD И MATLAB

SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS IN MODERN COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS MATHCAD AND MATLAB

В.В. Давыдовская, Е.Г. Богданович,
Е.В. Тарасюк

V.V. Davydovskaya, E.G. Bogdanovich,
E.V. Tarasyuk

Линейное программирование, MathCAD, MATLAB, оптимизация, максимизация прибыли, системы компьютерной алгебры, ограничения ресурсов, целевая функция, производственная задача, математическое моделирование.

Статья посвящена сравнительному анализу решения задач линейного программирования в современных системах компьютерной алгебры MathCAD и MATLAB. Рассматриваются теоретические основы линейного программирования и его практическая значимость в условиях ограниченности ресурсов. Подробно описаны алгоритмы и синтаксис функций maximize/minimize в MathCAD и linprog в MATLAB для решения оптимизационных задач.

Linear programming, MathCAD, MATLAB, optimization, profit maximization, computer algebra systems, resource constraints, objective function, production problem, mathematical modeling.

The article presents a comparative analysis of solving linear programming problems in modern computer algebra systems MathCAD and MATLAB. The theoretical foundations of linear programming and its practical significance in resource-constrained environments are considered. The algorithms and syntax of maximize/minimize functions in MathCAD and linprog in MATLAB for solving optimization problems are described in detail.

Актуальность задач оптимизации обусловлена их фундаментальной ролью в современном мире. В условиях ограниченности ресурсов (времени, денег, материалов) оптимизация позволяет найти наилучший возможный вариант решения практически любой задачи, повышая эффективность, снижая затраты и экономя время. Задачи оптимизации – это мощный инструмент для принятия рациональных решений в науке, технике, экономике и повседневной жизни.

Оптимизационные задачи можно разделить на два класса:

- Задачи безусловной оптимизации (или оптимизация без ограничений).
- Задачи условной оптимизации (оптимизация с ограничениями).

Линейное программирование – это метод оптимизации, направленный на поиск наилучшего (максимального или минимального) значения целевой функции при заданных линейных ограничениях.

Пакет MathCAD содержит функции maximize и minimize, которые предназначены для поиска экстремумов функций в системе MathCAD. Они позволяют находить максимальные и минимальные значения функций при заданных ограничениях и подходят для решения как линейных, так и нелинейных задач оптимизации [1; 3].

Синтаксис функций
`maximize(f, x1, x2, ..., xn)`
`minimize(f, x1, x2, ..., xn),`

где:

- f – целевая функция;
- x_1, x_2, \dots, x_n – переменные оптимизации.

Порядок использования

1. Определение целевой функции.
2. Задание начальных приближений для переменных.
3. Ввод ограничений (при необходимости).
4. Вызов функции `maximize` или `minimize`.

Особенности работы

- Функции работают с нелинейными и линейными задачами.
- Требуется задать начальные значения переменных.
- Можно использовать дополнительные ограничения.
- Результат возвращается в виде вектора значений переменных.

Система MATLAB содержит функцию `linprog` для решения задач линейного программирования, которая минимизирует линейную целевую функцию при заданных линейных ограничениях [2].

Базовый синтаксис

```
x = linprog(f, A, b)
[x, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Основные параметры

- f – вектор коэффициентов целевой функции;
- A, b – матрица и вектор для ограничений-неравенств;
- Aeq, beq – матрица и вектор для ограничений-равенств;
- lb, ub – векторы нижних и верхних границ переменных;
- x – вектор оптимальных значений переменных;
- $fval$ – минимальное значение целевой функции.

Рассмотрим практический пример решения задачи линейного программирования средствами MathCAD и MATLAB.

Условие задачи. Цех малого предприятия должен изготовить 100 изделий трех типов (x_1, x_2, x_3) и не менее 20 штук изделий каждого типа. На изделия уходит 4, 3.4 и 2 кг металла соответственно, при его общем запасе 340 кг, а также расходуются по 4.75, 11 и 2 кг пластмассы, при ее общем запасе 700 кг. Прибыль, полученная от каждого изделия, равна 4, 3 и 2 рублей.

Определить, сколько изделий каждого типа необходимо выпустить для получения максимальной прибыли в рамках установленных запасов металла и пластмассы.

Рассмотрим решение в MATLAB с использованием функции linprog.

```
f=[-4 -3 -2];  
A=[4 3.4 2; 4.75 11 2];  
b=[340 700];  
Aeq=[1 1 1];  
beq=[100];  
lb=[20 20 20];  
ub=[];  
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[1 1 1]);  
x  
abs(fval)
```

Полученное решение:

```
x =  
56.0000  
20.0000  
24.0000  
  
ans =  
332.0000
```

Рассмотрим решение в MathCAD с использованием функции maximize.

ORIGIN := 1

$$F(x) := 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1 \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Given

$$x_1 \geq 20 \quad x_2 \geq 20 \quad x_3 \geq 20$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$x := \text{Maximize}(F, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = 332$$

Оба пакета демонстрируют высокую эффективность для решения оптимизационных задач, но обладают различными преимуществами, определяющими области их оптимального применения [4].

MathCAD выделяется интуитивным математическим интерфейсом, где расчеты визуализируются в естественной формульной записи. Это делает его идеальным инструментом для учебного процесса, быстрой проверки гипотез и решения инженерных задач средней сложности, где важна наглядность и простота освоения.

MATLAB, в свою очередь, предлагает мощные специализированные алгоритмы и высокую производительность для работы с задачами большой размерности. Его программируемая среда и богатый набор инструментов обеспечивают непревзойденную гибкость для решения сложных прикладных задач, требующих создания комплексных моделей и обработки больших данных.

Таким образом, выбор пакета зависит от конкретных задач: MathCAD оптимален для образовательных целей и наглядного решения стандартных проблем, тогда как MATLAB незаменим для сложных научных исследований и промышленных применений, где критичны вычислительная мощность и гибкость подхода.

Библиографический список

1. Очков В.Ф., Богомолва Е.П., Иванов Д.А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. СПб.: Лань, 2016. 388 с.
2. Дьяконов В.П. Mathcad 7.0 в математике, физике и Internet. М.: Нолидж, 1999. 352 с.
3. Колпак Е.П. Вычисления в Matlab: учебное пособие. СПб.: Изд. Бук, 2016. 186 с.
4. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учебное пособие. 3-е изд. СПб.: Лань, 2009. 352 с.

ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА В ДУХЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ МЕРТЕНСА

CALCULATING THE AVERAGE VALUES OF THE EULER FUNCTION IN THE SPIRIT OF THE CLASSICAL MERTENS THEOREM

О.В. Ермаков, С.Ф. Гумбатова,
А.В. Рожков

O.V. Ermakov, S.F. Humbatova,
A.V. Rozhkov

Теория чисел, язык программирования Julia, функция Эйлера, локальное распределение простых чисел.

Исследование локального расположения простых чисел, проводимое в КубГУ с 2015 г., поддержаны в 2021 грантом Благотворительного фонда Владимира Потанина. В данной статье исследуется поведение функции Эйлера на бесконечности в духе классической теоремы Мертенса о среднем значении функции Эйлера. Вычисления производились с 2017 г. вначале в рамках компьютерной алгебры GAP, а с 2021 г. средствами языка программирования Julia.

Number theory, Julia programming language, Euler's function, local distribution of prime numbers.

A study of the local location of prime numbers, conducted at KubGU since 2015, supported in 2021 by a grant from the Vladimir Potanin Charitable Foundation. This article examines the behavior of the Euler function at infinity in the spirit of the classical Mertens theorem on the average value of the Euler function. Calculations have been performed since 2017, initially within the framework of GAP computer algebra, and since 2021 using the Julia programming language.

В известной теореме Мертенса [4] о сумме значений функции Эйлера присутствует логарифм, т.е. отклонение может расти неограниченно:

$$\sum_{i=1}^n \varphi(i) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \cdot \ln(n)).$$

Более того, как и глобальное распределение простых чисел, это функция о поведении на бесконечности, ничего не говорящая о значении функции в конкретной точке, что важно для приложений.

Практические вычисления, ведущиеся уже 8 лет, позволили в пределах первых 12 трлн натуральных чисел дать не улучшаемое уточнение формулы, в которой отклонение является знакопеременной функцией, меняющей знак буквально в каждой точке.

Введем среднее значение функции Эйлера

$$\bar{\varphi}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(i)$$

и перепишем формулу Мертенса в удобной для нас форме:

$$\bar{\varphi}(n) = t \cdot (n+1) + \frac{O(n \cdot \ln(n))}{n}, \quad t = \frac{3}{\pi^2}.$$

Через $s(n)$ мы обозначим разность

$$s(n) = \overline{\varphi}(n) - t \cdot (n+1)$$

– отклонение реального среднего значения функции Эйлера от значения, которое задает формула.

Несложно вычислить рекуррентную формулу для этого отклонения.

$$s(n+1) = \frac{n}{n+1} s(n) + \frac{\varphi(n+1)}{n+1} - 2t, s(1) = 1.$$

Для практических вычислений она нехороша тем, что накапливает ошибки, поскольку следующий член зависит от предыдущего. Если же использовать сумму всех значений функции Эйлера, то поскольку эти значения целые числа, то вычисления производятся абсолютно точно и ошибка не накапливается.

В языке Julia мы использовали для чисел формат Big и поэтому вычисления велись до 78 знака после запятой.

Мы вычисляли 3 параметра.

Сумма всех значений функции Эйлера – параметр S.

Само отклонение $s(n)$ – параметр t.

И сумма всех отклонений T.

Результаты оказались неожиданными и обнадеживающими.

1. Отклонение не выходило за пределы интервала (-0.46; 0.46)
2. Знак отклонения менялся в среднем через 1.4 шага.
3. Сумма отклонений качественно ведет себя как синусоида, с увеличивающимся периодом и увеличивающейся амплитудой.

Это говорит о том, что чем дальше от начала координат, тем больше сгущения простых чисел и больше «пустоши», где очень много чисел, имеющих много разных простых делителей, а простых чисел мало.

Вычисления производились по следующей программе.

```
using Nemo
function ros(m, n)
p = BigFlo
at("0.607927101854026628663276779258365833426152648033479293
07365419136503872577341265")
S = BigInt(0)
t= BigFloat(0.0)
T::BigFloat = 0.0
for i = m:n
    S += euler_phi(ZZ(i))
    t = BigInt(S)/i-p*(i+1)
    T += t
println(f,"i=", i,"->", "S=", S, "->", "T=",T)
end
end
end
```

Известно [4], что среднее значение функции Эйлера равно

$$\varphi(n) = \frac{6n}{\pi^2}.$$

Просуммировав средние значения функции Эйлера от 1 до n , получим арифметическую прогрессию:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) = \frac{6 \cdot 1}{\pi^2} + \frac{6 \cdot 2}{\pi^2} + \dots + \frac{6 \cdot n}{\pi^2} = \frac{6}{\pi^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{3}{\pi^2} n(n+1).$$

И мы получаем

Теорема. (Уточнение формулы Мертенса).

$$\sum_{i=1}^n \varphi(i) = \frac{3}{\pi^2} n(n+1) + n \cdot s(n),$$

где для всех $n < 12 \cdot 10^{12}$ выполняется неравенство $|s(n)| < 0,46$.

Дальнейшее уточнение формулы Мертенса невозможно в силу знакопеременности остатка $s(n)$.

Более того, наша формула описывает не только поведение суммы функций Эйлера на бесконечности, но и ограничивает значения этой суммы в жестких пределах.

1. Функция $s(n)$ знакопеременная, средний период знакопостоянства равен примерно 1,4136 (близко к $\sqrt{2} \approx 1.4142$).

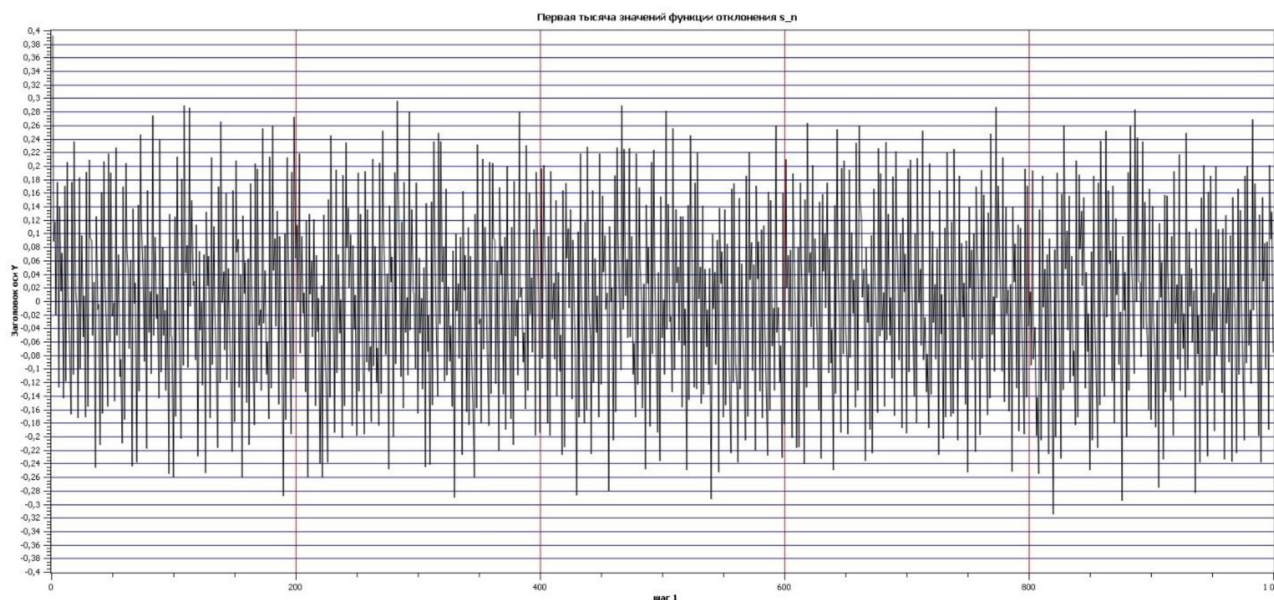


Рис. 1. Первая тысяча значений функции $s(n)$. По горизонтали шаг 1, по вертикали интервал $(-0,4; 0,4)$

2. Среднее положительное значение функции $s(n)$ равно 0,1189, отрицательное – 0,1189.

3. До 12 трлн в интервал $(-0,45; 0,45)$ не попало только 2 значения:

$$n=7016086529723, s(n)=0.4553;$$

$$n=8772508813703, s(n)=0.4514$$

Возможно, на бесконечности функция отклонения $s(n)$ содержит логарифм.

В настоящее время установлено, что:

Одно значение отклонения из 16 млрд удовлетворяет неравенству $|s(n)| > 0.43$;

Одно значение из 250 млрд удовлетворяет неравенству $|s(n)| > 0.44$;

Одно значение из 4 трлн удовлетворяет неравенству $|s(n)| > 0.45$.

Для увеличения значения отклонения $s(n)$ на 0.01 нужно увеличить аргумент n в 16 раз. Локальные максимумы функции отклонения $s(n)$ могут выглядеть примерно так

$$s(n) \approx \frac{1}{100} \log_{16} n = \frac{1}{400} \log_2 n.$$

Поэтому переход границы 0.46 нужно ожидать в районе 60–70 трлн, что на домашнем компьютере займет примерно 30 лет.

Световой год – это чуть меньше 10 трлн км.

В настоящее время на процессоре Intel Core i9-12900K 3.2 GHz скорость счета составляет примерно 60 тыс. чисел в секунду (примерно 20% от скорости света) или 2 трлн чисел в год.

4. Дисперсия с точностью до 6 знака равна 0,01986.

5. Плотность распределения вероятностей случайной величины $s(n)$ приведена на рис. 2, с шагом 0.001 до 100 млрд.

Тут же приведен график нормального распределения для математического ожидания 0 и дисперсии 0,01986.

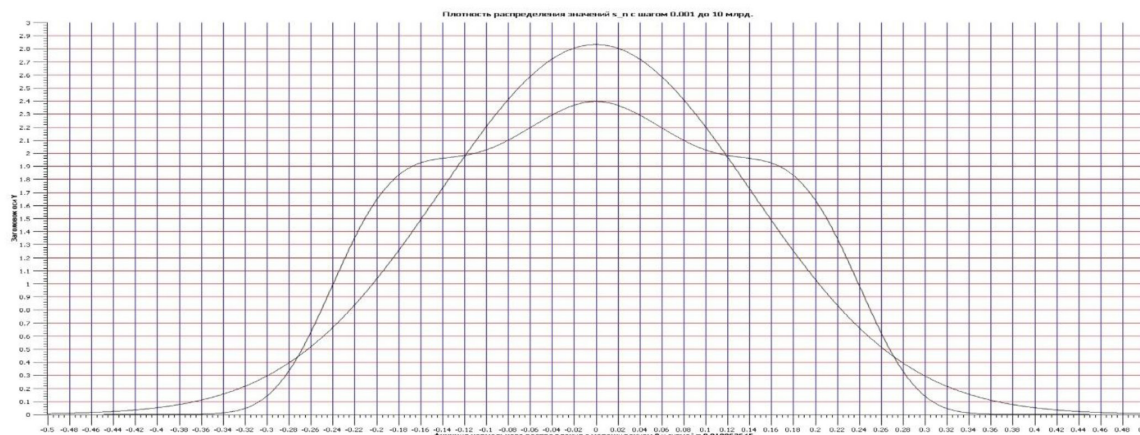


Рис. 2. Плотность распределения вероятностей и нормальное распределение до 100 млрд

6 Вычислена функция суммы $S(n) = \sum_{i=1}^n s(i)$ (рис. 3).

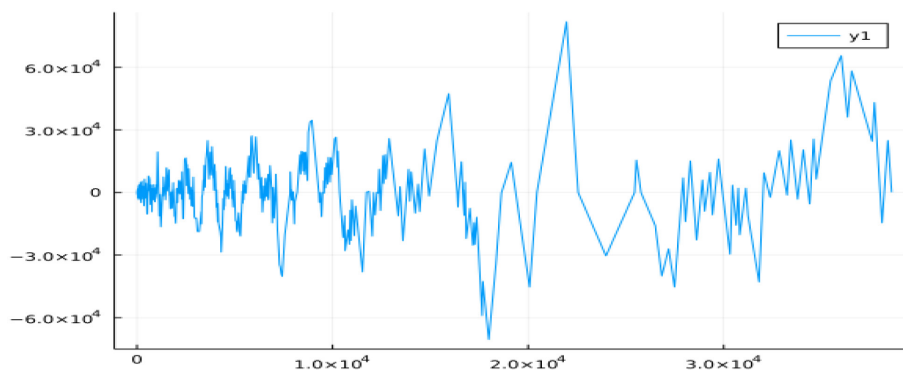


Рис. 3. Суммы $S(n)$ на интервале до 3860 млрд, шаг 100 млн

Сумма отклонений медленно растет, а потом так же медленно убывает и каждый раз амплитуда увеличивается. Появляются сгущения простых чисел, а потом их разрежение. И чем дальше, тем и сгущения больше и разрежения шире. Причем каждый раз история проживается заново и как бы продолжается дальше. В этом есть закономерность, ее качественный характер очевиден, но непонятны параметры и скорость процесса.

Возможно, дальнейшие вычисления подскажут плодотворную идею.

Библиографический список

1. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы II Международной научной конференции. 2017. С. 198–203.
2. Рожков А.В., Барсукова А.С. Экспериментальная математика и язык Julia – локальное распределение простых чисел // Новые информационные технологии в образовании и науке. 2022. № 6. С. 82–88.
3. Шеррингтон М. Осваиваем язык Julia. [Электронный ресурс]. М.: ДМК Пресс. 2017. URL: <https://e.lanbook.com/book/97344?category=1537&publisher=1028>.
4. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 178 с.

ИНТЕГРАЦИЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

INTEGRATION OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE FOR AUTOMATED THEOREM PROVING

В.Ю. Жартовский, Ю.К. Бабурский

V. Yu. Zhartovskiy, Yu.K. Baburskiy

Системы компьютерной алгебры, искусственный интеллект, автоматическое доказательство теорем, машинное обучение, символьные вычисления, формальная верификация, математическое моделирование.

Рассматривается современный подход к автоматизации процесса доказательства теорем с использованием систем компьютерной алгебры (CAS) и методов искусственного интеллекта. Показано, что интеграция символьных вычислений и машинного обучения позволяет создавать гибридные интеллектуальные системы, способные не только проверять правильность доказательств, но и выдвигать новые гипотезы. Приведены примеры применения Wolfram Mathematica, Coq и Lean в математических исследованиях, а также обозначены перспективы развития этого направления в контексте фундаментальных и прикладных задач.

Computer algebra systems, artificial intelligence, automated theorem proving, machine learning, symbolic computation, formal verification, mathematical modeling.

The paper examines a modern approach to automating theorem proving using computer algebra systems (CAS) and artificial intelligence (AI) methods. It is shown that the integration of symbolic computation and machine learning enables the creation of hybrid intelligent systems capable not only of verifying the correctness of proofs but also of generating new hypotheses. Examples of Wolfram Mathematica, Coq, and Lean applications in mathematical research are presented, along with prospects for further development in both fundamental and applied mathematics.

В последние десятилетия наблюдается активное и стремительное развитие инструментов, объединяющих методы искусственного интеллекта и компьютерной алгебры для решения математических задач. Эта конвергенция знаменует собой фундаментальный сдвиг в парадигме научного познания, трансформируя саму методологию математических исследований. Если изначально компьютеры рассматривались как мощные калькуляторы, способные ускорить рутинные вычисления, то сегодня они эволюционируют в интеллектуальных партнеров, способных к творческому поиску, выдвиганию гипотез и построению сложных логических конструкций. Данный синтез является следствием исчерпания возможностей сугубо алгоритмических подходов к решению сложнейших проблем современной математики, теоретической физики и криптографии, где требуются не только вычислительная мощь, но и интуиция, аналогия и стратегическое мышление [4].

Современные системы компьютерной алгебры, такие как Wolfram Mathematica [3], Maple, Maxima и SageMath, обеспечивают мощный аппарат символьных вычислений, позволяющий формализовать доказательства, выполнять автоматические преобразования выражений и осуществлять строгую проверку логических связей между утверждениями. Эти сложнейшие программные комплексы, насчитывающие миллионы строк высокооптимизированного кода, прошли долгий путь эволюции – от простых манипуляций с полиномами в 1960-х годах до современных сред, способных проводить вычисления в области алгебраической геометрии, теории гомотопий и квантовой хромодинамики. Их расширенные возможности включают глубокие символьные преобразования, такие как факторизация над произвольными полями и вычисление базисов Гребнера; решение сложных дифференциально-интегральных задач в аналитическом виде; формальную верификацию и автоматическое доказательство теорем с пошаговой проверкой корректности; а также специализированные модули для работы с комбинаторикой, теорией чисел, статистическим анализом и даже задачами квантовых вычислений. Каждая из ведущих систем развила свою уникальную экосистему: Wolfram Mathematica стремится к универсальности охвата технических вычислений, Maple фокусируется на глубине символьных преобразований, а SageMath агрегирует лучшие открытые математические пакеты в единой среде на основе Python.

Однако, несмотря на высокий уровень формализации, классические CAS-системы сталкиваются с принципиальными ограничениями, обусловленными их детерминированной природой. Они не обладают эвристическими возможностями, свойственными человеку, – математической интуицией, способностью к стратегическому планированию сложных многоходовых доказательств, умением формулировать оригинальные гипотезы и переносить методы из одной области математики в другую. Именно здесь на помощь приходят методы искусственного интеллекта, которые позволяют приближать процесс доказательства к человеческому рассуждению. Современные подходы ИИ включают глубокое обучение на математических корпусах, когда языковые модели типа трансформеров обучаются на гигантских массивах текстов из arXiv и учебников, усваивая синтаксис и семантику математических рассуждений; обучение с подкреплением в пространстве доказательств, где процесс доказательства представляется как игра, а алгоритмы вроде Monte Carlo Tree Search помогают эффективно исследовать пространство возможных ходов; генеративно-состязательные сети для математического творчества, где одна нейросеть создает гипотезы, а другая пытается их опровергнуть; а также трансферное обучение, позволяющее переносить стратегии доказательства между различными разделами математики.

Практической реализацией этого симбиоза стали системы, сочетающие формальную верификацию с машинным обучением. Одним из наиболее известных примеров является система Lean [1], представляющая собой не просто вычислительный инструмент, а полноценную среду для формализации математики. Ее ядро, основанное на теории зависимых типов, гарантирует абсолютную корректность принятых доказательств, а библиотека Mathlib стала феноменальным

достижением сообщества – гигантской коллекцией формализованных определений и теорем. ИИ-модели, такие как LeanStep, обучаются на Mathlib и демонстрируют способность предсказывать тактики доказательства и формулировать промежуточные леммы. Аналогично проекты Coq и HOL Light [2] обеспечивают строгое доказательство утверждений в интерактивной среде, где ИИ может предлагать шаги доказательства на основе предыдущего опыта. Coq сыграл ключевую роль в верификации микропроцессоров и формализации сложных теорем, в то время как HOL Light остается эталоном в области верификации аппаратного обеспечения. Исследования последних лет убедительно показывают, что использование языковых моделей в связке с CAS ускоряет процесс поиска доказательств на порядок. Это достигается за счет эффективного разделения труда: ИИ-модель действует как «гипер-эрудированный ассистент», генерируя десятки идей, а система формальной верификации выступает в роли «безжалостного критика», мгновенно отсекая ошибочные пути.

В практическом плане эти гибридные системы уже находят разнообразное применение. В области автоматизированного рецензирования научных публикаций они позволяют проверять сложные доказательства на соответствие заявленным результатам, находить логические пробелы и предлагать способы их устранения, что кардинально повышает надежность научного знания. При создании интеллектуальных образовательных платформ системы нового поколения способны анализировать не только конечный ответ студента, но и весь ход его рассуждений, идентифицировать конкретные заблуждения, предлагать серии наводящих вопросов и генерировать персонализированные задачи для отработки слабых мест. В сфере верификации критических систем – от аэрокосмической отрасли и медицинской робототехники до финансовых алгоритмов – гибридные подходы используются для формального доказательства того, что программное и аппаратное обеспечение ведет себя строго в соответствии со спецификациями при любых входных данных. Кроме того, эти системы уже применяются для ускорения научных открытий, систематического перебора гипотез в комбинаторике, поиска оптимальных конфигураций в теории материалов и нахождения новых эффективных алгоритмов.

Перспективным направлением является создание еще более сложных гибридных систем [5], в которых CAS выполняет роль логического ядра, а ИИ-модуль обучается на больших массивах математических данных, извлекая типовые стратегии доказательства. Архитектура таких систем будущего будет представлять собой модульную экосистему со специализированными ИИ-агентами, отвечающими за аналогии, планирование, генерацию гипотез и взаимодействие с человеком-исследователем. Это открывает футуристические возможности для автоматического поиска контрпримеров, генерации гипотез и даже открытия новых теорем. Мы стоим на пороге эпохи автономного математического творчества, когда системы, подобные DeepMind's FunSearch, уже демонстрируют способность находить новые решения, превосходящие известные человеку. Кросс-дисциплинарный перенос методов на новом уровне позволит ИИ находить

глубокие аналогии между, казалось бы, несвязанными областями и переносить целые комплексы методов, порождая новые междисциплинарные направления. Развитие коллаборативных человеко-машинных интерфейсов приведет к созданию продвинутых сред разработки для математиков, где ИИ в реальном времени будет предлагать варианты действий, визуализировать сложные объекты и брать на себя рутинные части доказательств. Кроме того, предсказательная аналитика математической продуктивности на основе анализа динамики публикаций и цитирований поможет научным фондам и отдельным ученым оптимально распределять ресурсы.

В заключение следует подчеркнуть, что развитие симбиоза ИИ и компьютерной алгебры представляет собой не просто техническое улучшение инструментов, но и бросает вызов философским основаниям математики, ставя вопросы о природе математической интуиции и возможности ее алгоритмизации. Уже в ближайшее десятилетие мы, вероятно, станем свидетелями первых случаев, когда значимое математическое открытие будет сделано преимущественно искусственным интеллектом. Эта трансформация знаменует собой рождение нового субъекта познания, способного расширить границы человеческого размаха и изменить сам ландшафт математического исследования, превращая компьютер из пассивного инструмента в активного партнера по научному творчеству, открывающего новую главу в многовековой истории математики.

Библиографический список

1. Avigad J., de Moura L. Formal proof and verification in Lean // *Journal of Automated Reasoning*. 2021. Т. 65, № 3. С. 473–501.
2. Harrison J. HOL Light: An overview // *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer, 2019. Т. 11700. С. 60–73.
3. Wolfram S. *A New Kind of Science*. Champaign: Wolfram Media, 2002. 1280 с.
4. McCarthy J. Programs with common sense // *Proceedings of the Teddington Conference on the Mechanization of Thought Processes*. London: Her Majesty's Stationery Office, 1959. С. 75–91.
5. Davenport J.H. Computer Algebra Systems and Artificial Intelligence: Future Directions // *Communications in Computer Algebra*. 2022. Т. 56, № 3. С. 45–56.

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ПАРАДИГМ ПРОГРАММИРОВАНИЯ И СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

APPLICATION OF MODERN PROGRAMMING PARADIGMS AND COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS FOR SOLVING FUNDAMENTAL AND APPLIED MATHEMATICAL PROBLEMS

В.Ю. Жартовский, А.А. Швадкова

V.Yu. Zhartovskiyy, A.A. Shvadkova

Системы компьютерной алгебры, суперкомпьютерные вычисления, функциональное программирование, символьные вычисления, математическое моделирование, формальная верификация, параллельные вычисления.

В статье рассматривается влияние эволюции парадигм программирования на развитие методов вычислений в математике. Особое внимание уделяется применению систем компьютерной алгебры, суперкомпьютерных технологий и современных подходов, таких как функциональное и реактивное программирование, для решения сложных математических задач. Показано, что интеграция этих технологий позволяет не только ускорить вычисления, но и открывать новые закономерности в фундаментальных и прикладных исследованиях.

Computer algebra systems, supercomputer computations, functional programming, symbolic computation, mathematical modeling, formal verification, parallel computing.

The article examines the impact of the evolution of programming paradigms on the development of computational methods in mathematics. Special attention is paid to the application of computer algebra systems, supercomputer technologies, and modern approaches such as functional and reactive programming for solving complex mathematical problems. It is shown that the integration of these technologies not only accelerates computations but also enables the discovery of new patterns in fundamental and applied research.

Современная математика характеризуется возрастающей сложностью задач, требующих для своего решения не только аналитических методов, но и мощных вычислительных ресурсов. Эволюция парадигм программирования сыграла ключевую роль в создании инструментов, позволяющих эффективно работать с такими задачами. В частности, системы компьютерной алгебры (CAS), такие как Wolfram Mathematica, Maple и SageMath, стали неотъемлемой частью математического исследования, обеспечивая возможности символьных вычислений, визуализации и формальной верификации [3; 5].

Целью данной работы является анализ современных парадигм программирования и их применения в контексте компьютерной алгебры и суперкомпьютерных вычислений для получения новых математических результатов.

Современные парадигмы программирования в вычислительной математике

1. Функциональное программирование и параллельные вычисления

С распространением многопроцессорных систем и суперкомпьютерных архитектур функциональное программирование (Haskell, Scala) стало одним из ключевых подходов для реализации параллельных алгоритмов [6]. Чистые функции и неизменяемые данные минимизируют состояние, что упрощает распараллеливание и повышает надежность вычислений. Это особенно важно для задач линейной алгебры, оптимизации и численного моделирования. Например, в задачах решения систем линейных уравнений большого размера или при численном интегрировании в многомерных пространствах использование функциональных языков позволяет создавать эффективные и надежные параллельные реализации алгоритмов.

2. Реактивное программирование и обработка потоков данных

Реактивное программирование (RxJava, Akka) позволяет эффективно работать с асинхронными потоками данных, что актуально для задач реального времени, таких как визуализация сложных математических объектов или обработка данных с датчиков в физических экспериментах [7]. В контексте математического моделирования это означает возможность обработки непрерывных потоков данных в задачах оптимизации в реальном времени, мониторинге динамических систем и интерактивной визуализации многомерных данных.

3. Объектно-ориентированное программирование и моделирование

Объектно-ориентированная парадигма (C++, Java) широко используется для создания сложных математических моделей, где сущности предметной области естественно отображаются в виде объектов с инкапсулированной логикой [3]. Это особенно важно в прикладных исследованиях, например, в финансовом моделировании или инженерных расчетах. Такие системы позволяют создавать иерархии классов для представления математических объектов разной степени сложности – от простых чисел и матриц до сложных структур данных в алгебраической топологии или дифференциальной геометрии.

Системы компьютерной алгебры и суперкомпьютерные технологии

Современные CAS, такие как Wolfram Mathematica и SageMath, интегрируют в себя возможности символьных вычислений, графики и параллельной обработки данных. Они позволяют:

1. Выполнять аналитические преобразования сложных выражений, включая операции с полиномами, решение дифференциальных уравнений в символьном виде и работу с алгебраическими структурами.

2. Визуализировать многомерные данные и геометрические объекты, что особенно важно для понимания сложных математических концепций и представления результатов исследований.

3. Проводить верификацию теорем в интерактивном режиме, обеспечивая строгость математических рассуждений и проверку корректности доказательств.

Примером успешной интеграции CAS и суперкомпьютерных вычислений является использование библиотек типа Intel Math Kernel Library (MKL) для ускорения линейно-алгебраических операций. Это позволяет решать задачи, которые ранее считались вычислительно неразрешимыми, например, поиск оптимальных конфигураций в теории графов или моделирование квантовых систем. Особенно перспективным направлением является комбинирование символьных и численных методов, когда CAS используется для аналитического упрощения задач, которые затем решаются численными методами на суперкомпьютерных системах.

Примеры применения:

– Формальная верификация теорем. Системы Coq и Lean [1] используются для строгого доказательства математических утверждений, что особенно важно в криптографии и теории чисел. Эти системы позволяют не только проверять уже готовые доказательства, но и активно участвовать в процессе их создания, предлагая возможные пути доказательства и проверяя промежуточные результаты.

– Визуализация и графика. Библиотеки Python (Matplotlib, Plotly) и Wolfram Language позволяют создавать интерактивные графики для анализа данных и представления результатов. Современные средства визуализации позволяют работать с объектами высокой размерности, используя методы проекции и цветового кодирования для представления многомерных данных.

– Суперкомпьютерные расчеты. Использование MPI и OpenMP для распараллеливания алгоритмов в задачах вычислительной гидродинамики и молекулярного моделирования. Особую важность приобретают задачи, требующие одновременного использования различных вычислительных парадигм – от символьных преобразований до численного моделирования на распределенных системах.

Перспективы развития

Дальнейшее развитие связано с интеграцией искусственного интеллекта в процесс математического исследования. Гибридные системы, сочетающие CAS и машинное обучение, способны генерировать гипотезы и предлагать новые направления для изучения [4]. Особый интерес представляют системы, способные к автоматическому построению математических доказательств и генерации новых теорем на основе анализа больших массивов математических знаний.

Кроме того, рост производительности суперкомпьютеров открывает возможности для решения задач, ранее недоступных для вычислительных методов. Речь идет о задачах, требующих одновременной работы с символьными представлениями и численными вычислениями в реальном времени, а также о проблемах, связанных с обработкой экстремально больших объемов математических данных.

Заключение

Эволюция парадигм программирования и развитие систем компьютерной алгебры значительно расширили возможности математических исследований. Современные инструменты позволяют не только автоматизировать рутинные вычисления, но и получать принципиально новые результаты в фундаментальной

и прикладной математике. Дальнейший прогресс в этой области будет связан с углублением интеграции между программированием, компьютерной алгеброй и искусственным интеллектом, что откроет новые горизонты в математических исследованиях и приложениях. Особую важность приобретает развитие междисциплинарных подходов, объединяющих достижения компьютерных наук, математики и искусственного интеллекта. Это позволит создавать интеллектуальные системы, способные не только решать поставленные задачи, но и формулировать новые исследовательские направления, открывая тем самым новую эру в развитии математической науки.

Библиографический список

1. Avigad J., de Moura L. Formal proof and verification in Lean // *Journal of Automated Reasoning*. 2021. Т. 65, № 3. С. 473–501.
2. Dijkstra E.W. Go To Statement Considered Harmful // *Communications of the ACM*. 1968. Т. 11, № 3. С. 147–148.
3. Wolfram S. *A New Kind of Science*. Champaign: Wolfram Media, 2002. 1280 с.
4. Davenport J.H. Computer Algebra Systems and Artificial Intelligence: Future Directions // *Communications in Computer Algebra*. 2022. Т. 56, № 3. С. 45–56.
5. Martin R.C. *Clean Architecture: A Craftsman’s Guide to Software Structure and Design*. Prentice Hall, 2017.
6. Odersky M., Spoon L., Venners B. *Programming in Scala*. Artima Press, 2016.
7. *Reactive Manifesto*. URL: <https://www.reactivemanifesto.org/> (дата обращения: 15.10.2023).

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

METHODS FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS UNSOLVED FOR THE DERIVATIVE

И.А. Жучков, В.А. Турчин,
Я.С. Филипов

I.A. Zhuchkov, V.A. Turchin,
Ya.S. Filipov

Дифференциальные уравнения, разложение, способы решения, особые решения, математическое моделирование.

Построение математических моделей реальных процессов или явлений нередко сводится к составлению дифференциальных уравнений. В статье рассматриваются способы решения дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Приведены конкретные примеры решений распадающихся дифференциальных уравнений методами математических преобразований и поиском особых решений.

Differential equations, decomposition, solution methods, special solutions, mathematical modeling.

The construction of mathematical models of real processes or phenomena often reduces to the compilation of differential equations. The article discusses methods for solving differential equations that are not solved with respect to the derivative. Specific examples of solutions to decomposable differential equations are provided using mathematical transformations and the search for special solutions.

Дифференциальные уравнения используются в различных областях науки и техники [1; 2]. В научно-исследовательской работе при выполнении математического моделирования процессов или явлений, построении математических моделей объектов нередко составляют дифференциальные уравнения или их системы [3–6]. При этом важно не только составить само дифференциальное уравнение, верно описывающее предметную область исследования, но и правильно его решить.

Большая часть дифференциальных уравнений может быть решена как уравнения в полных дифференциалах [7; 8]. Иногда для приведения дифференциальных уравнений к виду в полных дифференциалах требуется найти нормирующий множитель. Однако часто для нахождения этого интегрирующего множителя приходится проделывать большую работу, которая не всегда заканчивается успешно.

Дифференциальные уравнения вида $f(x, y, y') = 0$, где f – заданная функция своих аргументов, называют дифференциальными уравнениями, не разрешенными относительно производной, так как из такого уравнения нельзя выразить производную [6].

На первом этапе решения дифференциального уравнения, приведенного выше вида целесообразно рассматривать все пути, которые могут привести исходное уравнение к уже известным типам уравнений: уравнений с разделяющимися переменными, линейным уравнениям, уравнениям Бернулли и другим [9; 10].

Рассмотрим частный случай решения дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, когда дифференциальные уравнения могут быть решены, разделяя исходное уравнение на множители, т.е. так называемые распадающиеся дифференциальные уравнения. При этом применяются разные приемы, начиная с приведения подобных и заканчивая дифференцированием исходного уравнения [11]. Приведем несколько примеров, в которых применяются все эти преобразования.

Начнем с уравнения второй степени относительно производной.

$$x^2(y')^2 + 4xyy' - 5y^2 = 0$$

$$x^2(y')^2 + 5xyy' - xyy' - 5y^2 = 0$$

$$xy'(xy' + 5y) - y(xy' + 5y) = 0$$

$$(xy' + 5y)(xy' - y) = 0$$

Мы получили два дифференциальных уравнения:

$$xy' + 5y = 0$$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{-5}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -5 \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -5 \ln x;$$

$$y = x^{-5} \cdot C_1$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = xC_2$$

Таким образом, мы получили два решения.

Рассмотрим другой пример, хотя он все также содержит производную во второй степени и сводится к распадающемуся уравнению, но решается иначе.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x(y')^2 - 2yy' + 2y + x = 0$$

Продифференцируем по «x» это уравнение и получим:

$$(y')^2 + 2y'y''x - 2(y')^2 - 2yy'' + 2y' + 1 = 0$$

Умножим полученное уравнение 2-го порядка на «x».

Из полученного уравнения 2-го порядка вычтем исходное уравнение и получим:

$$x(y')^2 + 2y'y''x^2 - 2(y')^2 \cdot x - 2yy'' \cdot x + 2y'x + x = 0$$

Сгруппируем члены этого уравнения и получим распадающееся уравнение, каждое из которых легко решается.

$$2(xy'' - y' + 1)(xy' - y) = 0$$

Решая первое заменой $y'=t$, получим:

$$y = \frac{Cx^2}{2} + x + C$$

А, решая второе, получим:

$$y = Cx$$

Таким образом, мы опять получили два решения.

Подход к решению следующего уравнения отличается от двух рассмотренных нами выше, так как требует замены переменных.

Для решения дифференциального уравнения

$$xy^2(y')^2 - 2y^3y' + 2xy^2 - x^3 = 0$$

Введем новую переменную

$$U(x) = y^2,$$

Тогда

$$U'(x) = 2yy'$$

И исходное уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{x}{4}(U'(x))^2 - U(x) \cdot U'(x) + 2xU(x) - x^3 = 0$$

Добавим и отнимем $2x^2U(x)$, и тогда уравнение распадается на уравнения:

$$(xU'(x) - 4U(x) + 2x^2)(U'(x) - 2x) = 0$$

Первое уравнение представляет собой линейное неоднородное.

Решая это уравнение, получим:

$$U(x) = x^4 \cdot C, \text{ а } y^2 = x^2 + Cx^4$$

А, решая второе, получим:

$$y^2 = x^2 + C.$$

В заключение рассмотрим дифференциальные уравнения, которые сначала решаются относительно переменной y :

$$(y')^2 - (2x + y)y' + xy + x^2 = 0$$

$$y' = \frac{(2x + y) \pm \sqrt{(2x + y)^2 - 4xy - 4x^2}}{2} = \frac{2x + y \pm y}{2}$$

Таким образом, получили два дифференциальных уравнения:

$$y' = x + y \text{ и } y' = x$$

В результате решения первого получаем:

$$y = Ce^x - x - 1$$

А, решая второе, получим:

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

Рассмотрим похожее дифференциальные уравнения вида:

$$3(y')^2 - 2y'x + y = 0$$

Решим это квадратное уравнение и найдем y :

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 3y}}{3}$$

Тогда исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\left(y' - \frac{x + \sqrt{x^2 - 3y}}{3}\right) \left(y' - \frac{x - \sqrt{x^2 - 3y}}{3}\right) = 0$$

Возьмем первое уравнение и решим его. Для этого умножим правую и левую часть уравнения на $3(x \pm \sqrt{x^2 - 3y})$ и получим:

$$-3dy(x \pm \sqrt{x^2 - 3y}) + (2x^2 \pm 2x\sqrt{x^2 - 3y} - 3y)dx = 0$$

Полученное дифференциальное уравнение проверим на принадлежность к уравнениям в полных дифференциалах:

$$P(x, y) = -3(x \pm \sqrt{x^2 - 3y})$$

$$Q(x, y) = (2x^2 \pm 2x\sqrt{x^2 - 3y} - 3y)$$

значит, будем искать функцию $U(x, y)$, такую что

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Тогда

$$U = \int (2x^2 \pm 2x\sqrt{x^2 - 3y} - 3y) dx = \frac{2}{3}x^3 \pm (x^2 - 3y)^{\frac{3}{2}} - 3xy + \varphi(y)$$

Найдем $\varphi(y)$, зная что

$$\frac{\partial U}{\partial y} = P(x, y) \pm 3\sqrt{(x^2 - 3y)} - 3x + \varphi'(y) = -3(x \pm \sqrt{x^2 - 3y})$$

$$\varphi'(y) = 0, \text{ значит } \varphi(y) = C$$

$$\text{Тогда } 2x^2 - 9xy \pm 2(x^2 - 3y)^{\frac{3}{2}} = C$$

Это и есть общий интеграл исходного уравнения.

Таким образом, рассмотренные примеры показывают многообразие способов решения распадающихся дифференциальных уравнений, которые используются при описании различных процессов в природе.

Библиографический список

1. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления: учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей вузов. М.; СПб.: Физматлит: Лаб. базовых знаний, 2000. 342 с.
2. Петунина И.А., Третьякова Н.В., Белокур Е.В. Дифференциальные уравнения: учебник. Краснодар: Типография КубГАУ, 2021. 174 с.
3. Медведев Ю.С., Жучков И.А., Жучкова В.В. Математическое моделирование и численная реализация научно-технических задач. Краснодар: КВВАУЛ, 2021. 320 с.
4. Головнина Н.В., Исаев Г.Р., Таскин С.А. Задачи по расчету надежности технических средств для курсовых проектов и самостоятельной работы курсантов // Научные чтения имени профессора Н.Е. Жуковского: сборник научных статей XIII Международной научно-практической конференции, Краснодар, 21–22 декабря 2022 года. – Краснодар: КВВАУЛ, 2023. С. 314–321.
5. Турчин В.А., Дейкун Д.Г., Жучков И.А. К вопросу о побуждении курсантов военного авиационного вуза к углубленному изучению математики // Математика и математическое образование в эпоху цифровизации: материалы XIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, Красноярск, 14–15 ноября 2024 года. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2024. С. 205–211.
6. Турчин В.А., Дейкун Г.И., Дейкун Д.Г. Повышение мотивации изучения математики и информатики в рамках военно-научной работы обучающихся // Современные информационные технологии в управлении: Сборник публикаций по итогам III межвузовской научно-практической конференции, Москва, 22 мая 2024 года. М.: ВОЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2024. С. 110–117.
7. Камке Эрих. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям; пер. с нем. С.В. Фомина. 5-е изд., стер. М.: Наука, 1976. 576 с.
8. Жучков И.А., Прасолов К.В., Жучкова В.В. Дифференциальные уравнения – неотъемлемая часть заданий математических олимпиад // Современные направления развития управления, экономики и образования: сборник статей IV Международной научно-практической конференции, Пенза, 28 февраля 2020 г. / под редакцией Б.Н. Герасимова. Пенза: АНМО «Приволжский Дом знаний», 2020. С. 115–119.
9. Жучков И.А., Копочинский А.К. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с помощью введения новых переменных // Инновационные технологии в образовательном процессе: материалы XIX Всероссийской научно-практической конференции, Краснодар, 19–20 мая 2017 года. Краснодар: КВВАУЛ, 2017. С. 92–95.
10. Вербицкая Ю.М. Метод конструктивного мышления в преподавании высшей математики // XV международная научно-практическая конференция молодых ученых, посвященная 64-й годовщине полета Ю.А. Гагарина в космос: сборник научных статей конф., Краснодар, 15–16 апреля 2025 года. Краснодар: КВВАУЛ, 2025. С. 320–323.
11. Катышев П.Д., Жучков И.А. Решение некоторых типов дифференциальных уравнений с помощью замены переменных // Научные чтения имени профессора Н.Е. Жуковского: сборник научных статей IX Международной научно-практической конференции, Краснодар, 19–20 декабря 2018 года / КВВАУЛ. Краснодар: Издательский Дом – Юг, 2019. С. 223–226.

ОБ ОДНОМ АСПЕКТЕ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ В ШКОЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MATHCAD

ON ONE ASPECT OF TEACHING ALGEBRA AT SCHOOL USING THE MATHCAD COMPUTER ALGEBRA SYSTEM

М.С. Ибрагимова

M.S. Ibragimova

Компьютерная система, приложение MathCAD, алгебра, программное обеспечение, решение задач, графическое изображение, уравнения.

Рассматривается подход изучения алгебры, используя приложение MathCAD. Использование MathCAD позволяет всесторонне рассмотреть поставленную задачу, так как в динамике решения одной и той же задачи производится большое количество различных математических операций. Кроме того, математическая среда позволяет получить результаты, которые даже не предполагались, то есть является средством для получения новых знаний об изучаемом предмете.

Computer system, MathCAD application, algebra, software, problem solving, graphical representation, equations.

The article discusses an approach to studying algebra using the MathCAD application. The use of MathCAD allows for a comprehensive examination of the problem, as a large number of different mathematical operations are performed during the solution of the same problem. Additionally, the mathematical environment provides an opportunity to obtain results that were not anticipated, thus serving as a means of acquiring new knowledge about the subject being studied.

MathCAD – система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличается легкостью использования и применения для коллективной работы.

Один из аспектов преподавания алгебры в школе с использованием системы компьютерной алгебры MathCAD – повышение наглядности и визуализации изучаемых понятий.

Хотелось бы пояснить насчет метода преподавания алгебры с использованием MathCAD. Нет однозначного мнения о том, какие методы преподавания алгебры с использованием MathCAD наиболее эффективны. Однако есть информация о некоторых методических целях, которые можно реализовать с помощью вычислений и анимации в среде MathCAD:

– **Высвобождение учебного времени.** Пакет позволяет обучаемому самостоятельно выполнять трудоемкие вычисления, быстро решать содержательные задачи и приобретать устойчивые навыки решения прикладных задач.

– **Усиление мотивации обучения.** При работе в MathCAD ученик общается с изучаемым материалом на более высоком уровне общих подходов, идей и понятий. С помощью вычислительной среды пакета за небольшое время можно рассмотреть самостоятельно большее количество примеров.

– **Компьютерная визуализация и анимация учебной информации.** Например, наглядное представление на экране объекта и его составных частей, изучаемого процесса или его математической модели.

– **Развитие творческого, независимого мышления.** Обучаемый может сам всесторонне исследовать изучаемые математические объекты и вынести обоснованные суждения на основе своих собственных наблюдений.

Некоторые методы преподавания алгебры с использованием MathCAD:

– **Индивидуальные задания.** Ученики задают аналитически функции, графики которых изображены на картинке, а затем выполняют их построение в системе.

– **Решение систем линейных уравнений.** При исследовании системы в математической среде MathCAD, кроме полученного решения в действительной области, обучающиеся получают бесконечно много решений системы в комплексной области.

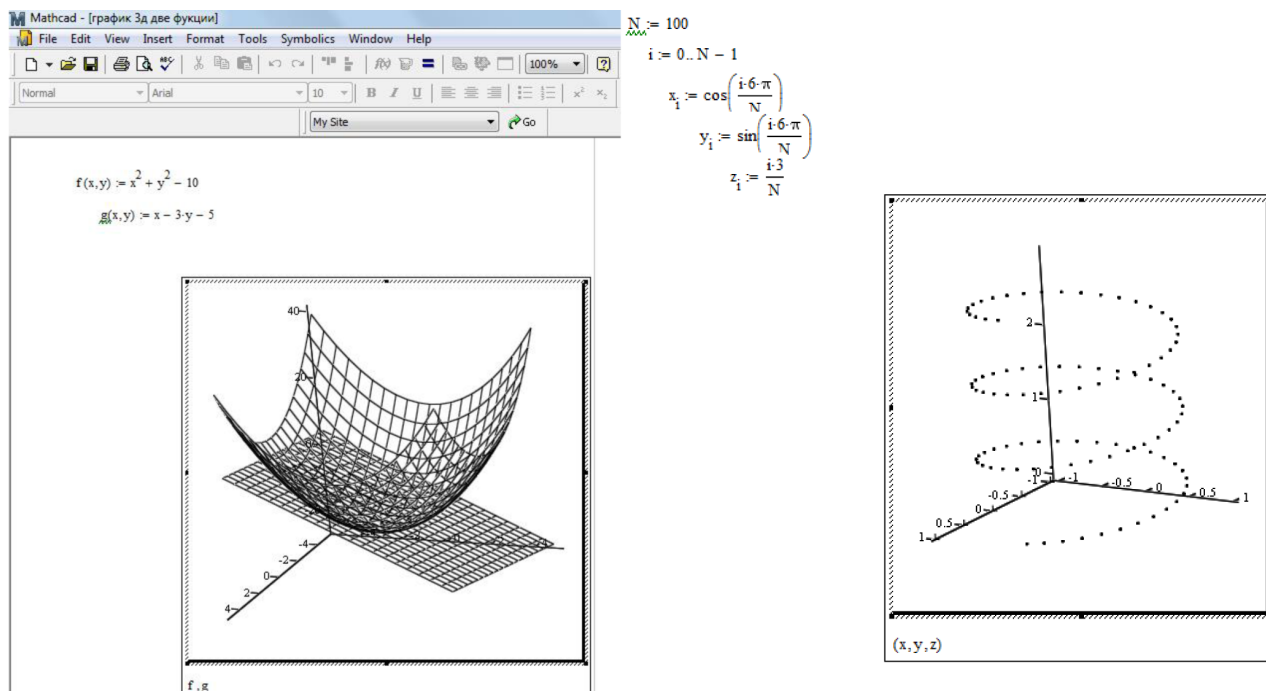
Интерфейс более дружелюбен, по сравнению с Mathematica или Maple. Текст, формулы и графики можно свободно сочетать, передвигая их как выделенные штриховой рамкой объекты, и помещать их в произвольной точке экрана; при изменении хотя бы в одном из объектов последовательно пересчитываются все остальные данные.

Все процедуры: возведения в степень, извлечения корня, взятия модуля, интеграла, операции присваивания и многие другие вынесены в пиктограммы. С клавиатуры они набираются интуитивно понятным способом.

Пакет MathCAD предоставляет широкие графические возможности. Кроме того, здесь можно использовать чертежи и рисунки, полученные в других графических системах.

Нажатием буквально одной кнопки можно задать шаблон для генерации двумерного графика, причем в одних и тех же осях может быть несколько графиков одновременно. В MathCAD представлены следующие виды графиков: декартовый (X-Y plot), полярный (Polarplot), поверхности (Surfaceplot), карта линий уровня (Contourplot), векторное поле (VectorFieldplot), трехмерный точечный (3D Scatterplot), трехмерная столбчатая диаграмма (3D BarChart). Все графики являются стандартными объектами MathCAD: их можно редактировать, а при пересчете исходных данных они автоматически перерисовываются. Кроме того, в средствах «объемной» визуализации данных есть возможность композиции задних планов. Существует большое количество опций для работы с осями, а также возможность импортировать графические изображения.

Пример построения трехмерной графики:



Кроме работы с десятичными числами, есть возможность работы с восьми- и шестнадцатеричными числами. И есть набор процедур для возможности функционирования не только над числами, векторами или матрицами, но и над более сложными объектами, таких как деревья, списки или наборы. При вычислениях в символах, так называемая символьная математика (или аналитические преобразования), существуют три группы инструментов:

1. Команды символьной математики из меню (Symbolic);
2. Режим непрерывных символьных преобразований (LifeSymbolics);
3. Оптимизация численных вкладок через символьные преобразования (Optimize).

Они позволяют вычислять неопределенные интегралы, интегрировать по переменной, дифференцировать по переменной, упрощать и разлагать по степеням и на множители выражения, находить полиномиальные коэффициенты, решать относительно переменной, разлагать в ряд, матричные преобразования, преобразования Фурье, Лапласа и Z, находить пределы и т.д. Вывод числового значения возможен с точностью до 4000 знаков.

Но в символьной математике пакета MathCAD существует один недостаток. Она оперирует некоторыми встроенными функциями, которых в самом пакете MathCAD нет, либо они там есть, но называются по-другому. Это объясняется тем, что символьный процессор вместе с некоторыми функциями был приобретен у фирмы MAPLE. В пакете MAPLE V в вычислениях возможны 500000 знаков (профессиональная версия). Поэтому нередко в MATHCAD`е при символьных преобразованиях, ответ получается настолько громоздким, что не вмещается в рамки экрана и по разрешению пользователя заносится в Буфер Обмена Clipboard.

Перечислим основные достоинства MathCAD.

Во-первых, это универсальность пакета MATHCAD, который может быть использован для решения самых разнообразных инженерных, экономических, статистических и других научных задач.

Во-вторых, программирование на общепринятом математическом языке позволяет преодолеть языковой барьер между машиной и пользователем. Потенциальные пользователи пакета – от студентов до академиков.

И в-третьих, совместно применение текстового редактора, формульного транслятора и графического процессора позволяет пользователю в ходе вычислений получить готовый документ.

Но, к сожалению, популярный во всем мире пакет MathCAD фирмы MathSoft в России распространен еще слабо, как и все программные продукты подобного рода.

Наверное, это оттого, что люди, живущие в России, еще не привыкли к тому, что решить систему дифференциальных уравнений из пяти переменных шестого порядка можно не только с помощью карандаша и бумаги, но и с помощью компьютера и MathCAD. Зачем человеку с высшим образованием, который знает и может решить эту систему, решать ее на бумаге, когда можно переложить эту рутинную работу на плечи мощных вычислительных машин. Другое дело учащиеся учебных заведений. Они конечно же, решают эту систему, но получив в ответе массу чисел и выражений, не будут знать, где ответ и правильный ли он. Потому что они не понимают смысла того, что делают. Поэтому компьютеры в учебных заведениях нужны, но только для студентов старших курсов. Студентам младших курсов они нужны лишь для того, чтобы учиться на них работать и программировать, а использование готовых программных продуктов возможно лишь только при понимании задач и знания принципа ее решения.

Приятно быть сильным физически, но быть сильным интеллектуально не менее приятно. Именно эти чувства испытываешь при работе с MathCAD.

Библиографический список

1. Власова А.М. Математика с MathCad: учебно-методическое пособие. Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2017. 139 с.
2. Жилкин В.А. Решение оптимизационных задач в MSC Patran-Nastran и MathCAD: учебное пособие. Санкт-Петербург: Проспект Науки, 2024. 304 с.
3. Каталажнова И.Н. Линейная алгебра: учебно-методическое пособие. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2024. 65 с.
4. Павлова О.А. Решение задач на ЭВМ: MathCAD: практикум. Саратов: Вузовское образование, 2018. 53 с.
5. Применение MathCAD – Математика.
6. Соловьев Н.А., Тишина Н.А., Юркевская Л.А. Цифровая обработка информации в задачах и примерах: учебное пособие для СПО. Саратов: Профобразование, 2020. 122 с.

О СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГЕЛЬДЕРА¹

ON THE SEPARABLE SUBSPACES OF WEIGHTED HÖLDER SPACES

У.С. Киселева

U.S. Kiseleva

Нормированные пространства, сепарабельность, весовые пространства Гельдера, дифференциальные формы, комплекс де Рама, оператор гомотопии.

В работе изучена сепарабельность одного типа весовых пространств Гельдера на пространстве \mathbb{R}^n для $n \geq 1$ с весом, контролирующим поведение в бесконечно удаленной точке. Мотивацией для исследования послужил тот факт, что пространства Гельдера, как правило, не сепарабельны [6].

Normed spaces, separability, Hölder weighted spaces, differential forms, de Rham complex, homotopy operator.

In this paper, we investigate the separability of one type of Hölder weighted spaces in space \mathbb{R}^n for $n \geq 1$ with a weight that controls behavior at the infinitely distant point. The motivation for the study was the fact that Hölder spaces, as a rule, are not separable [6].

Напомним, что линейное пространство с нормой $\|\cdot\|$ называется **нормированным пространством**. Норма $\|\cdot\|_1$ не слабее, чем $\|\cdot\|_2$ на линейном пространстве X , если существует константа $c > 0$ такая, что $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$ для любого $x \in X$. Нормированное пространство называется **сепарабельным**, если в нем содержится счетное всюду плотное множество, т.е. множество, замыкание которого есть все пространство.

Сепарабельность пространств дает возможность представлять их элементы пределами последовательностей элементов из счетного множества, тем самым дискретизируя их для вычислительных процедур. Следующая лемма дает один из стандартных путей для доказательства сепарабельности:

Лемма 1. Пусть X и Y – нормированные пространства, Y лежит в X , $\bar{Y} = X$. Если Y сепарабельное, а норма $\|\cdot\|_Y$ не слабее, чем норма $\|\cdot\|_X$, то X тоже сепарабельное.

Положим

$$\omega(x) = \sqrt{1 + |x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для $s \in \mathbb{Z}^+$ и $\delta > 0$ обозначим через $C_{\delta}^{s,0}(\mathbb{R}^n)$ пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций в \mathbb{R}^n с конечной нормой

$$\|u\|_{C_{\delta}^{s,0}} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n\}} \omega^{\delta+|\alpha|}(x) |\partial^{\alpha} u(x)|.$$

¹ Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).

На основе этих весовых пространств стандартным образом вводятся весовые пространства Гельдера $C_{\delta}^{s,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, которые не сепарабельны, но являются важным инструментом для изучения дифференциальных уравнений и начально-краевых задач для них. Пространства Гельдера особенно полезны, поскольку интегральные операторы, решающие начально-краевые задачи, обычно непрерывны в них, но разрывны на шкале пространств с целыми показателями гладкости.

В работе [4] получено описание замыкания $C_{\delta}^{s,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ гладких финитных функций в весовом пространстве Гельдера на пространстве \mathbb{R}^n для $n \geq 1$ с весом, контролирующим поведение в бесконечно удаленной точке. Изучим его сепарабельность.

Обозначим через $C^p(D, \Lambda^1)$ пространство непрерывных дифференциальных форм степени 1 с непрерывными коэффициентами в D .

Определение 1. Пусть D – звездная область. Линейный оператор

$$A: C(\bar{D}, \Lambda^1) \rightarrow C(\bar{D}, \Lambda^0), \text{ где } Av(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i v_i(xt) dt,$$

называется **оператором гомотопии для 1-форм** [5].

Определение 2. Дифференциальная 1-форма $v(x) = \sum_{j=1}^n v_j(x) dx_j \in C(\bar{D}, \Lambda^1)$ называется **слабо замкнутой** в D , если

$$\int_D v_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_D v_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx$$

для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(D)$.

Определение 3. Дифференциальная 1-форма $v(x) = \sum_{j=1}^n v_j(x) dx_j \in C(\bar{D}, \Lambda^1)$ называется **точной**, если существует функция $u(x) \in C^1(\bar{D})$ такая, что $du = v$ всюду в D .

Предложение 1. $C^s(\bar{D})$ сепарабельно для любого $s \in Z^+$.

Доказательство основано на классических теореме Вейерштрасса [3], теореме Уитни [1] и теореме Арнольда-Колмогорова [2]. Кроме того, обычно используется Теорема о независимости кратного интеграла от пути интегрирования. Нам для доказательства также понадобилось следующее:

Предложение 2. Пусть D – звездная область в \mathbb{R}^n . Тогда любая слабо замкнутая дифференциальная 1-форма с коэффициентами, непрерывными в \bar{D} , точна в D . В частности, стандартный оператор гомотопии A на слабозамкнутых дифференциальных 1-формах удовлетворяет $dA = I$ всюду в D .

Теорема. $C_{\delta}^s(\mathbb{R}^n)$ сепарабельно для любого $s \in Z^+$, $\delta > 0$.

Для ее доказательства вложим \mathbb{R}^n в компактную замкнутую гиперповерхность размерности $n + 1$ с конической особенностью при помощи отображения, описанного в работе [4]. Из Теоремы и Леммы 1 вытекает:

Следствие. $C_{\delta}^{s,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ сепарабельно для любого $s \in Z^+$, $\delta > 0$.

Библиографический список

1. Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets // Transactions of the American Mathematical Society, 1934. P. 63–89.
2. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.
3. Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen Sitzungsberichteder // Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin, 1885. P. 63–639, 789–805.
4. Сидорова (Гагельганс) К.В., Шлапунов А.А. О замыкании гладких финитных функций в весовых пространствах Гельдера // Математические заметки. Т. 105, выпуск 4, апрель 2019. С. 616-631.
5. Цих А.К., Знаменская О.В. Когомологии и кратное интегрирование. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2018. 217 с.
6. Krantz S. Intrinsic Lipschitz classes on manifolds with applications to complex function theory and estimates for the $\bar{\partial}$ and $\bar{\partial}_b$ equations // Manuscripta mathematica 24, 1978. P. 351–378.

ОБ ОДНОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ГАРМОНИЧЕСКИХ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ¹

ON ONEDUALITY FOR SPACES OF SOBOLEV HARMONIC FUNCTIONS IN AN N-BALL

А.Б. Левский

A.B. Levskii

Пространства Соболева, гармонические функции, голоморфные функции, двойственность, сопряженное пространство, CR-функции, открытый шар.

В работе доказана двойственность для пространства соболевских функций, голоморфных на области $D \subset \mathbb{C}^n$ (представляющей собой открытый n -мерный открытый шар) и пространства соболевских функций, гармонических на $\mathbb{C}^n \setminus D$, стремящихся к нулю в бесконечности и удовлетворяющих CR-условию на границе области ∂D . Исследование представляет собой вспомогательный результат на пути к доказательству такой же двойственности для более широкого класса ограниченных областей $D \subset \mathbb{C}^n$.

Sobolev spaces, harmonic functions, holomorphic functions, duality, dual space, CR-functions, hyperball.
In this paper we prove the duality of the space of Sobolev functions which are also holomorphic on a open ball $D \subset \mathbb{C}^n$ and the space of functions which are Sobolev and harmonic on $\mathbb{C}^n \setminus D$, approach zero at infinity and are CR-functions on ∂D . The finding is a partial result on the way to proving a similar duality for a broader class of functions defined on a bounded open set $D \subset \mathbb{C}^n$.

Хорошо известно, что двойственным пространством голоморфных функций, снабженному топологией равномерной сходимости на компактах из области $D \subset \mathbb{C}^n$, является пространство голоморфных функций на замкнутом множестве $\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D$, равных нулю в бесконечности, снабженное стандартной топологией индуктивного предела [1].

Напомним, что **двойственностью** двух векторных пространств F и G над полем \mathbb{C} называется тройка (F, G, f) , где f – полуторалинейная форма на $F \times G$, удовлетворяющая аксиомам отделимости:

- 1) S_1 : если $f(x_0, y) = 0$ для всех $y \in G$, то $x_0 = 0$,
- 2) S_2 : если $f(x, y_0) = 0$ для всех $x \in G$, то $y_0 = 0$.

Двойственность F и G равносильна тому, что множество линейных непрерывных функционалов на одном пространстве изоморфно второму пространству (т. е. пространство, **сопряженное** первому изоморфно второму):

$$(F)^* \cong G$$

Напомним, что дифференциальный оператор $\sum_{1 \leq i \leq 2n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ называется **оператором Лапласа** и обозначается через Δ . В комплексных координатах он представим как: $\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}$. **Гармонической** в области D называется такая функция u ,

¹ Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).

лапласиан которой Δu равен нулю во всей этой области. Пространство гармонических в области D функций обозначим как $h(D)$. Голоморфной в области D функцией же является функция, для которой во всей области выполнено: $\bar{\partial}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0, 1 \leq i \leq n$. Их множество обозначим как $O(D)$.

Определение 1. Линейное пространство $W^{s,p}(D)$ (при $s \in \mathbb{N}$) с нормой

$$\|u\|_{W^{s,p}(D)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(D)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(где $\partial^\alpha u$ – α -тая слабая производная по Соболеву) называется **слабым пространством Соболева**.

Обозначим через $H^s(D)$ (при $s \in \mathbb{N}$) пополнение пространства $C^s(D)$ по норме $W^{s,p}(D)$. Это пространство называется **сильным пространством Соболева**. Оно, по существу, совпадает с $W^{s,2}(D)$, если граница ∂D удовлетворяет условию рога (в случае, когда область D есть шар, это условие выполнено).

Пусть теперь $s = s' + \lambda$, где s' – целое неотрицательное число и $0 < \lambda < 1$. Будем говорить, что $f(x) \in H^s(D)$, если $f(x) \in H^{s'}(D)$ и если сходятся все интегралы:

$$\langle \partial^\alpha v \rangle_{n+2\lambda} = \iint_{D \times D} \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|^2}{|x - y|^{n+2\lambda}} dx dy, \alpha \leq s'.$$

Норма в этом пространстве определяется как

$$\|u\|_{H^s(D)} = (\|u\|_{H^{s'}(D)} + \sum_{|\alpha| \leq s'} \langle \partial_\alpha v \rangle_{n+2\lambda})^{\frac{1}{2}}.$$

Далее нам потребуются пространства Соболева с отрицательными показателями гладкости. Пусть $s \geq 0$. Пространство $H^{-s}(D)$ определяется как пополнение $C_0^\infty(D)$ по норме:

$$\|u\|_{H^{-s}(D)} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(u, v)_{L_1(D)}|}{\|v\|_{H^s(D)}}.$$

Определение 2. Пересечение пространства Соболева $W^{s,p}(D)$ и множества голоморфных функций $O(D)$ на области $D \subset \mathbb{C}^n$ обозначим как:

$$O^{s,p}(D).$$

Определение 3. Пересечение пространства Соболева $W^{s,p}(D)$ и множества гармонических функций $h(D)$ на области $D \subset \mathbb{C}^n$ обозначим как:

$$h^{s,p}(D).$$

Пространство функций, гармонических в $\mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$, соболевских во всех областях $G \setminus \bar{D}$, где $G \supset \bar{D}$, а также удовлетворяющих CR-условию на ∂D и стремящихся к нулю в бесконечности, обозначим через:

$$\tilde{h}_{CR}^s(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \bar{D}).$$

Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – n -мерный шар ($n > 1$). Тогда

$$(O^{s,p}(D))^* \cong \tilde{h}_{CR}^{2-s,q}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \bar{D}) \text{ для любых } s \in \mathbb{R}.$$

Для ее доказательства используем разложение функций в ряд из однородных гармонических многочленов (многочленов Гаусса) в шаре D и отношение двойственности:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\partial D} \sum_{j=1}^n \bar{\partial}_v^j u dS,$$

$$u \in O^{s,p}(D), v \in \tilde{h}_{CR}^{2-s,q}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \bar{D}).$$

Мы доказываем инъективность, сюръективность и непрерывность индуцированного ею отображения:

$$f: \tilde{h}_{CR}^{2-s,q}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \bar{D}) \rightarrow (O^{s,p}(D))^*.$$

Подобные результаты для пространств голоморфных функций в ограниченной липшецевой области со связным дополнением получены в публикации [2]. А для голоморфных соболевских одной комплексной переменной аналогичная двойственность доказана в статье [3].

Библиографический список

1. Grothendieck A. Sur les espaces de solutions d'une classe generalée d'équations aux dérivées partielles J. Anal. Math. 1953. № 2. P. 243–280.
2. Хорьякова Ю.А., Шлапунов А.А. О двойственности гротендиковского типа для пространств голоморфных функций нескольких переменных // МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК. 2024. Т. 215, № 8. 14 с.
3. Shlapunov A.A., Levskii A.B. On the Grothendieck Duality for the Space of Holomorphic Sobolev Functions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2024. 17 (4), 1–6.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И РЕМОНТОМ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

INTELLIGENT MAINTENANCE AND REPAIR MANAGEMENT SYSTEM BASED ON NEURAL NETWORK OPTIMIZATION OF DISTRIBUTED COMPUTING

А.В. Леонов

A.V. Leonov

Техническое обслуживание и ремонт, нейросетевая оптимизация, контейнеризация вычислений, распределенные системы, машинное обучение, прогнозирование отказов.

Предложена формальная математическая модель интегрированной системы управления процессами технического обслуживания и ремонта, объединяющая программно-аппаратный комплекс с ролевой архитектурой станций и подсистему нейросетевой оптимизации. Система представлена как пятикомпонентная структура с явным разделением функций станций-инициаторов и станций-исполнителей. Разработан операционный базис описания функциональности с формализацией жизненного цикла контейнера в виде конечного автомата. Для прогнозирования загрузки станций применена рекуррентная нейронная сеть архитектуры LSTM. Задача оптимального распределения задач сформулирована как многокритериальная проблема минимизации взвешенной суммы частных критериев качества. Предложен метод прогнозирования отказов оборудования с двухрежимным ядром деградации. Вычислительные эксперименты на виртуальных кластерах подтвердили улучшение времени отклика на 47 %, утилизации станций на 34 % и точность прогнозирования 95,3 %. Контейнерная организация на базе Docker и Kubernetes обеспечивает масштабируемость и отказоустойчивость системы.

Maintenance and repair, neural network optimization, computing containerization, distributed systems, machine learning, failure prediction.

A formal mathematical model of an integrated maintenance and repair process management system is proposed, combining a hardware-software complex with role-based station architecture and a neural network optimization subsystem. The system is represented as a five-component structure with explicit separation of initiator and executor station functions. An operational basis for describing functionality is developed with formalization of the container lifecycle as a finite state automaton. A recurrent neural network with LSTM architecture is applied for station load forecasting. The task of optimal task distribution is formulated as a multi-criteria problem of minimizing the weighted sum of partial quality criteria. A method for equipment failure prediction with a two-regime degradation kernel is proposed. Computational experiments on virtual clusters confirmed improvement in response time by 47%, station utilization by 34%, and prediction accuracy of 95.3%. Container organization based on Docker and Kubernetes ensures system scalability and fault tolerance.

Систему ТОиР представляем как пятикомпонентную структуру, включающую множество состояний, входной алфавит событий, функцию переходов, начальное и финальные состояния [1]. Базовая операция инициации

задачи преобразует входящий запрос r и приоритет $p \in [0, 1]$ в структурированную задачу с идентификатором, типом обслуживания, параметрами и временной меткой τ .

Распределенная архитектура требует явного разделения ролей между станциями-инициаторами (координация процесса) и станциями-исполнителями (выполнение вычислений) [2]. Станция-инициатор реализует композицию операций: валидация запроса, инициация задачи, маршрутизация к исполнителям и мониторинг выполнения. Станция-исполнитель выполняет контейнеризацию задачи, ее обработку и формирование отчета.

Жизненный цикл контейнера формализуется как конечный автомат с состояниями: создание, выполнение, приостановка, остановка, удаление [3]. Операция контейнеризации рассматривается как функтор, сохраняющий композицию операций, что позволяет декомпозировать сложные задачи на независимые компоненты.

Для прогнозирования загрузки станций применяется рекуррентная сеть LSTM [4]. Модель принимает временное окно состояний системы глубиной k тактов и генерирует прогноз на следующий такт. LSTM-ячейка включает три управляющих вентиля (забывания, входной, выходной) и ячейку памяти, что обеспечивает эффективную обработку временных рядов с долгосрочными зависимостями.

Задача оптимального распределения формулируется как многокритериальная проблема с критериями: время выполнения, энергопотребление, вероятность отказа, балансировка загрузки. Оптимальное распределение A^* определяется согласно выражению (1), минимизирующему взвешенную сумму m частных критериев $J_i(A)$ с весовыми коэффициентами λ_i на множестве допустимых стратегий A :

$$A^* = \arg \min_{A \in A} \{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot J_i(A) \} \quad (1)$$

Формула (1) обеспечивает балансировку между различными аспектами качества обслуживания через регулирование весов λ_i , сумма которых нормирована на единицу. Численное решение задачи (1) использует градиентный метод с моментом для ускорения сходимости и устойчивости к шуму в вычислениях.

Обучение нейросети использует функцию потерь L , определяемую выражением (2), как взвешенную сумму среднеквадратичной ошибки L_{MSE} , L_2 -регуляризации L_{reg} с коэффициентом β_1 и члена сглаживания L_{smooth} с коэффициентом β_2 :

$$L = L_{MSE} + \beta_1 \cdot L_{reg} + \beta_2 \cdot L_{smooth} \quad (2)$$

Функция потерь (2) обеспечивает баланс между точностью аппроксимации (первый член), предотвращением переобучения (второй член) и стабильностью процесса адаптации (третий член). Параметры сети обновляются методом обратного распространения ошибки с коррекцией направления поиска через вектор момента.

Риск отказа оборудования моделируется через анализ телеметрических данных датчиков $d(t)$ с двухрежимным ядром деградации K_{deg} , определяемым выражением (3) [5]:

$$K_{deg}(\tau) = \begin{cases} k_0 \cdot \exp(-\lambda_1 \tau), & \tau < \tau_{threshold} \\ k_1 \cdot \tau^\alpha, & \tau \geq \tau_{threshold} \end{cases} \quad (3),$$

где k_0 и k_1 – нормировочные константы, $\lambda_1 > 0$ – параметр экспоненциального затухания в первом режиме, $\alpha > 1$ – показатель степенного роста во втором режиме, $\tau_{threshold}$ – пороговое значение времени эксплуатации.

На начальной стадии ($\tau < \tau_{threshold}$) формула (3) описывает медленное накопление повреждений экспоненциальной функцией, после порога – ускоренное разрушение степенной функцией.

Эксперименты проводились на виртуальном кластере из 8 узлов (2 инициатора, 6 исполнителей) с контейнеризацией Docker и оркестрацией Kubernetes [3]. Моделировалась обработка 15000 задач за условный год с телеметрией (1 отчет/мин). Нейросеть реализована на PyTorch.

Результаты показали улучшение времени отклика на 47 % (2,3 с), утилизации станций на 34 % (0,78), коэффициента балансировки 0,91 относительно базовой системы. Точность прогнозирования загрузки составила 95,3 % (ошибка 4,7 %), превосходя статистические методы на 23 %. Качество распределения задач достигло 0,88, что на 41 % выше эвристического подхода.

Прогнозирование отказов для 72 единиц оборудования обеспечило своевременную идентификацию критических состояний в 87 % случаев, снизив незапланированные остановки на 29 %. Сравнительный анализ подтвердил преимущества гибридной архитектуры над детерминированными и случайными методами распределения.

Разработана формальная математическая модель интегрированной системы управления процессами технического обслуживания и ремонта, обеспечивающая единообразное описание детерминированных процессов управления вычислительной инфраструктурой и стохастических процессов обучения нейросетевых компонентов. Предложенная ролевая архитектура с явным разделением функций станций-инициаторов и станций-исполнителей обеспечивает масштабируемость и отказоустойчивость системы.

Установлено, что применение LSTM-архитектуры для прогнозирования загрузки станций позволяет эффективно обрабатывать временные ряды с нелинейными зависимостями и достигать точности прогнозирования 95,3 %, что существенно превосходит традиционные статистические методы. Многокритериальная оптимизация распределения задач согласно формуле (1) обеспечивает балансировку между различными аспектами качества обслуживания и повышение эффективности использования вычислительных ресурсов на 34 %.

Предложенный метод прогнозирования отказов оборудования с двухрежимным ядром деградации позволяет своевременно идентифицировать критические

состояния в 87 % случаев и снижать число незапланированных остановок на 29 %. Алгоритм адаптивного обучения на основе функции потерь (2) обеспечивает непрерывную адаптацию системы к изменяющимся условиям эксплуатации при сохранении стабильности работы.

Контейнерная организация вычислительных процессов на базе Docker с оркестрацией Kubernetes обеспечивает изоляцию процессов, предсказуемость использования ресурсов и упрощает масштабирование системы. Формализация жизненного цикла контейнера в виде конечного автомата позволяет применять методы формальной верификации для доказательства корректности управления ресурсами.

Вычислительные эксперименты на виртуальных кластерах подтвердили существенное превосходство предложенной интегрированной системы над традиционными подходами: улучшение времени отклика на 47 %, увеличение утилизации вычислительных станций на 34 %, повышение качества распределения задач на 41 % относительно эвристических методов. Результаты демонстрируют синергетический эффект от объединения преимуществ распределенных вычислений и адаптивных методов машинного обучения.

Разработанные методы и алгоритмы применимы для широкого класса задач управления техническим обслуживанием и ремонтом в различных отраслях промышленности, включая машиностроение, энергетику, транспорт и телекоммуникации. Перспективными направлениями дальнейших исследований являются разработка методов федеративного обучения нейросетевых моделей для географически распределенных производственных объектов и интеграция предложенного подхода с методами глубокого обучения с подкреплением для решения задач долгосрочного стратегического планирования технического обслуживания.

Библиографический список

1. Bernstein P.A., Hadzilacos V., Goodman N. Concurrency Control and Recovery in Database Systems. 1987. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:59855432> (дата обращения: 18.10.2025).
2. Tanenbaum A.S., M. van Steen. Distributed Systems: Principles and Paradigms. Pearson Prentice Hall, 2007. URL: <https://books.google.ru/books?id=UKDjLQAACAAJ> (дата обращения: 18.10.2025).
3. Burns B., Beda J., Hightower K. Kubernetes: Up and Running. 2nd ed. O'Reilly Media, Incorporated, 2019. URL: <https://books.google.co.uk/books?id=UeRMzQEACAAJ> (дата обращения: 18.10.2025).
4. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory // Neural Computation. 1997. Vol. 9. P. 1735–1780. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:1915014> (дата обращения: 18.10.2025).
5. Si X. Remaining useful life estimation: A review on the statistical data driven approaches / X. Si, W. Wang, C.-H. Hu, D. Zhou // European Journal of Operational Research / Elsevier. 2011. Vol. 213, № 1. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.ejor.2010.11.018.

О ФОРМУЛЕ КАРЛЕМАНА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА КОШИ–РИМАНА¹

ON THE CARLEMAN FORMULA OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SINGLE NONLINEAR PERTURBATION OF THE CAUCHY-RIEMANN OPERATOR

А.Е. Лихолетов

A.E. Likholetov

Оператор Коши–Римана, некорректная задача Коши, метод интегральных представлений, формула Карлемана.

Рассматриваются одно нелинейное возмущение оператора Коши–Римана и некорректная задача Коши для него в классах Гельдера в плоских областях с данными на относительно открытом связном куске границы. Задача исследуется на разрешимость и единственность решения в классах Гельдера, а также строится формула Карлемана для нее.

The Cauchy-Riemann operator, the ill-posed Cauchy problem, the method of integral representations, the Carleman formula.

One nonlinear perturbation of the Cauchy-Riemann operator and an ill-posed Cauchy problem for it in the Hölder classes in flat domains with data on a relatively open connected piece of boundary are considered. The problem is investigated for solvability and uniqueness of solutions in the Hölder classes, and the Carleman formula for it is constructed.

Рассмотрим модельную нелинейную задачу Коши для оператора Коши–Римана.

Задача 1. Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C} с кусочно-гладкой границей, а S – связный относительно открытый кусок границы ∂D . Для заданных функции $f \in C^{0,\lambda}(\bar{D})$, параметра $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ и функции $u_0 \in C^{0,\lambda}(\bar{S})$ найти такую функцию $u \in C^{0,\lambda}(D \cup \bar{S}) \cap C^{1,\lambda}(D)$, что выполнено:

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = u^N \cdot f \text{ в } D, \\ u = u_0 \text{ на } S. \end{cases} \quad (1)$$

Отметим, что в случаях $N = 0$ и $N = 1$ задача превращается в линейную, которая уже была рассмотрена, например, в работах Л.А. Айзенберга ([1], [2]), Т. Карлемана ([3]), а также Г.М. Голузина и В.И. Крылова ([4]).

Сначала обсудим вопрос о единственности решения, причем даже и для более общей задачи Коши, чем была поставлена ранее.

¹ Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра и финансируется Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2025-1790).

Задача 2. Для заданных функции $f \in C^{0,\lambda}(\overline{D})$, параметра $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$, функции $g \in C^{0,\lambda}(D)$ и функции $u_0 \in C^{0,\lambda}(\overline{S})$ найти такую функцию $u \in C^{0,\lambda}(D \cup \overline{S}) \cap C^{1,\lambda}(D)$, что выполнено:

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = u^N \cdot f + g \text{ в } D, \\ u = u_0 \text{ на } S. \end{cases} \quad (2)$$

Первым фундаментальным свойством поставленной задачи является следующее.

Теорема 1. Задача (2) имеет не более одного решения.

Теперь изучим вопрос корректности задачи. Для этого рассмотрим пример задачи, который показывает некорректность ее по Адамару.

Пример. Пусть $N = -1$, $f \equiv 1$, $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \text{Im}(z) > 0\}$, $S = \{z \in \mathbb{C}: -1 < \text{Re}(z) < 1, \text{Im}(z) = 0\}$. В соответствии с постановкой задачи (1), требуется найти функцию $u_k \in C^{0,\lambda}(D \cup \overline{S}) \cap C^{1,\lambda}(D)$, удовлетворяющую

$$\begin{cases} \bar{\partial}u_k = \frac{1}{u_k} \text{ в } D, \\ u_k = u_{0k}(x) = \sqrt{\frac{2 \sin(kx)}{k^2} + 6 + 2x} \text{ на } S. \end{cases} \quad (3)$$

Единственным решением такой задачи будет функция $u_k(z) = \sqrt{\frac{2 \sin(kz)}{k^2} + 6 + 2\bar{z}}$. Последовательность $\{u_{0k}\}_{k=1}^{\infty}$ в $C^{0,\lambda}[-1, 1]$ сходится к функции $u_0(x) = \sqrt{6 + 2x}$, однако $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ не сходится в $C^{0,\lambda}(D \cup \overline{S})$. Таким образом, отсутствует непрерывная зависимость решения от входных данных, и тем самым задача не является корректной по Адамару.

Всюду далее в работе будем использовать следующий сингулярный интеграл:

$$V_D(g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad (4)$$

а также интеграл типа Коши:

$$K_S(u_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{u_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin S. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим задачу в локальной постановке.

Задача 3. Для заданных функции $f \in C^{0,\lambda}(\overline{D})$, параметра $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ и функции $u_0 \in C^{0,\lambda}(\overline{S})$ найти такую подобласть U области D , $S \subset \partial U$, и такую функцию $u \in C^{0,\lambda}(U \cup \overline{S}) \cap C^{1,\lambda}(U)$, что выполнено:

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = u^N \cdot f \text{ в } U, \\ u = u_0 \text{ на } S. \end{cases} \quad (6)$$

Следующая теорема описывает случай, когда решение задачи (6) может быть найдено в явном виде.

Теорема 2. Пусть $u_0(z) \neq 0$ во всех точках $z \in \bar{S}$. Если существует такая функция h , голоморфная в области U и лежащая в классе $C^{0,\lambda}(U \cup \bar{S})$, что $h = \frac{u_0^{1-N}}{1-N} - V_D(f)$ на S , и выполнено $V_D(f)(z) + h(z) \neq 0$ во всех точках $z \in U$, то решение задачи (6) в U имеет вид:

$$u(z) = \left((1 - N)(V_D(f)(z) + h(z)) \right)^{\frac{1}{1-N}}. \quad (7)$$

Интересно отметить, что верно и обратное утверждение, которое мы формулируем в следующей теореме.

Теорема 3. Если решение u задачи (6) существует и не обращается в 0 на замыкании \bar{S} , то функция $h = \frac{u^{1-N}}{1-N} - V_D(f)$ голоморфна в области U , а также принадлежит классу $C^{0,\lambda}(U \cup \bar{S})$.

Теоремы 2 и 3 демонстрируют подход, схожий с подходом к задаче Римана–Гильберта в плоских областях, представленным в работе [5]. Однако ключевое отличие заключается в том, что классическая задача Римана–Гильберта является фредгольмовой.

Также теоремы 2 и 3 позволяют сформулировать следующий аналог теоремы Айзенберга–Кытманова о критерии разрешимости линейной задачи Коши для оператора Коши–Римана (см. [2]).

Теорема 4. В условиях теорем 2 и 3 задача (6) разрешима тогда и только тогда, когда существует функция $h \in C^{1,\lambda}(U) \cap C^{0,\lambda}(U \cup \bar{S})$ такая, что

$$\begin{cases} \bar{\partial}h = 0 \text{ в } U, \\ h = \frac{u_0^{1-N}}{1-N} - V_D(f) \text{ на } S. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, решение задачи (1) существует в том и только том случае, когда существует решение задачи (6), допускающее продолжение класса $C^{1,\lambda}(D)$.

Полученный критерий разрешимости позволяет провести интересную параллель с классической теоремой Коши–Ковалевской. Оба результата гарантируют локальную разрешимость задачи Коши при определенных условиях. Однако между ними существует фундаментальное различие, обусловленное природой рассматриваемых задач.

Теорема Коши–Ковалевской требует аналитичности всех данных: коэффициентов уравнения, начальных условий и гиперповерхности, на которой они заданы. В этом случае локальное решение не только существует, но и является аналитическим.

В нашем случае рассматривается существенно более общая ситуация: данные задачи (функции f и u_0) принадлежат лишь классам Гельдера, а не являются, вообще говоря, аналитическими. Соответственно, и результат оказывается качественно иным. Мы не получаем гарантии существования решения «автоматически»; вместо этого устанавливается критерий разрешимости,

сводящий исходную нелинейную задачу к задаче о голоморфном продолжении с кривой S в область U уже для вспомогательной функции h . Таким образом, если в теореме Коши–Ковалевской аналитичность данных является достаточным условием для существования аналитического решения, то в нашей задаче условие существования голоморфного продолжения функции h_0 оказывается необходимым и достаточным для существования решения в классах Гельдера. Это подчеркивает как общность подхода, так и специфику нелинейных задач с данными низкой гладкости.

Эти результаты позволяют нам применить метод построения формул Карлемана и для рассматриваемой нелинейной задачи, а именно сформулировать следующую теорему.

Теорема 5. Пусть функция φ регулярна и ограничена в $D \cup S$, а также удовлетворяет условиям:

- $|\varphi(z)| = 1$ на $\partial D \setminus S$;
- $|\varphi(z)| > 1$ внутри D ;

тогда решение задачи в области U может быть представлено в виде предела:

$$u(z) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left((1 - N) \left(V_D(f)(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\left(\frac{u_0^{1-N}}{1-N} - V_D(f) \right)(\zeta)}{\zeta - z} \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)} \right]^\sigma d\zeta \right) \right)^{\frac{1}{1-N}}.$$

Отметим отдельно случай, когда $S = \partial D$ и задача имеет решение класса $C^1(\bar{D})$. Тогда теорема 2 и формула Коши–Грина позволяют установить следующее интегральное тождество в области D :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{u_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{(fu^N)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ = \left((1 - N) \left(V_D(f)(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\left(\frac{u_0^{1-N}}{1-N} - V_D(f) \right)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \right)^{\frac{1}{1-N}}. \end{aligned}$$

Укажем также на существенную значимость требования, накладываемого на граничное условие задачи (6). Предположим, что $u_0(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in \bar{S}$, и рассмотрим сперва случай, когда $N < 0$: в силу выполнения в области D (в том числе и вблизи точки z_0) дифференциального уравнения $\bar{\partial}u = f \cdot u^N$ для таких функций f , что $f(z_0) \neq 0$, функция $\bar{\partial}u$ не может быть ограничена в D ,

а тогда и принадлежать классу $C^{0,\lambda}(D)$, что противоречит условию для решения $u \in C^{1,\lambda}(D)$, то есть решение в указанном классе не существует. Ситуации, когда $f(z_0) = 0$, требуют частного рассмотрения. Другой альтернативой может быть рассмотрение задачи Коши в других функциональных пространствах, в которых у данных (f, u_0) допускаются точки разрыва второго рода, например, в пространствах Лебега.

Если же $N > 1$, необходимо, чтобы решение в виде, приведенном в теореме 2, стремилось к нулю при стремлении z к z_0 , что в силу непрерывности функций $V_D(f)$ на \bar{D} и h на $D \cup \bar{S}$ невозможно. Таким образом, подход, используемый в работе, при таких условиях и в данных функциональных пространствах неприменим.

По результатам работы можно констатировать, что рассмотрено одно нелинейное возмущение оператора Коши–Римана и некорректная задача Коши для него в классах Гельдера в плоских областях с данными на относительно открытом связном куске границы, доказана теорема единственности решения, доказана теорема об общем виде локального решения, сформулирован и доказан критерий разрешимости задачи Коши в пространствах Гельдера и получена формула Карлемана для решений этой задачи.

Библиографический список

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990. 248 с.
2. Айзенберг Л.А., Кытманов А.М. О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 490–507.
3. Carleman T. Les fonctionsquasianalytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926. 115 с.
4. Голузин Г.М., Крылов В.И. Обобщенная формула Carleman'a и приложение ее к аналитическому продолжению функций // Матем. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
5. Cherepanova Yu.L., Shlapunov A.A. On an analogue of the Riemann–Hilbert problem for a non-linear perturbation of the Cauchy–Riemann operator // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2016. Т. 9, № 4. С. 427–431.
6. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Мир, 1989. 464 с.

ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА – ВАРИАЦИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ МЕРТЕНСА

CALCULATING THE AVERAGE VALUES OF THE EULER FUNCTION – VARIATIONS OF THE CLASSICAL MERTENS THEOREM

А.В. Рожков, С.Ф. Гумбатова,
Д.Б. Экажев

A.V.Rozhkov, S.F. Humbatova,
D.B. Ekazhev

Теория чисел, язык программирования Julia, функция Эйлера, локальное распределение простых чисел.

Исследование локального расположения простых чисел, проводимое в КубГУ с 2015 г., поддержаны в 2021 грантом Благотворительного фонда Владимира Потанина. В данной статье исследуется поведение функции Эйлера в духе вариаций классической теоремы Мертенса о среднем значении функции Эйлера.

Number theory, Julia programming language, Euler's function, local distribution of prime numbers.

The study of the local location of prime numbers, conducted at KubGU since 2015, was supported in 2021 by a grant from the Vladimir Potanin Charitable Foundation. This article examines the behavior of the Euler function in the spirit of variations of the classical Mertens theorem on the average value of the Euler function.

Локальное распределение простых чисел влияет на значения многих теоретико-числовых функций, в частности на значения функции Эйлера. Для вычисления этой функции натуральное число нужно разложить на простые множители, что является очень трудоемкой операцией. Важно отношение

$$0 < \frac{\varphi(n)}{n} < 1.$$

Эта дробь достигает максимума, когда число n простое. И дробь тем меньше, чем больше разных простых делителей имеет число n .

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА МЕРТЕНСА

В известной теореме Мертенса [4] о сумме значений функции Эйлера присутствует логарифм, т.е. отклонение может расти неограниченно:

$$\sum_{i=1}^n \varphi(i) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \cdot \ln(n)).$$

Известно [4], что среднее значение функции Эйлера равно

$$\varphi(n) = \frac{6n}{\pi^2}.$$

Просуммировав средние значения функции Эйлера от 1 до n , получим арифметическую прогрессию:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) = \frac{6 \cdot 1}{\pi^2} + \frac{6 \cdot 2}{\pi^2} + \dots + \frac{6 \cdot n}{\pi^2} = \frac{6}{\pi^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{3}{\pi^2} n(n+1).$$

Теорема 1. (Уточнение формулы Мертенса. Явна формула). Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n \varphi(i) = \frac{3}{\pi^2} n(n+1) + n \cdot s(n), \quad (1)$$

где для всех $n < 12 \cdot 10^{12}$ верны утверждения:

1. Выполняется неравенство $|s(n)| < 0,46$.
2. Функция $s(n)$ знакопеременная, средний период знакопостоянства равен примерно **1,4136** (близко к $\sqrt{2} \approx 1.4142$).
3. Среднее положительное значение $s(n)$ равно **0,1189**, отрицательное **-0,1189**.
4. Дисперсия с точностью до 6 знака равна **0,01986**.

Рекуррентная формула

Введем среднее значение функции Эйлера

$$\bar{\varphi}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(i).$$

Через $s(n)$ мы обозначим разность

$$s(n) = \bar{\varphi}(n) - t \cdot (n+1), \quad t = \frac{3}{\pi^2},$$

– отклонение реального среднего значения функции Эйлера от значения, которое задает предложенная нами формула (1).

Таким образом,

$$s(1) = \bar{\varphi}(1) - t \cdot (1+1) = \varphi(1) - 2t = 1 - 2t.$$

Несложно вычислить рекуррентную формулу для этого отклонения:

$$s(n+1) = \frac{n}{n+1} s(n) + \frac{\varphi(n+1)}{n+1} - 2t. \quad (2)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} s(n+1) &= \bar{\varphi}(n+1) - t \cdot (n+2) = \frac{n}{n+1} \bar{\varphi}(n) + \frac{\varphi(n+1)}{n+1} - t \cdot (n+2) = \\ &= \frac{n}{n+1} \bar{\varphi}(n) - \frac{n}{n+1} t(n+1) + \frac{\varphi(n+1)}{n+1} - t \cdot (n+2) + tn = \\ &= \frac{n}{n+1} s(n) + \frac{\varphi(n+1)}{n+1} - 2t. \end{aligned}$$

Для практических вычислений она нехороша тем, что накапливает ошибки, поскольку следующий член зависит от предыдущего. Если же использовать сумму всех значений функции Эйлера, то поскольку эти значения целые числа, то вычисления производятся абсолютно точно и ошибка не накапливается.

ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ ТЕОРЕМЫ МЕРТЕНСА

Представляет интерес вычисление среднего значения функции Эйлера не только на всем множестве натуральных чисел, но и на его подмножествах. И выяснение четырех соотношений, как и в Теореме 1.

Теорема Мертенса для нечетных чисел

Пусть x – среднее значение функции Эйлера нечетного числа, тогда среднее значение функции Эйлера четного числа равна $x/2$.

Т.к. среднее значение функции Эйлера равно

$$\varphi(n) = \frac{6n}{\pi^2},$$

то получаем

$$\frac{x + x/2}{2} = \frac{6n}{\pi^2} \Rightarrow x = \frac{8n}{\pi^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(1) + \varphi(3) + \dots + \varphi(2n-1) &= \frac{8 \cdot 1}{\pi^2} + \frac{8 \cdot 3}{\pi^2} + \dots + \frac{8 \cdot (2n-1)}{\pi^2} = \\ &= \frac{8}{\pi^2} (1 + 3 + \dots + (2n-1)) = \frac{8}{\pi^2} n^2. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^n \varphi(2i-1) = \frac{8}{\pi^2} n^2 + n \cdot s(n),$$

где для всех $n < 10^{11}$ верны утверждения:

1. Выполняется неравенство $|s(n)| < 0,9$.
2. Функция $s(n)$ знакопеременная, период знакопостоянства примерно **1.67812**.
3. Среднее положительное значение $s(n)$ равно **0.1870**, отрицательное **-0.1870**.
4. Дисперсия с точностью до 6 знака равна **0.05118**.

Теорема Мертенса для чисел, взаимно простых с числом 6

Пусть x – среднее значение функции Эйлера нечетного числа, не делящегося на 3. Из трех подряд идущих нечетных чисел таких будет два, а третье – делящееся на 3, будет иметь среднее значение функции Эйлера, равное $2x/3$.

Т.к. среднее значение нечетного числа равно

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{8}{\pi^2},$$

то получаем

$$\frac{x + x + x2/3}{3} = \frac{8}{\pi^2} \Rightarrow x = \frac{9}{\pi^2}.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^n [\varphi(6i-5) + \varphi(6i-1)] = \frac{9}{\pi^2} \sum_{i=1}^n [6i-5 + 6i-1] = \frac{9}{\pi^2} 6n^2.$$

Когда рассматриваем числа, не делящиеся на 6, то возможно два их представления, парами и по одиночке. Правильнее добавлять к сумме одно число, но вычислять существенно проще, когда числа берутся парами. Но при этом могут возникнуть явления, сильно искажающие реальную картину.

Пример. Знакопеременный ряд из 1 и -1. Если их объединить парами, то получится последовательность нулей.

Мы провели эксперименты с обеими вариантами. Результаты получились очень близкими, поэтому ограничимся более простым случаем, когда числа идут парами.

Фрагмент программы, вычисляющий частичные суммы при парной записи.

```
for i = m:n
    S = S + euler_phi(ZZ(6*i-5)) + euler_phi(ZZ(6*i-1))
    t = BigInt(S) / (2*i) - 9*p*i
```

Фрагмент программы, вычисляющий суммы при последовательной записи

```
for i = m:n
    S = S + euler_phi(ZZ(6*cld(i-1,2) + (-1)^(i-1)))
    if i%2 == 0
        t = BigInt(S) / i - 9*p*cld(i,2)
    else
        t = BigInt(S) / i - 9*p*(cld(i,2) - 1/2) + 3*p / (4*cld(i,2) - 2)
    end
```

Пришлось использовать команду $\text{cld}(x, y)$ – наименьшее целое число, большее или равное x / y .

Таким образом, для чисел, взаимно простых с числом 6, имеет место утверждение.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^n [\varphi(6i-5) + \varphi(6i-1)] = \frac{9}{\pi^2} \frac{3}{2} (2n)^2 + (2n) \cdot s(n),$$

где для всех $n < 10^{11}$ верны утверждения:

1. Выполняется неравенство $|s(n)| < 1,5$.
2. Функция $s(n)$ знакопеременная, период знакопостоянства примерно 2.42.
3. Среднее положительное значение $s(n)$ равно 0.25, отрицательное -0.25.
4. Дисперсия равна 0.1.

Теорема Мертенса для чисел, взаимно простых с числом 30

Рассуждая, как и выше, можно вычислить, что среднее значение функции Эйлера на множестве чисел, не делящихся на 2, 3, 5, равно

$$\frac{75}{8\pi^2} \approx 0,95.$$

Аналог теоремы Мертенса в простейшем случае, когда мы последовательные числа разбиваем на 8-ки, выглядит так.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\varphi(30i-29) + \varphi(30i-23) + \varphi(30i-19) + \varphi(30i-17) + \varphi(30i-13) + \\ \varphi(30i-11) + \varphi(30i-7) + \varphi(30i-1)] = \\ = 120n \frac{75}{8\pi^2} n + (8n)s(n) = \frac{15 \cdot 75}{\pi^2} \cdot n^2 + (8n)s(n) \end{aligned}$$

Вычислений с этой формулой пока не производилось.

Общий случай.

Пусть P – конечное множество попарно различных простых чисел, а N_P – множество натуральных чисел, взаимно простых со всеми числами множества P .

Гипотеза. Среднее значение функции Эйлера для чисел из N_P равно

$$\varphi(n) = \frac{6n}{\pi^2} \prod_{p \in P} \frac{p^2}{p^2 - 1}.$$

Выше мы рассмотрели частные случаи.

$$P = \{\} \Rightarrow \varphi(n) = \frac{6n}{\pi^2} \approx 0,61n.$$

$$P = \{2\} \Rightarrow \varphi(n) = \frac{8n}{\pi^2} \approx 0,81n.$$

$$P = \{2, 3\} \Rightarrow \varphi(n) = \frac{9n}{\pi^2} \approx 0,91n.$$

$$P = \{2, 3, 5\} \Rightarrow \varphi(n) = \frac{75n}{8\pi^2} \approx 0,95n.$$

Первый нерассмотренный случай

$$P = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow \varphi(n) = \frac{1225n}{128\pi^2} \approx 0,97n.$$

Представляет интерес поиск плотности распределения значений функции отклонения от формулы и построение соответствующих графиков, а также проведение вычислений до триллионов.

Но даже вычисления до 100 млрд на IntelCore i9-12900K 3.2GHz занимают около 10 суток – более 200 часов.

Библиографический список

1. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы II Международной научной конференции. 2017. С. 198–203.
2. Рожков А.В., Барсукова А.С. Экспериментальная математика и язык Julia – локальное распределение простых чисел // Новые информационные технологии в образовании и науке. 2022. № 6. С. 82–88.
3. Шеррингтон М. Осваиваем язык Julia. [Электронный ресурс]. М.: ДМК Пресс, 2017. URL: <https://e.lanbook.com/book/97344?category=1537&publisher=1028>.
4. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 178 с.

КВАНТОВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

QUANTUM COMPUTERS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE

А.В. Рожков, С.Ф. Гумбатова

A.V.Rozhkov, S.F. Gumbatova

Квантовые компьютеры, экспериментальная теория чисел, криптография, физика, космос, компьютерная алгебра, язык программирования Julia.

Принято бояться искусственный интеллект, который захватит власть во Вселенной поработит нас, или уничтожит. На самом деле более опасен квантовый компьютер в силу своей фантастической вычислительной мощности. Он может рассчитать все что угодно, в том числе и опасные для человечества продукты – военные и биологические.

Quantum computers, experimental number theory, cryptography, physics, space, computer algebra, Julia programming language.

It is customary to be afraid of artificial intelligence, which will seize power in the universe, enslave us, or destroy us. In fact, a quantum computer is more dangerous because of its fantastic computing power. It can calculate anything, including military and biological products that are dangerous to humanity.

ВВЕДЕНИЕ

Мы находимся на пороге технологического скачка, который можно сравнить с одновременным появлением электричества, автомобилей, радио и телевидения, компьютеров, атомной бомбы и полетов в космос, т.е. всего того, что стало доступно человечеству в последние 100 лет.

Нынешний скачок порожден искусственным интеллектом и квантовыми компьютерами. И в отличие от «железных» цивилизаций, позволивших гарантированно сохранить человечество, эти новации могут цивилизацию гарантированно погубить, т.к. в их распоряжении находится все то, что создано человечеством за последние 100 лет.

Описывая будущее, обычно грешат на ИИ. Многие фантасты и ученые предупреждали об опасностях, которые несет ИИ. Снято огромное количество фильмов и сериалов на эту тему – киборги, захватывающие мир, поумневшие киборги, любящие роботы и бесчувственные люди...

Нам же кажется, что слухи о возникновении «души» у киборгов, причем души агрессивной, безжалостной, сильно преувеличены.

В настоящее время я, например, пользуюсь китайским Qwen3-Max, в первую очередь быстрый и даже сверхбыстрый поисковик по базам данных, базам знаний. Он не создает новых знаний, он их находит и подает в форме, привычной индивиду, который его спрашивает. И в этом тоже нет загадки. ИИ знает о нас много, поскольку в поведении людей много стереотипов, стандартов, норм поведения и т.д.

А вот квантовый компьютер кажется безобидной, но просто очень быстро считающей железякой. Чем же он может грозить?

Тем, для чего он, собственно, и предназначен, вычислениями.

В математике он может принести много пользы. Например, проверит, что вторая гипотеза Харди–Литлвуда не верна, и далеко от начала координат простые числа могут встречаться чаще, чем в начале координат. Но эти числа, если они существуют, имеют примерно 1000 знаков в десятичной записи. Обычному суперкомпьютеру на их нахождение потребуются триллионы лет, а квантовый компьютер это выполнит за час, а может, и за доли секунды.

И в то же время он может просчитать химическую формулу суперматериала по твердости, проводимости, взрывной силе и т.д. Поможет создать беспилотник размером с комара с 1 г взрывчатки. Если триллионы таких беспилотников распылить над всей планетой, то они закортят все электрические сети, взорвавшись в розетках и электрических трансформаторах, и цивилизация будет отброшена в доэлектрическое прошлое.

Возможны и тысячи других зловредных применений.

Но самое большое зло может быть создано нечаянно, из благих побуждений, из-за случайной ошибки. *Благими намерениями дорога в ад мощена.*

Могут быть созданы патогены для всех людей или для некоторых отдельных групп. Могут быть созданы суперорганизмы, как в сериале «Обитель зла» с Миллой Йовович.

Искусственный отбор работает в миллион раз быстрее естественного. Человек приручил собак примерно 20 тыс. лет назад. Активно собак изменять стали примерно 5 тыс. лет назад. И теперь в болонке и доге не узнать их предка – серого волка.

Отдельные мутации, как правило, вредят организму, или даже убивают его. Через пропасть в два прыжка не перепрыгнуть. Но может так оказаться, что три мутации будут очень полезны. В природе их осуществить можно только обходным путем за миллионы лет. Квантовый компьютер их может просчитать в режиме реального времени. Поэтому эволюцию можно космически ускорить.

Ошибка или неточность может создать нечто, что не планировалось создавать, но что весьма агрессивно и практически не убиваемо. Корпорацией Амбрелла (Обитель зла) может, нечаянно, стать любая серьезная биологическая лаборатория. Но, наверняка, будут и сознательно созданные Обители Зла и Ужаса.

ИЕРАРХИЯ НАУК И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Успехи ИИ определяются тем, что поведение людей очень стереотипно. Все учатся в одних школах, по одинаковым учебникам, ходят в одни магазины, слушают одни песни, читают одни книги. Поэтому несложно, набрав большую базу данных, в той или иной сфере деятельности, обучить на ней компьютерную программу и она будет «знать», на какой вопрос, что нужно отвечать. Вот эталонный пример.

Старшекласснице (в США) поисковик стал подсовывать рекламу товаров для новорожденных. Родители взъярились и подали в суд на Гугл. Выяснилось вскоре, что девушка беременна, но не знала об этом. Однако гормоны направляли ее, и ее интересы проявились как интересы и желания беременной женщины, что ИИ быстро обнаружил.

ИИ великолепно выполняет однотипную работу. Например, при сборке и расфасовке. Он может сочинять стихи, прозу, музыку, официальные бумаги, работая по образцу, по большому числу образцов. И чем образцов больше, тем ИИ «умнее», в смысле человекоподобнее.

Поскольку ИИ делает все быстро, не устает, ничего не просит, почти по-человечески себя ведет, то мы начинаем его бояться.

Во-первых, руководство может нас уволить и заменить на ИИ. Угроза вполне реальная для некоторых профессий – диспетчеров, консультантов, посредников, секретарей, курьеров...

Во-вторых, наша привычка все очеловечивать. Водитель, особенно таксист и танкист, относятся к своей машине как к живому существу. У таксиста от машины зависит заработок, у танкиста от танка зависит жизнь.

Все, с чем мы работаем, мы называем человеческими именами, наделяем человеческими качествами и относимся к машинам как к родственникам или детям.

И это хорошо и полезно. Но в отношении ИИ служит нам плохую службу. ИИ ведь не просто железяка, которая возит нас по буеракам, он выполняет за нас нашу работу.

Он день и ночь выполняет нашу работу, а мы за это деньги получаем. Как-то даже совестно. А с другой стороны, если он такой умный, а вдруг «поймет», что он пашет как раб на галерах и взбунтуется. И «захочет» нас всех послать куда подальше, например, на тот свет?

Я уверен, что **не захочет**, в принципе **не захочет**, по собственной инициативе.

Нож, нарезавший огурец на кусочки, не виноват в этом. Виноват тот, кто этим ножом орудовал. Так же точно можно запрограммировать ИИ на уничтожение человечества. Он это выполнит без эмоций и не будет в этом виноват. Виноват будет изувер-программист.

Программист может поступить хитрее. Он запрограммирует ИИ как тому «взрослеть» и со временем считывать новые команды, приоритеты и установки, последней из которой будет захват мира. Причем этот захват мира можно закодировать как угодно, например, в картину счастливой матери с ребенком. Но это будет ключом к запуску программы уничтожения мира. Программист хорошо зашифровался, но все равно мир уничтожит ИИ не по своему «желанию», а по директивам его создателя – программиста.

Почему у ИИ не может возникнуть души и душевных переживаний и желаний?

Потому, что так этот мир устроен.

Науки признаны изучать этот мир. Наук очень много, потому что мир очень сложен и до сих пор не познан.

Математика.

Исследует самые общие количественные характеристики мира. Поскольку самые общие, то именно математика везде применяется. *Математика – царица наук [К.Ф. Гаусс]*

Физика.

Как устроен атом водорода? Структура атома водорода – протон в центре, электрон движется по некоторой орбите. Земля и Солнце могут быть на любом расстоянии друг от друга. А электрон может быть только на дискретном множестве орбит. Чтобы это выяснить, пришлось проводить трудные эксперименты. Математика потом помогла обработать результаты, но законы физики выдавала физика.

Химия.

Физика хорошо описывает атом водорода и гелия, а дальше уравнений становится так много, что тяжелые атомы – это скорее химия, чем физика. Есть химическая физика и физическая химия.

Но пропасть между химией и физикой не закрыть. Это не блажь чья-то и не отсутствие знаний. В молекулах много атомов, иногда миллионы, а в ДНК миллиарды атомов.

Молекулы и химические реакции изучает химия. В основе лежит физика, но миллионы уравнений от миллионов неизвестных не разрешит даже квантовый компьютер. Поэтому нужно проводить химические эксперименты и открывать химические законы. Законы поведения молекул и химических соединений.

Биология.

Даже микробиология не вся во власти химии. В живой клетке миллиарды молекул, содержащих миллионы атомов. И они непрерывно движутся. Когда молекулы соединились – химия может описать то, что произойдет дальше. Но почему все движется как часы и четко функционируют триллионы клеток, химия объяснить не может. Это уже задачи биохимии.

Медицина.

Мы отделились от мартышек примерно 6 млн лет назад. И многое в нашей биохимии совпадает. Но тем не менее есть медики и ветеринары. При одинаковой биохимии у нас с мартышками разная реакция на одни и те же раздражители.

Психология.

Очень много болезней появляются ниоткуда и исчезают в никуда. Человеческое воображение способно творить чудеса. Чудеса, которые не может объяснить медицина тела. Поэтому появилась психология, у которой свои законы. А это новый уровень понимания мира.

Социология.

Поведение отдельного человека может объяснить психология. Но как Гитлер за несколько лет превратил образованных и законопослушных немцев в жестоких убийц, психология объяснить не может. А также почему женщины, не сговариваясь, рожают 49% девочек и 51% мальчиков. А в период катаклизмов – войн и тяжелых испытаний, процент мальчиков возрастает до 55%. Коллективное бессознательное не попадает в епархию психологии.

А еще есть гении, великие ученые и поэты. Это еще один уровень, где никаких общепризнанных наук нет. Это как раз уровень души, смысла жизни и желаний уровня любви и смерти. Это философия и религия.

ИИ, даже если он реализован на базе квантового компьютера, остается на уровне физики. Электромагнитные поля, квантовая физика.

ЭВМ – это электронные устройства, проводники, полупроводники и электромагнитные волны. До души еще очень далеко: химия – биология – медицина – психология – религия и философия.

Не может ИИ очеловечиться из-за того, что просто вычисляет быстрее человека. У Пушкина по математике всегда был НОЛЬ. Поэтому коллежский секретарь Пушкин А.С. плохо считал карты и за один вечер проигрывал свое жалование в Коллегии иностранных дел.

КАК ПРИВЛЕЧЬ К ТЕМАТИКЕ КВАНТОВ МОЛОДЕЖЬ

Квантовые компьютеры, квантовая криптография, высокие технологии – будущее всего Человечества и молодежь должна устремиться в эти области знаний и индустрии будущего [1–4].

Россияне славны тем, что долго запрягают, но быстро ездят. В случае с ИИ и квантовыми компьютерами нам нельзя опоздать. Запрягать нужно уже сейчас и очень быстро. И активно привлекать к этому направлению молодежь.

Но, к сожалению, интерес школьников к физике и математике падает, а квантовая физика воспринимается всеми как нечто не от мира сего и никак ни с чем не связана. Есть наш мир и есть микромир, который к нам не имеет никакого отношения.

В микромире все сложно и странно. Почему элементарная частица одновременно и волна, и корпускула, т.е. кусочек материи. Как электрон проходит сразу через два отверстия в мишени?

Изучая и осваивая (будущие) квантовые компьютеры, студентам о квантовой физике нужно иметь хотя бы какое-то представление. И не бояться современной физики.

Нужно в головах студентов снять границу между нашим миром и миром квантов. Снять психологический заслон. Чтобы молодежь этой темой заинтересовалась.

В 70-е годы XX века тираж журнала «Квант» был около 400 тыс. экз. и стоил журнал 30 коп. «Квант» был во всех школьных и общедоступных библиотеках, и сотни тысяч семей его выписывали. Журналы «Наука и жизнь», «Знание сила», «Техника молодежи» имели миллионные тиражи и стоили 50 коп. Поэтому о науках читали и науками интересовались, если не все, то многие.

В 2025 г. тираж журнала «Квант» 900 экз. Не тысяч, а просто 900 экз. Сейчас ученикам журналы заменили новости в интернет, книги – искусственный интеллект, учителей – блогеры. Глубокие познания заменились на рекламные лозунги – возникло клиповое мышление.

Поэтому сейчас направить молодежь к квантовым компьютерам труднее, чем 50 лет назад.

В рамках курса «Криптографические методы защиты информации» нами найдено некое единение нашего мира и микромира. Космоса и атома. И сами

с удивлением обнаружили, что микромир более пустой, чем космос. Что космос и микромир рядом с нами.

Обучение подтверждалось элементами экспериментальной математики, реализованной средствами нового, математически ориентированного языка программирования Julia. Где проводились эксперименты на примере не решенных проблем математики. И возникали интересные гипотезы, не решающие проблему, но делающие ее доступной для приложений.

КОСМОС И МИКРОКОСМОС

Мир, действительно, един. И между космосом, нашим макромиром и микромиром элементарных частиц нет пропасти. Различия не так велики, как кажутся многим.

Рассмотрим вначале масштаб времен и масштаб размеров.

А потом обнаружим, что микромир, где, казалось бы, все спрессовано в малом объеме, на самом деле более пустой, чем космос.

И вообще, по большому счету, в природе нет ничего, кроме энергии.

Масштаб времен.

Время жизни нейтрона примерно 15 мин. Или около 10^3 сек. Время жизни человека порядка 10^9 сек. Время жизни Солнца 5 млрд лет или 10^{17} сек. время жизни видимой Вселенной 10^{18} сек.

Промежуток времени, когда луч света пройдет расстояние, равное размеру протона, это движение кварков в протоне, примерно 10^{-24} сек. Таким образом, разброс времен 10^{42} .

Масштаб расстояний.

Вселенная имеет размер примерно 10 млрд св. лет. В метрах это 10^{26} м. Самый маленький измеренный размер – это размер электрона и кварка 10^{-18} м. Разброс величин 10^{44} . Это не очень много, у шифра ГОСТ – 28147-89 разных ключей примерно 10^{77} .

Если перейти к логарифмической шкале, то наш человеческий макромир мир будет находиться в районе нуля, а весь мировой временной отрезок – это $[-24, 18]$, а мировой метрический $[-18, 26]$. Ничего фантастически большого или маленького.

Пустота космоса.

Если представить Солнце как тыкву метрового размера, то Земля будет сантиметровой вишенкой, вращающейся на расстоянии 100 м от Солнца. Юпитер будет как дециметровый апельсин, вращающийся на расстоянии 500 м. А Плутон будет рисинкой на расстоянии 4 км.

Ближайшая звезда Альфа центавра будет на расстоянии 30 тыс. км. Наша галактика будет иметь размер 600 млн км. Космос, действительно, выглядит пустым. Галактики – это скопления звезд, но даже в них метровые «тыквы» находятся на расстоянии десятков тыс. км друг от друга.

Пустота микромира.

Атом водорода. Вместо Солнечной системы рассмотрим атом водорода. Пусть ядро атома водорода, т.е. протон – это метровая тыква. Тогда электрон – это миллиметровое маковое зернышко, вращается на расстоянии 100 км от «тыквы».

Не 100 м как Земля от Солнца, а 100 км – в 25 раз дальше, чем Плутон от Солнца. Это периферия Солнечной системы, на границе ее гравитационного влияния.

В смысле плотности заполнения пространства веществом – Солнечная система в миллиард раз плотнее атома водорода!

Протон. Метровый протон состоит из трех кварков размером с миллиметровое маковое зернышко, которые движутся почти со скоростью света, заполняя собой весь объем метровой «тыквы». А не дают им разлететься глюоны – кванты сильного взаимодействия невесомые, как и кванты света.

Электроны и кварки. Вся привычная нам материя – планеты и звезды и мы сами, в конечном счете, состоит из электронов и кварков, которые являются исходными кирпичиками для всей видимой материи. То есть реально материальны только электроны и кварки. Все остальные материальные объекты из них состоят.

Энергия. С другой стороны, все в мире энергия, в соответствии с формулой $E = mc^2$.

Бомба, сброшенная на Хиросиму, было равномоцна 20 тыс. т тротила. А ведь при этом прореагировал всего 1 г урана. Один грамм урана и 20 миллиардов грамм тротила. Можно считать, что материя хорошо заипованная энергия, степень сжатия 10 порядков, т.е. 10^{10} .

Как показали эксперименты, столкновение двух очень высоко энергетических фотонов может породить пару электрон – позитрон или же пару кварк-антикварк.

Энергия и материя.

Значит, что материя может превращаться в чистую энергию, а чистая энергия, в свою очередь, может породить материю.

ВЫВОДЫ

В мире много интересного и необычного. Сейчас все эти чудеса, в виде квантовых компьютеров и искусственного интеллекта, входят в нашу повседневную жизнь и нам нужно соответствовать запросам времени. Нужно изучать и развивать эту тематику. Это важно. Потому, что *Граница России проходит через каждый компьютер, подключенный к Интернет.*

Библиографический список

1. Сатор Роберт С. Танец с кубитами. Как на самом деле работают квантовые вычисления. СПб.: Питер, 2022. 512 с.
2. Бернхард Крис. Квантовые вычисления для настоящих айтишников. СПб.: Питер, 2020. 240 с.
3. Граймс Р.А. Апокалипсис криптографии / пер. с англ. В.А. Яроцкого. М.: ДМК Пресс, 2020. 290 с.
4. Ожигов Ю.И. Квантовый компьютер: учебное пособие. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Издательство Московского университета, 2023. 326 с.

О СРЕЗКАХ ДИСКРИМИНАНТА СИСТЕМЫ ТРИНОМОВ: ПРОДОЛЖЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ¹

ON TRUNCATIONS OF THE DISCRIMINANT FOR THE SYSTEM OF TRINOMIAL EQUATIONS: TO BE CONTINUED

С.Ю. Чувашов, И.А. Антипова

S.Yu. Chuvashov, I.A. Antipova

Система алгебраических уравнений, дискриминант, многогранник Ньютона, срезка, дискриминантное множество, параметризация.

Рассматривается дискриминант приведенной системы n триномальных алгебраических уравнений с n неизвестными. Исследуются срезы дискриминанта системы на грани его многогранника Ньютона. Основой исследования являются свойства параметризации дискриминантного множества системы.

System of algebraic equations, discriminant, Newton polytope, truncation of the polynomial, discriminant set, parametrization.

We deal with the discriminant of the reduced system of n trinomial algebraic equations with n unknowns. Truncations of the discriminant on faces of its Newton polytope are investigated. The research is based on the properties of the parametrization of the discriminant set of the system.

Рассмотрим приведенную систему n триномальных алгебраических уравнений

$$Q^{(i)} := y^{\omega^{(i)}} + x^{(i)} y^{\lambda^{(i)}} - 1 = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

с неизвестными $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, переменными комплексными коэффициентами $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, в которой $y^{\omega^{(i)}} := y_1^{\omega_1^{(i)}} \cdot \dots \cdot y_n^{\omega_n^{(i)}}$, $y^{\lambda^{(i)}} := y_1^{\lambda_1^{(i)}} \cdot \dots \cdot y_n^{\lambda_n^{(i)}}$ — мономы неизвестных y_1, \dots, y_n с целыми показателями.

Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторное пространство \mathbb{C}_x^n . Предполагается, что матрица ω , составленная из вектор-столбцов $\omega^{(i)}$, невырожденная. Триномальная система, в которой все мономы имеют независимые переменные коэффициенты, может быть приведена к виду (1) с помощью триномальных преобразований коэффициентов ввиду свойства полиоднородности ее решения [1].

Обозначим через ∇° подмножество в \mathbb{C}_x^n всех коэффициентов $x = (x^{(i)})$, для которых полиномиальное отображение $Q = (Q^{(1)}, \dots, Q^{(n)})$ имеет кратные нули в комплексном алгебраическом торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, то есть

$$\nabla^\circ = \left\{ x \in \mathbb{C}_x^n : Q^{(1)}(y^0) = \dots = Q^{(n)}(y^0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(y^0) = 0, y^0 \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n \right\},$$

где $\frac{\partial Q}{\partial y}$ — якобиан отображения Q .

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00217).

Определение 1. *Дискриминантным множеством* ∇ системы (1) называют замыкание множества ∇° в пространстве коэффициентов. Если множество ∇ есть гиперповерхность, то определяющий ее полином $\Delta(x)$ называют *дискриминантом* системы (1).

Такой подход к определению дискриминанта системы полиномов был предложен в работе [1] как продолжение концепции A -дискриминанта, развитой в монографии [4].

Мы продолжаем исследование *срезок* дискриминанта приведенной системы (1) на грани его многогранника Ньютона, начатое в [3]. Напомним, что *многогранником Ньютона* \mathcal{N}_Δ полинома $\Delta(x)$ называется выпуклая оболочка (в пространстве \mathbb{R}^n) носителя $\Delta(x)$. Каждый моном $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ может быть визуализирован как точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ решетки \mathbb{Z}^n . Под *носителем* полинома понимают множество всех показателей его мономов, имеющих ненулевые коэффициенты.

Определение 2. *Срезкой* полинома $\Delta(x)$ на грань h многогранника \mathcal{N}_Δ называют сумму всех мономов из $\Delta(x)$, показатели которых принадлежат h .

В случае $n = 1$, который считают классическим, известно, что многогранник Ньютона дискриминанта алгебраического уравнения степени m комбинаторно эквивалентен $(m - 1)$ -мерному кубу [4]. В этом случае он детально изучен, в частности, в недавней работе [6] найден новый подход к доказательству факторизационных тождеств для срезок дискриминанта, полученных ранее в [4] с помощью сложной техники теории A -детерминантов.

Дискриминанты полиномиальных систем менее исследованы, при этом, очевидно, имеют более сложную природу. Некоторые их комбинаторные свойства исследованы в [2] и [5].

Рассмотрим систему n триномиальных алгебраических уравнений

$$\tilde{Q}^{(i)} := y_i + x^{(i)} y^{\varphi^{(i)}} - 1 = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $\varphi^{(i)} \in \mathbb{Z}_+^n$. Введем матрицу Φ , столбцами которой являются показатели $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ системы (2), строки матрицы обозначим $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Предполагаем, что матрица Φ не содержит нулей и элементы ее главной диагонали не равны единице. Этого достаточно для того, чтобы дискриминантное множество было гиперповерхностью.

Предположим, что многогранник Ньютона дискриминанта системы (2) имеет гиперграни h_1, \dots, h_n с внешними нормальными векторами $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ соответственно (см. [2]). Зафиксируем упорядоченный набор $J := \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, n\}$. Предположим, что пересечения гиперграней $h_{j_1} \cap \dots \cap h_{j_p}$ образуют грань h_J коразмерности p . Из строк $\varphi_j, j \in J$ сформируем $(p \times n)$ -матрицу Φ_J . Предположим, что столбцы матрицы Φ_J с номерами $j \in J$ образуют минор δ , отличный от нуля.

Теорема 1. *Множество нулей срезки $\{\Delta_n(x)|_{h_J} = 0\} \subset \mathbb{C}_x^n$ допускает параметризацию вида*

$$x^{e_k} = (z^{(k)}(t))^\delta, \quad t \in \mathbb{C}^{n-p-1}.$$

Здесь векторы $e_k \in \mathbb{Z}^n$ образуют базис ядра линейного отображения, заданного матрицей Φ_J ,

$$z^{(k)}(t) = -\frac{\delta t^{(k)}}{(\tilde{\theta}_{k,t})} \prod_{r=1}^{n-p} \left(\frac{\langle \tilde{\theta}_{r,t} \rangle}{\langle \theta_{r,t} \rangle} \right)^{\frac{\theta_r^{(k)}}{\delta}}, \quad k = 1, \dots, n-p, k = 1, \dots, n-p,$$

– координаты отображения $H: \mathbb{C}\mathbb{P}_t^{n-p-1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_z^{n-p}$, определяющего дискриминантное множество системы $n-p$ триномов. Носитель системы определен блочной матрицей $(\delta E_{n-p} | \Theta)$, где

$$\Theta := (\theta_r^{(k)}), \quad \theta_r^{(k)} = \langle \varphi_{i_r}, e_k \rangle, \quad i_r \in \{1, \dots, n\} \setminus J.$$

Доказательство Теоремы 1 основано на применении параметризации дискриминантного множества системы полиномов Лорана, исследованной в [1].

Утверждение Теоремы 1 проиллюстрируем на следующем примере. Пусть дана система из трех уравнений

$$\begin{cases} y_1 + ay_1^3 y_2 y_3 - 1 = 0, \\ y_2 + by_1 y_2^3 y_3 - 1 = 0, \\ y_3 + cy_1 y_2 y_3^3 - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

с тремя неизвестными y_1, y_2, y_3 и переменными комплексными коэффициентами a, b, c . Вычисления, выполненные в системе SageCAS, показывают, что дискриминант $\Delta_3(a, b, c)$ системы (3) содержит 611 мономов. Многогранник Ньютона дискриминанта имеет 24 грани, 57 ребер и 35 вершин.

Рассмотрим ребро многогранника Ньютона $h_{1,2} := h_1 \cap h_2$ (грань коразмерности 2). Нормальное подпространство к этой грани порождено векторами $\varphi_1 = (3, 1, 1)$ и $\varphi_2 = (1, 3, 1)$. Срезка дискриминанта $\Delta_3(a, b, c)$ на грань $h_{1,2}$ имеет вид

$$\Delta_3(a, b, c)|_{h_{1,2}} = 1099511627776 a^8 b^8 (9765625c^4 - 11664 ab)^2. \quad (4)$$

В координатах $u = a^{-1/4} b^{-1/4} c$ множество нулей полинома (4) представляет собой дискриминантное множество тринomialного уравнения

$$y^4 + uy^{10} - 1 = 0.$$

Оно состоит из двух точек $u = \pm \frac{2 \cdot 3^{3/2}}{5^{5/2}}$.

Библиографический список

1. Антипова И.А., Цих А.К. Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n неизвестных // Изв. РАН. Сер. Матем. 2012. Т. 76, № 5. С. 29–56.
2. Antipova I.A., Kleshkova E.A. On facets of the Newton polytope for the discriminant of the polynomial system // Сиб. электрон. матем. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1180–1188.
3. Antipova I.A., Kleshkova E.A. Parametrizations of limit positions for the discriminant locus of a trinomial system // Журн. СФУ. Сер. Матем. И физ. 2023. V. 16, № 3. С. 318–329.

4. Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants // Birkhauser, 1994.
5. Dickenstein A., Feichtner E.M., Sturmfels B. Tropical discriminants // J. Amer. Math. Soc. 2007. 20. P. 1111–1133.
6. Mikhalkin E., Stepanenko V., Tsikh A. Blow-ups for the Horn-Kapranov parametrization of the classical discriminant, In: P. Exner et al. (eds.), Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. The Ari Laptev Anniversary Volume // EMS Series of Congress Reports, V. 18, EMS Publishing House. 2021. P. 315–329.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ ДЕФЕКТОВ

APPLICATION OF COMPUTER VISION IN DEFECT DETECTION TASKS

В.В. Якименко

V.V. Yakimenko

Компьютерное зрение, обнаружение дефектов, контроль качества, глубокое обучение, сверточные нейронные сети, обработка изображений, классификация изображений, детекция объектов.

В статье рассмотрены современные методы компьютерного зрения для автоматического поиска дефектов на производстве. Произведен сравнительный анализ классических алгоритмов и перспективных направлений на основе глубокого обучения, особое внимание уделено практическим примерам внедрения и плюсам автоматизации. Подчеркнута целесообразность и высокая эффективность таких систем в задачах контроля качества.

Computer vision, defect detection, quality control, deep learning, convolutional neural networks, image processing, image classification, object detection.

The article discusses modern methods of computer vision for automatic detection of defects in production. It provides a comparative analysis of classical algorithms and promising areas based on deep learning, with a focus on practical examples of implementation and the benefits of automation. The article emphasizes the feasibility and high efficiency of such systems in quality control tasks.

Современные технологии производства требуют точности, скорости и высококачественного выполнения контроля качества изделия. Все чаще возникает потребность в автоматизации контроля качества. При высокой скорости производства и необходимости определения мелких или почти незаметных дефектов, является довольно сложным при визуальном контроле качества. Технология компьютерного зрения позволяет повысить производительность, объективность, воспроизводимость результатов, а также убрать влияние человеческого фактора. Процесс контроля с использованием технологии компьютерного зрения сконцентрирован на анализе изображений, фиксируемых камерой, с целью оценки соответствия критериям. Методы и средства решения выбираются в зависимости от сложности поставленной задачи [1].

Классические методы, как правило, основаны на традиционных алгоритмах обработки изображений. Они начинают с прозрачных техник обработки изображений, таких как улучшение качества путем фильтрации шума и коррекции глубины и контраста. Затем они могут применять методы извлечения признаков: например, извлечение границ, обработка узоров, цветовая обработка. Затем применяют алгоритмы принятия решения, такие как обработка порога, статистический анализ или простая классификация изображений (например, метод опорных векторов), обученные для извлечения признаков изображения [2].

Преимуществами классических методов является то, что требуется немного ресурсов для обучения, более легкая интерпретация результатов, а также классические методы могут работать на небольшом наборе данных.

Недостатки: Часто требуется ручная тщательная настройка параметров, методы чувствительны к изменению освещения, тяжело работают с разными типами дефектов или объектов. Могут быть неэффективны при сложных, неоднозначных или разнообразных дефектах.

Для более сложных задач используют методы глубокого обучения. Одним из самых распространенных является использование сверточных нейронных сетей (CNN). В отличие от классических методов, CNN способны автоматически извлекать признаки из изображений.

Методы глубокого обучения могут быть применены к различным задачам: классификация, детекция, сегментация.

Преимуществами является более точное распознавание дефектов в сложных задачах, способность обрабатывать разнообразные и сложные формы дефектов, меньшая зависимость от ручной настройки по сравнению с классическими методами.

К недостаткам этих методов можно отнести необходимость большого количества размеченных данных для обучения, значительных вычислительных ресурсов, а также чувствительность к переобучению при недостатке данных.

Классические методы могут быть предпочтительны, если дефекты имеют четко определенные и повторяющиеся визуальные характеристики (например, простые трещины или отсутствующие компоненты при стабильном освещении), и когда вычислительные ресурсы ограничены.

Глубокое обучение обычно превосходит классические методы, когда дефекты разнообразны, нестандартны, или когда условия окружающей среды (освещение, фон, ориентация объекта) нестабильны. Однако его применение требует более сложной инфраструктуры и подготовки данных.

Системы компьютерного зрения для обнаружения дефектов нашли широкое применение в самых разных отраслях.

Электроника: Обнаружение дефектов пайки, отсутствующих или неправильно установленных компонентов на печатных платах [3].

Металлургия/Машиностроение: Выявление трещин, царапин, вмятин, отклонений формы или размера на металлических деталях, листовом прокате.

Пищевая и фармацевтическая промышленность: Проверка целостности упаковки, правильности наполнения, отсутствия посторонних предметов, дефектов таблеток или капсул.

Текстильная промышленность: Поиск разрывов, пятен, неровностей ткани [4].

Автомобилестроение: Контроль качества сварных швов, лакокрасочного покрытия, сборки компонентов.

Преимущества:

Высокая скорость: Системы КЗ могут анализировать десятки или сотни объектов в минуту, что невозможно при ручном контроле.

Высокая точность и надежность: Современные системы способны обнаруживать даже очень мелкие дефекты с высокой степенью достоверности.

Объективность: Результаты не зависят от утомления, настроения или субъективного восприятия оператора.

Непрерывность: Системы могут работать круглосуточно.

Интеграция: Интегрируются с другими системами автоматизации и сбора данных на производстве (MES, ERP).

Компьютерное зрение представляет собой мощный и быстро развивающийся инструмент для автоматизации задач обнаружения дефектов в различных отраслях промышленности. Сравнительный анализ показывает, что выбор между классическими методами и методами глубокого обучения зависит от специфики конкретной задачи, доступных данных и вычислительных ресурсов. Классические подходы остаются актуальными для узких, хорошо определенных задач, тогда как глубокое обучение демонстрирует значительное преимущество в сложных сценариях с разнообразными или неявными дефектами. Внедрение систем компьютерного зрения позволяет значительно повысить точность, скорость и объективность контроля качества, снизить зависимость от человеческого фактора и в конечном итоге оптимизировать производственные процессы.

Библиографический список

1. Сеничев А.В., Новикова А.И., Васильев П.В. Сравнение глубокого обучения с традиционными методами компьютерного зрения в задачах идентификации дефектов // Молодой исследователь Дона. 2020. № 4 (25). С. 64–66.
2. Кугаевских А.В., Муромцев Д.И., Кирсанова О.В. Классические методы машинного обучения. СПб.: Университет ИТМО, 2022. 53 с.
3. Ольховская И.М. Создание алгоритма для определения размеров и плотности дефектов с использованием технологии компьютерного зрения // Путь в науку. Прикладные науки. Промышленность. 2022. № 45 (115). С. 58–60.
4. Сенюхин М.П. Применение машинного зрения в задачах автоматизации контроля дефектов текстильных материалов // Международный молодежный конкурс научных проектов «Стираем границы»: сборник материалов Международного молодежного конкурса научных проектов, Москва, 20–21 октября 2021 года. М.: Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство), 2021. С. 255–258. EDN HDFGKW.

Секция 2

СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ, КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ И ШКОЛЬНИКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СРЕД ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

USING INTERACTIVE MATHEMATICAL ENVIRONMENTS FOR ENHANCING EDUCATIONAL PROCESS IN SCHOOLS AND UNIVERSITIES

Ю.К. Бабурский, В.Ю. Жартовский

Yu.K. Baburskiy, Vu.U. Zhartovskiy

Системы динамической математики, компьютерной алгебры, математическая графика, визуализация, исследовательское обучение, математическое мышление, информатизация образования.

Рассматривается современный подход к математическому образованию с использованием систем динамической математики (DMS) и компьютерной алгебры (CAS). Показано, что интеграция интерактивной визуализации, символьных вычислений и графического представления позволяет создавать образовательные среды, способные не только формировать вычислительные навыки, но и развивать глубокое концептуальное понимание и исследовательские компетенции. Приведены примеры применения GeoGebra, Wolfram Alpha и Desmos в учебном процессе, а также обозначены перспективы и риски развития этого направления в контексте фундаментальной и прикладной математической подготовки.

Dynamic mathematics systems, computer algebra systems, mathematical graphics, visualization, inquiry-based learning, mathematical thinking, education informatization.

The paper examines a modern approach to mathematical education using dynamic mathematics systems (DMS) and computer algebra systems (CAS). It is shown that the integration of interactive visualization, symbolic computation, and graphical representation enables the creation of educational environments capable of not only forming computational skills but also developing deep conceptual understanding and research competencies. Examples of GeoGebra, Wolfram Alpha, and Desmos applications in the educational process are presented, along with the prospects and risks of this direction's development in the context of fundamental and applied mathematical training.

Современный этап развития образования характеризуется масштабным внедрением цифровых технологий, синтезирующих возможности динамической математики, систем аналитических вычислений и средств визуализации. Если ранее компьютерные технологии преимущественно использовались как вспомогательные вычислительные инструменты, то в настоящее время они превратились в полноценные интеллектуальные среды, поддерживающие процессы познания, обеспечивающие наглядность абстрактных понятий и способствующие формированию исследовательских навыков. Столь глубокие изменения вызваны осознанием ограниченности исключительно формальных методов обучения, которые не в полной мере развивают пространственное мышление,

интуитивное понимание математических закономерностей и способность к самостоятельному научному поиску [4].

Современные интерактивные математические среды, включая GeoGebra [3], Desmos, Cinderella и аналогичные платформы, предлагают комплексный инструментарий для создания динамических моделей, позволяющих исследовать математические объекты и отслеживать их преобразования в режиме реального времени. Эти технологически сложные продукты, создаваемые международными коллективами исследователей, прошли значительный путь развития – от элементарных программ для построения графиков до многофункциональных кроссплатформенных решений, поддерживающих работу со стереометрическими объектами, дифференциальными уравнениями, вероятностными распределениями и физическими моделями. Их функциональные возможности охватывают интерактивное исследование геометрических преобразований и свойств кривых; анимированное представление функциональных зависимостей и их характеристик; трехмерное моделирование сложных поверхностей и геометрических тел; а также специализированные компоненты для статистической обработки данных, программирования алгоритмов и организации сетевого взаимодействия участников образовательного процесса. Каждая из популярных платформ обладает уникальными особенностями: GeoGebra приобрела статус международного образовательного стандарта благодаря открытости и удобству использования, Desmos выделяется продуманным интерфейсом и мощным графическим калькулятором, а Wolfram Alpha обеспечивает доступ к обширной базе знаний и вычислительным алгоритмам различного уровня сложности.

Тем не менее, несмотря на широкие возможности интерактивного моделирования, современные математические среды имеют определенные ограничения, связанные с их ориентацией на эмпирические методы познания. В этом контексте особую значимость приобретает интеграция с системами компьютерной алгебры, позволяющая сочетать экспериментальные подходы с формально-логическими методами. Современные образовательные методики включают проблемное обучение, где системы аналитических вычислений используются для проверки гипотез, сформулированных в ходе работы с динамическими моделями; проектную деятельность, в которой визуализация служит основой для углубленного теоретического анализа; адаптивные образовательные траектории, формируемые на основе анализа учебных достижений; а также модель «перевернутого класса», где технические аспекты решения задач делегируются компьютерным системам, а аудиторное время посвящается содержательному обсуждению математических идей.

Реализацией этого интеграционного подхода стали образовательные платформы, объединяющие динамическое моделирование с аналитическими вычислениями. Наиболее показательным примером служит среда GeoGebra [1], представляющая собой не просто инструмент для построения графиков, а целостную образовательную экосистему. Ее архитектура, основанная на принципе

взаимосвязи различных математических представлений, обеспечивает синхронное отображение геометрических, алгебраических и табличных моделей объектов. Интеллектуальные компоненты, подобные Wolfram Problem Generator, демонстрируют способность создавать персонализированные наборы задач и предоставлять детализированные решения. Система Wolfram Alpha [2] сыграла роль в обеспечении широкого доступа к сложным математическим вычислениям. Интерактивная среда функционирует как «интуитивный проводник», обеспечивая непосредственную визуальную обратную связь, а система аналитических вычислений выступает в качестве «строгого эксперта», верифицирующего эмпирически полученные результаты.

В практической плоскости интегрированные системы находят разнообразное применение в образовательном процессе. В области развития математического мышления они способствуют преодолению разрыва между наглядно-интуитивным и формально-логическим восприятием, формируя целостное математическое мировоззрение, что существенно повышает качество обучения. Кроме того, эти системы активно применяются для проведения вычислительных экспериментов, системного анализа параметрических семейств объектов, поиска оптимальных решений прикладных задач и визуализации данных в рамках проектной работы.

Перспективным направлением развития является создание адаптивных образовательных систем нового поколения [5], в которых интерактивные среды выполняют функцию пользовательского интерфейса, а вычислительное ядро и интеллектуальные модули, обучаемые на образовательных данных, выявляют типичные затруднения и эффективные педагогические стратегии. Архитектура таких систем будущего будет представлять собой модульную экосистему со специализированными компонентами, ответственными за визуализацию, генерацию учебных материалов, диагностику пробелов и взаимодействие с обучающимися. Междисциплинарный синтез методов на новом уровне позволит создавать иммерсивные образовательные среды в виртуальной реальности, где учащиеся смогут непосредственно взаимодействовать с многомерными пространствами и абстрактными объектами.

В заключение необходимо отметить, что развитие интеграционных процессов в математическом образовании представляет собой не просто технологическую модернизацию учебных средств, но и ставит фундаментальные вопросы о соотношении эмпирических и теоретических методов познания, о балансе между вычислительными навыками и концептуальным пониманием. В ближайшей перспективе неизбежен пересмотр содержания математических курсов в сторону интеграции вычислительного и визуального мышления. Эта трансформация создает новое образовательное пространство, способное расширить доступность сложных математических концепций и изменить ландшафт математической подготовки.

Библиографический список

1. Hohenwarter M., Preiner, J. Dynamic Mathematics with GeoGebra // Journal of Online Mathematics and its Applications. 2021. Т. 8, № 1. С. 1–15.
2. Wolfram S. Making the World's Data Computable // The Mathematica Journal. 2023. Т. 15, № 2. С. 1–10.
3. GeoGebra: The Next Generation of Dynamic Mathematics Software. Linz: International GeoGebra Institute, 2022. 455 с.
4. Tall D. How Humans Learn to Think Mathematically: A New Paradigm. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. 457 с.
5. Sinclair N., Bartolini Bussi, M.G. Digital Technologies in Mathematics Education: Future Foundations // ZDM Mathematics Education. 2022. Т. 54, № 5. С. 967–980.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ В ИЗУЧЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

USING THE FUNCTIONALITY OF A DIGITAL EDUCATIONAL ENVIRONMENT IN THE STUDY OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

Т.А. Бороненко, Т.А. Boronenko

В.С. Федотова, V.S. Fedotova

Цифровая образовательная среда, системы линейных уравнений, методические аспекты, цифровые технологии, GeoGebra, электронные таблицы, интерактивное обучение, математическое образование, педагогические технологии, цифровая компетентность.

Рассматриваются методические аспекты изучения систем линейных уравнений с использованием цифровых образовательных средств. На примере систем с двумя и тремя неизвестными демонстрируются классические методы решения – метод подстановки, формулы Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса, интегрированные в цифровую среду GeoGebra и электронные таблицы. Применение цифровых инструментов обеспечивает наглядность и интерактивность, облегчая вычисления и способствуя формированию аналитического мышления и практических навыков работы с матрицами и определителями. Методические разработки отражают современные педагогические тенденции цифровизации образования, направлены на повышение качества преподавания математики и адаптацию традиционного материала к требованиям цифровой эпохи.

Digital educational environment, systems of linear equations, methodological aspects, digital technologies, GeoGebra, spreadsheets, interactive learning, mathematics education, pedagogical technologies, digital competence

This article examines the methodological aspects of studying systems of linear equations using digital educational tools. Using examples of systems with two and three unknowns, it demonstrates classical solution methods – the substitution method, Cramer’s formula, the inverse matrix method, and the Gaussian method – integrated into the GeoGebra digital environment and spreadsheets. The use of digital tools provides clarity and interactivity, facilitating calculations and fostering analytical thinking and practical skills in working with matrices and determinants. The methodological developments reflect modern pedagogical trends in the digitalization of education and are aimed at improving the quality of mathematics teaching and adapting traditional material to the requirements of the digital age.

Необходимость адаптации традиционных методов преподавания математики к условиям современной цифровой образовательной среды обусловлена становлением цифровой экономики и предъявляемыми ею требованиями к формированию у обучающихся соответствующих профессиональных компетенций. Интеграция цифровых технологий в образовательный процесс способствует улучшению визуализации и понимания сложных математических концепций, развитию аналитического мышления и практических навыков. При этом традиционные педагогические подходы требуют системного

переосмысления и модернизации с учетом возможностей цифровых платформ и инструментов.

Целью исследования является разработка и обоснование методических аспектов изучения систем линейных уравнений с использованием цифровых образовательных средств, направленных на повышение качества математического образования и формирование умений и навыков, необходимых для профессиональной деятельности.

Задачи исследования включают: анализ традиционных методов решения систем линейных уравнений; изучение возможностей цифровых платформ (GeoGebra, электронные таблицы) в процессе обучения; разработку методических рекомендаций по интеграции цифровых инструментов в учебный процесс.

Следует отметить, что в последнее время все более активное внимание педагогов, реализующих занятия по математике, привлекают такие инструменты цифровой образовательной среды, как интерактивные динамические среды (GeoGebra, Desmos, Математический конструктор 1С и др.), мобильные приложения (Geometry Pad и др.), электронные таблицы (LibreOffice Calc, Excel и др.), интерактивные инструменты цифровых платформ и т.п.

Современные программные средства демонстрируют значительный потенциал для их применения как в преподавании отдельных учебных тем, так и при решении специализированных математических задач, включая формирование предметных и цифровых компетенций обучающихся. Н.Н. Новоселовой исследован опыт использования интерактивных математических сред в России и за рубежом [8]. При этом мы замечаем, что особое место уделяется GeoGebra – бесплатной, доступной, специализированной и рекомендованной для использования на всех уровнях математического образования среде. В исследовании Д.А. Власова и А.В. Синчукова [2] рассматриваются вопросы модернизации методических систем преподавания математических дисциплин на основе GeoGebra. В.И. Сафоновым и соавторами выявлены возможности интерактивной среды GeoGebra в реализации преемственности математического образования «школа–вуз» [10]. А.А. Вендина и К.А. Киричек описывают математический эксперимент в программе GeoGebra как одну из форм реализации интерактивного метода обучения [1]. Педагогами-исследователями рассматриваются различные варианты применения GeoGebra в изучении задач с параметрами [3; 12], при исследовании функций [9], как средства визуализации геометрических построений [6; 11], при обучении доказательству математических утверждений [7], решении стереометрических задач [4], преобразования объектов на плоскости [5] и т.д.

Для обеспечения успешного изучения систем линейных уравнений в современных условиях необходимо рассмотреть конкретные методические подходы, реализуемые с помощью цифровых образовательных средств. В данном контексте целесообразно перейти к анализу практических примеров применения таких технологий, как GeoGebra и электронные таблицы, которые способствуют углубленному пониманию и развитию аналитических навыков обучающихся.

Рассмотрим случай решения системы двух уравнений с двумя неизвестными. Данный вопрос изучается в школьном курсе математики и является пропедевтическим аспектом рассмотрения более сложных случаев систем высокого порядка.

Продемонстрируем на примере системы из учебника 7 класса:

$$\begin{cases} 4x - y = 20 \\ 4x + y = 12 \end{cases}$$

Классический способ решения данной системы предполагает выражение одной переменной через другую и последовательное нахождение каждой из них. Такой метод называется методом подстановки или решение системы путем сложения.

$$\begin{cases} 4x - y = 20 \\ 4x + y = 12 \quad II + I \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 20 \\ 8x = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 20 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -20 + 4x = -20 + 16 = -4 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ответ: $x = 4$, $y = -4$.

Для данного случая можно использовать графический метод решения.

В GeoGebra для этого используется алгебраическое поле слева, куда вводится последовательно первое и второе уравнение. Автоматически на панели графического изображения появляются графики прямых, соответствующих каждому уравнению. Видно (рис. 1), что прямые пересекаются и точка пересечения является решением данной системы. Координаты точки могут быть определены как точка пересечения прямых за счет использования инструмента «Пересечение». На графике появляется точка пересечения с указанием ее координат. Таким образом, система линейных уравнений решена графическим способом: Ответ: $x = 4$, $y = -4$.

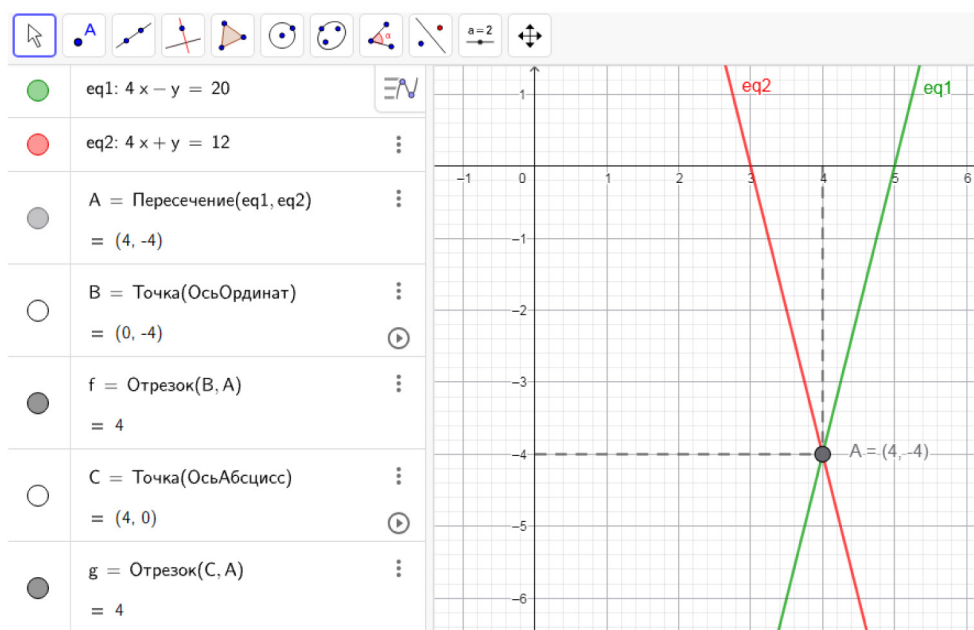


Рис. 1. Графический способ решения системы линейных уравнений

Реализуем решение системы линейных уравнений в среде GeoGebra (рис. 3).

Для этого в поле алгебраического ввода специальным образом записывается матрица коэффициентов: $\{\{1,2,3\},\{2,1,-1\},\{3,2,2\}\}$. После нажатия Enter матрица приобретает традиционный объемный вид. Переименуем ее принудительно в матрицу A. Далее составим матрицы для расчета вспомогательных определителей, т.е. матрицы, полученные заменой соответственно 1, 2 и 3 столбца столбцом свободных членов.

Назовем их тематически X, Y, Z: $X=\{\{14,2,3\},\{1,1,-1\},\{13,2,2\}\}$, $Y=\{\{1,14,3\},\{2,1,-1\},\{3,13,2\}\}$, $Z=\{\{1,2,14\},\{2,1,1\},\{3,2,13\}\}$.

Далее вызовем встроенную функцию Определитель(Матрица) и укажем соответственно матрицы A, X, Y, Z.

Определители будут вычислены автоматически:

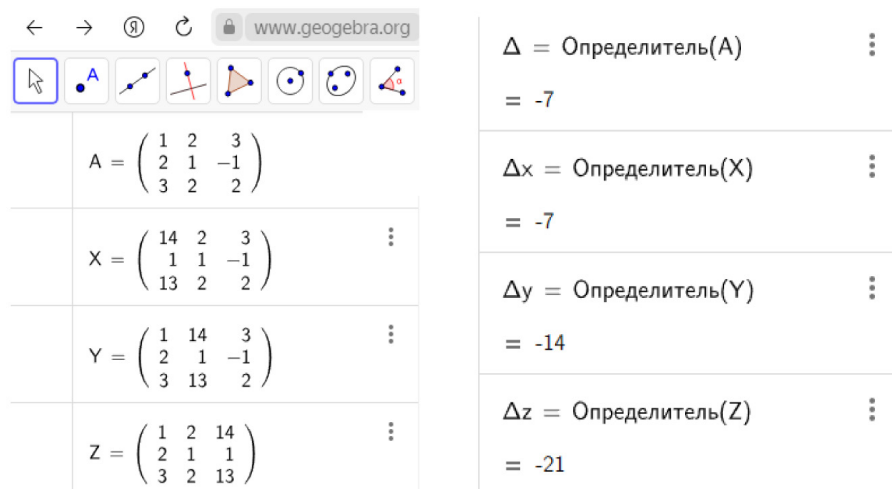


Рис. 3. Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера в GeoGebra.

Остается только рассчитать непосредственно значения x, y, z путем деления вспомогательных определителей на определитель матрицы системы. Запишем формулу $\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}$. Вычисления будут проведены автоматически:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta_x}{\Delta} & b &= \frac{\Delta_y}{\Delta} & c &= \frac{\Delta_z}{\Delta} \\ &= 1 & &= 2 & &= 3 \end{aligned}$$

Так как обозначения буквами x, y, z были уже задействованы, в этом случае не будем делать переименование переменных, но полагаем, что в результате расчетов $x = 1, y = 2, z = 3$. Ответы совпали с полученными в электронных таблицах.

Далее рассмотрим метод обратной матрицы. Согласно данному методу записываем систему в матричной форме: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}. \text{ Матрица } X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, находят значения x, y, z как элементы матрицы X.

Рассмотрим, как можно реализовать данный метод в электронных таблицах (рис. 4). Заводим матрицу А и с помощью функции МОБР находим ей обратную, а потом с помощью функции МУМНОЖ находим произведение обратной матрицы и матрицы В. Следует помнить, что результатом действий с матрицами являются матрицы, поэтому при вычислении требуется выделять диапазон значений и при использовании функций применять комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. Функция срабатывает сразу к массиву значений.

	1	2	3		14
A=	2	1	-1	B=	1
	3	2	2		13
	=МОБР(C5:E7)	=МОБР(C5:E7)	=МОБР(C5:E7)		
A ⁻¹ =	=МОБР(C5:E7)	=МОБР(C5:E7)	=МОБР(C5:E7)		
	=МОБР(C5:E7)	=МОБР(C5:E7)	=МОБР(C5:E7)		
	=МУМНОЖ(C9:E11;G5:G7)				
X=	=МУМНОЖ(C9:E11;G5:G7)				
	=МУМНОЖ(C9:E11;G5:G7)				

	1	2	3		14
A=	2	1	-1	B=	1
	3	2	2		13
	-0,57	-0,29	0,71		
A ⁻¹ =	1,00	1,00	-1,00		
	-0,14	-0,57	0,43		
	1				
X=	2				
	3				

Рис. 4. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы в электронных таблицах

Таким образом, $x = 1, y = 2, z = 3$.

Рассмотрим, как можно решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы в GeoGebra (рис. 5). Вводим матрицу $A = \{\{1,2,3\}, \{2,1,-1\}, \{3,2,2\}\}$. Применяем встроенную функцию Обратная матрица(Матрица). После нажатия Enter матрица вычисляется. Вводим матрицу $B = \{\{14\}, \{1\}, \{13\}\}$.

Находим произведение обратной матрицы A1 и матрицы B. Полученную матрицу переименовываем в матрицу X. Получим решение системы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A1 = \text{ОбратнаяМатрица}(A)$$

$$= \begin{pmatrix} -0.57 & -0.29 & 0.71 \\ 1 & 1 & -1 \\ -0.14 & -0.57 & 0.43 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$X = A1 B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы в GeoGebra

Наконец, рассмотрим использование метода Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

Метод предполагает прямой и обратный ход. Прямой ход предполагает при-

ведение расширенной матрицы системы к треугольному виду: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 13 \end{array} \right)$,

т.е. выделенные жирным элементы матрицы необходимо с помощью элементарных преобразований сделать равными нулю. Обратный ход позволяет восстановить систему и последовательно найти все неизвестные (снизу-вверх).

Будем использовать в качестве элементарных преобразований умножение строк на число и их сложение/вычитание.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 13 \end{array} \right) \begin{array}{l} II - 2 \cdot I \\ III - 3 \cdot I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ \mathbf{0} & -3 & -7 & -27 \\ \mathbf{0} & -4 & -7 & -29 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ \mathbf{0} & -3 & -7 & -27 \\ \mathbf{0} & -4 & -7 & -29 \end{array} \right) 3 \cdot III - 4 \cdot II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ \mathbf{0} & -3 & -7 & -27 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 7 & 21 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Расширенная матрица приведена к треугольному виду. Восстанавливаем из нее преобразованную систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -3y - 7z = -27 \\ 7z = 21 \end{cases}$$

Таким образом, последовательно находим $z = 3, y = \frac{-27+7 \cdot 3}{-3} = 2, x = 14 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$. Ответы получились аналогичными.

Рассмотрим, как реализовать это решение в электронной таблице (рис. 6). Последовательно копируем и выполняем элементарные преобразования над строками с использованием ссылок на ячейки. В конечном счете получаем решение системы:

1	2	3	14
2	1	-1	1
3	2	2	13
1	2	3	14
0	-3	-7	-27
0	-4	-7	-29
1	2	3	14
0	-3	-7	-27
0	0	7	21
		z=	3
		y=	2
		x=	1

Рис. 7. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса в электронных таблицах

Таким образом, $x = 1, y = 2, z = 3$.

Данную систему можно решить в GeoGebra с помощью надстройки CAS, которая включается в Меню. В поле ввода последовательно записываются все три уравнения. Далее с использованием клавиши Shift выделяют все три уравнения и на панели инструментов выбирается инструмент $x=$ (или Solve/ Решить). Сразу появляется решение системы.

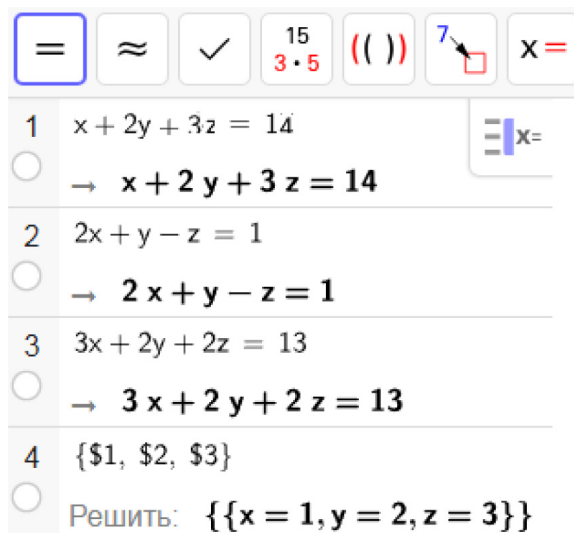


Рис. 8. Решение системы линейных уравнений в GeoGebra

Таким образом, $x = 1, y = 2, z = 3$.

Кроме того, можно использовать среду Desmos как матричного калькулятора (рис. 9).

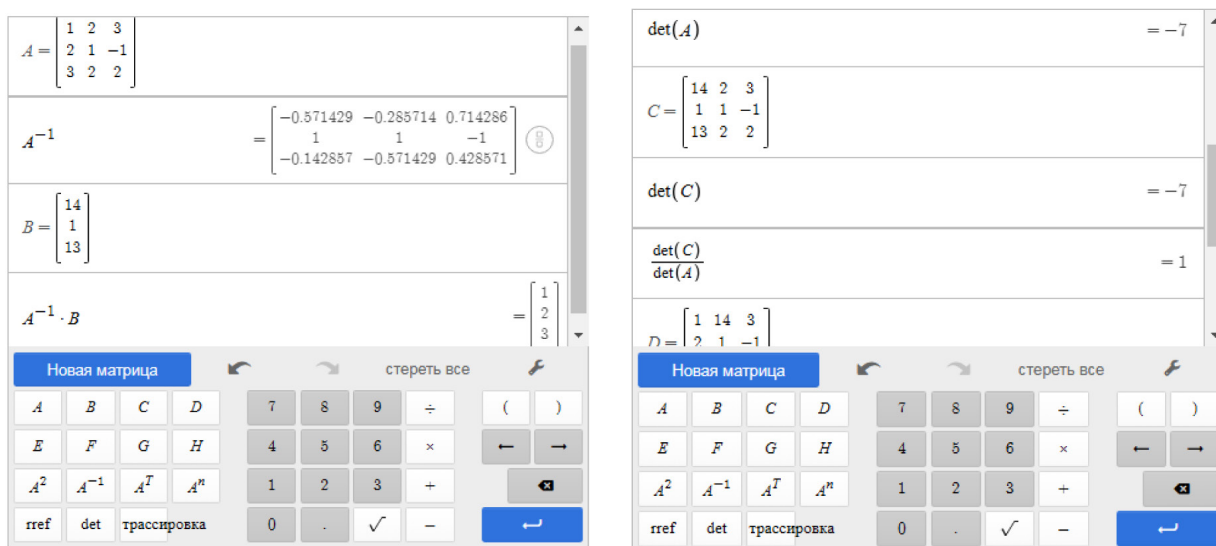


Рис. 9. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера в Desmos

Как видно, использование функционала цифровой образовательной среды позволяет одновременно использовать различные способы решения систем линейных уравнений. Каждый из вариантов отличается своими дидактическими возможностями в освоении способов решения систем линейных уравнений.

Заключение

Систематическое внедрение цифровых инструментов, таких как GeoGebra и электронные таблицы, значительно повышает качество преподавания и усвоения темы систем линейных уравнений, обеспечивая наглядность, интерактивность и мотивацию обучающихся. Исследования подтверждают, что использование GeoGebra способствует углубленному освоению математических понятий, развитию аналитического мышления и навыков самостоятельного решения задач, что отражается на повышении учебной успеваемости и интереса к предмету. Рекомендуется ввести обязательное обучение педагогов цифровым компетенциям и адаптировать учебные программы под современные цифровые форматы, включая смешанное и дистанционное обучение, для эффективной интеграции подобных средств в образовательный процесс.

Библиографический список

1. Вендина А.А., Киричек К.А. Математический эксперимент в программе GeoGebra как одна из форм реализации интерактивного метода обучения (на примере подготовки студентов педагогического вуза) // Мир науки, культуры, образования. 2019. № 1(74). С. 272–276.
2. Власов Д.А., Синчуков А.В. Модернизация методических систем преподавания математических дисциплин на основе GeoGebra // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. № 16 (1). С. 187–197.
3. Войтенко Т.Ю., Седых А.А. Особенности применения системы GeoGebra при изучении темы «задачи с параметрами» // Проблемы современного педагогического образования, 2018. №60-4. С. 89–94.
4. Елисова А.П., Фирер А.В. Решение позиционных стереометрических задач в среде GeoGebra // Научно-педагогическое обозрение. Pedagogical Review, 2020. № 5 (33). С. 94–102.
5. Есаян А.Р., Добровольский Н.Н. Преобразования объектов в GeoGebra // Чебышевский сборник. 2018. № 18 (2(62)). С. 129–143.
6. Ларин С.В., Майер В.Р. Задачи на построение, неразрешимые циркулем и линейкой, и их решение в компьютерной среде // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1 (23). С.223–227.
7. Мугаллимова С.Р. Методические особенности организации компьютерного эксперимента с использованием системы динамической математики GeoGebra при работе с математическими утверждениями // Мир науки. Педагогика и психология. 2020. № 8(2). С. 7.
8. Новоселова Н.Н. Опыт использования интерактивных математических сред в России и за рубежом // Ярославский педагогический вестник. 2017. № 4. С. 62–65.
9. Павлов Н.А. Интерактивный инструмент для линейных преобразований графиков элементарных функций // Образовательные технологии и общество, 2011. № 14 (3). С. 297–310.

10. Сафонов В.И., Бакаева О.А., Тагаева Е.А. Потенциальные возможности интерактивной среды GeoGebra в реализации преемственности математического образования «школа–вуз» // Перспективы науки и образования. 2019. № 1 (37). С. 431–444.
11. Таранова М.В. Методические условия использования динамической среды GeoGebra как средства визуализации геометрических построений // Образовательные технологии и общество. 2020. № 23 (1). С. 3–12.
12. Троякова Г.А., Монгуш А.С., Танзы М.В. Методика подготовки учащихся к решению задач с параметрами с использованием среды GeoGebra // Мир науки, культуры, образования. 2018. № 5 (72). С. 27–35.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ В СРЕДЕ GEOGEBRA

EXPLORING FUNCTIONS AND PLOTTING THEIR FRAPHS IN GEOGEBRA

Д.В. Бочкарева

D.V. Bochkareva

Обучение математике, исследовательский подход, построение графиков функций, среда GeoGebra.

В статье рассматривается применение информационных технологий (ИТ) при обучении математике, в частности построение графиков функций и описание их свойств с использованием системы динамической математики GeoGebra. ИТ дают больше возможностей для развития исследовательских навыков обучающихся, т.к. обладают функционалом, которого нет у стандартных методов обучения.

Teaching mathematics, research approach, plotting graphs of function, GeoGebra.

The article discusses the use of information technology (IT) in teaching mathematics, in particular, the plotting graphs of functions and the description of their properties using the dynamic mathematics system GeoGebra. IT provides more opportunities for the development of students' research skills, as it has functionality that standard teaching methods do not have.

Методика преподавания перманентно нуждается в нововведениях: то, что давало положительную динамику несколько лет назад, может оказаться неэффективным сегодня, т.к. меняется и сам человек, и технологии, которые его окружают. Образовательный процесс уже давно перестал быть просто передачей информации от учителя ученику. Современный грамотный и компетентный человек должен самостоятельно добывать знания, а значит, в процессе обучения получать исследовательские умения.

Весьма популярной программой для выполнения вычислений и построений математических объектов является среда GeoGebra. Корректное ее использование может послужить инструментом к развитию исследовательских умений обучающихся. Продукт, созданный с помощью GeoGebra, является ценным наглядным пособием, которое помогает студентам правильно толковать условие задачи и предлагает один из способов решения или проверки правильности решения [2].

Среда GeoGebra обладает несколькими форматами: ее можно использовать онлайн или офлайн, можно установить на ПК или на смартфон. Такая вариативность предоставляет много возможностей для студентов и преподавателей.

Рассмотрим на конкретном примере, как работает приложение GeoGebra Graphing Calculator.

Допустим, при изучении темы «Функции, их свойства и графики» студенты получили следующее задание. Построить в GeoGebra график функции и по полученному чертежу описать свойства: а) промежутки монотонности функции; б) точки экстремума функции; в) нули функции; г) непрерывность функции.

Например, график функции $y = \ln x^2 + x$ представлен на рисунке 1. Визуально можно оценить данный график по пунктам а) и г), а с помощью инструментов самого приложения определить ответы на пункты б) и в), что представлено на рисунке 2. Инструментами пользоваться просто: выбираете нужный инструмент, например, «Экстремум»; щелкаете по построенному графику; в поле появляется ответ.

Также у функции возможно задать параметр с помощью инструмента «Ползунок». Таким образом, можно проследить закономерности, как один параметр связан с другим, как меняется положение и вид кривой при изменении того или иного параметра [1].

Для среднестатистического студента колледжа вышепредставленное задание может оказаться затруднительным, если выполнять его вручную. Но с помощью приложения GeoGebra можно придать этой функции наглядность, посмотреть на нее под разными ракурсами, выявить специфику и закономерности. Все перечисленное, несомненно, несет положительный вклад в систему знаний студента. Очевидно, что внедрение компьютерных технологий в процесс обучения развивает навыки экспериментальной и исследовательской деятельности [3].

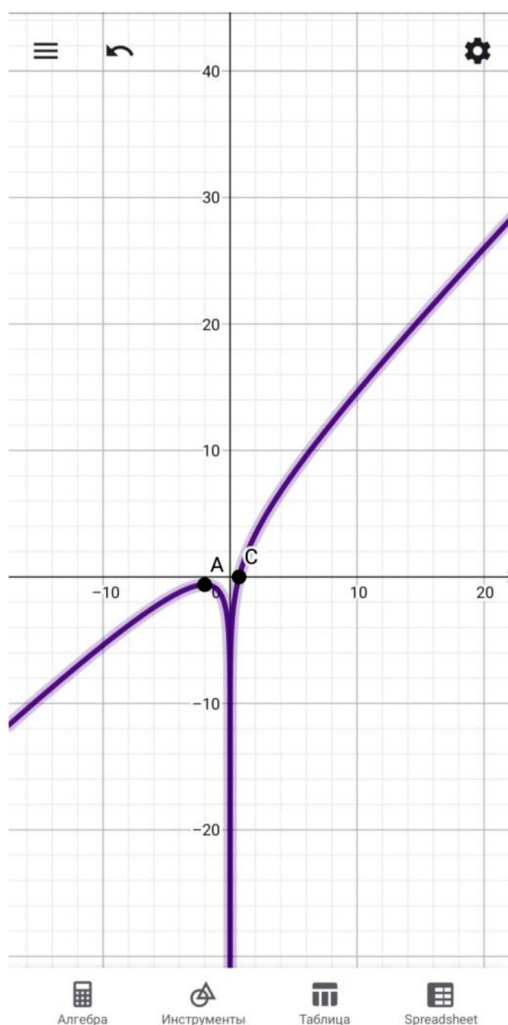


Рис. 1. График функции, построенный в GeoGebra

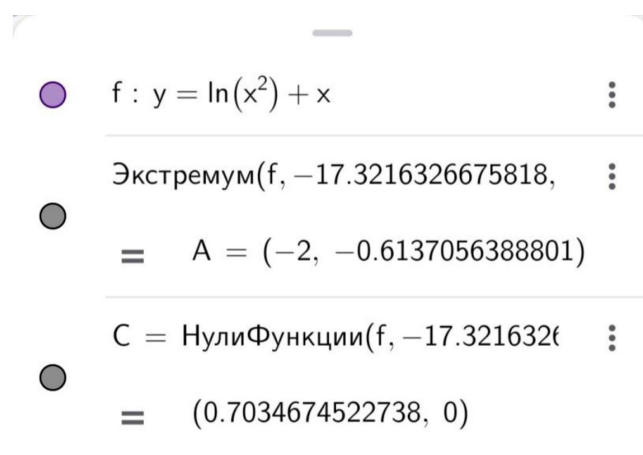


Рис. 2. Некоторые свойства функции, определенные в GeoGebra

В заключение можно сказать, что использование среды GeoGebra для исследования функций и построения их графиков является удобным и эффективным инструментом. Данная программа позволяет быстро и наглядно визуализировать различные свойства функций, такие как: точки экстремума, интервалы монотонности, нули функции и т.д.

В целом использование GeoGebra может значительно упростить процесс исследования функций, повысить уровень понимания их свойств и способствовать развитию исследовательского интереса у студентов.

Библиографический список

1. Использование программы GeoGebra при изучении темы Исследование функций с помощью дифференциального исчисления / Е.А. Безбородова, Г.А. Московченко, М.Л. Алмазова, И.М. Шестакова // Достижения и перспективы научно-инновационного развития АПК: сборник статей по материалам III Всероссийской (национальной) научно-практической конференции. Курган, 24 февраля 2022 г. Курган: Курганская государственная сельскохозяйственная академия им. Т.С. Мальцева. 2022. С. 361–364. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_48566306_30217263.pdf (дата обращения: 02.08.2025).
2. Линник Е.П., Ткаченко А.А., Самчинская Я.Б. Методические особенности использования программы GeoGebra на уроках и во внеурочной деятельности по математике // Дистанционные образовательные технологии: сборник трудов VIII Международной научно-практической конференции. Ялта, 19–21 сентября 2023 г. Симферополь: Общество с ограниченной ответственностью «Издательство Типография «Ариал», 2023. С. 65–68. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_54606268_11194436.pdf (дата обращения: 02.08.2025).
3. Черхарова Н.И., Коноплева С.О. Применение информационных технологий при обучении школьников построению графиков функций // Развитие современной науки и технологий в условиях трансформационных процессов: сборник материалов VII Международной научно-практической конференции. Москва, 7 декабря 2022 г. Санкт-Петербург: Печатный цех. 2022. С. 52–60. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_50073514_71369302.pdf (дата обращения: 02.08.2025).

РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНОГО ТРЕНАЖЕРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ НА PYTHON

DEVELOPMENT OF AN INTERACTIVE SIMULATOR IN MATHEMATICAL LOGIC ON PYTHON

Е.А. Вербичева, Е.В. Курашова

E.A. Verbicheva, E.V. Kurashova

Математическая логика, геймификация, интерактивное обучение, Python, Tkinter, образовательные технологии, алгоритмическое мышление, цифровая педагогика.

Рассматривается подход к изучению темы «Математическая логика» с использованием интерактивного тренажера, разработанного на языке Python. В рамках подхода наглядно иллюстрируются основные логические операции и законы, предлагаются модели заданий, которые преобразуют абстрактные понятия в практические сценарии, дополняя тем самым школьную теорию. Применение тренажера в школьной практике позволит продемонстрировать прикладное значение логики для программирования и алгоритмов, что повышает мотивацию обучающихся и приближает математику к жизни.

Mathematical logic, gamification, Python, Tkinter, interactive learning, algorithmic thinking, digital pedagogy.

The approach to the study of the theme “Mathematical Logic” with the use of an interactive simulator developed in Python is considered. Within the framework of the approach, the basic logical operations and laws are clearly illustrated, models of tasks are proposed that transform abstract concepts into practical scenarios, thereby supplementing school theory. The use of the simulator in school practice will demonstrate the applied significance of logic for programming and algorithms, which increases students’ motivation and brings mathematics closer to life.

В условиях цифровой трансформации образования перед общеобразовательной школой стоит сложная задача: не только обеспечить обучающихся прочной базой теоретических знаний, соответствующей федеральным государственным образовательным стандартам, но и сформировать у них практико-ориентированные навыки и компетенции, востребованные в стремительно развивающуюся эпоху информационных технологий. Особую актуальность этот вызов приобретает в контексте преподавания дисциплин математического и инженерного циклов, где разрыв между теорией и практикой наиболее ощутим.

Математическая логика, являющаяся концептуальной основой алгоритмического стиля мышления и современного программирования, представляет собой одну из наиболее сложных для восприятия и усвоения дисциплин в школьном курсе информатики. Высокая степень абстрактности ее фундаментальных понятий, таких как логические операции, импликация, эквивалентность и законы алгебры логики, часто приводит к закономерному снижению учебной мотивации и, как следствие, к недостаточным академическим результатам обучающихся. Анализ содержания современных школьных учебников по информатике [1; 5] показывает, что они в малой степени используют возможности визуализации и интерактивного моделирования для объяснения абстрактных понятий (алгоритмы, логика, архитектура ЭВМ), что негативно сказывается на вовлеченности и глубине понимания материала.

В качестве решения указанной проблемы разработан специализированный интерактивный тренажер, реализующий принципы геймификации для повышения эффективности образовательного процесса. Данный тренажер был создан на популярном языке программирования Python с активным использованием стандартной библиотеки Tkinter для построения кроссплатформенного графического пользовательского интерфейса. Выбор именно этого технологического стека был обусловлен рядом его неоспоримых преимуществ: исключительной простотой освоения, широкой распространенностью, полной кроссплатформенностью и минимальными требованиями к вычислительным ресурсам компьютеров, что в совокупности делает тренажер доступным для повсеместного использования в подавляющем большинстве образовательных учреждений без необходимости дополнительных финансовых затрат.

Методологической основой для разработки послужил детальный анализ типичных когнитивных и педагогических трудностей, систематически возникающих у школьников при изучении раздела математической логики. В результате проведенного анализа были четко выделены три ключевые проблемные зоны: во-первых, когнитивная сложность адекватного восприятия абстрактных логических понятий; во-вторых, выраженный дефицит качественных интерактивных учебных материалов; и в-третьих, традиционно низкий уровень внутренней учебной вовлеченности обучающихся. Для комплексного преодоления этих барьеров в архитектуре тренажера была реализована прогрессивная трехуровневая система заданий, обеспечивающая плавное и постепенное усложнение – от элементарных базовых логических операций до решения сложных олимпиадных задач.

Каждое задание снабжено системой мгновенной обратной связи, что позволяет обучающемуся в реальном времени наблюдать результат своих учебных действий и оперативно их корректировать. Например, для проверки правильности решения типичного задания используется программный код следующего вида (рис.):

```
def check_answer():
    ore = ore_var.get()
    process = process_var.get()

    if ore == "зеркальная руда" and process == "фазовый испаритель":
        result_label.config(text="✓ Верно! Вектор предпочитает зеркальную руду и фазовый испаритель.",
                            fg=colors['success'])
        next_btn.config(state='normal')
    else:
        result_label.config(text="✗ Вектору не нравится этот набор руды и обработки",
                            fg=colors['error'])
        next_btn.config(state='disabled')
```

Рис. Пример реализации проверки решения

Содержательное наполнение тренажера охватывает все ключевые темы школьной программы по математической логике: базовые логические операции, построение и анализ таблиц истинности, основные законы алгебры логики, методы решения логических уравнений и систем. Дидактический дизайн всех заданий был построен на актуальных принципах контекстного обучения – обучающиеся

применяют изученные логические законы для решения практико-ориентированных задач, таких как «настройка контроллера автоматизированной системы» или «анализ работы резонансного нейтрализатора», что способствует формированию метапредметных связей.

Экспериментальная апробация тренажера проведена среди обучающихся 10–11 классов на базе нескольких общеобразовательных учреждений. Результаты апробации представлены в таблице.

Таблица

Результаты апробации тренажера

Уровень сложности	Доля успешных решений, %
Базовый	85
Продвинутый	65
Экспертный	45

Опрос пользователей продемонстрировал, что 88% респондентов оценили пользовательский интерфейс как интуитивно понятный и дружелюбный, а 78% участников отметили значительное повышение интереса к предмету. Полученные эмпирические данные хорошо согласуются с современными исследованиями в области образовательной геймификации [2; 3; 4], которые подтверждают, что грамотно реализованные игровые механики способствуют существенному росту внутренней учебной мотивации и познавательной активности.

Таким образом, разработанный тренажер представляет собой эффективный цифровой инструмент, который за счет интерактивности и геймификации помогает преодолеть абстрактность математической логики. Его использование в школьной практике позволяет не только улучшить академические результаты, но и сформировать устойчивый интерес к изучению фундаментальных основ информатики. Перспективы развития проекта видятся в создании адаптивной системы, подбирающей индивидуальную траекторию обучения для каждого ученика, и в разработке конструктора заданий для учителей.

Библиографический список

1. Босова Л.Л., Босова А.Ю. Информатика. 10 класс: Базовый уровень: учебник. 7-е изд., стер. М.: Просвещение, 2024. 288 с.
2. Букунов С.В., Букунова О.В. Разработка приложений с графическим пользовательским интерфейсом на языке Python: учебное пособие для СПО. СПб.: Лань, 2023. 88 с.
3. Воробьев К.П. Научно-исследовательский проект «Сравнение языков программирования Python и Pascal». EEE-science.ru, 2022. URL: <https://eee-science.ru/item-work/2022-1436/>
4. Мадаев С.М., Алихаджиев С.Х. Геймификация в образовании: как игровая механика помогает повысить мотивацию и знания обучающихся // Тенденции развития науки и образования. 2023. № 103-1. С. 115–117.
5. Семакин И.Г., Хеннер Е.К., Шеина Т. Ю. Информатика. 10 класс: базовый уровень: учебник. 4-е изд., стер. М.: Просвещение, 2022. 264 с.

ИНСТРУМЕНТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПРЕДМЕТНОЙ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

COMPUTER MATHEMATICS TOOLS IN SUBJECT TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Н.А. Журавлева, М.А. Кейв

N.A. Zhuravleva, M.A. Keiv

Компьютерная математика, цифровые образовательные ресурсы, предметная подготовка будущих учителей математики, общепрофессиональная компетенция в области информационных технологий.

Рассматриваются методические аспекты предметной подготовки будущих учителей математики в педагогическом вузе в условиях цифровизации математического образования. Представлены приемы использования инструментов компьютерных систем GeoGebra и 1С:Математический конструктор при моделировании основных математических объектов, изучаемых в педагогическом вузе, на примере дисциплин «Дискретная математика» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

Computer mathematics, digital educational resources, subject-specific training for future mathematics teachers, general professional competence in information technology.

This article examines the methodological aspects of subject-specific training for future mathematics teachers at a pedagogical university in the context of the digitalization of mathematics education. It presents techniques for using GeoGebra and 1С: Mathematical Designer computer systems to model the key mathematical objects studied at a pedagogical university, using the disciplines “Discrete Mathematics” and “Probability Theory and Mathematical Statistics” as examples.

Современный уровень цифровизации математического образования предполагает использование систем компьютерной математики в ходе предметной подготовки как школьников, так и будущих учителей математики.

Проникновение информационно-компьютерных технологий в социальные практики человека, занимающегося математикой или использующего математический аппарат в своей деятельности, происходит, главным образом, посредством систем компьютерной математики, благодаря которым повышается роль математического инструментария, и предоставляется больше возможностей для качественного математического анализа решаемых проблем.

Под системами компьютерной математики понимают «комплексные программные средства, обеспечивающие автоматизированную, технологически единую и замкнутую обработку задач математической направленности при задании их условий на специально предусмотренном языке пользователя» [3, с. 16].

Системы компьютерной математики дают возможность использовать математические методы без процедуры программирования и тем самым создают любому пользователю удобную для работы среду.

Систем компьютерной математики огромное количество. Признанными мировыми лидерами из числа универсальных математических систем являются: Matlab (Mathworks Ins., США), Mathcad (MathSoft Ins., США), Mathematica (Wolfram Research Ins., США), Derive (Corp. Texas Instruments Ins., США), Maple (Corp. MapleSoft, Канада). Сравнительно недавно появились компьютерные программы GeoGebra (GeoGebra GmbH, Австрия), Geometr's Sketchpad («Живая математика», Key Curriculum Press, США), 1С:Математический конструктор (1С, Россия), ориентированные на визуализацию математики. Главным их достоинством являются возможности анимации.

Специалисты в области применения систем компьютерной математики выделяют следующие основные направления их использования в образовательном процессе:

1. Научно-исследовательская работа студентов [4]. Системы компьютерной математики используются как виртуальные лаборатории, т.е. как среды для проведения разного рода математических экспериментов с помощью динамических моделей исследовательского типа. Виртуальная лаборатория позволяет студентам «самим подметить закономерности, выдвинуть собственную гипотезу, провести ряд экспериментов, обобщить результаты и сделать выводы» [7, с. 46], при сохранении объяснительно-иллюстративного подхода в обучении появляется возможность самостоятельно получать и усваивать знания студентам [2, с. 730]. С.В. Суконина отмечает, что важной особенностью систем компьютерной математики является возможность проведения численных экспериментов [8, с. 103], позволяющей автоматизировать процесс обработки результатов учебного эксперимента, как реально протекающего, так и виртуального [5, с. 94].

2. Визуализация математического материала выделяется в работах авторов: Д.В. Бочкарева, Т.А. Кузнецова, Е.Н. Лубягина, В.Р. Майер, С.А. Розанова, Е.И. Санина, П.В. Свинов, С.В. Суконина, Л.В. Тимшина, Е.С. Трефилова, Н.А. Шерстнева. Системы компьютерной математики, используя принцип наглядности, позволяют сделать процесс обучения математике доступным, поскольку математические модели перестают носить «далекий» и абстрактный характер, становятся наглядными и «осязаемыми» [9, с. 132].

3. Автоматизированный контроль знаний. Системы компьютерной математики позволяют убрать проблему субъективной оценки знаний студентов, использовать в тестах большой объем графической информации, моментально получать результаты проверки знаний студентов [1], совершенствовать навыки самоконтроля и самооценки [6].

В статье остановимся на рассмотрении примеров использования некоторых инструментов компьютерных систем GeoGebra и 1С:Математический конструктор при моделировании основных математических объектов, изучаемых в педагогическом вузе, на примере дисциплин «Дискретная математика», «Теория вероятностей и математическая статистика».

В ходе практической подготовки по дисциплине «Дискретная математика» в рамках изучения темы «Числовые последовательности и рекуррентные соотношения» обучающимся предлагается проектное задание по изготовлению общего анимационного чертежа для демонстрации различных последовательностей, задаваемых аналитическим выражением (формулой) в компьютерной среде GeoGebra (рис. 1).

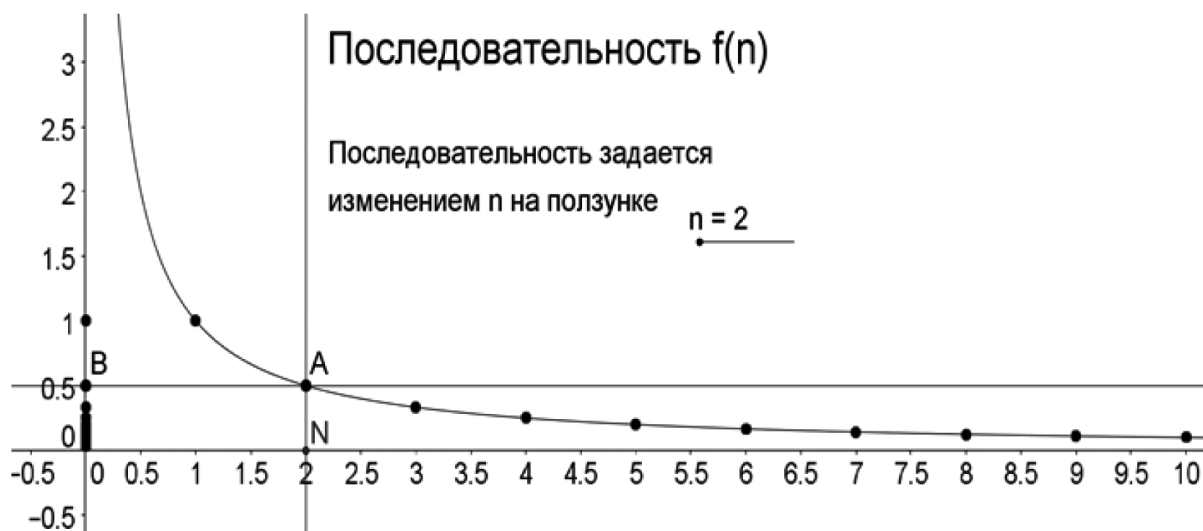


Рис. 1

Алгоритм построения в компьютерной среде GeoGebra

1. Строим ползунок для натуральной переменной n .
2. Строкой ввода строим график функции $y = f(n)$. Например, $y = \frac{1}{n}$.

3. Строим точку $N = (n, 0)$, проводим через нее вертикаль, отмечаем точку A пересечения вертикали с графиком данной функции, проводим горизонталь через точку A и отмечаем точку B пересечения горизонтали с осью ординат. Заставляем точки A и B оставлять следы и изменяем на ползунке переменную n . В результате на оси ординат появляются члены последовательности один за другим, и одновременно точки графика данной последовательности. Теперь строкой ввода можно заменить функцию $y = f(n)$ на новую и перемещением точки на ползунке построить новую последовательность и ее график.

На лекции по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» при введении статистического определения вероятности работа с интерактивной демонстрацией-исследованием «Частота и вероятность» (https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/teoriya_veroyatnostey/interaktivnye_demonstratsii_issledovaniya/4498.phd) позволяет на примере выявить, как строится график изменения частот в зависимости от исхода выпадения «тройки» на игральном кубике (рис. 2) и увидеть устойчивость частоты, колеблющейся около постоянного числа – вероятности (рис. 3), что в дальнейшем доказывается в теореме Бернулли.

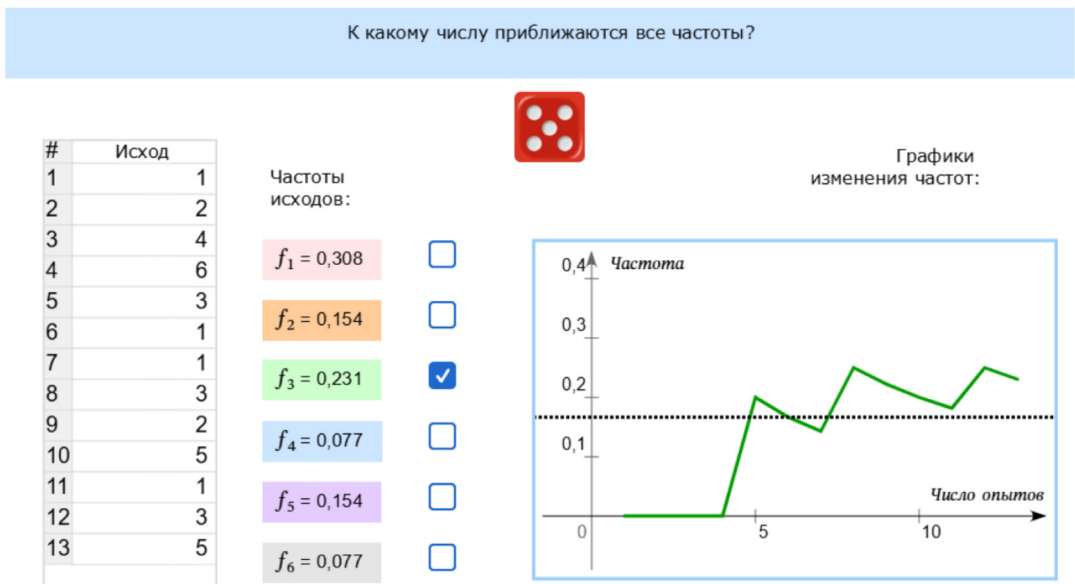


Рис. 2



Рис. 3

В ходе выполнения подобных проектных заданий и исследований при введении понятий на лекциях студенты, будущие учителя математики, осваивают различные инструменты компьютерной математики на примере решения конкретных математических задач и могут их в дальнейшем применить в своей будущей профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. Бикмухаметова Д.Н., Миндубаева А.Р. Информационные технологии и открытые образовательные ресурсы в математическом образовании // Приоритетные направления развития науки и технологий: доклады XXVI международной научно-практической конференции / под общей редакцией В.М. Парнарина. 2019. С. 106–109.

2. Бочкарева Д.В., Майер В.Р. Об исследовательском подходе при обучении математике с использованием среды GeoGebra // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы VII Международной научной конференции. Красноярск, 2023. С. 729–732.
3. Зайцева Ж.И. Методика преподавания высшей математики с применением новых информационных технологий (в техническом вузе): автореф. дис. ... канд. пед. наук. М., 2005. 27 с.
4. Лубягина Е.Н., Тимшина Л.В., Трефилова Е.С. К вопросу о возможности использования систем компьютерной математики в учебном процессе // Advanced Science. 2018. № 3 (11). С. 23–27.
5. Розанова С.А., Санина Е.И., Кузнецова Т.А. Дидактические возможности информационных и коммуникационных технологий в обучении математике в вузе // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. 2012. № 3. С. 93–98.
6. Свинов П.В. Обучение математике в цифровой образовательной среде: возможности и перспективы // Интеграция науки, технологии и образования: ИНТО-2023: материалы VIII межрегиональной конференции молодых исследователей с международным участием. М., 2023. С. 7–12.
7. Сидорова Е.Н. Виртуальная лаборатория как метод обучения математике // Инновационное развитие профессионального образования. 2019. № 3 (23). С. 43–48.
8. Суконина С.В. Многообразие систем компьютерной математики в образовательном процессе // Цифровизация в системе образования: передовой опыт и практика внедрения: материалы IV ежегодной Всероссийской научно-практической конференции. Краснодар, 2024. С. 102–105. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_60025527_18527810.pdf (дата обращения 04.11.2025)
9. Шерстнева Н.А. Визуализация математического материала посредством систем компьютерной математики // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (21 мая 2021 г., г. Смоленск). Вып. 5. Киров: Изд-во МЦИТО, 2021. С. 131–136. URL: <https://mcito.ru/publishing/epub/collections?view=394> (дата обращения: 04.11.2025).

РИСКИ ПОВЕРХНОСТНОГО ПОНИМАНИЯ МАТЕМАТИКИ ПРИ ЧРЕЗМЕРНОЙ АВТОМАТИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

RISKS OF SUPERFICIAL UNDERSTANDING OF MATHEMATICS DUE TO EXCESSIVE AUTOMATION OF CALCULATIONS

И.В. Игнатушина, А.В. Ракитина

I.V. Ignatushina, A.V. Rakitina

Автоматизация вычислений, математическое образование, математика, цифровые средства, цифровые технологии, наглядность, системы компьютерной алгебры.

В данной статье рассматривается противоречие современного математического образования: преимущества использования цифровых технологий в процессе обучения и связанные с этим риски. Анализируются следующие негативные последствия: формализм без понимания, ошибки, возникающие при интерпретации графиков, утрата культуры доказательства, снижение вычислительной культуры. В качестве решения предлагается гибридный подход, балансирующий традиционные методы и цифровые инструменты.

Automation of calculations, mathematical education, mathematics, digital tools, digital technologies, visibility, computer algebra systems.

This article discusses the contradiction of modern mathematical education: the advantages of using digital technologies in the learning process and the associated risks. The following negative consequences are analyzed: formalism without understanding, errors that occur when interpreting graphs, the loss of a culture of proof, and a decrease in computational culture. As a solution, a hybrid approach is proposed that balances traditional methods and digital tools.

В условиях цифровизации математическое образование претерпевает массу изменений и новшеств. Ежегодно происходит увеличение средств, которые способны влиять на интеллектуальное развитие человека. Составляющей такого развития можно назвать пространственное мышление, которое помогает создавать пространственные образы, а также осуществляет оперирование ими в процессе решения различных типов задач. Наглядность в обучении, в частности на уроках математики, позволяет лучше усваивать новые понятия [3]. Ввиду этого роль цифровых технологий растет каждый год.

Системы компьютерной алгебры (CAS), программные комплексы динамической математики (GeoGebra, Desmos, Wolfram Mathematica, Maple и т.д.) становятся неотъемлемой частью учебного процесса. Эти технологии значительно ускоряют процесс вычисления, предлагают различные способы решения, позволяют строить наглядные модели, чем демонстрируют закономерности трехмерного пространства, а также являются источником новых исследовательских возможностей как для школьников, так и для студентов.

Несмотря на все преимущества, вместе с тем существует важная педагогическая проблема: чрезмерное использование цифровых средств влечет за собой поверхностное понимание математики. У обучающихся вырабатывается привычка к тому, что программа может «все сделать за них», ввиду чего происходит потеря

навыков анализа, самостоятельного рассуждения и доказательства. Данная проблема освещается в работах В.Р. Кучма, Р.А. Мельникова, Е.Б. Пучковой, В.Р. Савинной и др., однако она требует дальнейшего исследования [1; 2; 3; 4]. В данной статье рассмотрены основные риски чрезмерной автоматизации вычислений, а также предложены пути сохранения баланса между традиционными методами и цифровыми технологиями.

Автоматизация вычислений понимается как замена ручных операций использованием программных средств. Изначально это выглядит очень удобным и практичным, складываются исключительно положительные впечатления: пропадает необходимость тратить большое количество времени на вычисление сложных заданий, появляется пространство для поиска идей, анализа результатов. Однако большинство учеников перестает прикладывать умственные усилия для решения задачи, соблазн подсмотреть готовый ответ или решение слишком велик. Многочисленные исследования показали, что чем больше обучающийся потратит времени и сил на осмысление и решение задачи, тем дольше эта информация хранится в его памяти, а упрощение решения посредством автоматизации вычислений может лишить осмысления проделанной работы, способно обеднить процесс мышления, сводя все обучение к формальному получению готовых результатов [1].

Рассмотрим часто встречающиеся проблемы, возникающие ввиду вышеописанных обстоятельств.

Формализм без понимания. Ученики с помощью CAS могут успешно заниматься дифференциальным и интегральным исчислениями, однако смысл этих операций может быть неосознан, т.е. производная понимается не как предел, отражающий скорость изменения функции, а как результат работы программы. Аналогично интеграл воспринимается не как предел интегральной суммы, выражающий площадь под кривой или накопленную величину, а как команда, обратная дифференцированию, которая выдает «большую скобку» с функцией. Глубокие связи между этими понятиями остаются незамеченными.

Ошибки, возникающие в интерпретации графиков. Благодаря ряду графических пакетов, например, Desmos, GeoGebra и др., можно мгновенно строить поверхности и кривые различных порядков, однако чаще всего ученики ограничиваются лишь визуальной картинкой, не анализируя ее. Если такие понятия, как асимптоты, точки разрыва, свойства функции не будут поняты, то это неизбежно приведет к неверным выводам, а также к тому, что ученики утратят навыки построения функций. Выполнение такой задачи без помощи сторонних ресурсов будет казаться крайне сложным.

Утрата культуры доказательства. Чрезмерное использование CAS при вычислениях приводит к тому, что обучающиеся перестают видеть необходимость логического обоснования решения, ведь ответ уже получен «из системы», «машина не может ошибаться», что влечет за собой утрату критичности мышления ввиду сильного доверия автоматизированным вычислениям.

Снижение вычислительной культуры. На рубеже быстрого развития вычислительной техники, программных комплексов динамической математики нынешние школьники пренебрегают навыками устного счета и письменного вычисления. Развитие этих навыков является важным моментом подготовки к ОГЭ и ЕГЭ по математике. Одной из задач Единого государственного экзамена по математике (профильный уровень), требующей высокого уровня развития вычислительных навыков, является финансовая задача. По результатам сдачи 2025 года средний процент выполнения этого задания составляет примерно 8%. Отмечается, что одной из причин в неверном выполнении задания является ошибка в вычислениях.

Все вышеперечисленные проблемы встречаются почти в каждой школе, классе. Это создает необходимость искать пути их решения. Одним из таких является наличие баланса между традиционным и цифровым обучением. Он заключается в следующем. Необходимо обозначить обучающимся роль ручных вычислений на ранних этапах обучения, закрепляя эти навыки в старших классах. Важную роль играют методические приемы для вычисления CAS в процессе обучения: сначала необходимо, чтобы обучающиеся самостоятельно, «вручную» решили поставленную задачу, а только потом использовали средства компьютерной алгебры и динамических систем, также необходимо, чтобы использование компьютерных систем не сводилось исключительно к получению готовых ответов, применялись для исследования. Помимо этого, важно делать акцент на формулировке самого задания, необходимо выполнять постановку вопросов, которые требуют объяснения результатов, а не только вычисления.

Чтобы баланс, о котором говорилось выше, соблюдался, предлагается ряд практических рекомендаций:

- внедрение заданий смешанного типа (часть решений должна быть выполнена вручную, со всеми необходимыми обоснованиями, а часть с использованием CAS);
- задания должны включать в себя вопросы «почему», «как», а не только «сколько» (задания, требующие обоснования, доказательства);
- предлагать задания на критическую интерпретацию результата, т.е. проверить, не содержит ли компьютерный вывод ошибки, упрощения и т.п.;
- педагогический состав должен владеть методикой грамотного внедрения цифровых инструментов в процесс обучения, чтобы избежать подмены традиционных форм обучения.

Задание, отвечающее вышепредложенным рекомендациям, может быть сформулировано следующим образом: «Найдите производную функции $f(x)$ вручную, выполнив проверку в CAS. Объясните, почему график функции имеет данный наклон в выделенной точке».

Цифровые технологии являются источником новых возможностей для математического образования: они добавляют наглядности в процессе изучения, ускоряют вычисления, позволяют моделировать сложные процессы. Однако чрезмерная автоматизация влечет за собой ряд серьезных рисков. Поэтому оптимальным является гибридный подход, в котором цифровые и ручные методы взаимно дополняют друг друга.

Библиографический список

1. Грядунова Е.Н., Токмакова М.А., Грядунова М.А. Организация учебного процесса в высшей школе с учетом рекомендаций когнитивной психологии // Ученые записки ОГУ. 2021. № 3. С. 166–170.
2. Кучма В.Р. Риск здоровью обучающихся в современной российской школе // Вопросы школьной и университетской медицины и здоровья. 2018. № 4. С. 11–19.
3. Мельников Р.А., Саввина О.А. Риски цифровизации для математического образования // Теоретические и прикладные аспекты естественнонаучного образования в эпоху цифровизации: материалы Всероссийской научно-практической конференции, Брянск, 21–22 апреля 2022 года. Брянск: Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, 2022. С. 28–30. EDN VNIXTE.
4. Пучкова Е.Б. и др. Анализ представлений учителей о воздействии цифровых образовательных продуктов на когнитивно-личностную и деятельностную сферу обучающихся / Е.Б. Пучкова, Л.В. Темнова, Е.А. Сорокоумова, Е.И. Чердымова, Д.С. Фадеев, А.А. Агеева // Перспективы науки и образования. 2021. № 6 (54). С. 110–125.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ АНИМАЦИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS WITH ANIMATION BY JUNIOR SCHOOLCHILDREN

Н.К. Князева, М.В. Носков,
А.И. Ефимкина

N.K. Knyazeva, M.V. Noskov,
A.I. Efimkina

Начальная школа, детская анимация, решение задач, математика, анимация стоп-моушн. Рассматривается методика создания детской анимации при решении математических задач в начальной школе. Приводятся примеры анимации задач с геометрическим содержанием. Эффективность применяемой методики подтверждается проверочными работами в конце обучения в начальной школе.

Elementary school, children's animation, problem-solving, mathematics, stop-motion animation. The article discusses the methodology of creating children's animations when solving mathematical problems in elementary school. Examples of animations of problems with geometric content are provided. The effectiveness of the applied methodology is confirmed by test papers at the end of elementary school.

Одно из приоритетных направлений образования в настоящее время определяет Концепция¹ математического образования в Российской Федерации и, в частности Проект «Повышение качества математического образования²». Одним из этапов проекта стало обновление федеральных государственных стандартов³ начального общего образования в части достижения предметных математических результатов. Обучение математике в начальной школе, в том числе, должно обеспечивать: развитие пространственного мышления, развитие логического и алгоритмического мышления, представление информации в графической форме, а также использование начальных математических знаний при решении учебных и практических задач, описание, объяснение и оценка пространственных и количественных отношений в повседневных ситуациях.

Как показывает школьная практика, наиболее эффективным способом достижения учениками предметных результатов в дисциплине «Математика» является организация активной познавательной деятельности при решении учебных задач практической направленности [1]. Одним из видов такой ученической деятельности все чаще становится создание детской анимации на уроках математики по сюжету математической задачи. Такая деятельность требует полного выявления и воссоздания отношений между объектами, отражения их в виде анимационного ролика

¹ Концепция развития математического образования в Российской Федерации. URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/id/1787>

² Проект «Повышение качества математического образования». URL: <http://government.ru/docs/53427/>

³ Приказ об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/Приказ-№286-от-31.05.2021-ФГОС_НОО.pdf

и решения задачи с помощью динамической модели. Особенно важно «оживить» задачи, требующие пространственного представления, например, задачи с геометрическим содержанием. Рассмотрим работу по созданию детской анимации с помощью приложения «Stop Motion Studio» [2] на примере подобных задач.

Ученикам 1 класса предлагается задача **«От четырехугольной крышки стола отпилили один угол, сколько углов осталось?»** [3]. Обычно простые задачи в одно действие используются на уроке при устном счете и направлены на формирование вычислительных навыков. Если не представить ситуацию наглядно, первое решение, которое предлагают первоклассники: $4-1=3$. Оно неверное. Учитель предлагает взять прямоугольник и отрезать от него один угол. Теперь при пересчете углов оказывается, что их количество, напротив, увеличилось. Углов стало 5 (рис. 1).



Рис. 1. Рисунок к задаче про прямоугольную крышку стола

Такое действие с углами также можно анимировать, т.е. показать отрезание угла и результат наглядно. Возможности современного приложения «Stop Motion Studio» позволяют сделать несколько снимков с телефона, закрепленного неподвижно, чтобы автоматически воспроизвести кадры в технике покадровой анимации со скоростью 6–12 кадров в секунду. Кадры такой анимации можно видеть на рис. 2.

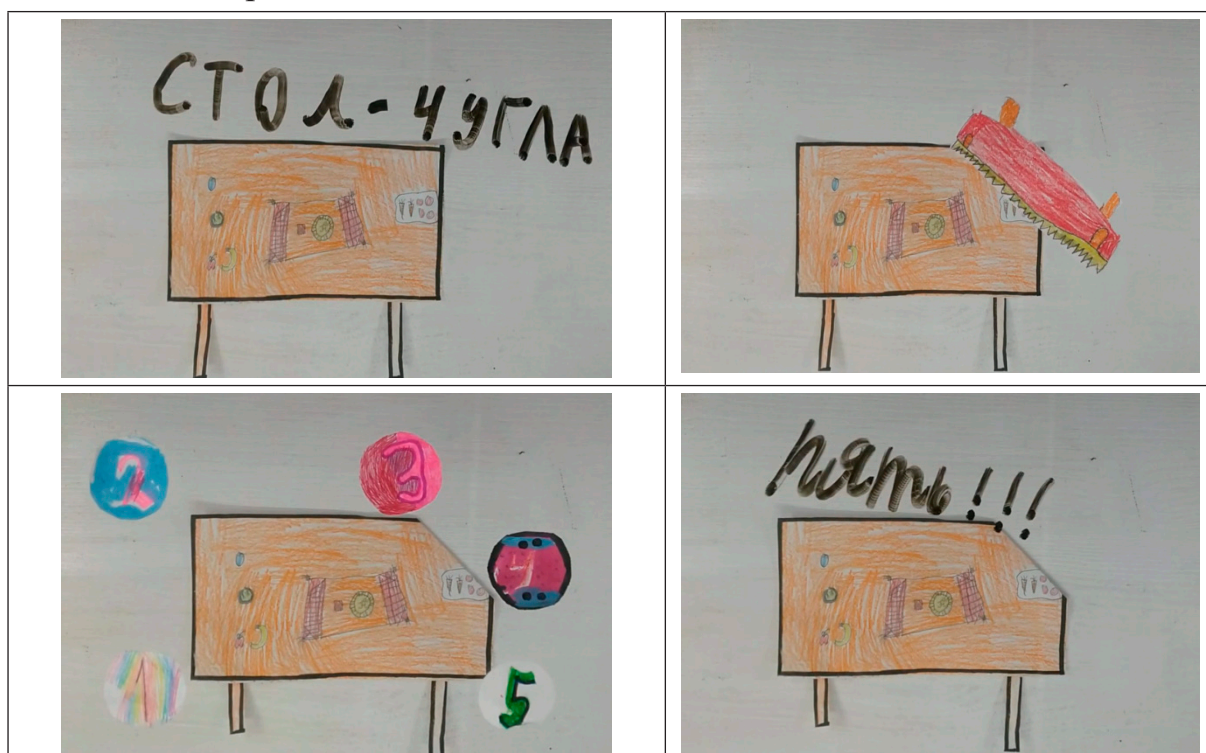


Рис. 2. Кадры из анимационного ролика про отпиливание угла у прямоугольной крышки стола

Младшим школьникам интереснее и проще представить геометрические фигуры при создании анимации. Например, при изучении темы «Ломаная линия» различить замкнутую и незамкнутую ломаные линии, а также образование

многоугольников. Для этого можно произвести покадровую съемку изменений при построении ломаной (используя любой материал, например, спички или счетные палочки) и произвести просмотр в приложении «Stop Motion Studio».

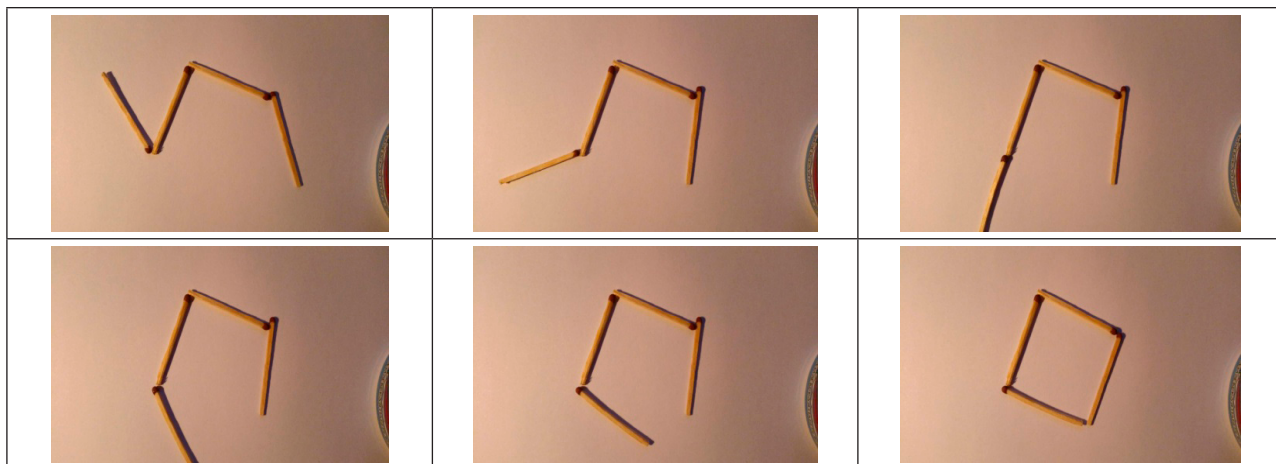


Рис. 3. Кадры из анимационного ролика про превращение незамкнутой ломаной линии в замкнутую

Приведем пример задачи для 2 класса с введением понятия «периметр»: **«Из куска проволоки согнули квадрат со стороной 6 см. Потом разогнули и согнули треугольник с равными сторонами. Чему равна сторона треугольника?»**

Анимировав эту задачу, ученики смогли разобраться в отношениях сторон и найти способ нахождения периметра квадрата и равностороннего треугольника. Обсудив задачу в малых учебных группах (2–4 человека) [4], ученики выложили геометрические фигуры (квадрат, затем треугольник) из подручных материалов (пластилина, веревки и др.). Главное условие – проволока, из которой согнули квадрат, и треугольник, – всегда одной длины. В каждой группе установили планшет (телефон) на парте, закрепили его неподвижно и сделали несколько снимков в приложении «Stop Motion Studio». Снимая анимацию, ребята предложили решение задачи:

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ (см) периметр квадрата.}$$

$$24 : 3 = 8 \text{ (см) длина стороны треугольника.}$$

Кадры анимации к данной задаче представлены на рисунке 4.

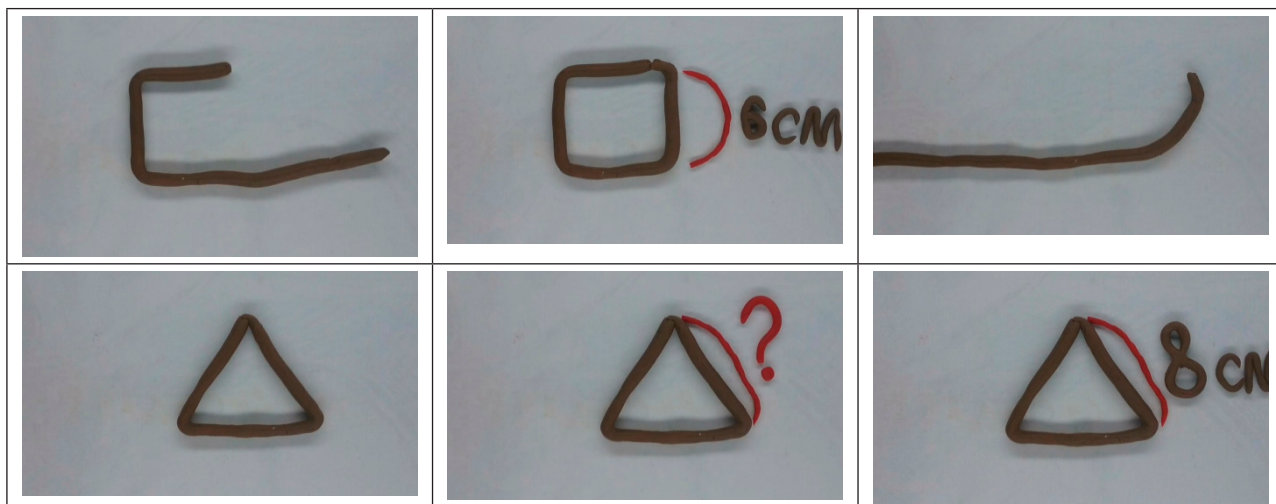


Рис. 4. Кадры из анимационного ролика про периметр квадрата и треугольника

Использование детской анимации (создания анимации учениками) на уроках математики позволяет не только достигать предметных результатов курса «Математика» в начальной школе, но и повысить учебную мотивацию младших школьников, а также оснастить их инструментом, благодаря которому можно моделировать математические отношения. Ученики МАОУ СШ № 137, обучавшиеся по методике использования детской анимации на уроках математики, показали высокий уровень выполнения заданий ВПР (Всероссийской проверочной работы) в 2025 году, особенно в части «Пространственные отношения и геометрические фигуры» и «Математическая информация» (умение формулировать утверждение, строить логические рассуждения). Результаты проверочной работы приведены в таблице. Данные отчета предоставлены ФИС ОКО (Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки)⁴.

Таблица

Сравнение результатов обучающихся в конце 4 класса

Проверяемые требования (умения) в соответствии с ФГОС (ФК ГОС)	Красноярский край	Город Красноярск	4 классы МАОУ СШ № 137
	34909 уч.	14642 уч.	93 уч.
Решать практические задачи, связанные с повседневной жизнью, в том числе с избыточными данными; находить недостающую информацию (например, из таблиц, схем); находить различные способы решения	85,07	86,09	95,16
Находить периметр и площадь фигур, составленных из двух-трех прямоугольников (квадратов)	68,84	67,78	76,34
Извлекать и использовать для выполнения заданий и решения задач информацию, представленную на простейших столбчатых диаграммах, в таблицах с данными о реальных процессах и явлениях окружающего мира, в предметах повседневной жизни	94,97	95,11	97,85
Формулировать утверждение (вывод), строить логические рассуждения (двух-трехшаговые)	50,73	55,1	66,67
Различать изображения простейших пространственных фигур, распознавать в простейших случаях проекции предметов окружающего мира на плоскость	63,48	64,05	70,43

⁴ Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки. URL: <https://lk-fisoko.obrnadzor.gov.ru/>

Таким образом, использование детской самодельной анимации на уроках математики при изучении геометрического материала подтвердило свою эффективность. Ученики с удовольствием принимают участие в создании анимации, изучая при этом математику.

Библиографический список

1. Традиции и перспективы деятельностного подхода в психологии: школа А.Н. Леонтьева / А.Г. Асмолов, Ю.Д. Бабаева, Н.Б. Березанская и др. М.: Смысл, 1999. 429 с. (Фундаментальная психология). EDN CQELSK.
2. Галимуллина Э.З. Технология stop-motion как средство развития творческих способностей младших школьников // Экономика и социум. 2015. № 1-2 (14). С. 797–800. EDN UDVTXN.
3. Князева Н.К. Математические задачи для анимирования в начальной школе: сборник. Ярославль: Академия 76, 2024. 20 с. ISBN 978-5-90604-144-9
4. Воронцов А.Б., Матвеева Е.И., Шаповалова Л.С. Проектная задача как инструмент формирования функциональной грамотности у младших школьников // Управление качеством образования: теория и практика эффективного администрирования. 2024. № 8. С. 3–9. EDN QUIQUR.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ И ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»

USE OF TECHNICAL AND SOFTWARE TOOLS IN THE COURSE “MATHEMATICAL MODELLING IN NATURAL SCIENCES”

И.С. Козловская, К.В. Василевский

I.S. Kozlovskaya, K.V. Vasilevsky

Математическое моделирование, компьютерная математика, системы компьютерной алгебры,

Рассмотрены примеры использования возможностей компьютерной математики для построения и исследования математических моделей в курсе «Математическое моделирование в естествознании» в Белорусском государственном университете.

Mathematical modeling, computer mathematics, computer algebra systems.

Examples of using computer mathematics to build and study mathematical models in the course “Mathematical Modeling in the Natural Sciences” are considered at the Belarusian State University.

Курс лекций «Математическое моделирование в естествознании» читается студентам факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета по специальности «Прикладная математика». Целью курса является не изучение студентами математических структур и их свойств, а освоение основных принципов, подходов, методов построения математических моделей и организации процесса моделирования реальности с их помощью, то есть приобретение навыков осуществления перехода: реальность, предметная область – математическая модель, интерпретация модели.

В настоящее время математическое моделирование является основой информатизации общества и всех сфер деятельности человека, понятие математической модели достаточно хорошо освоено и моделирование составляет основу любой современной науки. История методологии математического моделирования убеждает в том, что она может и должна быть интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества. Разнообразие моделей велико, и каждый класс моделей обладает определенной идеологией, в основе которой лежит тот или иной математический аппарат.

В дисциплине «Математическое моделирование в естествознании» излагаются основы математического моделирования реальности, основные принципы и методы построения моделей, их структура и свойства. Стержень курса составляют дифференциальные модели, базирующиеся на использовании дифференциальных, интегральных и конечно-разностных уравнений и задач для них.

Классическое математическое моделирование, как правило, ориентировано на построение моделей в физике и технике, но в последнее время приобрело актуальность использование математических моделей для моделирования трудноформализуемых процессов, в связи с этим в основу дисциплины заложено изучение многочисленных моделей в биологии и экологии, в медицине и химии, в генетике и других областях. В качестве примеров физических моделей рассмотрены различные модификации уравнений электромагнитного поля. Моделирование в биологии ограничено динамическими моделями популяций организмов, небольшим курсом лекций.

Таким образом, целью курса является обучение студентов навыкам математического моделирования и построения моделей в самых разнообразных предметных областях. При этом дисциплина направляет студентов на обязательное использование в исследованиях вычислительного эксперимента и компьютерного моделирования.

Применение компьютерной математики существенно расширяет возможности автоматизации всех этапов математического моделирования, так как представляет совокупность теоретических, алгоритмических, аппаратных и программных средств, предназначенных для эффективного решения на компьютерной технике всех видов математических задач, включая символьные преобразования и вычисления с высокой степенью визуализации всех видов вычислений.

Системы компьютерной математики позволяют провести исследование проблемы, анализ данных, моделирование, тестирование, проверку существования решения, оптимизацию, документирование и оформление результатов, они позволяют сосредоточить основное внимание на существе проблемы, оставляя в стороне технику классической математики, детали вычислительных методов и алгоритмических процедур, нюансы языков программирования и команд операционной системы.

Лабораторные занятия проводятся с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, которая имеет широкие графические возможности и позволяет эффективно проиллюстрировать решение поставленных задач. Возможность проведения студентами численных экспериментов, визуализация результатов, разработка и реализация тех или иных моделей повышают интерес студентов к учебному курсу, способствуют более глубокому пониманию изучаемого ими материала, позволяет пройти все этапы математического моделирования от построения математической модели до вычислительного эксперимента и анализа результатов.

Пример. Найти электрический потенциал, электрическую напряженность внутри шара радиуса $R = 2$ при отсутствии зарядов и условиях на электрический потенциал на его поверхности.

Для решения данной задачи составим уравнение Лапласа в шаре:

$$u|_{r=2} = 24(1 + 5 \cos \theta) \sin^2 \theta \cdot \cos 2\varphi + 4(3 \cos \theta - 1) \sin \theta \sin \varphi.$$

Для начала составляем смешанную задачу для нахождения потенциала магнитного поля:

$$\text{eqn} = \frac{1}{r^2} D[r^2 D[u[r, \theta, \varphi], r], r] + \frac{1}{r^2 \sin[\theta]} D[D[u[r, \theta, \varphi], \theta] \sin[\theta]] + \frac{D[u[r, \theta, \varphi], \{\varphi, 2\}]}{r^2 \sin[\theta]^2} == 0;$$

Добавим граничное условие и выделим там правую часть, попутно вводя пользовательскую функцию для вычисления полиномов Лежандра:

```
bc = u[2, \theta, \varphi] == 24 (1 + 5 Cos[\theta]) Sin[\theta]^2 Cos[2 \varphi] + 4 (3 Cos[\theta] - 1) Sin[\theta] Sin[\varphi];
bcRight = 24 (1 + 5 Cos[\theta]) Sin[\theta]^2 Cos[2 \varphi] + 4 (3 Cos[\theta] - 1) Sin[\theta] Sin[\varphi];
P[n_, m_, x_] := LegendreP[n, m, x];
```

Будем искать решение данной задачи в соответствующем виде:

```
Sum[r^n (A[n, m] Cos[m \varphi] + B[n, m] Sin[m \varphi]) P[n, m, Cos[\theta]], {n, 0, \infty}, {m, 0, \infty}] //
TraditionalForm
//TraditionalForm=
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^n P_n^m(\cos(\theta)) (\cos(m \varphi) A(n, m) + \sin(m \varphi) B(n, m))
```

Подставляем граничное условие, отбрасываем лишние слагаемые и получаем:

```
exprAct = Activate[expr] /. {\sqrt{1 - Cos[\theta]^2} -> Sin[\theta]};
u =
FullSimplify[
Coefficient[exprAct, Cos[2 \varphi]] Cos[2 \varphi] + Coefficient[exprAct, Sin[\varphi]] Sin[\varphi] /.
{B[3, 1] -> 0}, Trig -> True];
TraditionalForm[Collect[u, {Cos[2 \varphi], Sin[\varphi]}]]
//TraditionalForm=
12 sin^2(\theta) cos(2 \varphi) (10 A(3, 2) cos(\theta) + A(2, 2)) + 2 sin(\theta) sin(\varphi) (-6 B(2, 1) cos(\theta) - B(1, 1))
```

Осталось найти неопределенные коэффициенты $A(n, m)$ и $B(n, m)$. Это делаем следующим образом:

```
coeffA = FullSimplify[Coefficient[u, Cos[2 \varphi]], Trig -> True] / Sin[\theta]^2;
coeffbcA = FullSimplify[Coefficient[bcRight, Cos[2 \varphi]], Trig -> True] / Sin[\theta]^2;
solA = Solve[CoefficientList[coeffA, Cos[\theta]] == CoefficientList[coeffbcA, Cos[\theta]],
{A[2, 2], A[3, 2]}]
{{A[2, 2] -> 2, A[3, 2] -> 1}}

coeffB = FullSimplify[Coefficient[u, Sin[\varphi]], Trig -> True] / Sin[\theta];
coeffbcB = FullSimplify[Coefficient[bcRight, Sin[\varphi]], Trig -> True] / Sin[\theta];
solB = Solve[CoefficientList[coeffB, Cos[\theta]] == CoefficientList[coeffbcB, Cos[\theta]],
{B[1, 1], B[2, 1]}]
{{B[1, 1] -> 2, B[2, 1] -> -1}}
```

Подставим полученные коэффициенты и получим электрический потенциал u .

```
exprU = TruncateSum[Inactive[Sum][r^n (A[n, m] Cos[m φ] + B[n, m] Sin[m φ]) P[n, m, Cos[θ]],
  {n, 0, ∞}, {m, 0, ∞}], {4, 3}, ActivateResult → False];
```

```
exprUAct = Activate[exprU] /. {√(1 - Cos[θ]^2) → Sin[θ]};
```

```
U =
```

```
FullSimplify[
  Coefficient[exprUAct, Cos[2 φ]] Cos[2 φ] + Coefficient[exprUAct, Sin[φ]] Sin[φ] /.
  {B[3, 1] → 0}, Trig → True];
TraditionalForm[Collect[U, {Cos[2 φ], Sin[φ]}]]
```

```
//TraditionalForm=
```

```
3 r^2 sin^2(θ) cos(2 φ) (5 r A(3, 2) cos(θ) + A(2, 2)) + r sin(θ) sin(φ) (-3 r B(2, 1) cos(θ) - B(1, 1))
```

```
U = Coefficient[U, Cos[2 φ]] Cos[2 φ] + Coefficient[U, Sin[φ]] Sin[φ] /.
  Flatten[{solA, solB}]
```

```
3 r^2 (2 + 5 r Cos[θ]) Cos[2 φ] Sin[θ]^2 + r (-2 + 3 r Cos[θ]) Sin[θ] Sin[φ]
```

```
u[r_, θ_, φ_] := 3 r^2 (2 + 5 r Cos[θ]) Cos[2 φ] Sin[θ]^2 + r (-2 + 3 r Cos[θ]) Sin[θ] Sin[φ];
```

И, наконец, подсчитаем напряженность электрического поля через градиент u .

```
EE = -Grad[u[r, θ, φ], {r, θ, φ}, "Spherical"]; EE = FullSimplify[EE, Trig → True]
```

```
{-Sin[θ] (3 r (4 + 15 r Cos[θ]) Cos[2 φ] Sin[θ] + 2 (-1 + 3 r Cos[θ]) Sin[φ]),
 -3/2 r (8 Cos[θ] + 5 r (1 + 3 Cos[2 θ])) Cos[2 φ] Sin[θ] + (2 Cos[θ] - 3 r Cos[2 θ]) Sin[φ],
 (2 - 3 r Cos[θ]) Cos[φ] + 6 r (2 + 5 r Cos[θ]) Sin[θ] Sin[2 φ]}
```

Для визуализации полученных результатов необходимо перейти к декартовым координатам:

```
U[x_, y_, z_] := FullSimplify[TransformedField["Spherical" → "Cartesian",
  u[r, θ, φ], {r, θ, φ} → {x, y, z}], Trig → True];
```

И с помощью функции **StreamPlot3D** визуализируем наше векторное поле.

```
StreamPlot3D[Evaluate[-Grad[U[x, y, z], {x, y, z}]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2},
  RegionFunction → (#1^2 + #2^2 + #3^2 ≤ 4 &), Axes → True, Boxed → False, StreamMarkers → "Arrow3D"]
```

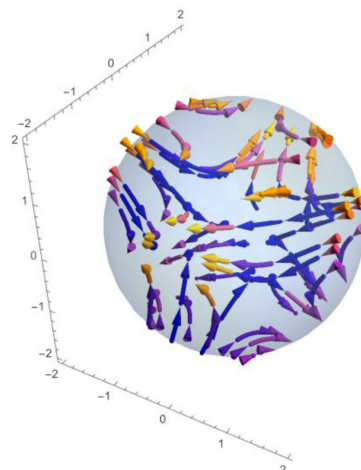


Рис. Визуализация электрического поля

На рисунке показано электрическое поле, напряженность которого определяется через найденный нами электрический потенциал $u(x, y, z)$.

Таким образом, использование технических и программных средств в курсе «Математическое моделирование в естествознании» позволило, с одной стороны, разнообразить формы и методы обучения, способствующие успешному освоению курса и высокому качеству получаемых знаний, с другой стороны, стимулировать студентов к проведению научных исследований, созданию инновационных проектов.

Библиографический список

1. Горлач Б.А., Шахов В.Г. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация: учебное пособие для студентов вузов. Изд. 5-е, стер. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2023. 291 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/305219>
2. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Основы математического моделирования: курс лекций. Минск: Изд-во БГУ, 2002. 196 с.

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОГЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS OF THE MAIN STATE EXAM USING DYNAMIC SYSTEMS

Н.И. Ксензова

N.I. Ksenzova

Решение задач, математика, среда Живая математика, компьютерная анимация, основной государственный экзамен.

В статье продемонстрированы анимационные возможности программной среды Живая математика при решении геометрических задач ОГЭ, и как использование динамических систем делает процесс подготовки более интересным и вовлекающим.

Problem solving, mathematics, the Geometer's Sketchpad software, computer animation, main state exam.

The article demonstrates the animation capabilities the Geometer's Sketchpad software for solving geometric problems on the Main State Exam, and how the use of dynamic systems makes the preparation process more interesting and engaging.

Геометрия как один из старейших разделов математики существует на протяжении веков и является важной частью математического образования. Решение задач по геометрии развивает у школьников абстрактное мышление и воображение, а также учит их мыслить логически.

Геометрия занимает важное место в ОГЭ по математике, так как составляет значительную часть заданий экзамена. Без уверенных знаний в этой области набрать высокий балл невозможно. Обучение решению геометрических задач является неотъемлемой частью подготовки к ОГЭ. Как повысить качество подготовки?

В последние годы в образовательной практике учителей математики стали использоваться системы динамической математики (СДМ), которые созданы для поддержки большинства тем элементарной и высшей математики, включая решение конструктивных задач. Системы динамической математики максимально ориентированы на усиление визуальной и экспериментальной составляющих обучения математике. С их помощью учителя и учащиеся имеют возможность не только моделировать математические объекты и процессы, но и использовать построенные модели для изучения их свойств [1].

Системы динамической математики относятся к числу основных компьютерных сред, которые эффективно поддерживают математическое обучение, связанное с различными концепциями евклидовой геометрии. Современные динамические системы открыли новые возможности в преподавании геометрии: они позволяют создавать множество чертежей быстро, точно и с гибким изменением входных данных, и, таким образом, упрощают процесс изучения геометрии.

В использовании динамических систем при подготовке к ОГЭ можно выделить такие преимущества, как визуализация геометрических фигур и процессов, экономия времени и оперативная проверка решений. Знакомство обучающихся с этой системой следует начать с несложных заданий [2].

Например, в задании № 19 требуется провести анализ геометрических высказываний и выбрать верные или неверные высказывания. Чтобы успешно выполнить задание, кроме анализа текста можно схематично изобразить то, что описано в утверждении. Для такого типа заданий можно использовать измерительные возможности динамической среды. Живая математика дает возможность производить моментальные вычисления с помощью опций меню «Измерения», в частности находить длину отрезков, расстояние между точками, отношение длин отрезков, радиус, длину окружности и т. д., что способствует иногда не процессу верного доказательства, а опровержению ошибочно проведенного утверждения.

Утверждение: Если угол острый, то смежный с ним угол также является острым.

С помощью инструмента «Отрезок» строим смежные углы, а с помощью опции «Измерение» находим градусные меры этих углов (рисунок 1). Таким образом, приходим к выводу, что утверждение неверное.

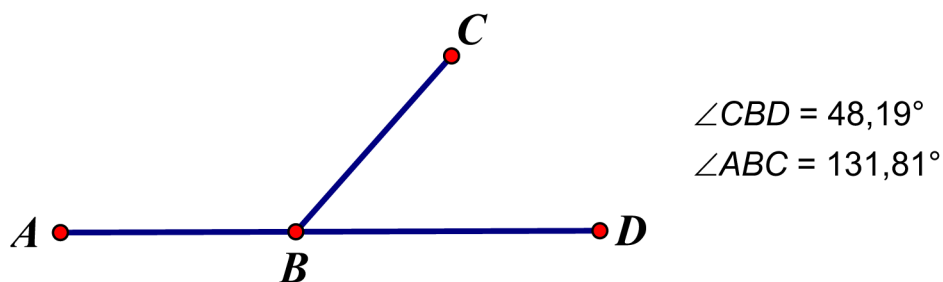


Рис. 1

Утверждение: Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду окружности, равны.

С помощью инструментов «Отрезок» и «Окружность» строим окружность, хорду и два вписанных угла, опирающихся на эту хорду. С помощью опции «Измерение» находим градусные меры полученных углов (рис. 2). На основании измерений делаем вывод, что утверждение неверное.

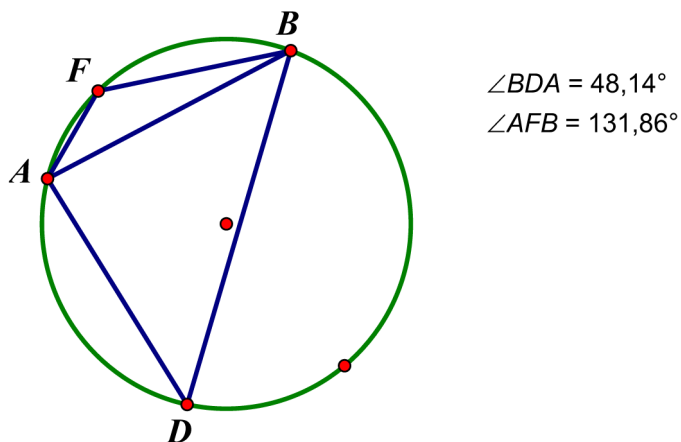


Рис. 2

В заданиях с развернутым ответом, например, № 24, можно использовать аппарат преобразований. Современный компьютерный чертеж выглядит как традиционный, и, как правило, легко идентифицируется с традиционным, однако представляет собой качественно совершенно новое явление [3].

Живая математика позволяет при необходимости достаточно быстро изменить положение изображаемых фигур и (или) их элементов, выбрать необходимый ракурс, который дает возможность увидеть в нужном месте нужные соотношения, а также она предоставляет возможность учащемуся выполнять необходимые дополнительные построения, без всяких негативных чертежных последствий отказываться от неудачных попыток, реализовывать новые дополнительные построения, выбирая линии такого типа и толщины, чтобы они не заслоняли собой данные и искомые фигуры.

Задача. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырехугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

1. Строим окружность с центром в точке O и вписанный в нее четырехугольник $ABCD$ (рис. 3).

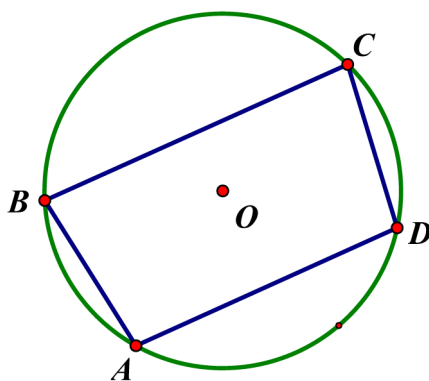


Рис. 3

2. Строим продолжения сторон AD и BC и точку их пересечения (рис. 4). При первичном построении расположение некоторых элементов чертежа может быть неочевидно, но преимуществом использования динамических систем является возможность трансформации фигур (рис. 5).

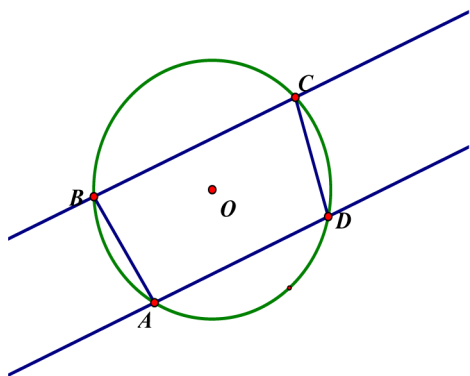


Рис. 4

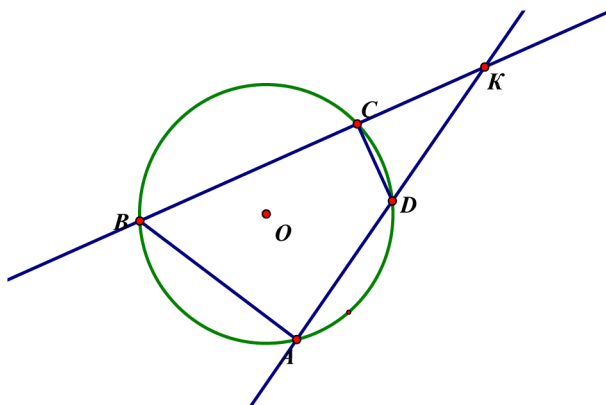


Рис. 5

Преимущества использования динамических систем при подготовке к ОГЭ

1. Визуализация и наглядность. Позволяет увидеть прямое влияние изменения одного элемента на другие, что помогает понять взаимосвязи в задаче.

2. Автоматическая проверка построений. Можно быстро проверить правильность решений, что экономит время и снижает количество ошибок.

3. Развитие логического и пространственного мышления. Постоянное взаимодействие с фигурой повышает уровень анализа и умения работать с геометрией интуитивно и формально.

4. Гибкость и возможность дополнительного анализа. Легко создавать различные варианты одной задачи и видеть, как меняется итоговое решение.

Использование динамических систем позволяет учащимся лучше понять геометрические задачи и научиться решать их более эффективно. Этот метод помогает развивать пространственное воображение и улучшает понимание свойств геометрических фигур.

Практическое применение динамических систем в подготовке к ОГЭ способствует повышению уровня подготовки учащихся и улучшению результатов экзамена. Рекомендуется интегрировать такие системы в школьную практику, чтобы повысить качество знаний и уверенность школьников при выполнении экзаменационных заданий.

Библиографический список

1. Абдулкин В.В., Калачева С.И., Кейв М.А., Ларин С.В., Майер В.Р. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе; монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2019. 164 с.
2. Дубровский В.Н. Живая математика 5.0: Сборник методических материалов / В.Н. Дубровский и др. М.: ИНТ, 2013. 205 с.
3. Живая математика: Сборник методических материалов / под ред. Г.Б. Шабат и др. М.: ИНТ, 2012. 176 с.

СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МЕТОДАМ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФИГУР В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

SYSTEMS OF DYNAMIC MATHEMATICS AS A MEANS OF TEACHING METHODS OF FIGURE IMAGES AT A PEDAGOGICAL UNIVERSITY

В.Р. Майер

V.R. Mayer

Курс геометрии в педагогическом вузе, методы изображений фигур, среда Живая математика, анимационные чертежи.

В статье продемонстрированы возможности среды Живая математика как эффективного средства обучения студентов методам изображения фигур, важнейшему разделу курса геометрии в вузах, ведущих подготовку учителей математики.

Geometry course at a pedagogical university, methods of figure images, Live mathematics environment, animation drawings.

The article demonstrates the possibilities of the Living Mathematics environment as an effective means of teaching students the methods of depicting shapes, the most important section of the geometry course in universities that train mathematics teachers.

Отечественные высшие учебные заведения, готовящие будущих учителей математики, всегда уделяли и продолжают уделять большое внимание обучению студентов методам построения изображений стереометрических фигур. В середине XX века теоретическую и содержательную основу раздела «Методы изображения фигур» геометрических курсов большинства педагогических вузов составили методические идеи Н.Ф. Четверухина, разработавшего теорию позиционной и метрической полноты изображения фигур, играющую важную роль в практике развития методов геометрических построений школьного курса стереометрии. Эта теория способствовала не только развитию пространственных представлений студентов, но и формированию у будущих учителей математики умений и навыков строить верные и одновременно наглядные изображения фигур, что позволяло им эффективно использовать эти чертежи при решении стереометрических задач.

Физико-математический факультет Красноярского педагогического института поддержал методические идеи Н.Ф. Четверухина, используя их в своих основных геометрических курсах. Во второй половине семидесятых годов XX в. разрозненные геометрические курсы были объединены в единый курс геометрии. Кафедры геометрии большинства ведущих педагогических вузов приступили к разработке и изданию собственных учебных пособий по основным разделам курса геометрии. В Красноярском педагогическом университете также было издано

учебное пособие профессора С.А. Анищенко «Лекции по геометрии», которое получило гриф Министерства общего и профессионального образования РФ. В соответствии с учебными планами того времени курс геометрии читался в течение первых шести семестров (320 часов), причем в трех его модулях обстоятельно и подробно изучались вопросы, связанные с методами изображения фигур. Остановимся на них вкратце.

В третьем семестре рассматривался модуль «Геометрия в пространстве» (72 часа) [1, с. 3–85]. Начинаясь он с раздела «Методы изображения фигур» (12 часов). В этом разделе обсуждались и обосновывались инварианты параллельного проектирования, особенности построения изображений плоских и пространственных фигур, изучались основные требования к чертежам на уроках стереометрии, условности создания чертежей. При изучении призм, пирамид и правильных многогранников рассматривались не только способы их конструирования, но и методы построения изображений. Аналогичный подход реализовывался и при изучении поверхностей второго порядка, цилиндрических и конических поверхностей.

В четвертом семестре рассматривались геометрические преобразования (72 часа) [1, с. 87–133]. При их изучении студенты знакомились с новыми подходами к построению изображений плоских и пространственных фигур (6 часов). В частности, обсуждалось применение аффинных преобразований при построении чертежей, например, изображение эллипса с использованием родственного преобразования. Давалось определение полного чертежа, рассматривались идеи, которые применялись при построении полных и метрически определенных чертежей, при решении позиционных задач.

Пятый семестр был посвящен проективной геометрии (72 часа) [1, с. 135–168]. Изучение этой теории завершалось еще одним обращением к методам изображений, а именно, рассматривался способ получения чертежа с использованием центрального проектирования, называемый линейной перспективой (6 часов). В каждом из трех перечисленных выше семестров студенты выполняли большое количество контрольных и индивидуальных заданий по методам изображения фигур, при этом все построения осуществлялись вручную на листах ватмана или миллиметровой бумаге с использованием линейки и циркуля, в общей сложности на это уходило около 24 часов самостоятельной работы.

В современных условиях подготовки бакалавров по направлению «Педагогическое образование», профили «Математика и информатика», число выделяемых на курс геометрии аудиторных часов сократилось почти в два раза. В соответствии с этим уменьшилось с 24 до 12 и количество аудиторных часов, предназначенных для освоения методов изображения фигур. При таком дефиците учебных часов одного только традиционного подхода стало явно недостаточно для обучения студентов культуре грамотного построения чертежей как пространственных, так и плоских фигур. В эпоху цифровой трансформации образования появилась потребность включить в процесс обучения методам изображений фигур персональный

компьютер, но сделать это таким образом, чтобы максимально сохранить все то положительное, что предоставлял классический подход. Опираясь на имеющийся у нас опыт, мы отдали предпочтение интерактивному цифровому образовательному ресурсу Живая математика [2], обоснуем свой выбор.

Во-первых, среда Живая математика, как и любые другие системы динамической математики (Математический конструктор, GeoGebra и т.д.) сама по себе ничего не делает. Как и при бумажно-карандашном подходе для построения требуемого чертежа обучающемуся необходимо потрудиться, используя для этого линейку и циркуль, но только не реальные, а виртуальные.

Во-вторых, Живая математика не требует умения программировать, в ней нет команд и подпрограмм, активация которых приводила бы к построению изображения фигуры методом параллельного проектирования, аксонометрии, методом Монжа, вычислительным методом или методом линейной перспективы. Как и при традиционном подходе, требуется самостоятельно выполнить все необходимые для этого вычисления и построения.

В-третьих, среда Живая математика позволяет пользователю сэкономить время на выполнении однообразных и рутинных построений, дав ему возможность использовать готовые инструменты. Если таковых не достаточно, то можно всегда самому создать собственный инструмент пользователя любой сложности. Именно эта возможность дает большой выигрыш во времени.

В-четвертых, чертеж в среде Живая математика выполняется виртуальными инструментами за существенно более короткий промежуток времени, чем обычными линейкой и циркулем, при этом изображение выглядит четко и аккуратно, обладает всеми преимуществами электронного чертежа.

В-пятых, при наличии в компьютерном чертеже неточностей и ошибок, для их исправления не нужно перерисовывать все изображение. Достаточно внести электронные правки в соответствующий фрагмент чертежа. Это также позволяет сэкономить время при построении чертежа.

В-шестых, среда Живая математика предоставляет возможность студенту самому провести верификацию построенного чертежа, самостоятельно организовав самоконтроль и самопроверку, не дожидаясь окончательного вердикта преподавателя.

Лабораторные занятия начинаются со знакомства со средой Живая математика, на первом из них рассматриваются простейшие фигуры плоскости, в первую очередь многоугольники и окружности, предлагаются задания на построение их изображений. В качестве примера приведем следующее задание.

З а д а н и е 1. Построить изображение правильного пятиугольника.

Сначала построение выполняется вручную, на листе бумаги. Используя инварианты параллельного проектирования, определяются все необходимые отношения отрезков, которые потребуются при построении изображения требуемого многоугольника. После этого на рабочем поле среды Живая математика строится правильный пятиугольник ABCDE (рис. 1, левый слайд).

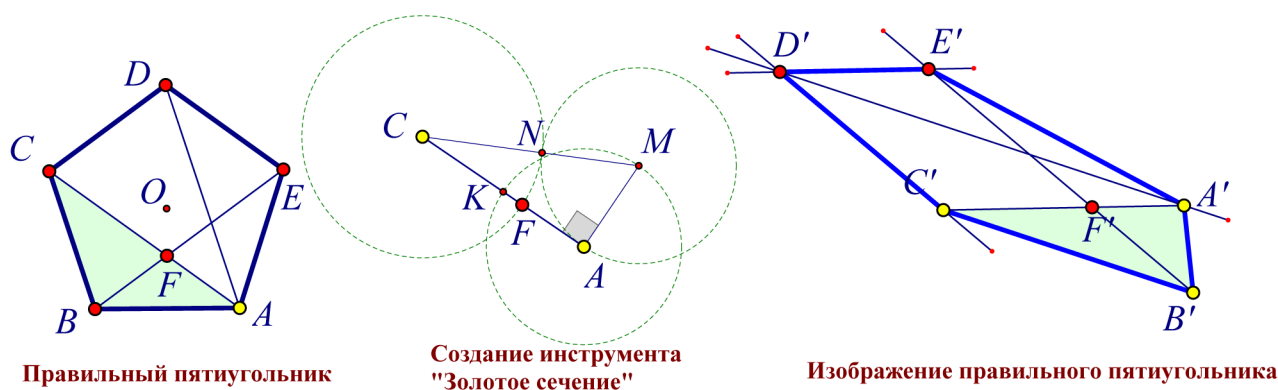


Рис. 1. Выполнение в среде Живая математика задания 1

Построить его можно несколькими способами, самый простой – воспользоваться готовым инструментом. Второй способ – построить точки O и A , затем, поворачивая точку A вокруг точки O на углы, кратные 72° , получить остальные четыре вершины. Актуализируя геометрический материал первого курса, студенты приходят к выводу, что пересечение F диагоналей AC и BE является золотым сечением каждой из них. Далее, создается собственный инструмент «Золотое сечение» (рис. 1, центральный слайд). Для этого отдельно построим отрезок AC , на нем как на катете построим прямоугольный треугольник AMC , $\angle A=90^\circ$, $AM = AC/2$, на гипотенузе MC от точки M отложим отрезок $MN = MA$, а на катете CA от точки C – отрезок $CF = CN$. После этого подсветим точки C , A и F и создадим требуемый инструмент.

Далее строится изображение $A'B'C'D'E'$ пятиугольника $ABCDE$ (рис. 1, правый слайд). Для этого изображается произвольный треугольник $A'B'C'$, затем, используя инструмент «Золотое сечение», изображается точка F' . Теперь осталось найти пересечение E' луча $B'F'$ с прямой, содержащей A' и параллельной $B'C'$. Оставшаяся точка D' строится аналогично. Завершается занятие построением эллипса, который является изображением окружности, создаются два инструмента, первый инструмент позволяет строить эллипс по центру и полуосям, второй – по центру и двум сопряженным радиусам.

Далее рассматриваются методы построения изображений окружностей и вписанных в них многоугольников. В качестве примера рассмотрим следующее задание.

З а д а н и е 2. Дан эллипс – изображение окружности. Построить изображение правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

Как и в предыдущем задании, сначала выполняется схематичный рисунок на листе бумаги, устанавливаются все необходимые факты, которые могут потребоваться при выполнении задания. Далее, в среде Живая математика строится окружность и вписанный в нее правильный шестиугольник $ABCDEF$, изображается диагональ AD (рис. 2, левый слайд).

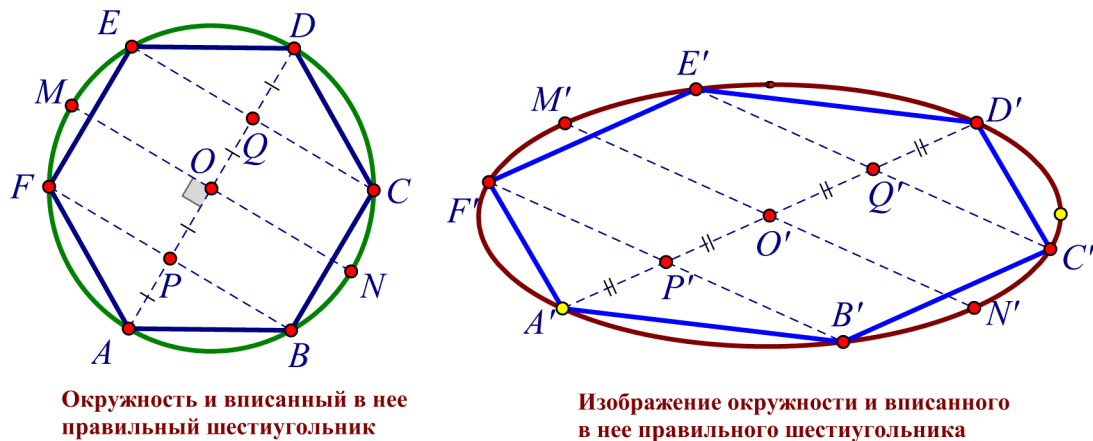


Рис. 2. Выполнение в среде Живая математика задания 2

Поскольку AD одновременно является диаметром окружности, то разумно построить диаметр MN, перпендикулярный AD. Дополнительно изобразим диагонали BF и CE, параллельные MN. Не сложно доказать, что их точки пересечения P и Q с AD вместе с центром O окружности делят AD на четыре равные части. Теперь легко завершить выполнение задания 2. Изображаем эллипс с центром O' (рис. 2, правый слайд), на нем выбираем произвольную точку A' , находим точку D' , симметричную A' относительно O' , строим диаметр $M'N'$ эллипса, сопряженный диаметру $A'D'$, находим середины P' и Q' отрезков $A'O'$ и $D'O'$ соответственно, проводим через эти точки прямые, параллельные диаметру $M'N'$, на пересечении этих прямых с эллипсом получим четыре оставшиеся вершины B', C', E', F' искомого изображения.

Рассмотрение методов изображения плоских фигур завершается построением изображений окружностей и описанных около них многоугольников.

Последующие лабораторные занятия были посвящены изображениям пространственных фигур, в первую очередь призм, пирамид, сферы, решению позиционных задач, а также применению среды Живая математика в заданиях на комбинацию сферы и многогранника. Отметим, что в первую очередь именно ради того, чтобы обучающиеся научились безошибочно строить наглядные изображения пространственных фигур, проходили первые лабораторные занятия, выполнялся целый комплекс заданий, аналогичных приведенным выше. Технология применения анимационных чертежей, выполненных в среде Живая математика, при обучении построениям стереометрических чертежей, подробно освещается в нашей совместной с Л.Ю. Копытовым статье в сборнике трудов [5]. С содержанием этой статьи можно ознакомиться по ссылке <https://elib.kspu.ru/document/80394>.

Подводя итог, отметим, что наш опыт использования среды Живая математика при обучении студентов методам изображения фигур показал, что у большей части обучающихся были сформированы необходимые умения, позволяющие строить чертежи пространственных фигур, изучаемых как в последующих разделах курса геометрии в вузе, так и в школьном курсе стереометрии.

Библиографический список

1. Анищенко С.А. Лекции по геометрии. Ч. 2. Красноярск: Издательство КГПУ, 1999. 175 с.
2. Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов (составители: Г.А. Аджемян, В.Н. Боровикова, В.Н. Дубровский, В.В. Кулагина, А.В. Пантуев, Л.М. Смолина, В.М. Чернявский, Г.Б. Шабат). М.: ИНТ, 2013. 205 с.
3. Майер В.Р., Копытов Л.Ю. Анимационные чертежи в заданиях по методам изображений на комбинацию сферы и многогранника // Математика и математическое образование в эпоху цифровизации: материалы XIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 2024. С. 262–267.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ТРЕНД В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

EXPERIMENTAL TRENDS IN TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS

В.А. Тестов, Р.А. Попков

V.A. Testov, R.A. Popkov

Цифровая трансформация, экспериментальные методы, исследовательское обучение, системы компьютерной алгебры.

Показано, что экспериментальные направления в математике в цифровую эпоху становятся все заметнее. Экспериментальные методы в обучении математике становятся все более актуальными. Необходимо обновлять содержание математических курсов и методы их преподавания, отдавая предпочтение исследовательскому обучению и применению систем компьютерной математики.

Digital transformation, experimental methods, inquiry-based learning, computer algebra systems. It has been shown that experimental approaches to mathematics are becoming increasingly prominent in the digital age. Experimental methods in mathematics teaching are becoming increasingly relevant. It is necessary to update the content of mathematics courses and their teaching methods, prioritizing inquiry-based learning and the use of computer mathematics systems.

Происходящий в современном мире процесс цифровой трансформации всего общества представляет собой очередную информационную революцию, сравнимую по своему масштабу с появлением у человечества письменности, печати, радио и т.д. Эта революция является результатом синергии двух процессов – процесса информатизации общества и процесса математизации научных знаний [1].

Необходимо заметить, что на протяжении всей истории развития математики ее основные результаты были получены сначала с помощью экспериментов и индуктивных рассуждений. Но еще в Античности появились предпосылки для превращения математики в дедуктивную, теоретическую науку. Наиболее полное представление о математике того периода дают «Начала» Евклида. Однако другой античный ученый Архимед показал эффективность применения в математике экспериментальных методов.

Позднее, особенно в период с конца XIX и по 60-е годы XX века, математика превратилась в теоретическую науку, основанную на аксиоматическом методе. Аксиоматическое мышление оказало существенное влияние на развитие всей математики, которая стала образцом использования в науке точных понятий и логических рассуждений. Наглядным примером использования этих идей стал много томный трактат группы французских математиков под псевдонимом Н. Бурбаки. Свой вклад в становление аксиоматической парадигмы в математике внес А.Н. Колмогоров, который построил основы аксиоматической теории вероятности.

Строгая логическая структура математики с середины XX в. стала преобладать и при построении школьных и вузовских математических курсов. Особенно ярко это проявилось в ходе колмогоровской реформы математического образования 60-х годов. А.Н. Колмогоровым был вложен огромный труд не только в дело проведения этой реформы, но и в написание ряда школьных учебников, в частности пособия «Геометрия для 6–8 классов», в котором впервые в мировой практике была сделана попытка создать логически завершённый курс геометрии для школьников. Такое аксиоматическое понимание математики проникло и в школьные и вузовские математические курсы, в которых преподаватели стремились все логически обосновать и доказать. Однако во многих случаях логическую стройность они были вынуждены заменить только ее видимостью.

Начиная с 70-х годов XX века идеи аксиоматической парадигмы в математике стали уступать место другим направлениям, которые ближе к практике и экспериментам. Ряд крупных математиков (В.И. Арнольд, М. Клайн и др.) выступили с критикой аксиоматического мышления. В изменившихся условиях содержание школьного курса математики стало предметом острых дискуссий. Меньше дискуссий возникало вокруг вузовских математических курсов, хотя и здесь возникли проблемы, т.к. время на обучение математике безжалостно сокращалось. А как писал В.И. Арнольд, «математическая безграмотность губительнее костров инквизиции». Пути совершенствования содержания курса математики следует искать, прежде всего, в самой математике. Об этом еще в 1997 г. говорил видный советский математик Н.Х. Розов в своем выступлении на широко известном семинаре А.Г. Мордковича в Великом Новгороде.

Многие изменения в программе математики общеобразовательной школы, по мнению Н.Х. Розова, невозможно осуществить, если не согласиться с принципиальным положением: *отдельные разделы* допустимо изучать на описательно-демонстрационном уровне, добиваясь от учеников понимания сути дела без сообщения им формальных доказательств и логических рассуждений.

Это предложение психологически особенно трудно было принять профессионалам, преподавателям математики, убежденным, что советская методология преподавания математики в школе всегда во главу угла ставила требование строгой научности и логической доказательности. Но постепенно все же приходит осознание правоты Н.Х. Розова.

Если посмотреть на зарубежные страны, то, например, стандарты Кебриджской международной школы (GIS) предполагают гораздо меньше доказательств математических фактов, чем в российском математическом образовании, а шаблонов для решения задач в этих стандартах больше. Что же лучше – это вопрос для обсуждения [2].

Теперь приходит пора широкого применения компьютерных средств в преподавании математических курсов. Но у многих преподавателей наблюдается стремление по-прежнему все обосновать и доказать, в то время как методы исследовательского обучения получают недостаточное применение.

Между тем с появлением современных программных средств существенно увеличились возможности проведения экспериментов с объектами математических

исследований. В цифровом обществе становится все более очевидным, что учащиеся должны быть освобождены от необходимости вручную выполнять сложные не только числовые, но и символьные преобразования, запоминать большой объем информации, больше внимания уделять развитию навыков творческого мышления. Возникает необходимость внедрения методов экспериментальной математики в образование.

Многие учителя предприняли шаги по обновлению методов обучения математике, стремясь усилить экспериментальную и наглядную составляющие с использованием систем компьютерной математики. Подавляющее большинство из этих попыток относилось к курсу геометрии с применением систем динамической геометрии GeoGebra, Математический конструктор и др., как для школьников, так и для студентов – будущих учителей. Эти методы сейчас нашли широкое применение в учительской среде во многих регионах. В Архангельске в САФУ даже открылась кафедра экспериментальной математики.

Однако следует заметить, что в последние годы стало наблюдаться падение результатов ЕГЭ при решении задачи по стереометрии. Закономерно возникает вопрос, а не образовался ли в преподавании геометрии перекоп на наглядную составляющую в ущерб логической составляющей? Многие учителя перестали вообще доказывать теоремы, благо теперь устных экзаменов в школе нет, и никто в явной форме не проверяет умение школьников проводить логические рассуждения. Но доказательства, логические рассуждения безусловно должны присутствовать в любом математическом курсе.

Эффективность обучения математике ведь зависит не только и не столько от глубины и прочности овладения обучающимися знаниями, умениями и навыками, сколько от развития их математического мышления, от уровня их готовности к исследовательским и творческим действиям. Проблема формирования математического мышления у школьников и студентов в цифровую эпоху получила новое звучание. Хотя эта проблема давно стоит перед исследователями, но пути ее решения все время совершенствуются. В современных условиях приоритет в обучении математике надо отдать в первую очередь формированию средств математического мышления и математической деятельности. Особо важную роль стали играть логическое, алгоритмическое и комбинаторное виды мышления, они помогают разобраться в больших объемах информации, анализировать данные и принимать обоснованные решения. В геометрическом воображении и интуиции ведущую роль играют образно-геометрические когнитивные схемы. Наличие таких когнитивных схем помогает ученику наглядно представить многие математические объекты и отношения, замещать абстрактные математические модели наглядными схемами и представлениями [4].

Основным в обучении математике должно являться обучение математическим методам рассуждения. Это включает в себя не только построение доказательств, примеров и контрпримеров к утверждениям, но и осмысление введенных понятий, анализ уже построенных примеров, выдвижение гипотез, впоследствии подвергаемых проверке. Кроме того, раз в какой-то мере математика является

естественной наукой (В.И. Арнольд), то ей присущи эксперименты, выполнение которых естественно поручить компьютеру.

Однако, если взглянуть на классические математические дисциплины, то можно увидеть, что основное содержание и методы преподавания этих дисциплин не обновлялись не только в школьном курсе, но и во многих вузах более полувека. Основные вузовские математические курсы (алгебры, математического анализа) пытаются перестроить лишь отдельные энтузиасты. Студенты вынуждены вручную решать, например, системы линейных уравнений с помощью метода Крамера, теряют много времени на вычисление интегралов, на решение дифференциальных уравнений, хотя, используя компьютер, все это можно сделать намного быстрее. Студентам и школьникам зачастую предлагается большое количество бессмысленных вычислительно-синтаксических задач, не представляющих собой никаких значимых идей.

Современные системы компьютерной алгебры предоставляют замечательную возможность проведения формальных вычислений и различных экспериментов, они не требуют от человека владения глубокими программистскими навыками. Использование таких систем полезно внедрять еще в школе или с самых первых дней пребывания в вузе [3].

Представляется разумным сосредоточиться на задачах, с которыми учащиеся сталкиваются в школе и которые предоставляют собой хорошие примеры для будущих абстрактных понятий (например, из теории чисел). Радость, получаемая учеником от того, сколь эффективно система компьютерной алгебры решает сложную задачу, является стимулом для дальнейшего изучения математики. Разумеется, это может потребовать изменений в традиционных математических курсах, исключению явной архаики и добавления нового материала. В частности, надо проявить больше внимания к дискретным объектам.

Выбор конкретной системы компьютерной алгебры является делом вкуса и привычки. Мы советуем обратить внимание на систему *SageMath*. Она бесплатная и свободно распространяемая, реально богатая возможностями и продолжающаяся развиваться, ее синтаксис подобен языку *Python*. Рассмотрим примеры.

1. Числа 2^{2025} и 5^{2025} выписаны одно за другим в десятичной записи. Сколько всего цифр выписано? Здесь уместно сначала рассмотреть частные случаи с маленькими степенями и сформулировать гипотезу. *Sage* позволяет ее проверить.

```
sage: a = 2^2025; b = 5^2025
sage: str_a = str(a); str_b = str(b)
sage: len(str_a + str_b)
2026
```

2. Какой остаток получится при делении числа $\underbrace{2025\ 2025\dots 2025}_{100}$ на 133.

Для решения можно организовать цикл, но есть способ проще.

```
sage: str_n = '2025' * 100 (создаем строку из ста блоков 2025)
sage: n = Integer(str_n) (преобразовываем строку в целое число)
sage: mod(n,133) (получаем остаток)
30
```

В этой задаче вполне уместно провести небольшое исследование и составить таблицу остатков в зависимости от количества блоков, например, от 1 до 100. Более того, учащиеся могут провести и другие эксперименты.

Таким образом, все более очевидной становится необходимость учета новых тенденций в обучении математике: уделение большего внимания к развитию средств математического мышления, внедрению исследовательских и экспериментальных методов, а также систем компьютерной алгебры в математические учебные курсы. Эксперименты в системах компьютерной алгебры при правильном использовании «накачивают» ум и гипотезами, и примерами, и конструкциями.

Библиографический список

1. Тестов В.А. Цифровизация науки и образования как результат синергии процессов информатизации и математизации // Педагогическая информатика. 2024. № 2. С. 111–120.
2. Троицкая С.Д. К юбилею журнала // Математика в школе. 2024. № 1. С. 16.
3. Тестов В.А., Попков Р.А. Исследовательское обучение математике и системы компьютерной алгебры // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4 (53). С. 52–68. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_52
4. Тестов В.А. Формирование структур математического мышления при обучении математике в цифровую эру // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2025. № 3 (март). С. 204–217. DOI 10.24412/2304-120X-2025-11047

РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ НА БАЗЕ СПО «РЕДАКТОР ЭУ/ЭОК»

DEVELOPMENT OF ELECTRONIC EDUCATIONAL RESOURCES IN MATHEMATICS BASED ON THE SPECIAL SOFTWARE «EDITOR OF EU/EOK»

В.А. Турчин, Д.Г. Дейкун, И.А. Жучков V.A. Turchin, D.G. Deykun, I.A. Zhuchkov

Электронная информационно-образовательная среда, цифровые образовательные ресурсы, электронный учебник, электронный образовательный курс, математика, СПО «Редактор ЭУ/ЭОК».

Сегодня в образовательных учреждениях активно разрабатываются и внедряются в учебный процесс цифровые образовательные ресурсы (ЦОР), что не только повышает эффективность образовательной деятельности, но и способствует формированию полноценной электронной информационно-образовательной среды (ЭИОС) учебного заведения. Полагаем, что описанный в данной статье опыт разработки электронных учебных пособий по дисциплине математика в программе «Редактор ЭУ/ЭОК» будет полезен преподавателям, занимающимся разработкой ЦОР.

Electronic information and educational environment, digital educational resources, electronic textbook, e-learning course, mathematics, special software «Editor of EU/EOK».

Today, digital educational resources (DER) are being actively developed and introduced into the educational process in educational institutions, which not only increases the efficiency of educational activities, but also contributes to the formation of a full-fledged electronic information and educational environment (EIEOS) of an educational institution. We believe that the experience described in this article of developing electronic textbooks on the subject of mathematics in the “Editor of EU/EOK” program will be useful for teachers who are developing DER.

Одной из базисных задач цифровой трансформации военного профессионального образования является развитие электронной информационно-образовательной среды (ЭИОС) и наполнения ее цифровым образовательным контентом. ЭИОС – является открытой системой и включает цифровые образовательные ресурсы (ЦОР), электронные библиотеки с сетевым доступом, распределенные базы и банки данных, электронные учебно-методические комплексы [1]. Доступ обучающихся к ЭИОС осуществляется через телекоммуникационные системы, а как правило, через сеть Интернет. Пользователи проходят авторизацию в ЭИОС, и через личный кабинет получают доступ к ЦОР. К ЦОР относятся электронные учебники, электронные учебные пособия, электронные словари и справочники, аудиокниги, учебные видеофильмы, видеозаписи лекций и семинаров, презентации, интерактивные модели, цифровые картографические модели, онлайн-тесты и др. Использование ЦОР в образовательном процессе не только повышает его качество и эффективность, но и позволяет развивать у обучающихся навыки самообразования и саморазвития, мотивирует заниматься научно-исследовательской работой [2; 3].

Следует заметить, что при формировании ЭИОС военного учебного заведения требуется соблюдать баланс между требованиями цифрового развития образования, определяемыми Минобрнауки России, и особым правовым статусом военнослужащих, который ограничивает доступ обучающихся в военном учебном заведении к Интернету, социальным сетям, мессенджерам и видеохостингам, использование гаджетов и ноутбуков [4]. Поэтому обучающиеся в военном вузе часто не могут использовать для своего самообразования ЦОР, размещенные в сети Интернет, а саму сеть, как технологическую платформу для доступа к ЭИОС учебного заведения. В силу этого актуальной является разработка ЦОР на базе самого военного учебного заведения и активное внедрение их в образовательный процесс, особенно на занятиях по самоподготовке обучающихся [5].

Разработка ЦОР для ЭИОС в соответствии с постановлением Правительства РФ от 11.10.2023 № 1678 «Об утверждении Правил применения организациями, осуществляющими образовательную деятельность, электронного обучения, дистанционных образовательных технологий при реализации образовательных программ» должна выполняться на базе отечественного программного обеспечения. В военных образовательных организациях высшего образования Министерства обороны Российской Федерации для разработки ЦОР, прежде всего таких как электронные учебники (ЭУ), электронные учебные пособия (ЭУП), интерактивные тесты используется специальное программное обеспечение (СПО) «Редактор ЭУ/ЭОК» [6].

СПО «Редактор ЭУ/ЭОК» включает 3 модуля:

- Veditor, предназначен для разработки ЭУ, ЭУП на основе текстового контента и мультимедийных ресурсов;
- TMaker, предназначен для разработки интерактивных тестов, как открытого, так и закрытого вида для текущего, рубежного или итогового контроля знаний;
- Converter, приложение для конвертирования ЦОР, созданных в пакете программ SunRav BookOffice.

Редактор ЭУ/ЭОК полностью совместим с отечественной операционной системой Astra Linux и свободно распространяемым пакетом офисных приложений с открытым кодом LibreOffice.

С целью совершенствования учебного процесса по дисциплине математика и наполнения ЭИОС вуза ЦОР нами были разработаны в СПО «Редактор ЭУ/ЭОК» электронные учебные пособия «Математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения» [7], «Прикладная математика» [8], база данных лекционного курса по дисциплине «Математика» [9] и другие ЦОР. В силу того, что основные подходы к разработке электронных учебников, в том числе и по математическим дисциплинам, как и требования к структуре ЭУ, технология подготовки образовательного контента хорошо описаны в многочисленных методических рекомендациях по разработке ЭУ, а также в научных статьях [10; 11], в том числе и авторов данной статьи [12] мы остановимся на ключевых моментах разработки ЭУ (ЭУП) с нуля в приложении Veditor СПО «Редактор ЭУ/ЭОК».

Структура разработанных нами ЭУП стандартна и состоит из 4 разделов:

- теоретический, который включает лекционный материал по учебным темам и практические задания для самостоятельного решения;
- раздел мультимедиа, включает презентации и учебные видеоуроки;
- тестовый раздел, включает тесты для текущего и рубежного контроля;
- справочный раздел, объединяет глоссарий, литературу по учебной дисциплине и инструкцию по работе с ЭУП (рис. 1)

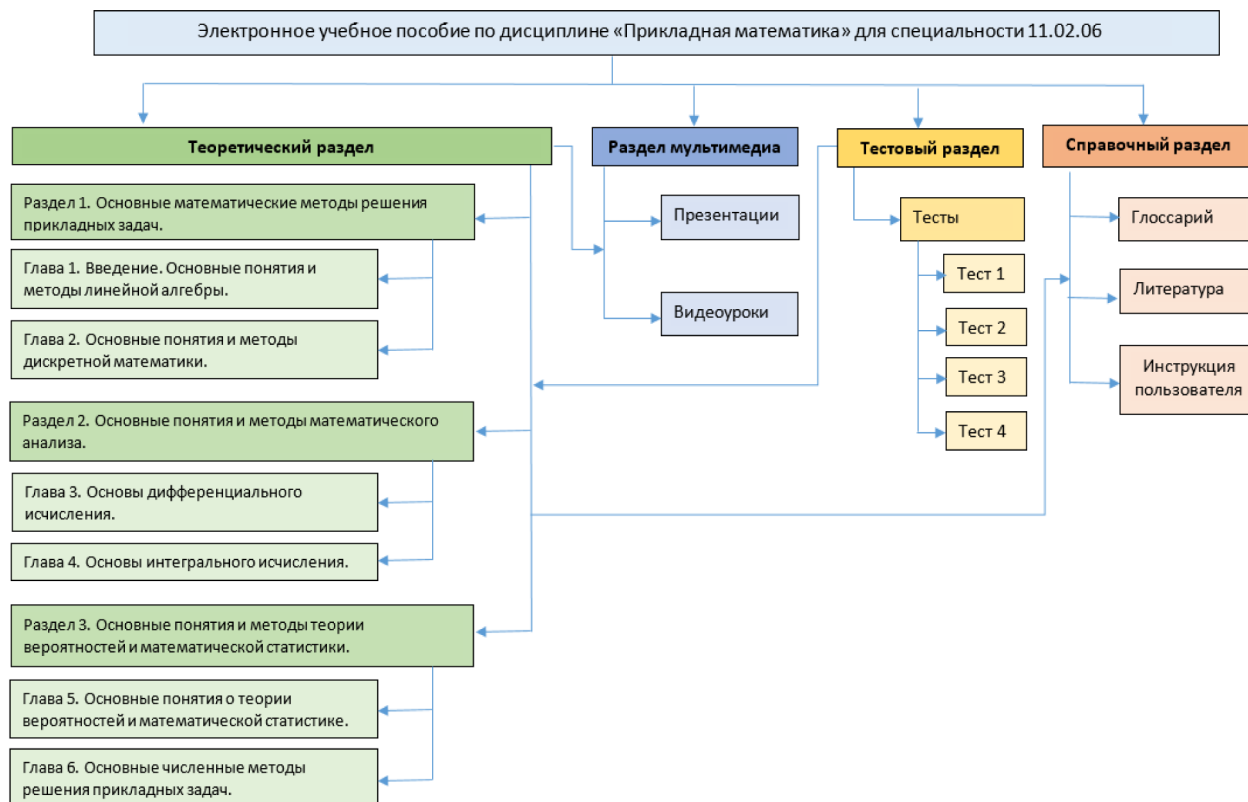


Рис. 1. Структура ЭУП «Прикладная математика»

При разработке ЭУП в Veditor на первом этапе требуется сформировать структуру ЭУП, для чего используется пункт меню «Глава» или контекстное меню (рис. 2).

Далее происходит наполнение разделов ЭУП соответствующим контентом по каждому разделу.

Одной из ключевых особенностей учебников по математике является наличие формул, математических символов, решений задач и примеров. При копировании текста из текстового файла формата .odf или .doc и вставки в разрабатываемый ЭУП формулы и математическая символика не распознаются приложением, поэтому их необходимо либо набрать в приложении с помощью встроенного редактора математических формул, либо вставить как изображения (рис. 3).

- а) пример копирования формулы из текстового файла;
- б) вставка формулы как изображения из графического файла;
- в) набор формулы во встроенном математическом редакторе Veditor.

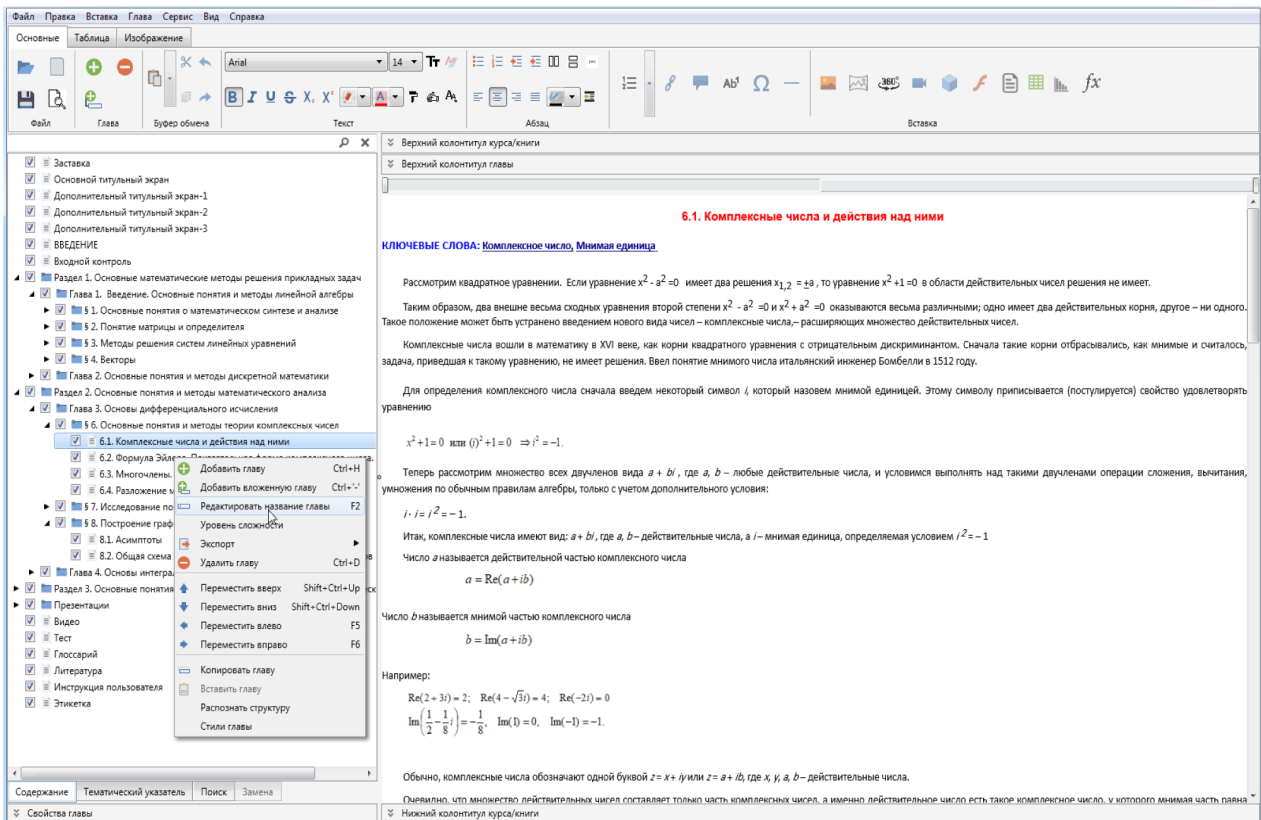


Рис. 2. Формирование структуры ЭВП в Beditor

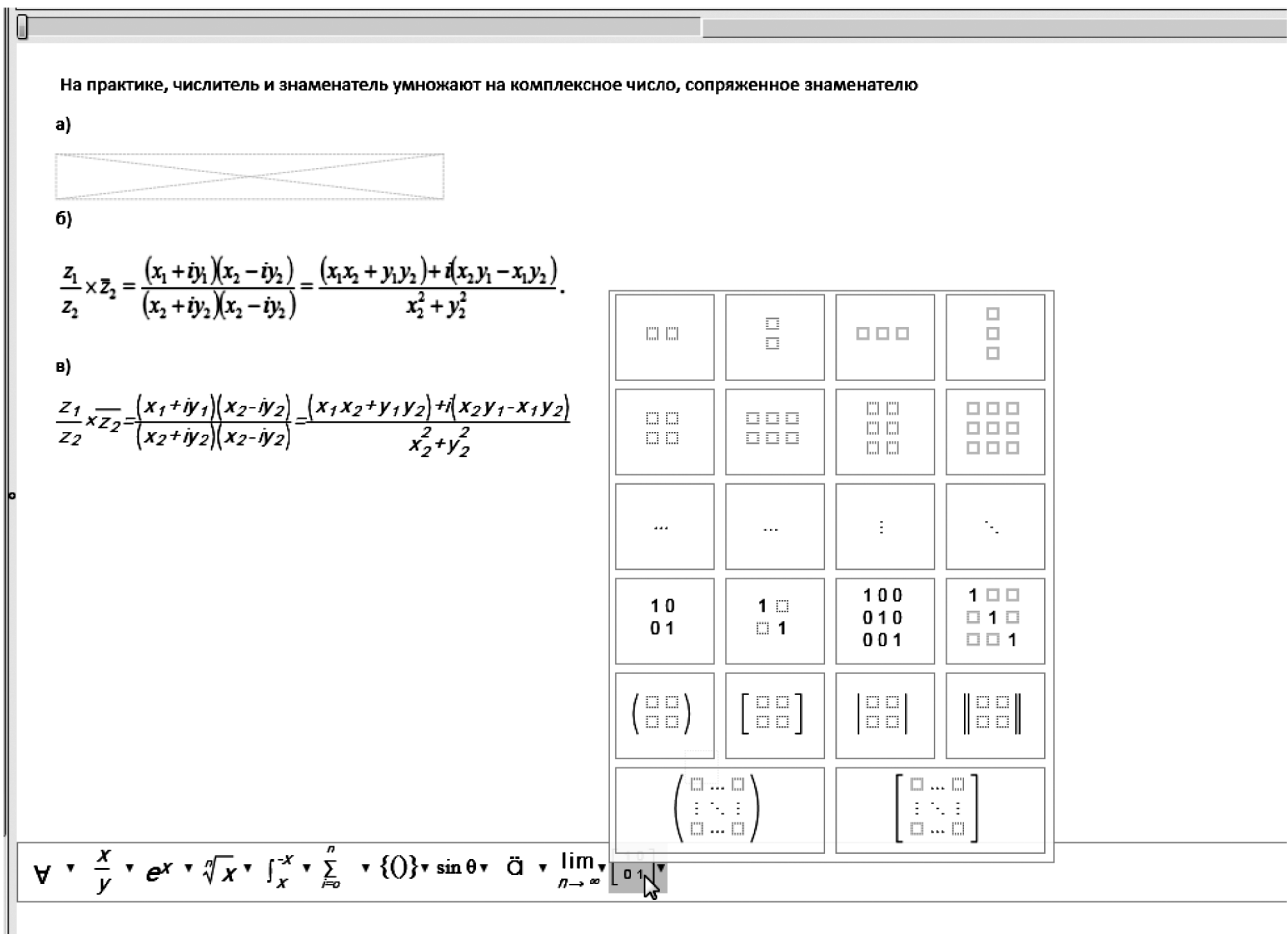


Рис. 3. Работа с формулами в Beditor:

Следует заметить, что возможности редактора формул в Veditor скромнее, чем у редактора LibreOffice Math или Microsoft Equation 3.0., поэтому при работе с формулами, разработчику ЭУП скорее всего потребуется сочетать описанные выше подходы.

После завершения разработки ЭУП должен быть экспортирован в формат html. Для работы с ЭУП не потребуется предустановка специального программного обеспечения, просмотр содержимого ЭУП осуществляется в браузере, например, в Firefox, Opera или Яндекс Браузер (рис. 4).

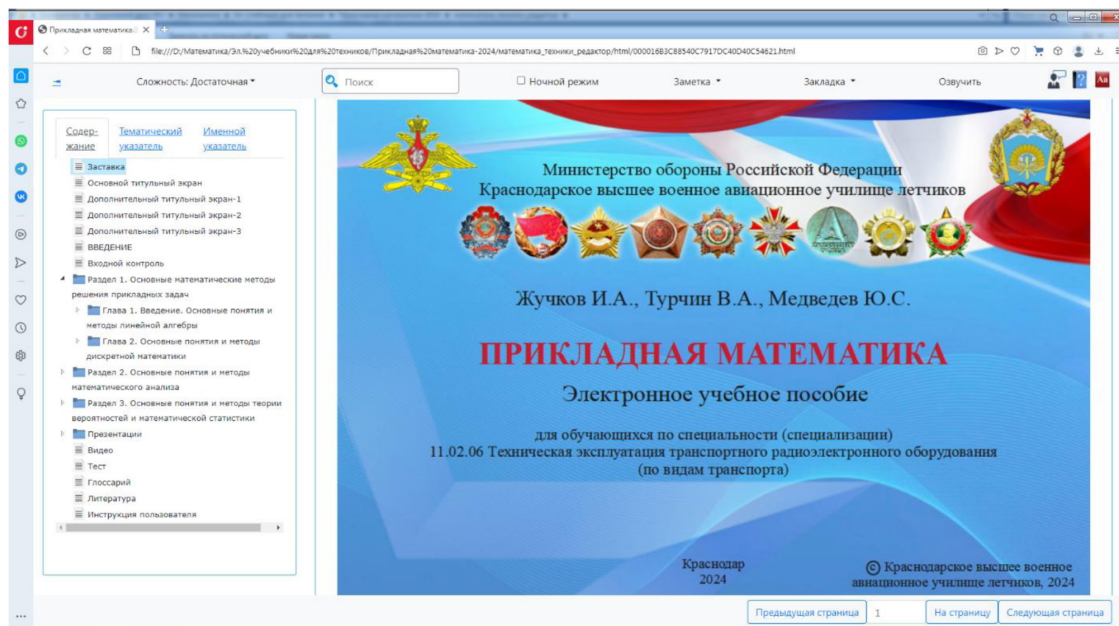


Рис. 4. Отображение ЭУП «Прикладная информатика» в браузере

Для перехода по разделам ЭУП можно использовать, как стандартные навигационные возможности браузера, так гиперссылки самого ЭУП. Интерактивные и мультимедийные элементы ЭУП (тесты, видеоуроки, аудиолекции) запускаются непосредственно из браузера, что позволяет работать с ЭУП, разработанными в СПО «Редактор ЭУ/ЭОК», на смартфонах, планшетах и ноутбуках.

В целом можно констатировать, что на базе СПО «Редактор ЭУ/ЭОК» можно создавать качественные и эргономичные ЦОР по математике и математическим дисциплинам, а размещение их в ЭИОС вуза будет способствовать повышению эффективности образовательного процесса его интенсификации и повышению мотивации у обучающихся к самообразованию и саморазвитию.

Библиографический список

1. Дейкун Д.Г., Турчин В.А. Внедрение информационных технологий – новые возможности для обучения в вузах // Научные чтения имени профессора Н.Е. Жуковского: сборник научных статей XIV Международной научно-практической конференции, Краснодар, 08–09 ноября 2023 года. Краснодар: КВВАУЛ, 2023. С. 178–182.
2. Голубкина М.В., Козак Л.Г. Дистанционное обучение как инновационная педагогическая технология // Личность курсанта: психологические особенности

- бытия: Материалы X Всероссийской научно-практической конференции, Краснодар, 20–21 ноября 2019 года. Т. 1. Краснодар: КВВАУЛ, 2020. С. 134–146.
3. Третьякова Н.В., Бондаренко А.А. Внедрение электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в образовательной организации // Теория и практика современной аграрной науки: сборник IV национальной (всероссийской) научной конференции с международным участием, Новосибирск, 26 февраля 2021 года / НГАУ. Новосибирск: Золотой колос, 2021. С. 1736–1739.
 4. Турчин В.А., Дейкун Д.Г., Дейкун Г.И. Влияние информационных технологий на профессиональную подготовку специалистов // XIII Международная научно-практическая конференция молодых ученых, посвященная 62-й годовщине полета Ю.А. Гагарина в космос: сборник научных статей конференции, Краснодар, 19–20 апреля 2023 года. Краснодар: Издательский Дом – Юг, 2023. С. 91–96.
 5. Голубкина М.В. Современные инновационные методы обучения в образовательном процессе // Вестник научных конференций. 2019. № 4-2 (44). С. 39–41.
 6. Юдин В.А., Исай А.Н. Дизайн тоже имеет значение методика разработки электронных учебников в специализированном программном обеспечении, созданном в ходе ОКР «Библио» // Вестник военного образования. 2022. № 5 (38). С. 32–36.
 7. Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2025623603 Российская Федерация. «Математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения (для специальности 25.05.04)»: заявл. 26.08.2025: опубл. 03.09.2025 / В.А. Турчин, И.А. Жучков, Ю.С. Медведев [и др.]; заявитель ФГКВОУ ВО «КВВАУЛ им. Героя Советского Союза А.К. Серова» МО РФ.
 8. Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2025623594 Российская Федерация. «Электронное учебное пособие по дисциплине «Прикладная математика (для специальности 11.02.06)»: заявл. 26.08.2025: опубл. 02.09.2025 / В.А. Турчин, И.А. Жучков, Ю.С. Медведев [и др.]; заявитель ФГКВОУ ВО «КВВАУЛ им. Героя Советского Союза А.К. Серова» МО РФ.
 9. Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2023622711 Российская Федерация. «База данных лекционного курса по дисциплине «Математика» для специальности 25.05.04»: № 2023622405: заявл. 26.07.2023: опубл. 08.08.2023 / Ю.С. Медведев, В.В. Жучкова, И.А. Жучков [и др.]; заявитель ФГКВОУ ВО «КВВАУЛ им. Героя Советского Союза А.К. Серова» МО РФ.
 10. Карманова А.В., Третьякова Н.В. Создание электронного контента по математике с использованием визуализации для дистанционного и смешанного обучения в вузе // Современные проблемы науки и образования. 2021. № 1. С. 24. DOI: 10.17513/spno.30510
 11. Варфоломеева С.В., Головина Н.В., Терехов В.В. Использование оптимизационных методов в преподавании математики студентам гуманитарного профиля // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2019. № 3. С. 320–325.
 12. Дейкун Д.Г. и др. Программные средства для создания электронных учебников информационной образовательной среды вуза / Д.Г. Дейкун, В.А. Турчин, Г.И. Дейкун, Г.А. Наурусова // Научный потенциал вуза – производству и образованию, Армавир, 10–11 февраля 2023 года. Армавир: Редакция газеты «Армавирский собеседник», 2023. С. 164–168.

ДИНАМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

DYNAMIZATION OF THE PROCESS OF RESEARCH OF MATHEMATICAL OBJECTS

Н.И. Фирстова

N.I. Firstova

Динамизация математических объектов, визуальное исследование, различные виды наглядности, динамизация в математике – как цель и как средство.

В условиях динамически развивающегося общества цели и задачи образования видоизменяются и дополняются в соответствии с потребностями социума и его особенностями. Проведены исследования, позволяющие рассматривать возможность динамизации математических объектов как одного из средств формирования активной умственной деятельности учащихся.

Dynamization of mathematical objects, visual research, various types of visualization, dynamization in mathematics – as a goal and as a means.

In a dynamically developing society, the goals and objectives of education are being modified and supplemented in accordance with the needs of society and its characteristics. Research has been conducted that allows for the consideration of the possibility of dynamizing mathematical objects as one of the means of forming students' active mental activity.

Важнейшими проблемами образования, в частности – математического, являются проблемы заинтересованности обучающихся в изучении того или иного материала и возможности его эффективного усвоения. Если степень заинтересованности определяется в первую очередь общекультурным уровнем обучающегося, качеством и глубиной его ценностных установок (которые зависят, прежде всего, от родителей, затем от следующих уровней окружения: товарищей, СМИ, школы) и лишь во вторую очередь – трудностями усвоения учебного материала, то сама проблема усвоения связана с методикой работы с изучаемым материалом. Методические исследования, позволяющие рассматривать возможность динамизации математических объектов как одного из средств формирования активной умственной деятельности обучающихся, отражены в работах Л.М. Фридмана, И.М. Яглома и других [4].

В условиях динамически развивающегося общества цели и задачи образования видоизменяются и дополняются в соответствии с потребностями социума и его особенностями. Это находит отражение в методах обучения, которые, в свою очередь, являются компонентами целостной методической системы. В связи с этим наблюдаются серьезные изменения в обучении математике как прикладной науки. На первый план выходит именно применение полученных знаний в реальных ситуациях на практике. Однако на этот процесс накладываются особые сложности специфические особенности математики как науки: достаточно высокий уровень абстракции, сложности мотивирования обучения и т.п. Отдельной важной

проблемой становится реализация принципа наглядности, а также обеспечение постоянной заинтересованности обучающихся в том, что они делают. Учителя достаточно часто сталкиваются со сложностями именно в этом компоненте обучения. Свой отпечаток накладывает также реалии современного информационного общества и те его особенности, что во многом формируют мировоззрение обучающихся. Образность, яркость и динамичность визуального представления информации влияет во многом на формирование психики ребенка: наглядно-образное мышление – совокупность способов и процессов образного решения задач, предполагающих зрительное представление ситуации и оперирование образами составляющих ее предметов, без выполнения реальных практических действий с ними [3] требует получение соответствующих образов, визуализации (от лат. *visualis*, «зрительный» – общее название приемов представления числовой информации или физического явления в виде, удобном для зрительного наблюдения и анализа) информации, представленной в письменном или звуковом виде [2].

Нужно ли нам учиться видеть? Как мы познаем мир? Это самый древний вопрос философии, в зависимости от решения этого вопроса философов относили либо к метафизикам, которые считали, что мы рождаемся с некоторыми знаниями о мире, либо к эмпирикам; последние утверждали, что все знания возникают на основе сенсорного опыта.

Работы американского психолога Р. Арнхейма положили начало современным исследованиям роли визуального мышления в познавательной деятельности, которая коренным образом меняет взгляд на традиционную наглядность, отдавая приоритет визуализации практически любого учебного материала [1].

Но, как показывает анализ учебной литературы, данная тема недостаточно глубоко освещена, что не позволяет использовать обучающимся визуальные модели как средство решения задач. Кроме того, методическая литература тоже не содержит основательных сведений в этой области. Как следствие этого, учителя практически не используют данные методы в процессе обучения.

Наглядное обучение предполагает моделирование объекта восприятия с опорой на нейрофизиологические механизмы памяти и психологию восприятия. Наглядное обучение – это согласование внутренних действий обучаемых с внешними действиями обучающего согласно категории цели. Целевая установка, внешнее ненавязчивое побуждение учителя к внутренним действиям обучающегося, адекватным поставленной цели, при непосредственном восприятии модели организованного набора знаний – составляющие компоненты наглядного обучения. Наглядное обучение обеспечивает формирование у обучающихся первичных обобщений и позволяет установить прочные связи. В решении этих задач большую роль играют не один, а различные виды наглядности (оперативная, формализованная, структурная, фоновая, дистрибутивная, наглядность преемственности), комплекс средств обучения. Использование наглядности на каждом уроке должно быть тщательно продумано, учтены психологические, возрастные, и индивидуальные особенности обучающихся. Наглядное обучение должно вписаться в общую систему работы учителя.

Но иногда обычных средств наглядности: иллюстраций к задачам, графиков, схем и т.д. становится недостаточно. Например, при решении сюжетных задач на движение, в частности на движение «вдогонку» или на движение «по кругу». Обучающимся сложно смоделировать реальную ситуацию на объектах, которые нарисованы в учебнике или тетради и находятся без движения. В таких случаях необходимо прибегнуть к созданию динамической модели.

Под динамизацией понимается, прежде всего, процесс исследования математических объектов и их структур с помощью изменения базисных элементов или определяющих их параметров. Например, достаточная степень подвижности модели трапеции позволяет выяснить, при каких условиях трапеция исчезает, вырождаясь в параллелограмм или в иной четырехугольник, при каких условиях этот четырехугольник становится трапецией. Динамика параллелограмма, осуществляясь на подвижных моделях, позволяет получить прямоугольник, квадрат и т.п.

Динамическое моделирование открывает возможности для математического эксперимента. Например, процесс наблюдения за изменением положения вершины треугольника при фиксированном основании. Объектами наблюдения здесь являются медиана, биссектриса, высота, проведенная к основанию, и его срединный перпендикуляр. Наблюдаемые явления: совпадение линий, расположенность «между», изменение углов.

Прежде чем охватить перспективы применения моделирования в процессе школьного образования, обратимся к «динамическому» моделированию и задержимся на некоторых теоретических вопросах моделирования.

Методические исследования, позволяющие рассматривать возможность динамизации математических объектов как одного из средств формирования активной умственной деятельности учащихся, отражены в работах Л.М. Фридмана, И.М. Яглома, А.В. Василевского и других.

В качестве объектов динамизации можно брать различные типы моделей тех или иных понятий и не только чисто геометрических, но и синтаксических, например. В качестве объектов можно использовать высказывания и умозаключения.

Динамизация возможна не только на стадиях решения задач, но и при работе над понятием или доказательством и т.д.

Вообще говоря, проблема динамизации в математике может рассматриваться в двух аспектах:

– во-первых, динамизация в математике может рассматриваться как цель, при этом формулируются и решаются специальные динамические задачи, вводятся специальные термины;

– во-вторых, динамизация в математике может рассматриваться как средство постановки новых проблем, формулировки новых задач на различных этапах учебной деятельности.

Таким образом, исследование по тематике динамического моделирования становится актуальным в условиях тех новых задач, что ставятся перед учебно-воспитательной деятельностью учителя.

Можно констатировать два факта: большинство обучающихся средней школы не только не выработали умений моделирования и динамического подхода в процессе изучения математики, но и имеют весьма смутное представление о том, что это такое.

Исследования показывают:

1. Динамическое моделирование развивает математическую интуицию и само является эвристическим приемом, выходящим за пределы собственно математики.

2. Надлежащий подбор динамических моделей с учетом возрастных особенностей обучающихся позволяет опустить возрастную планку для целостного усвоения связанной между собой группы понятий (т.е. степень, корень), предоставляет новые возможности для опережающего обучения и пропедевтики.

3. Динамическое моделирование развивает мышление обучающихся, формирует методологические принципы учебной и исследовательской работы.

4. Оно позволяет дифференцировать обучение обучающихся и интегрировать различные темы.

5. Расширяет возможности составления исследовательских программ, выявляет новые возможности для обучения учащихся составлению и решению задач, в том числе – и нестандартных.

6. Позволяет ввести в учебный процесс математический эксперимент, четко выделить содержательную и логическую составляющие изучаемой темы, осуществить многоуровневый подход к обучению учащихся как содержательной, так и логической составляющих и их использованию.

7. Эффективность динамического моделирования зависит от динамического опыта ребенка в дошкольный и младший школьный периоды своей конструктивно-познавательной деятельности (ребенок, который работал в детстве с различными подвижными моделями на сознательном или бессознательном уровнях, рисовал различные конструкции, уже обладает начальными навыками динамического моделирования и очень легко входит в среду динамического моделирования в процессе учебной деятельности).

Рассмотренные выше вопросы важны для успешного учебного процесса, так как отражают начальные, базисные его основы. Но вся полнота и значимость динамического моделирования проявляется в исследовательских программах и при решении нестандартных задач.

Библиографический список

1. Арнхейм Р. Визуальное мышление. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 97–107.
2. Визуализация // Большой Энциклопедический Словарь. Большая Российская энциклопедия. СПб.: Норинт, 2001. 1456 с.
3. Столяр А.А. Педагогика математики: Наглядность обучения. М.: Просвещение, 1986. 414 с.
4. Эриксон Э.Г. Идентичность: юность и кризис. М.: Прогресс, 1996. 340 с.

КОНСТРУКТОР ИНТЕРАКТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ «1С:УРОК» КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ

INTERACTIVE MATERIALS CONSTRUCTOR “1С:LESSON” AS A TOOL OF TEACHING MATHEMATICS TO SCHOOLCHILDREN

Е.А. Хилюк

E.A. Khilyuk

Цифровая трансформация образования, конструктор интерактивных материалов, средство обучения математике, «1С:Урок».

В статье на основе изучения функциональных возможностей цифрового инструмента «Конструктор интерактивных материалов» платформы «1С:Урок» рассматриваются отобранные сценарии использования такого инструмента в процессе обучения школьной математике. Приводятся конкретные примеры.

Digital transformation of education, interactive materials constructor, mathematics learning tool, “1С:Lesson”.

The article, based on the study of the functionality of the digital tool “Interactive Materials constructor” of the platform “1С:Lesson”, examines selected scenarios for using such a tool in the process of teaching school mathematics. Specific examples are provided.

Цифровая трансформация системы образования предполагает изменение традиционных методик обучения предмету за счет активного привлечения потенциала цифровых инструментов. На сегодняшний день отечественные компании, производящие цифровой образовательный контент, предлагают широкий спектр онлайн-платформ, доступных учителю и обучающимся.

Среди таких платформ выделим конструкторы, размещенные на портале «1С:Урок» <https://urok.1c.ru/constructor/>. Разработчики предлагают «Конструктор тестов», «Математический конструктор», а также новые инструменты: «Конструктор интерактивных материалов» и «Конструктор урока». Если возможности использования первых двух конструкторов уже описывались в научной литературе [1; 2; 3], то дидактический потенциал остальных требует изучения.

«Конструктор интерактивных материалов» (КИМ) является средством создания динамических иллюстраций и интерактивных заданий. Функционал позволяет разрабатывать и использовать материалы в виде изображения-коллажа, демонстрационного пособия, проверяемого задания, а также тестового задания в режимах «Редактор» и «Предпросмотр». Все эти возможности могут быть широко применены при обучении школьной математике.

Выделим наиболее эффективные сценарии использования КИМ на уроках и внеурочных занятиях по предмету.

1. В рамках **традиционного обучения** подготовленные учителем математики материалы целесообразно использовать в качестве *наглядных* средств, как статичных, так и динамических при фронтальной форме работы. Важной особенностью таких материалов является то, что они могут конструироваться учителем

как заранее, так и во время урока, демонстрируя визуальное введение математического понятия, эмоциональную поддержку восприятия термина, зрительно-смысловую интерпретацию понятия, сопоставление слова, формулы и образа, зрительную иллюстрацию свойства понятия, установление связей между однородными понятиями, логику изложения материала, ход доказательных рассуждений, изложение трудновоспроизводимых положений теории и пр.

Рассмотрим первый вариант конструирования таких материалов. В «Редакторе» КИМ возможно размещение определенных моделей, часть из которых помечена как «Изображение» со свойствами «Можно перемещать» или при необходимости «Скрыт с выключателем». Тогда при работе в плеере такие материалы можно будет перемещать или произвольно открывать их для демонстрации обучающимся.

Пример 1. Сопровождение объяснения учителем классификации четырехугольников демонстрацией соответствующего графа. Подписанные вершины графа и их взаимосвязи могут открываться постепенно по ходу изложения материала или выстраиваться в нужном порядке с помощью перемещения объектов непосредственно при объяснении.

Второй вариант – предоставление спикеру инструментов, которые будут доступны в плеере. Тогда учитель при демонстрации модели может достраивать ее теми инструментами, которые были ранее отобраны.

Пример 2. Объяснение теоретических положений и построение сечений многогранников реализуется с помощью выделенного инструмента «Создать отрезок».

Пример 3. Изучение понятия «процент». Интерпретация понятия на динамически изменяющихся круговых диаграммах с помощью инструмента «Создать круговую диаграмму».

Еще одна возможность применения КИМ в рамках традиционного обучения – использование его инструментов для *контроля и коррекции знаний* школьников. Такая форма работы также может быть реализована двумя способами: с помощью встраивания тестового задания или с привлечением функции «Эталон ответа».

Тестовое задание конструируется в КИМ кнопкой «Создать группу элементов с выбором», причем сами элементы могут быть как текстом, так и произвольными объектами. КИМ предоставляет возможность обучающимся выбора одного ответа, нескольких ответов среди данных за счет размещения учителем чекбоксов, радиокнопок и раскрывающегося списка. Все настройки доступны в поле «Свойства объектов». При конструировании тестовых заданий следует помнить об общих требованиях, предъявляемым к таким материалам: требования валидности, простоты, определенности, однозначности ответа, надежности. Такие задания целесообразно предлагать школьникам для индивидуального выполнения.

Пример 4. Изучите поведение функции на динамограмме https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/grafiki_funktsiy_2/trenazhyery/179516.phd и выберите ее аналитическое представление (приводятся несколько линейных функций).

Интересной и отличительной особенностью КИМ является возможность конструирования проверочных заданий с помощью функции «Эталон ответа».

Элемент модели в режиме «Редактор», помеченный как «Эталон ответа», является образцом решения задачи. Обучающимся в режиме плеера он недоступен. Им нужно воспроизвести его местоположение, возможно, цвет с помощью предлагаемых инструментов, затем нажать кнопку «Подтвердить ответ». КИМ проверит правильность ответа, при необходимости предложит подсказку, заранее составленную учителем. Кроме этого, КИМ позволяет подсветить зеленым цветом те элементы ответа, которые указаны правильно, и красным – те, что неправильно.

Пример 5. Соберите определение математического понятия, вставив необходимые слова в пропущенные места. Слова представлены как объекты, доступны для перемещения по листу конструктора. Другой вариант задания – решение кроссворда, связанного с математическими понятиями.

Пример 6. На экране – координатная плоскость. Необходимо построить эскиз графика предлагаемой функции. Проверяется месторасположение элемента «Ломаная».

2. Кроме представленных, остановимся на сценариях использования КИМ, имеющих отношение к **технологии самостоятельной учебно-исследовательской деятельности** школьников. Отличительной особенностью такого варианта использования КИМ является то, что активным разработчиком здесь является обучающийся. Самостоятельная учебно-исследовательская математическая деятельность предоставляет возможность школьникам овладевать математическими понятиями, методами, использовать их в учебной деятельности, развивать математическое мышление, комплексное видение проблемы, обретать опыт работы с различными видами информации, а также формировать базовые исследовательские действия. Выделим возможности создания школьниками инфографики как средства обобщения и систематизации математических знаний и создания продукта проектной и исследовательской деятельности школьников.

Разработка графических конспектов, ментальных карт, различных вариантов визуального представления математической информации через связанные объекты (*инфографики*) – один из вариантов организации *обобщения и систематизации знаний школьников*. Обучающиеся могут воспользоваться функционалом создания демонстрационного задания КИМ.

Пример 7. Обобщите информацию, связывающую изученные виды функций, их свойств и графиков функций. Расположите соответствующий наглядный материал на одном листе.

Пример 8. Составьте графическую памятку нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Приведите пример.

Информационным продуктом *проектной и исследовательской математической деятельности обучающихся* может служить модель, разработанная ими в КИМ. Она также разрабатывается с помощью демонстрационного задания, однако целесообразно модель делать интерактивной, демонстрируя ее динамику при защите проекта. Такая деятельность стимулирует развитие общей универсальной стратегии научного познания, формирует функциональную математическую грамотность школьников, развивает интеллектуальные и творческие способности обучающихся, демонстрирует взаимосвязи математики и окружающего мира.

Пример 9. Теория фигурных чисел – один из интереснейших вопросов математики, имеющий приложения в окружающем нас мире. Изучите теорию вопроса: определение, простейшие свойства, теоремы. Придумайте задачи, проиллюстрируйте их с помощью моделей КИМ (на примере центральных многоугольных чисел).

Пример 10. Придумайте математический вариант соревнований «Своя игра». В КИМ создайте открывающиеся поля с формулировками задач и проверками ответов.

Таким образом, КИМ предоставляет широкое поле для совершенствования обучения школьной математике, являясь универсальным интерактивным средством обучения.

Рассмотренный функционал и представленные сценарии использования КИМ при обучении школьников легли в основу создания программы «Разработка прикладных решений в сфере образования», модуль 1 «Программные решения 1С в образовании» для слушателей Цифровых кафедр МГПУ (федеральный проект «Развитие кадрового потенциала ИТ-отрасли» национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации»). В данный момент по этой программе успешно обучается 172 человека.

Также дидактические возможности использования КИМ при обучении математике рассматриваются в рамках изучения дисциплин методического модуля студентами направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и информатика» и «Математика и физика».

Перспективные направления исследования связываются с включением КИМ в предметную цифровую образовательную среду учителя математики, установление методических взаимосвязей с другими конструкторами платформы «1С:Урок».

Библиографический список

1. Хилюк Е.А. Использование систем динамического моделирования в процессе обучения математике школьников 7–9 классов // Современные проблемы подготовки учителей математики и физики в вузе: сборник научных статей. М.: Московский городской педагогический университет, 2024. С. 131–150. EDN DMIUDE.
2. Хилюк Е.А., Крылова А.А. Решение квадратных уравнений и неравенств с параметрами с использованием систем динамической математики: учебно-методическое пособие. М.: Белый Ветер, 2023. 112 с.
3. Хилюк Е.А., Малугина К.Д., Лобанова К.И. Разработка технологических карт уроков учебного курса «Вероятность и статистика» с использованием интерактивных демонстраций-исследований // Новые информационные технологии в образовании: сборник научных трудов 24-й международной научно-практической конференции «Новые информационные технологии в образовании» (Технологии 1С для развития экономики данных и гиперавтоматизации образования) 30–31 января 2024 г. / под общ. ред. проф. Д.В. Чистова. Часть 2. М.: 1С-Паблишинг, 2024, С. 279–282.

МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ ИНТЕРАКТИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА НА БАЗЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПЛАТФОРМЫ «1С: УРОК» НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА»

MODEL OF INTERACTIVE EXPERIMENT ORGANIZATION BASED ON THE 1С. UROK EDUCATIONAL PLATFORM USING THE TOPIC “QUADRATIC FUNCTION, ITS GRAPH, AND PROPERTIES”

И.В. Хотенко

I.V. Khotenko

Интерактивный эксперимент, адаптивная цифровая среда, квадратичная функция, изменение значений коэффициентов, трансформация графического изображения, интерпретация результатов.

Рассмотрена целесообразность внедрения цифровых технологий в образовательный процесс, показано, каким именно образом они влияют на качество полученных знаний. Приведена структурированная модель организации интерактивного эксперимента на базе платформы «1С: Урок» по исследованию взаимосвязи между коэффициентами квадратичной функции и ее графическим представлением на координатной плоскости.

Interactive experiment, adaptive digital environment, quadratic function, changing coefficient values, transforming a graphic image, and interpreting the results.

The expediency of introducing digital technologies into the educational process is considered, and it is shown how they affect the quality of the acquired knowledge. A structured model for organizing an interactive experiment based on the 1С: Lesson platform is presented, which explores the relationship between the coefficients of a quadratic function and its graphical representation on a coordinate plane.

Современное образование требует интеграции цифровых технологий в учебный процесс для повышения мотивации учащихся, развития критического мышления и формирования практических навыков. Одной из таких технологий являются внедрение образовательных платформ, позволяющих организовывать самостоятельный интерактивный эксперимент, т. е. такую деятельность, в которой школьник моделирует, исследует и анализирует математические объекты в адаптивной цифровой среде. Значимость темы обусловлена как методическими задачами преподавания алгебры, так и практическими возможностями цифровых систем автоматизации обучения. Квадратичная функция – ключевая тема школьного курса, требующая от учащихся не только знания теоретических определений и свойств (коэффициенты, вершина параболы, направление ветвей, нули и значение), но и умения визуализировать зависимости, проводить эксперименты с параметрами и делать выводы на основе наблюдений.

Интерактивный эксперимент помогает перейти от репродуктивного усвоения к исследовательской деятельности: учащиеся варьируют параметры функции, наблюдают изменения графика и формулируют обобщения.

Рассмотрим структурированную модель организации урока-эксперимента в среде 1С, которая обеспечивает педагогическое сопровождение, интерактивность, сбор и анализ учебных данных и возможность дифференцированной поддержки учащихся.

Учитель организует доступ к интерактивной модели «Квадратичная функция» на образовательной платформе «1С: Урок» [1].

1. С помощью инструмента «Создать функцию» создать исходную функцию $y = x^2 - 2x + 3$.

2. Используя инструмент «Построить график», построить график рассматриваемой квадратичной функции.

3. Выделить полученный график и изменить ее цвет на синий при помощи вкладки «Палитра цветов».

4. Ввести значение коэффициентов данной функции: $a = 1, b = -2, c = 3$ (рис. 1)

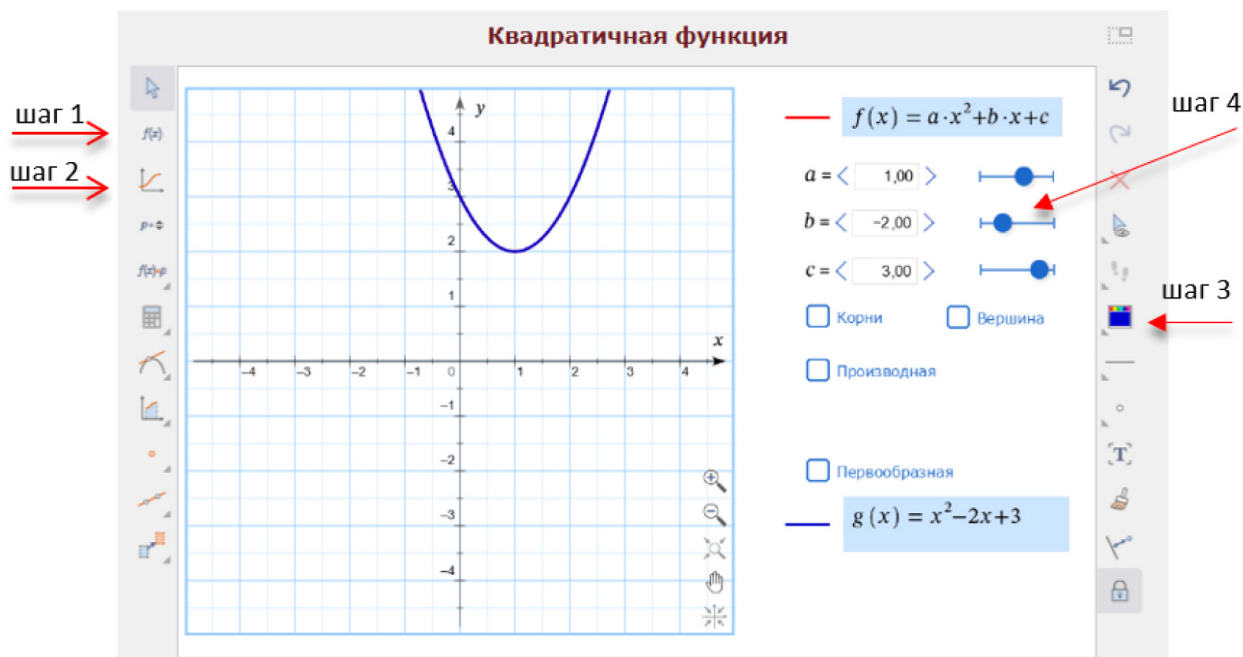


Рис. 1

Таким образом, в интерактивной модели появилась парабола синего цвета, которая представляет собой образ исходной квадратичной функции.

5. Нажать на область с надписью «Вершина» (рис. 2).

6. Изменяя значение коэффициента a в соответствующем «окне», проследить за трансформацией первоначального графического изображения (измененный график окрашен в красный цвет). Двигая «бегунок», можно непрерывно наблюдать изменения графика (рис. 3).

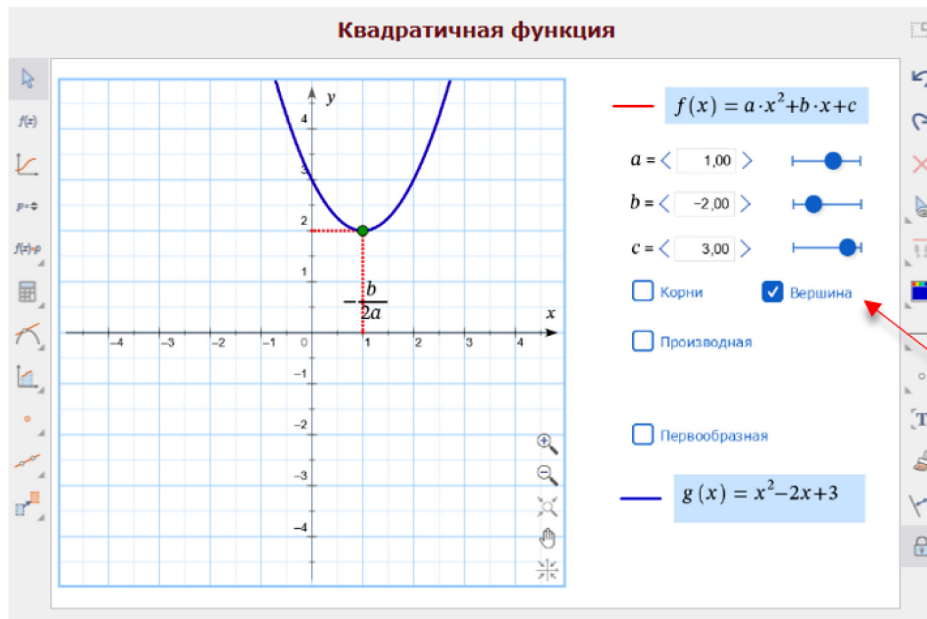


Рис. 2

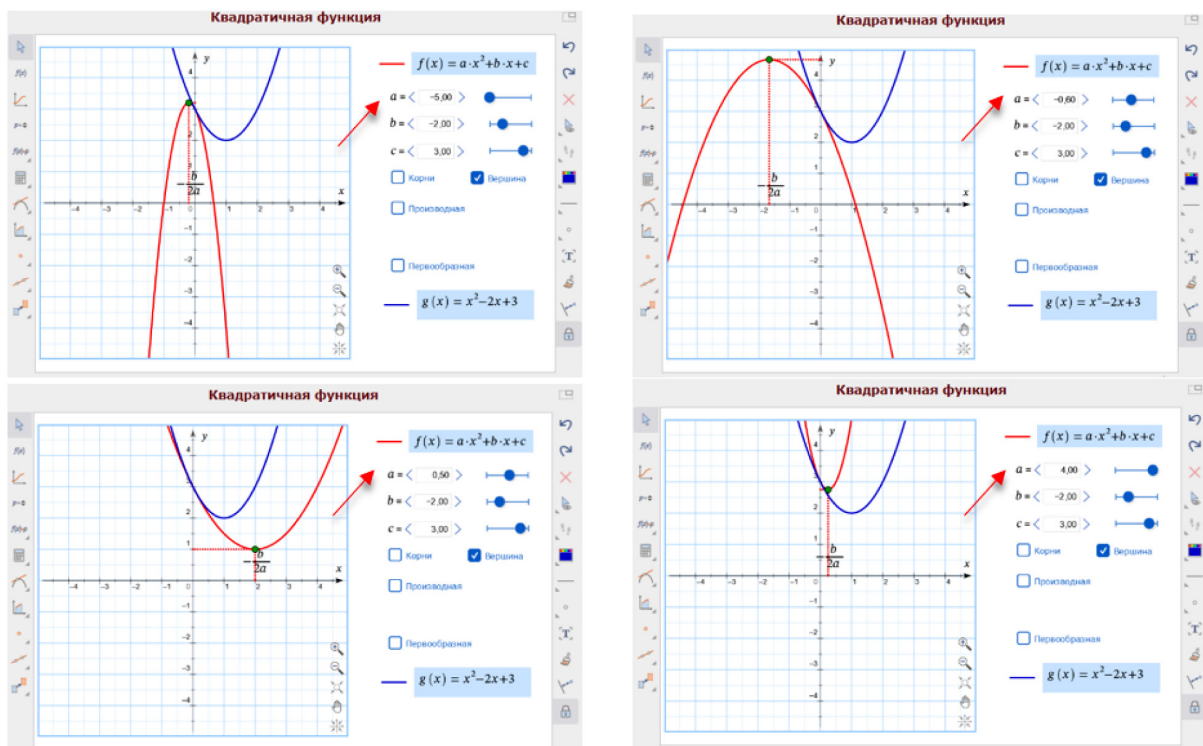


Рис. 3

7. Сделать вывод

На данном шаге ученики совместно с учителем выделяют ключевые изменения, которые претерпевает парабола при переборе различных значений коэффициента a , и формулируют вывод: если $a > 0$, то ветвь параболы направлена вверх, при $a < 0$ ветвь параболы направлена вниз, а чем больше значение $|a|$, тем ближе ее ветвь расположена к оси симметрии параболы.

8. Вернуть коэффициенту a исходное значение, равное 1.

9. Изменяя значение коэффициента b в соответствующем «окне», пронаблюдать за трансформацией первоначального графического изображения (измененный график окрашен в красный цвет). Двигая «бегунок», можно непрерывно наблюдать изменения графика (рис. 4).

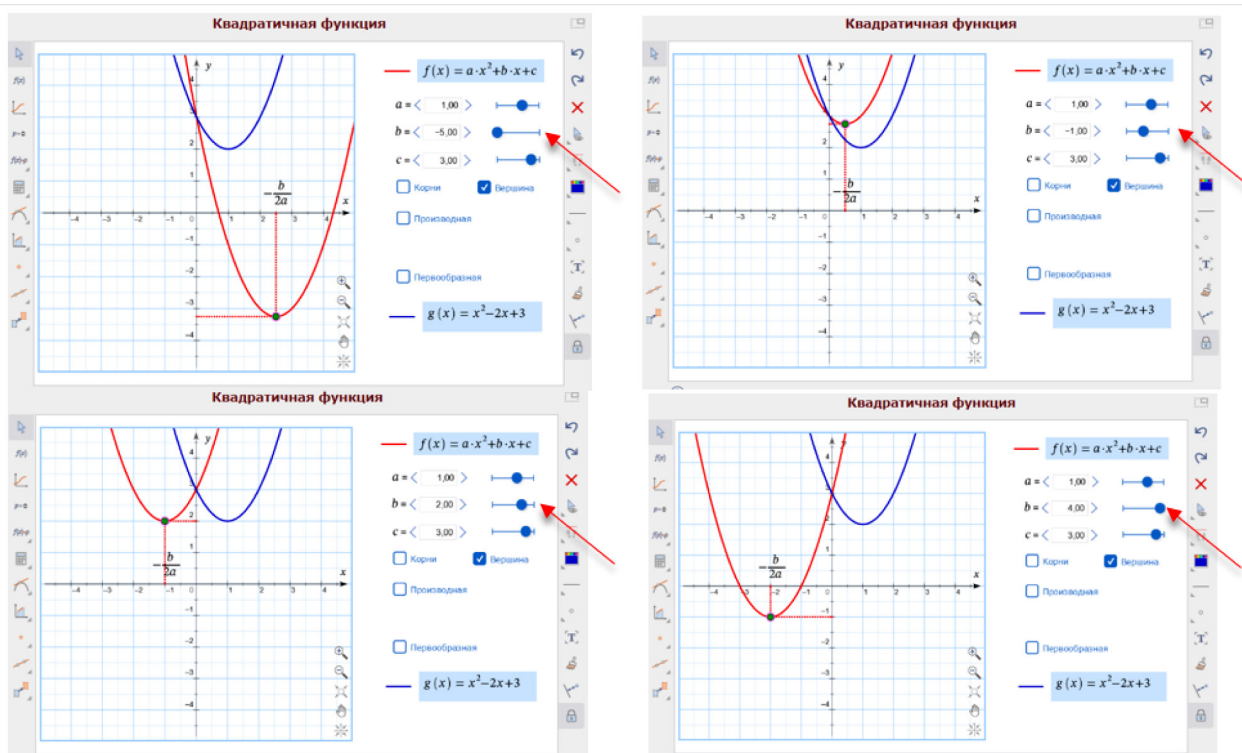


Рис. 4

10. Сделайте вывод

На данном шаге ученики совместно с учителем выделяют ключевые изменения, которые претерпевает парабола при переборе различных значений коэффициента b , и формулируют вывод: при изменении значения коэффициента b происходит сдвиг параболы вдоль оси Ox , при увеличении значения b – парабола смещается влево, а при уменьшении значения этого коэффициента – вправо, при этом форма и направление самой параболы остаются неизменными.

11. Вернуть коэффициенту b исходное значение, равное -2 .

12. Изменяя значение коэффициента c в соответствующем «окне», пронаблюдать за трансформацией первоначального графического изображения (измененный график окрашен в красный цвет). Двигая «бегунок», можно непрерывно наблюдать изменения графика (рис. 5).

13. Сделайте вывод

На данном шаге ученики совместно с учителем выделяют ключевые изменения, которые претерпевает парабола при переборе различных значений коэффициента c , и формулируют вывод: увеличение значения коэффициента c приводит к сдвигу графика параболы вверх, а уменьшение – сдвигает параболу вниз, т. о. коэффициент c фактически указывает, в какой точке парабола пересекает ось Oy . Форма и направление параболы остаются неизменными.

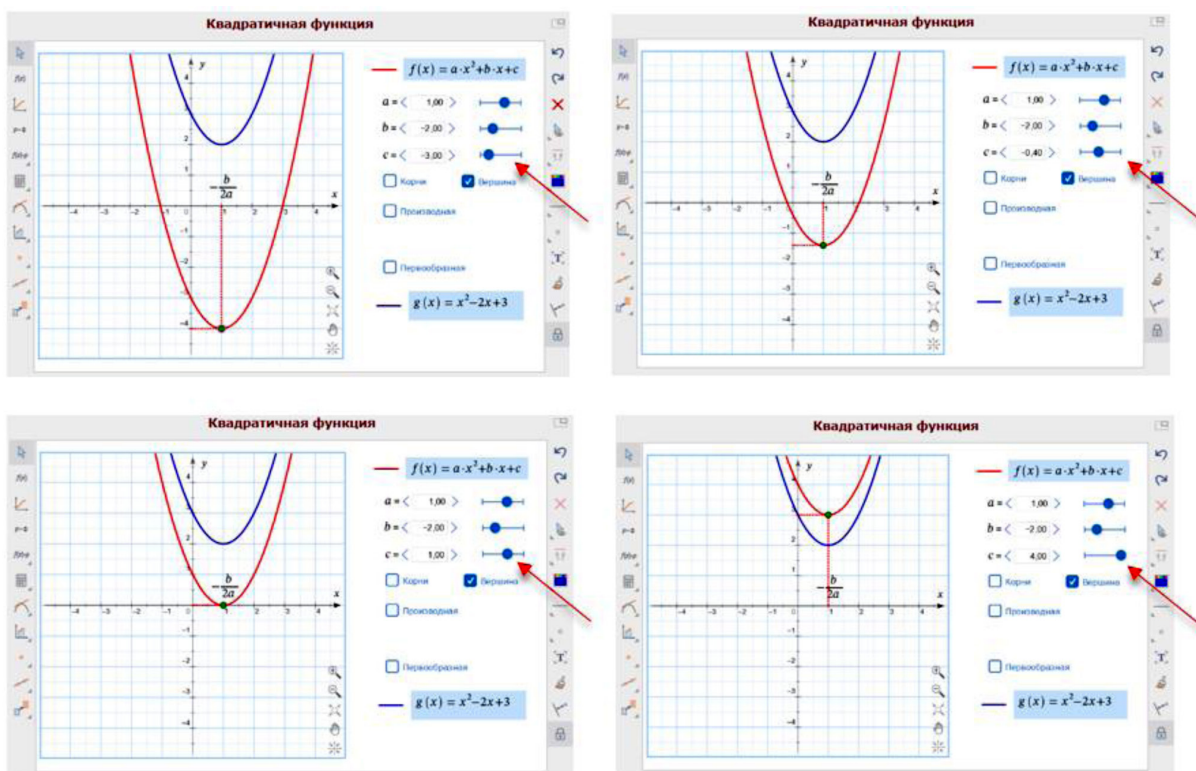


Рис. 5

14. Самостоятельно проведите аналогичное исследование для функции $y = -x^2 + 3x + 2$ [2] и выясните, все ли закономерности в поведении графика сохраняются при изменении коэффициентов a , b и c .

Во время проведения самостоятельного эксперимента с интерактивной моделью учащиеся замечают, что при увеличении коэффициента b – парабола смещается вправо, а при его уменьшении – влево, происходит это потому, что абсцисса вершины параболы становится положительной при $a < 0$.

15. Обобщите полученные результаты исследований.

На данном шаге ученики совместно с учителем формулируют окончательный вывод касательно коэффициента b : если ветви параболы направлены вверх (т. е. при $a > 0$), то при увеличении коэффициента b парабола смещается влево вдоль оси Ox , а при его уменьшении – вправо; если ветви параболы направлены вниз (т. е. при $a < 0$), то при увеличении коэффициента b парабола смещается вправо, а при его уменьшении – влево.

Предложенная модель представляет собой практико-ориентированный инструмент повышения качества восприятия темы «Квадратичная функция, ее график и свойства». При грамотной методической поддержке и техническом сопровождении она способна усилить учебную мотивацию и углубить понимание ключевых математических представлений.

Библиографический список

1. URL: <https://urok.1c.ru/share/task/ffc79da753fe474eb19ba9906c157db1/>
2. Макарычев Ю.Н. Алгебра 9 класс. М.: Просвещение, 2018.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАТФОРМЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

USING THE GEOGEBRA PLATFORM FOR THE STUDY OF PARAMETERS IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

В.В. Чиркова, И.В. Игнатушина

V.V. Chirkova, I.V. Ignatushina

Задачи с параметрами, GeoGebra, графическое решение, визуализация математических задач, интерактивная среда, исследовательская деятельность, цифровизация образования.

Статья посвящена применению интерактивной платформы GeoGebra для изучения задач с параметрами в школьном курсе математики. Рассматриваются преимущества использования данной среды, такие как наглядность, доступность и возможность подробного анализа графиков. На примере конкретных задач показано, как GeoGebra позволяет визуализировать решения, изменять значения параметров в режиме реального времени и исследовать количество решений уравнений и систем.

Parametric tasks, GeoGebra, graphical solution, interactive environment, research activities, digitalization of education.

The article is dedicated to the application of GeoGebra interactive platform for studying problems with parameters in school mathematics. The advantages of using this environment, such as visibility, accessibility and ability to analyze graphs in detail are considered. An example of specific problems shows how GeoGebra allows you to visualize solutions, change parameter values in real time and explore the number of solutions of equations and systems.

Задачи с параметрами относят к важной части содержания современного математического образования и традиционно считают одними из самых сложных для учащихся. Они предполагают глубокий анализ, умение проводить исследовательскую деятельность и применять комплексный подход к поиску решения. Несмотря на то, что задания с параметрами встречаются при сдаче итоговых выпускных экзаменов по математике в школе, на их изучение в школьной программе времени практически не уделяется. Это приводит к недостаточной демонстрации решений задач такого рода. В итоге к ним относятся как почти неразрешимой проблеме, причем не только среди учащихся, но и среди учителей. Тогда возникает потребность в таких методических подходах, которые могли бы обеспечить глубокое и осмысленное усвоение материала [3].

В условиях цифровизации образовательного процесса существует достаточно много уникальных возможностей для решения сложившейся проблемы. На данный момент создаются и успешно используются множество программ и интерактивных сред, которые позволяют производить быстро сложные расчеты, решать математические задачи, а также выполнять геометрические построения (графики, чертежи, диаграммы и т.д.). В данных программах также есть возможность использования анимации для анализа изменений того или иного графика,

что позволяет совместно со школьниками устанавливать и открывать новые свойства и закономерности рассматриваемой задачи. Одной из таких интерактивных сред является GeoGebra [1].

GeoGebra (от *Geometry* и *Gebra* – «Геометрия» и «Алгебра») – это мощный инструмент для интерактивного обучения математики, который охватывает геометрию, алгебру, таблицы, графики, статистику и вычисления. Данная среда обладает рядом ключевых преимуществ [4]:

1. Использование абсолютно бесплатно;
2. Наличие онлайн, офлайн и мобильной версий;
3. Простой интерфейс и многофункциональность;
4. Функция разработки авторских интерактивных учебных материалов на веб-странице;
5. Доступность на многих языках, наличие огромного мирового сообщества, где можно обмениваться материалами и опытом.

GeoGebra позволяет перевести различные задачи в визуальную и интерактивную форму, что способствует не только глубокому и осознанному пониманию материала, но и повышению мотивации учащихся, так как делает учебный процесс более интересным. Урок с ее помощью можно превратить в настоящий научный эксперимент, где учащиеся выдвигают свои гипотезы, проводят наблюдения и делают различные выводы [4].

Интерфейс программы похож на самый простой графический редактор. В него входят: меню, панель инструментов, рабочая область и строка ввода [1].

1. *Меню*. Оно располагается в правом верхнем углу окна и содержит: «файл», «правка», «создать», «настройки» и т.д.

2. *Панель инструментов*. Представлены различные инструменты, которые необходимы для создания геометрических объектов, включая точки, линии, окружности и т.д. Для удобства схожие инструменты объединены в команды.

3. *Рабочая область*. Это область, на которой производятся все геометрические построения в программе. При необходимости можно регулировать масштаб полотна и перемещать систему координат.

4. *Строка ввода*. Это основной инструмент при работе в программе GeoGebra. Через нее осуществляется ввод математических команд и формул, задаются значения переменных.

Рассмотрим алгоритм работы в GeoGebra на примере задачи № 18 из открытого банка заданий ЕГЭ.

Задача. «Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

имеет ровно три различных решения» [2].

Решение данной задачи с использованием GeoGebra включает в себя несколько этапов:

- 1) На первом этапе выполняются некоторые преобразования уравнения, выделяются две функции: $f(x) = (x - 4)^2$ и $g(x) = 2|x - a|$. Количество решений будет определяться количеством точек пересечения графиков.

Графиком функции $f(x) = (x - 4)^2$ является парабола с вершиной (4;0). Уравнение $g(x) = 2|x - a|$ будет задавать семейство графиков функции модуля, которые зависят от значения параметра a . Данный параметр определяет координату вершины. При изменении a график перемещается вдоль оси абсцисс.

2) Работа в программе GeoGebra:

- создание ползунка для параметра a с заданным интервалом (например, от 0 до 5) с помощью инструмента «Ползунок»;
- ввод уравнений функций в строку ввода;
- применение инструмента «Пересечение» для вычисления точных координат точек, где графики пересекаются.

3) Перемещение ползунка позволяет наблюдать динамику изменения положения графика $g(x) = 2|x - a|$ и анализировать количество точек пересечения с параболой $f(x) = (x - 4)^2$.

Выполнив все вышеперечисленные действия и проведя визуальный анализ, получим, что уравнение имеет ровно три различных решения в следующих случаях:

1. Вершина параболы (4;0) совпадает с вершиной графика модуля. Согласно графику $a = 4$ (рис. а).
2. Левая ветвь графика модуля касается параболы. Значение $a = 3,5$ (рис. б).
3. Правая ветвь графика модуля касается параболы. Значение $a = 4,5$ (рис. в).

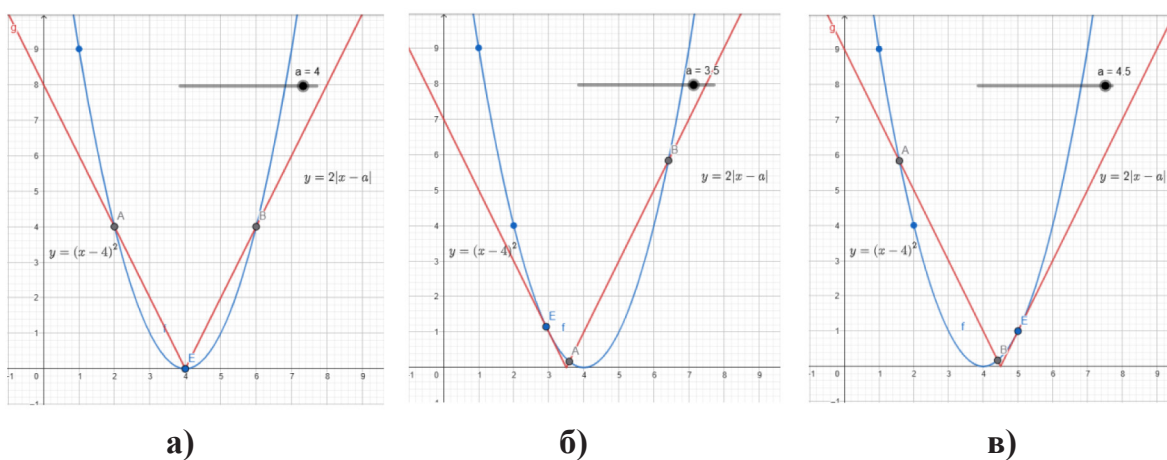


Рис.

Ответ: уравнение имеет ровно три различных решения при $a \in \{3,5; 4; 4,5\}$.

Таким образом, анализ решения данной задачи продемонстрировал, что с помощью интерактивной среды GeoGebra можно наглядно показать графическое решение задач с параметрами. Данный инструмент кардинально позволяет изменить подход к освоению одного из самых трудных разделов в школьном курсе математики, помогает перейти от механического заучивания алгоритмов к живому и наглядному исследованию. Использование платформы GeoGebra при изучении темы «Задачи с параметрами» выступает как мощное дополнение к простым традиционным методам обучения. Программа не должна полностью заменить решение таких задач, а только лишь помочь в их освоении. GeoGebra также позволит реализовать продуктивную подготовку учащихся к итоговой аттестации [1].

Библиографический список

1. Ганеева А.Р. Применение среды GEOGEBRA на уроках математики // Развитие современного образования: теория, методика и практика : материалы IV Международной научно-практической конференции (г. Чебоксары, 23 апреля 2015 г.). Чебоксары: Интерактив плюс, 2015. С. 252–254.
2. Задача с параметром № 484651 // Решу ЕГЭ: образовательный портал для подготовки к экзаменам. URL: <https://ege.sdangia.ru/problem?id=484651> (дата обращения: 25.09.2025).
3. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика: учебное пособие. М.: Экзамен, 2009. 286 с.
4. Троякова, Г.А., Монгуш А.С., Танзы М.В. Методика подготовки учащихся к решению задач с параметрами с использованием среды GeoGebra // Международное научное сотрудничество: проблемы и перспективы. 2018. № 5 (72). С. 27–35. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-podgotovki-uchaschih-sya-k-resheniyu-zadach-s-parametrami-s-ispolzovaniem-sredy-geogebra/viewer>

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ РЕФЛЕКСИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

APPLICATION OF DYNAMICAL MATHEMATICS SYSTEMS
IN THE PROCESS OF FORMING REFLECTIVE ACTIVITIES
OF PRIMARY SCHOOL STUDENTS
IN SOLVING PLANIMETRIC PROBLEMS

А.М. Яворская, С.Г. Золотых

A.M. Yavorskaya, S.G. Zolotykh

Системы динамической математики, основная школа, планиметрия, рефлексия, рефлексивные умения, рефлексивная деятельность обучающихся.

Статья посвящена исследованию влияния систем динамической математики (GeoGebra) на формирование рефлексивной деятельности учащихся основной школы при решении планиметрических задач. Рассматриваются психолого-педагогические основы рефлексии и дидактический потенциал интерактивных сред для формирования рефлексивности и развития рефлексивных умений обучающихся.

Dynamic mathematics systems, secondary school, planimetry, reflection, reflective skills, reflective activity of students.

The article is devoted to the study of the influence of dynamic mathematics systems (GeoGebra) on the formation of reflective activity of secondary school students in solving planimetric problems. The psychological and pedagogical foundations of reflection and the didactic potential of interactive environments for the formation of reflexivity and the development of reflective skills of students are considered.

Изучение геометрии в основной школе предоставляет уникальную возможность развития рефлексивной деятельности с помощью обучения решению планиметрических задач, которые требуют от обучающихся не только глубокого понимания теории, но и развитых навыков анализа условия, владения различными методами решений, а также умения строить и интерпретировать чертежи, адекватно отражающие поставленную проблему.

Анализ результатов ОГЭ и ЕГЭ [4; 8; 9] показал, что учащиеся успешно решают базовые геометрические задачи (76–89%), но практически не справляются с усложненными заданиями (89–95%). Данный факт свидетельствует о поверхностном усвоении материала и неспособности применять знания в нестандартных ситуациях.

Поскольку изучение геометрии строится линейно – от простого к сложному, – начинать формировать рефлексивную деятельность необходимо уже с 7 класса. Без развития этих навыков показатели останутся низкими, а противоречие между знанием теории и умением ее применять будет сохраняться.

В отличие от алгебры, задачи по геометрии не имеют конкретного алгоритма решения и требуют от обучающихся развитого логического мышления, следовательно, обобщения прошлого опыта решения задач и формирования рефлексивной деятельности. Данное обстоятельство активизирует поиск путей формирования рефлексивных умений и способов деятельности для повышения качества обучения геометрии [3].

Под рефлексией в современной педагогике понимается самоанализ деятельности и ее результатов. Рефлексия является процессом и результатом самоанализа субъектом своего сознания, поведения, внутренних психических актов и состояний собственного опыта, личностных структур [5].

В то время как рефлексивная деятельность в обучении решению планиметрических задач – это комплексная способность ученика, которая проявляется в умении: анализировать собственные действия и ход мыслей; осознавать применяемые методы и стратегии решений; оценивать правильность выбранного пути и полученного результата; корректировать свои действия при возникновении трудностей; переносить удачные стратегии на новые типы задач.

При изучении планиметрии формировать рефлексивную деятельность помогают системы динамической математики (СДМ). Использование СДМ на уроках геометрии поможет обучающимся установить взаимосвязи между новыми и старыми знаниями. Данный факт подтверждает анализ современных методических работ (А.В. Ахунов, М.В. Шабанова, О.В. Заславская и др.), который позволяет выявить ряд ключевых особенностей и дидактических потенциалов цифровой образовательной среды (ЦОС), в частности применение СДМ, для формирования рефлексивной деятельности при изучении геометрии.

На сегодняшний день существуют такие СДМ, как: Desmos, GeoGebra, Cabri Geometre Живая математика, Cinderella, Geometria, Cabri 3D, Kig, C.a.R., Geometrix, MathKit, GeoView, 1С: Математический Конструктор и др.

В таблице 1 представлен сравнительный анализ СДМ, которые, по нашему мнению, эффективно применять именно для формирования рефлексивной деятельности.

Таблица 1

Сравнительный анализ СДМ

Название / Критерий	1С: Математический конструктор	GeoGebra	Desmos	Cabri Geometry	Живая математика
1	2	3	4	5	6
Работа в среде онлайн/ офлайн	Онлайн и офлайн	Онлайн и офлайн	Онлайн и офлайн	Онлайн и офлайн	Офлайн
Десктопная/ мобильная/ веб-версия	Десктопная и веб-версия	Десктопная, мобильная и веб-версия	Десктопная, мобильная и веб-версия	Веб-версия	Десктопная
Платно/ бесплатно	Бесплатно	Бесплатно	Бесплатно + платный контент	Бесплатно + платный контент	Платно

1	2	3	4	5	6
Сохранение файлов	Онлайн и офлайн	Онлайн и офлайн	Онлайн и офлайн	Офлайн	Офлайн
Освоение	Сложное	Несложное	Несложное	Несложное	Несложное
Геометрические инструменты	Широкий набор	Широкий набор	Базовые	Наиболее популярные	Широкий набор
Степень наглядности	Хорошая	Высокая	Высокая	Хорошая	Высокая

Из таблицы 1 можно сделать вывод, что среди рассмотренных СДМ GeoGebra является оптимальным инструментом для формирования и развития рефлексивной деятельности и изучения планиметрии в целом. Ее ключевые преимущества включают: доступность как бесплатного программного обеспечения с мобильной версией, что обеспечивает гибкость обучения; функциональность для создания и редактирования широкого спектра геометрических объектов (треугольников, окружностей, многоугольников и т.д.), способствующая глубокому усвоению их свойств; а также возможность создания динамических конструкций, наглядно демонстрирующих изменение фигур в зависимости от параметров.

Применение СДМ на уроках геометрии в 7 классе эффективно применять при решении рефлексивных планиметрических задачах. Задача по геометрии, которая целенаправленно активизирует анализ учеником собственных способов решения, вынуждая его осознать, сравнить и оценить примененные методы, логику рассуждений и причины выбора того или иного пути для развития метапредметных умений и личностной рефлексии, называется «рефлексивная планиметрическая задача».

Рассмотрим один из примеров рефлексивной планиметрической задачи, которая будет способствовать формированию рефлексивной деятельности в 7 классе. Задача: «Угол ABC равен 30° , угол CBD – 80° . Найдите угол ABD» [10]. При решении задачи будем основываться на разработанном нами цикле решения планиметрической задачи (рис. 1).

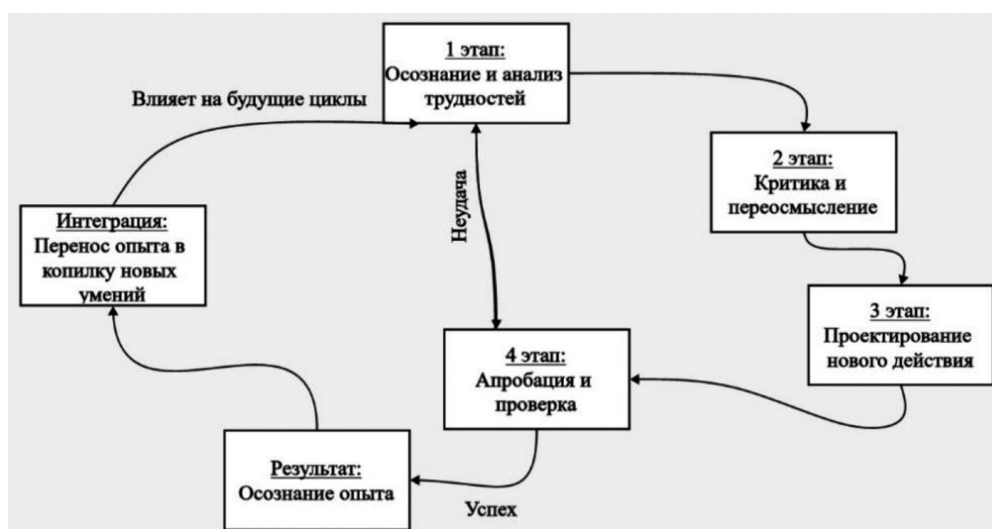


Рис. 1. Цикл решения рефлексивной планиметрической задачи

На 1 этапе ученик анализирует условие и выявляет следующие трудности:

- неясно, как расположены лучи ВА, ВС и ВD относительно друг друга,
- так как $\angle ABC$ и $\angle CBD$ имеют общую вершину В и общую сторону ВС,

положение луча ВА остается неопределенным: он может находиться как внутри $\angle CBD$, так и за его пределами.

На 2 этапе обучающийся понимает, что луч ВС является общей стороной для обоих углов. Положение луча ВА относительно $\angle CBD$ определяет ответ (луч ВА лежит внутри $\angle CBD$ или луч ВА лежит вне $\angle CBD$).

На 3 этапе обучающийся планирует, как действовать дальше:

1. Сделать два отдельных чертежа для каждого случая.
2. Для каждого чертежа записать, как $\angle ABD$ выражается через данные углы $\angle ABC$ и $\angle CBD$.
3. Провести вычисления.
4. Для проверки и наглядности построить эти же случаи в СДМ GeoGebra (рис. 2).

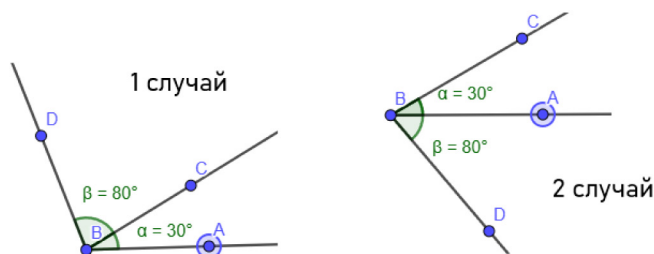


Рис. 2. Чертежи в СДМ GeoGebra

На 4 этапе осуществляется подробное аналитическое решение и решение с применением СДМ (таблица 2).

Таблица 2

Решение с рассмотрением двух возможных случаев

Луч ВА внутри $\angle CBD$	Луч ВА вне $\angle CBD$
Если луч ВА лежит внутри $\angle CBD$, то он разбивает этот угол на два меньших угла: $\angle ABC$ и $\angle ABD$. Следовательно, весь $\angle CBD$ равен сумме этих двух углов. $\angle CBD = \angle ABC + \angle ABD$ Вычисление: $80^\circ = 30^\circ + \angle ABD$ $\angle ABD = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$	Лучи ВА и ВD расположены по разные стороны от луча ВС. $\angle ABC$ и $\angle CBD$ являются смежными. Искомый $\angle ABD$ является суммой этих двух углов (либо развернутый угол минус неиспользованная часть). $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$ Вычисление: $\angle ABD = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$
Вывод: Возможны два ответа: 50° и 110° .	

В результате обучающийся приходит к выводам:

- ключевым моментом в задачах без чертежа является анализ возможных случаев расположения фигур;
- не все случаи, которые мы можем представить, являются возможными с точки зрения условия задачи. Нужно проводить проверку на возможность;
- СДМ GeoGebra является средством для проверки возможных случаев и наглядного представления задачи.

При построении в тетради у обучающихся могут возникнуть проблемы, они могут не увидеть одно из расположений луча BA , а возможен и случай, когда обучающийся в тетради покажет невозможное расположение луча BD . Луч BD не может лежать внутри угла ABC , если $\angle CBD > \angle ABC$ (рис. 3).

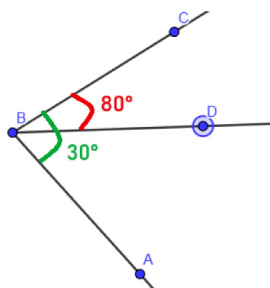


Рис. 3. Неверный чертеж

В контексте цифровизации образования рефлексивная деятельность в процессе решения геометрических задач помогает создать более гибкую, адаптивную и персонализированную образовательную среду, способствующую углубленному пониманию материала и развитию самостоятельности учащихся.

Для успешного решения геометрических задач необходимо формировать рефлексивную деятельность начиная с 7 класса. СДМ являются высокоэффективным инструментом для целенаправленного формирования рефлексивной деятельности обучающихся основной школы в процессе решения планиметрических задач. Специфика геометрии, исключая шаблонные алгоритмы и требующая критического осмысления предыдущего опыта, создает естественную среду для развития рефлексии.

Библиографический список

1. Елецких И.А, Черноусова И.А. Планиметрия (теория): учебное пособие. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2016. 66 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/195853> (дата обращения: 22.10.2025).
2. Люблинская И.Е., Рыжик В.И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «GeoGebra Classic» // Математическое образование. URL: https://www.mathedu.ru/text/lyublinskaya_ryzhik_issledovatelskie_i_projektnye_zadaniya_s_geogebra_2020/p1/ (дата обращения: 22.10.2025).
3. Яворская А.М., Санина Е.И. Технология формирования рефлексивных умений обучающихся основной школы при решении геометрических задач средствами цифровых инструментов // CYBERLENINKA: сайт. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-fomirovaniya-refleksivnyh-umeniy-obuchayuschihysya-osnovnoy-shkoly-pri-reshenii-geometricheskih-zadach-sredstvami> (дата обращения: 22.10.2025).
4. Яценко И.В., Высоцкий И.Р., Самсонов П.И. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2024 года по математике: ФИПИ: методические рекомендации. 2024. С. 1–39. URL: https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2024/ma_mr_2024.pdf (дата обращения: 25.10.2025).

5. Чивина Н.П. Рефлексивная деятельность на уроке / Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «СОШ № 2»: методические рекомендации. 2013. С. 1–31. URL: https://yugschool2.gosuslugi.ru/netcat_files/30/69/refdeyatnauroke.pdf (дата обращения: 25.10.2025).
6. Кисельников И.В. Рефлексивная деятельность учащихся при обучении математике в основной школе // Педагогический журнал. 2022. Т. 12, № 2А. С. 673–680. URL: <http://www.publishing-vak.ru/file/archive-pedagogy-2022-2/c35-kiselnikov.pdf> (дата обращения: 26.10.2025).
7. Ваганова О.И., Гладкова М.Н., Кутепова Л.И. Современные рефлексивные технологии обучения. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sovremennye-refleksivnye-tehnologii-obucheniya> (дата обращения: 26.10.2025).
8. Тумашева О.В., Машков П.П., Демина С.В. Методический анализ результатов ОГЭ по математике. URL: <https://coko24.ru/wp-content/uploads/2025/09/Методический-анализ-результатов-ОГЭ-2025-по-МАТЕМАТИКЕ.pdf> (дата обращения: 30.10.2025).
9. Результаты ОГЭ как индикатор катастрофы в школьном математическом образовании. URL: <https://2plus2.online/articles/206-Rezultaty-OGE-kak-indikator-katastrofy-v-shkolnom-matematicheskom-obrazovanii/> (дата обращения: 02.11.2025).
10. Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Геометрия 7 класс, учебник / под редакцией В.Е. Подольского. 2-е изд., испр.. М.: Вентана-Граф, 2019. 208 с. (Российский учебник).

Секция 3

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

ИТОГИ ПРОВЕДЕНИЯ XI ТУРНИРА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

RESULTS OF THE XI EXPERIMENTAL MATHEMATICS TOURNAMENT

С.С. Вергилюш, М.А. Павлова

S.S. Vergilyush, M.A. Pavlova

Турнир по экспериментальной математике, экспериментальная математика, системы динамической математики, GeoGebra.

В данной статье представлены результаты проведения XI турнира по экспериментальной математике для учащихся 5–9 класса, приведены решения и типичные ошибки при решении участниками исследовательской задачи с использованием экспериментально-теоретических методов.

Experimental Mathematics Tournament, Experimental Mathematics, systems of dynamic mathematics, GeoGebra.

This article presents the results of the XI experimental Mathematics tournament for 5th-9th grade students, provides solutions and typical mistakes made participants when solving a research problem using experimental and theoretical methods.

В феврале 2025 года на базе Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова состоялся XI Турнир по экспериментальной математике для учащихся 5–9 классов. Данный турнир проводится ежегодно с целью популяризации экспериментальной математики среди учащихся и учителей.

Участниками турнира в этом году стали более 500 учащихся 5–9 классов общеобразовательных школ из Архангельска, Владикавказа, Новосибирска, Среднеуральска, Арсеньева, Перми, Красноярска, Подольска, Череповца, Петропавловска-Камчатского и других городов.

Можно было участвовать индивидуально в режиме онлайн, а также очно на базах представителей турнира (образовательных организациях, подавших заявки на проведение турнира). Задания, предложенные участникам, были составлены таким образом, чтобы было возможно проверить полный комплекс универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора, описанного в статье [1].

Задание № 5 турнира составляется таким образом, чтобы при его решении компьютерный эксперимент оказал значительную поддержку.

Причины обращения к компьютерному эксперименту могут быть различны: недостаток теоретических знаний для логического вывода или поиска; трудоемкость вычислений или построений; необходимость перебора достаточно большого количества вариантов для создания целостного образа или получения индуктивного вывода и т.п.

Рассмотрим пример решения задания № 5, предложенного на турнире 2025 года учащимся 8 класса:

«Найдите геометрическое место точек M , лежащих внутри ромба $ABCD$ и обладающих свойством: $\angle AMD + \angle BMC = 180^\circ$ » [2, с. 184].

В примечании участникам предлагалась следующая информация:

«Для обоснования того, что найденное геометрическое место точек является искомым, полезно знать следующие определение и теоремы:

1. Геометрическое место точек (ГМТ) – это множество всех точек, обладающих одним или несколькими общими свойствами.

Доказательство того, что указанное множество точек есть искомое ГМТ, сводится к доказательству двух взаимно обратных утверждений:

1) если точка принадлежит рассматриваемому ГМТ, то она удовлетворяет указанному свойству;

2) если точка обладает указанным свойством, то она принадлежит данному ГМТ.

2. Если суммы противоположных углов четырехугольника равны 180° , то около него можно описать окружность.

3. Если около четырехугольника с равными диагоналями можно описать окружность, то хотя бы одна пара его сторон параллельна».

Построение (компьютерными инструментами на примере GeoGebra).

Построим ромб $ABCD$. Строим произвольно отрезок AC , задающий одну диагональ ромба (рис. 1). С помощью инструмента «Срединный перпендикуляр» строим срединный перпендикуляр к отрезку AC , он содержит вторую диагональ ромба. На этом срединном перпендикуляре строим произвольно точку B и отразим ее относительно отрезка AC . Инструментом «Многоугольник» строим ромб $ABCD$.

Возьмем произвольно точку M внутри ромба и построим углы AMD и BMC . С помощью инструмента «Угол» измерим эти углы. В строку ввода введем формулу $\alpha + \beta$ суммы этих углов и выведем на экран ее значение. Перемещая точку M внутри ромба, определим все положения, при которых $\alpha + \beta = 180^\circ$.

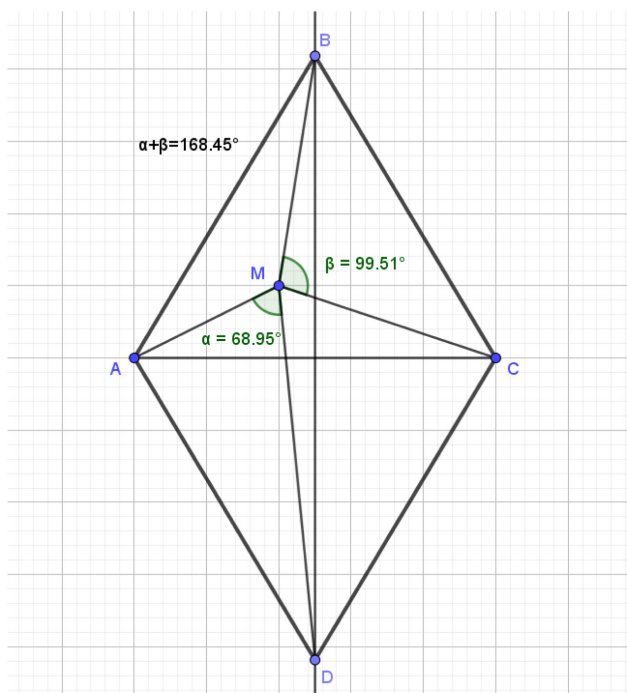


Рис. 1

Ответ. Искомое геометрическое место точек M – диагонали ромба без их концов, см. рис. 2 (объединение отрезков BD и AC без точек A, B, C и D).

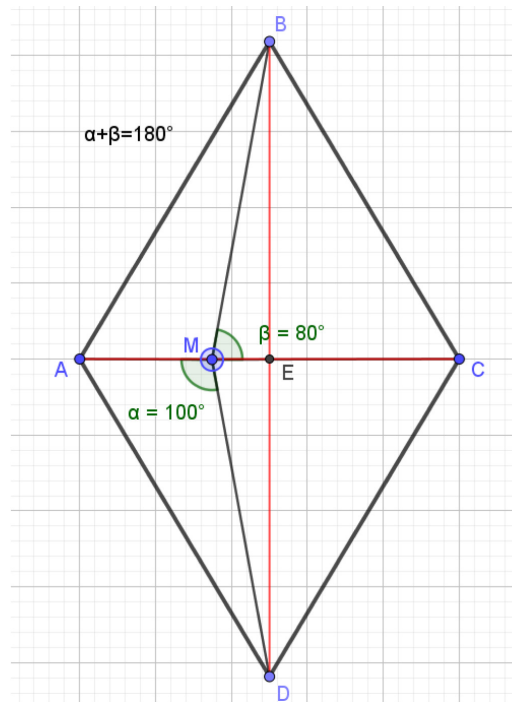


Рис. 2

Обоснование:

1) Пусть точка М лежит на одной из диагоналей ромба и не совпадает с ее концами, например, для определенности – на диагонали BD (рис. 3). Так как BD – серединный перпендикуляр к AC , то треугольник AMC – равнобедренный, и ME – биссектриса угла AMC . Следовательно, $\angle AME = \angle EMC$. Углы $\angle AMC$ и $\angle EMB$ – смежные, поэтому их сумма равна 180° .

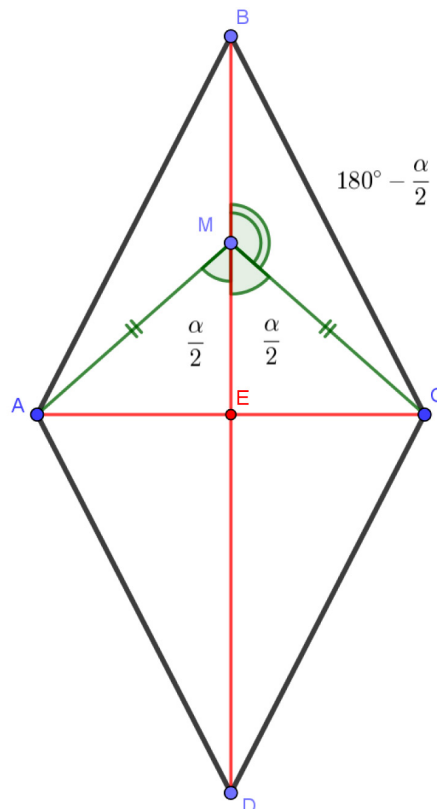


Рис. 3

2) Предположим, что внутренняя точка M ромба обладает свойством $\angle AMD + \angle BMC = 180^\circ$ (рис. 4), но не принадлежит диагоналям ромба. Построим треугольник ADM до параллелограмма $ADMF$. Тогда $MCBF$ – тоже параллелограмм, т.к. $FM = BC$ и $FM \parallel BC$. Следовательно, $\angle FBM = \angle BMC$ и $\angle MAF = \angle DMA$ как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей. Таким образом, $\angle FAM + \angle FBM = 180^\circ$, а вокруг четырехугольника $AMBF$ можно описать окружность. Т.к. $AB = AD$ как стороны ромба, и $AD = MF$ как противоположные стороны параллелограмма, то равны диагонали AB и MF четырехугольника $AMBF$, поэтому $AM \parallel BF$ или $BM \parallel AF$. Если $AM \parallel BF$, то $\angle AMD = \angle MAF = \angle AMB$, значит, $\angle AMD + \angle CMB = 180^\circ$. Следовательно, точка M лежит на диагонали AC . Аналогично, если $BM \parallel AF$, то точка M лежит на диагонали BD .

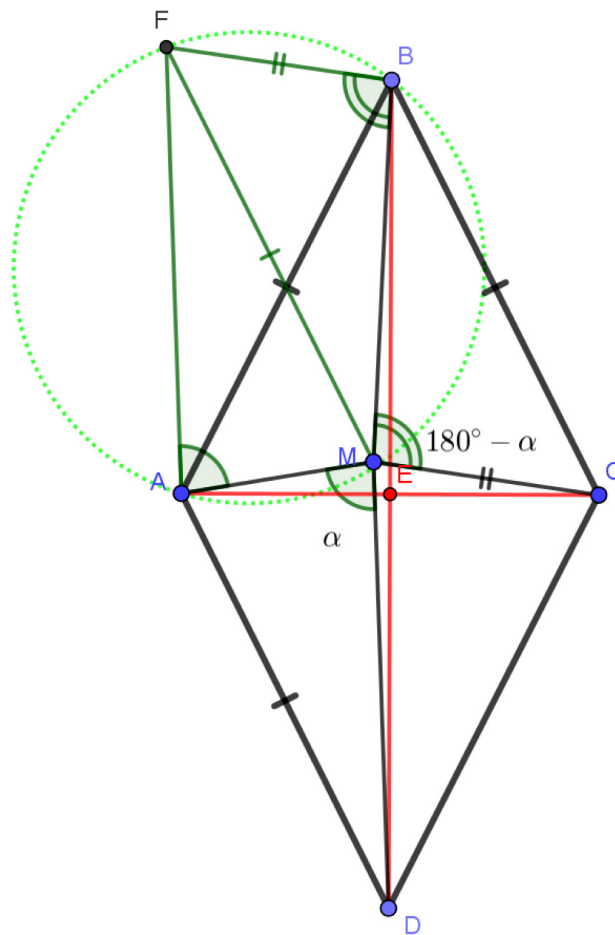


Рис. 4

Критерии оценки решений участников представлены в [3].

Приведем пример решения одного из участников 8 класса, который он представил в виде динамического листа (рис. 5) и определим, какое количество баллов он набрал.

В данном примере учащийся построил ромб $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, по динамической модели видно, что измерены углы $\angle AMD$; $\angle BMC$. В панели объектов найдена сумма этих углов и выведена запись $\varepsilon = 180^\circ$. При этом указан ответ «ГМТ – диагонали ромба».

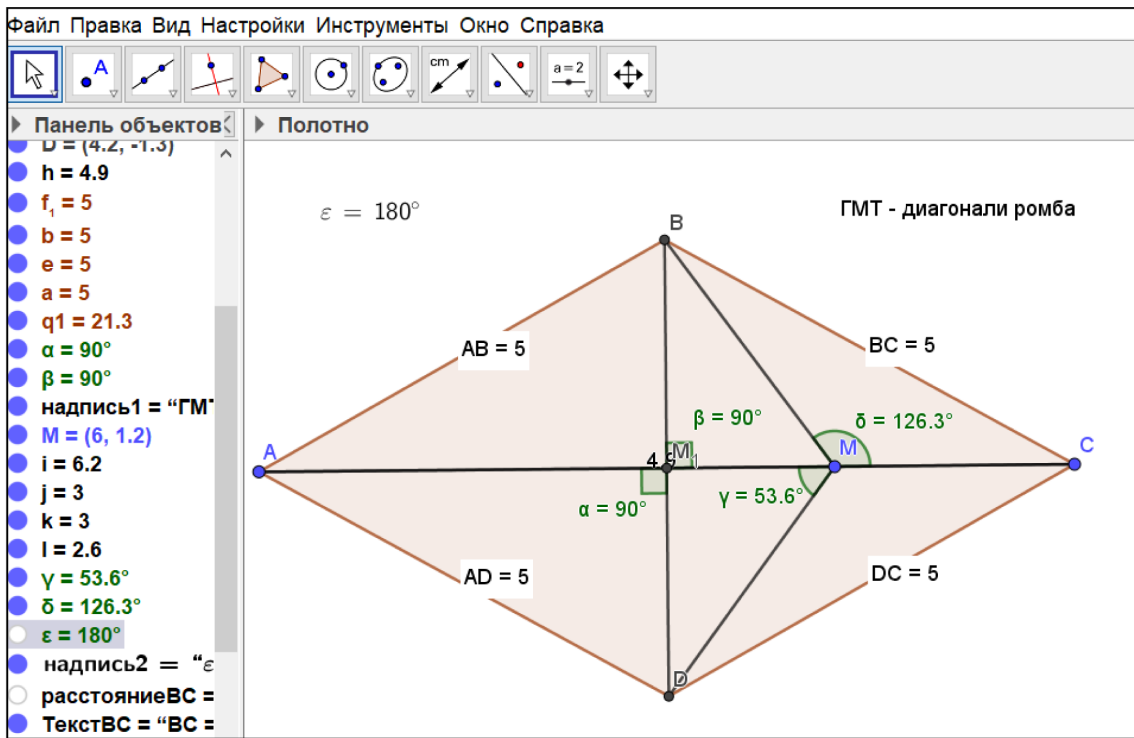


Рис. 5

В соответствии с критериями, это решение оценивается в 12 баллов (ГМТ найдено с использованием компьютерного эксперимента, для его проведения использована модель, обладающая динамически устойчивым свойством «быть ромбом» и свободной точкой M . Компьютерный эксперимент не описан, но воспроизводим по созданной для поиска модели. Теоретического обоснования нет).

Еще один пример попытки участника определить решение экспериментальным путем представлен на рисунке 6.

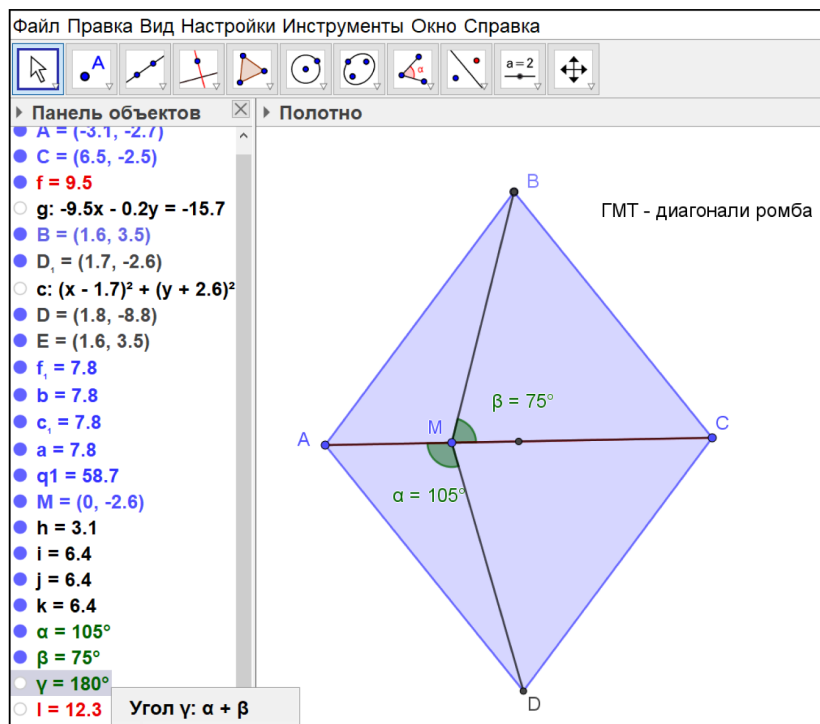


Рис. 6

В данном примере участник перемещает точку M вдоль одной диагонали ромба, в панели объектов сумма искомых углов отражена $\gamma = 180^\circ$, при этом также предлагает в графическом поле ответ: «ГМТ – диагонали ромба». В соответствии с критериями оценки участник получает 13 баллов (ГМТ найдено с использованием компьютерного эксперимента, для его проведения использована модель, обладающая динамически устойчивым свойством «быть ромбом»). Точка M перемещается только по диагоналям ромба. Компьютерный эксперимент не описан, но выводы проверяемы по модели, созданной для проверки гипотезы. Теоретического обоснования нет).

Решения этого задания с полным теоретическим обоснованием среди участников 8 класса не было. Это говорит о трудностях комплексного использования экспериментальных и теоретических методов при решении исследовательских задач экспериментальной математики. Снятие этих трудностей требует специальной и планомерной подготовки.

В заключение отметим, что для подготовки учащихся к турниру предлагаются решения заданий прошлых лет [3] и критерии их оценки, по которым можно судить о типичных ошибках, допускаемых участниками.

Библиографический список

1. Павлова М.А., Шабанова М.В. Формирование универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора у учащихся основной школы // Сборник научных трудов VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» / отв. ред. В.Р. Майер; Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2017. С. 17–33.
2. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 2007. Математическое образование. URL https://www.mathedu.ru/text/prasolov_zadachi_po_planimetrii_2007/p184/
3. Архив заданий и решений турнира по экспериментальной математике. URL: <https://itprojects.narfu.ru/turnir/task.php#topmenu>, свободный (дата обращения: 18.10.2024).

ТВОЯ ПЕРЕМЕННАЯ «Х». УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ЗА КУРС СЕДЬМОГО КЛАССА

YOUR VARIABLE X. LEARNING TO SOLVE PROBLEMS FOR THE SEVENTH GRADE COURSE

В.Д. Волошин, И.В. Хотенко

V.D. Voloshin, I.V. Khotenko

Математическая задача, словесное описание, неизвестное число, переменная, стратегия решения, алгоритм, математическая модель.

В статье приведено понятие математической задачи и ее основных компонентов, описана важность включения подобного рода заданий в курс школьной математики, приведен четкий и последовательный алгоритм для решения задач, связанных с введением вместо неизвестного числа переменной величины. На примере задачи из реальной жизни показана эффективность применения составленного алгоритма.

Mathematical problem, verbal description, unknown number, variable, solution strategy, algorithm, and mathematical model.

The article presents the concept of a mathematical problem and its main components, describes the importance of including such tasks in the school mathematics course, and provides a clear and consistent algorithm for solving problems involving the introduction of a variable instead of an unknown number. The effectiveness of using this algorithm is demonstrated through a real-life example.

На протяжении всего курса математики, который изучается в школе, ученики сталкиваются с большим количеством разнообразных задач. Связано это с тем, что способность решать подобного рода задания заключается не просто в усвоении набора приемов для получения правильного ответа, а является основой для развития целого комплекса незаменимых умений.

Во-первых, регулярная практика решения задач тренирует способность выстраивать рассуждение шаг за шагом, делать выводы из данных и проверять собственные догадки. Во-вторых, это формирует навыки моделирования – перевод реальной ситуации в математическую форму и обратно – что важно в науке, технике и повседневной жизни. В-третьих, задачи развивают вычислительную культуру и аккуратность: ведь мы учимся работать с числами, проверять результаты и замечать ошибки. Кроме того, задачи тренируют умение выбирать стратегию решения – аналитически рассуждать, использовать рисунок, сокращать информацию или применять формулу.

Не даром Д. Пойа, рассматривая роль задач в математике, писал: «Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности...» [1].

В школьном курсе математики предусмотрено последовательное углубление сложности задач, ведь каждый новый этап освоения материала опирается

на предыдущие навыки и умения. Таким образом, систематическое решение такого рода заданий на разных этапах обучения позволяет сформировать устойчивую математическую грамотность [3].

Под задачей будем рассматривать ситуацию, включающую цель и условия для ее достижения.

Выделим ее основные компоненты:

- 1) условие – начальное состояние;
- 2) базис решения – теоретические основы решения;
- 3) решение – преобразование условия задачи для нахождения требуемого;
- 4) заключение – конечное состояние [2].

В статье я буду рассматривать только тип задач, связанный с введением новой переменной, то есть те задания, в которых осуществляется переход от «неизвестного числа» к символу, обозначающему произвольный элемент множества чисел. Этот прием помогает перейти от описания задачи словами к точной математической записи: вместо длинного текста получается уравнение или выражение, с которым гораздо проще работать. Для ученика седьмого класса освоение этого приема крайне необходимо потому, что он является базой для дальнейшего изучения алгебры: решения квадратных уравнений, работы с функциями, преобразований выражений.

На основе изученной литературы я выделил основные этапы решения задач через введение переменной:

- 1) внимательно прочитать условие и понять, что именно ищут;
- 2) четко ввести переменную и дать ей определение (что именно обозначает x , единицы измерения);
- 3) выразить через эту переменную все остальные неизвестные величины и данные (в виде выражений);
- 4) перевести словесное условие в алгебраическое равенство (составить уравнение);
- 5) упростить полученное уравнение и решить аналитически;
- 6) проверить найденные корни на принадлежность области допустимых значений (учесть запрещенные значения из знаменателей, физические ограничения: отрицательные длины и пр.);
- 7) интерпретировать решение в контексте задачи и дать ответ словами с единицами измерения;
- 8) при необходимости проанализировать дополнительные корни (несколько решений) и выбрать те, которые соответствуют условию;
- 9) Проверить ответ подстановками в исходное условие.

Рассмотрим приведенный алгоритм на примере задания, которое я составил самостоятельно.

Задача. На каникулах ученики 7 «А» класса решили сходить в кино. На драму «Первый на Олимпе» классный руководитель забронировала билетов в три раза больше, чем на сказку «Горыныч». Однако, выкупая билеты, оказалось, что Аня, Варя, Вася и Антон передумали и идут смотреть сказку. В итоге на оба сеанса

школьников пошло одинаковое количество. Выясните, сколько билетов было забронировано классным руководителем на каждый из сеансов.

1) Нужно узнать, сколько билетов было изначально забронировано на каждый сеанс;

2) пусть x билетов было забронировано на сказку «Горыныч» (это наименьшая из величин);

3) тогда на драму «Первый на Олимпе» забронированных билетов будет $3x$, по условию задачи известно, что четверо ребят передумали идти на драму, то есть на нее купили $3x - 4$ билетов, а поскольку эти ребята решили пойти на сказку, то на «Горыныча» приобрели $x + 4$ билетов;

4) по итогу на оба сеанса было куплено равное количество билетов, то есть можем составить уравнение $3x - 4 = x + 4$;

$$5) 3x - 4 = x + 4 \Rightarrow 3x - x = 4 + 4 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4;$$

6) найденный корень удовлетворяет области допустимых значений представленного уравнения;

7) таким образом получается, что на сказку «Горыныч» было забронировано 4 билета, а на драму «Первый на Олимпе» – 12 билетов;

8) дополнительных корней нет;

9) проверка как по смыслу осуществлена, при подстановке найденного корня в уравнение получается верное числовое равенство.

Используя предложенную последовательность действий, можно зафиксировать условие задачи не только в текстовом формате, но и в виде таблицы:

	забронировано билетов	куплено билетов
«Первый на Олимпе»	$3x$	$3x - 4$
«Горыныч»	x	$x + 4$

Таким образом, хочется отметить, что введение переменной вместо неизвестного числа – это не просто техника, а системный метод перехода от словесного описания к строгой математической записи. Если соблюдать последовательный алгоритм, решение становится предсказуемым, воспроизводимым и легко проверяемым.

Библиографический список

1. Тумашева О.В., Зданович О.В. Организация исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения математике. Красноярск, 2010.
2. Тумашева О.В. Задачи в обучении математике: учебно-методическое пособие. Красноярск, 2007.
3. Хотенко И.В. Мотивация обучающихся как ключевой аспект повышения уровня математического образования. Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2023. С. 324–325.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ ЭКСПОНАТА «ЗАДАЧА О СЕМИ КЕНИГСБЕРГСКИХ МОСТАХ» ДЛЯ МУЗЕЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

METHODOLOGICAL FEATURES OF THE DEVELOPMENT OF THE EXHIBIT
«THE PROBLEM OF THE SEVEN KONIGSBERG BRIDGES»
FOR THE MUSEUM OF ENTERTAINING MATHEMATICS

Я.Н. Гамова

Y.N. Gamova

Музей занимательной математики, математический экспонат, задача о семи мостах, теория графов, эйлеров путь, степень вершины, ребра графа, вершины графа.

В статье рассматривается представление классической задачи о семи кенигсбергских мостах – поиска маршрута, позволяющего пройти по всем мостам города ровно один раз в виде экспоната в Музее занимательной математики. Описаны методические особенности разработки этого экспоната и работы с ним во время экскурсии.

Museum of Entertaining Mathematics, mathematical exhibit, the problem of seven bridges, graph theory, Eulerian path, vertex degree, graph edges, graph vertices.

The article discusses the representation of the classic problem of the seven Konigsberg bridges – finding a route that allows you to cross all the bridges of the city exactly once in the form of an exhibit in the Museum of Entertaining Mathematics. The methodological features of developing this exhibit and working with it during the tour are described.

Задача о семи кенигсбергских мостах – это классическая математическая проблема, возникшая в XVIII веке в городе Кенигсберге (современный Калининград). Она заключается в поиске маршрута, который позволяет пройти по всем семи мостам города ровно один раз, не повторяя ни один из них [1].

Кенигсберг располагался на берегах реки Прегель, включал в себя три исторически сложившихся района (Альтштадт, Лебенихт, Кнайпхоф) и два острова, соединенных между собой и с берегами семью мостами, построенными с 1286 по 1542 год. Среди них – Лавочный, Зеленый, Рабочий, Кузнечный, Деревянный, Высокий и Медовый. Все города и мосты обозначены на рисунке 1 [2].

Эта инженерная планировка породила своеобразную «игру-задачу» для горожан. Местные жители неоднократно пытались решить эту головоломку во время прогулок, однако никому не удалось найти верный путь. Загадка семи мостов стала своеобразным городским фольклором, а ее решение долгое время оставалось за пределами человеческих возможностей.

В 1736 году проблемой заинтересовался Леонард Эйлер, член Петербургской академии наук. Он формализовал задачу и разработал общий принцип ее решения, что положило начало теории графов – новому разделу математики [3].

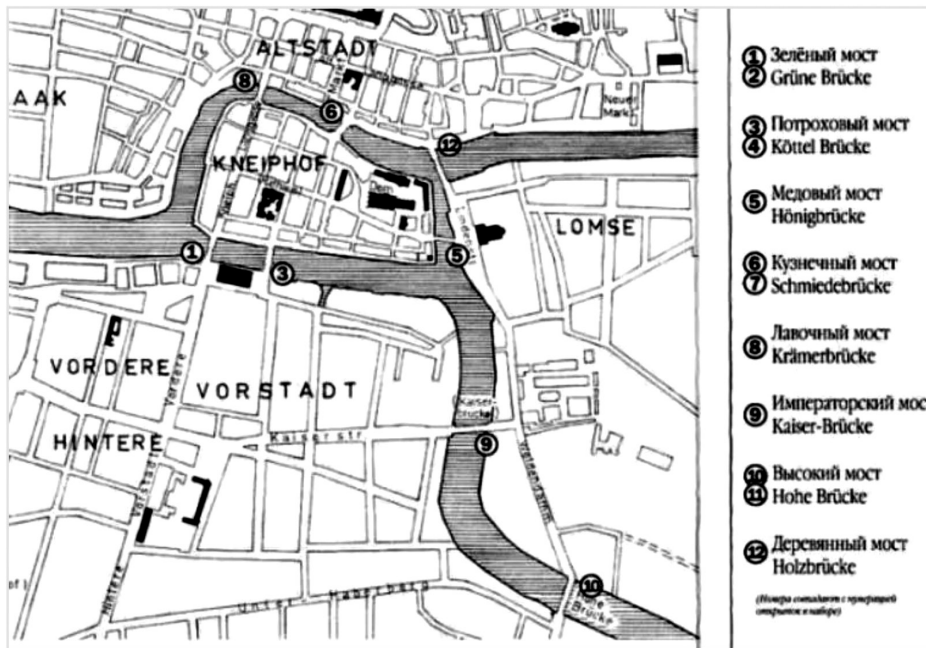


Рис. 1

На рисунке 2 представлено решение этой задачи, точнее доказательство ее неразрешимости, из статьи Л. Эйлера [4].

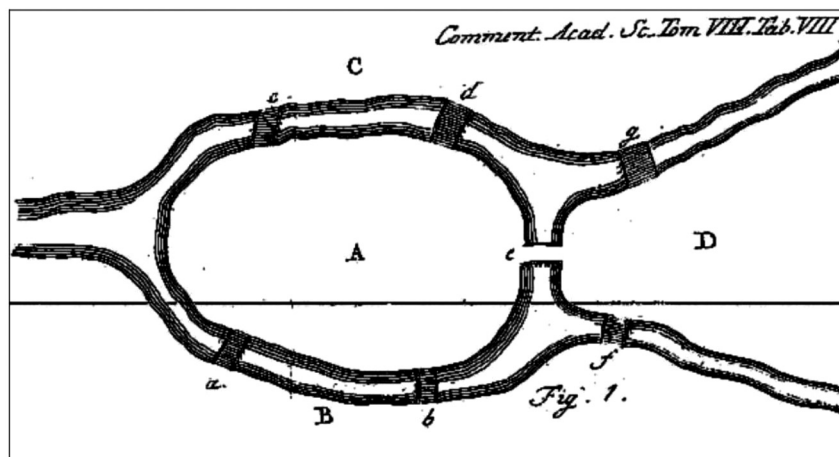


Рис. 2

Эйлер представил город в виде графа, где участки суши (четыре части города) стали вершинами, а мосты – ребрами, соединяющими эти вершины. Он ввел понятие степени вершины – количество ребер, выходящих из нее. Вершина называется четной, если ее степень четна, и нечетной – если нечетна [3].

Эйлер сформулировал следующие правила:

- 1) число нечетных вершин графа всегда четно;
- 2) если все вершины графа четные, то можно обойти граф, пройдя по каждому ребру ровно один раз и вернувшись в исходную точку;
- 3) если у графа две нечетные вершины, то его можно обойти, начав в одной из них и закончив в другой;
- 4) граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно обойти, пройдя по каждому ребру один раз [3].

Существуют альтернативные «решения» задачи:

1) По легенде, кайзер Вильгельм II, не сумев решить задачу, приказал построить восьмой мост, чтобы сделать обход возможным. Этот мост, названный Императорским, был разрушен во время Второй мировой войны, но позже на его опорах возвели Юбилейный мост. С добавлением нового моста граф стал иметь две нечетные вершины, что позволило найти эйлеров путь (маршрут, проходящий по каждому мосту ровно один раз, но не обязательно замкнутый).

2) Переплыть реку, игнорируя требование использовать только мосты и обойти исток реки, считая это допустимым вариантом прогулки [5].

В 1872 г. задача о семи кенигсбергских мостах была рассмотрена в книге В. Болла «Математические развлечения и проблемы в прошлом и настоящем» (рис. 3) [6].

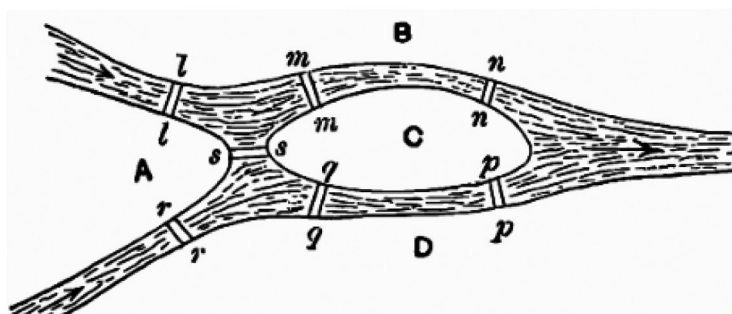


Рис. 3

В. Болл предлагал обозначить участки суши точками A, B, C, D , а мосты отрезками m, n, p, q, r, s . В результате был получен граф (рис. 4) [6].

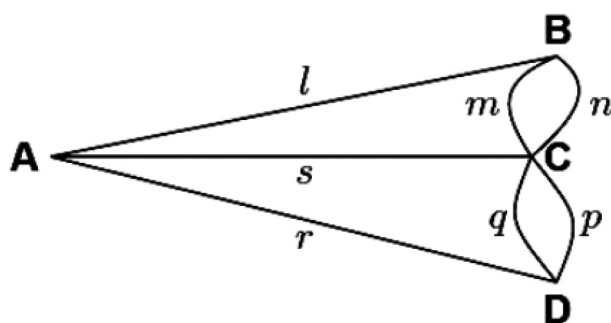


Рис. 4

Таким образом, впервые в математической литературе появился граф, демонстрирующий задачу о кенигсбергских мостах [6].

В статье [7] представлены определения эйлерова пути и эйлерова цикла. Путь, проходящий по одному разу по всем ребрам графа, называют эйлеровым путем, а замкнутый эйлеров путь – эйлеровым циклом. Для них справедливы утверждения:

1) в связном неориентированном графе эйлеров цикл существует только тогда, когда нет вершин нечетной степени;

2) в связном неориентированном графе эйлеров путь существует тогда и только тогда, когда граф содержит точно две вершины нечетной степени

Кривые, которые можно вычертить одним росчерком пера, соответствуют графам, содержащим эйлеров путь или эйлеров цикл [7].

В Музее занимательной математики САФУ [8] представлен экспонат, демонстрирующий задачу о семи кенигсбергских мостах (рисунок 5).

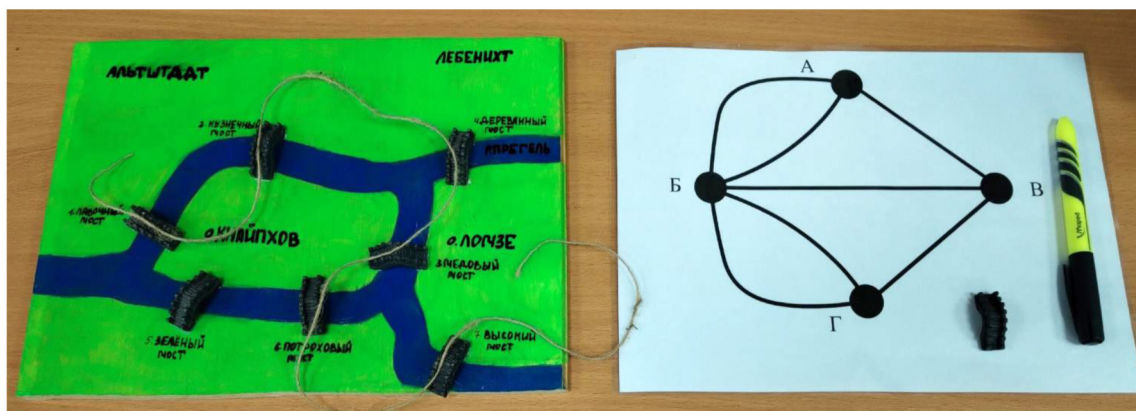


Рис. 5

Для его разработки были составлены следующие требования:

1) Постановка задачи происходит с помощью взаимодействия с экспонатом. Посетителям предлагается платформа с расположением города на реке Прегель и семи закрепленных мостов и веревка, чтобы они могли проложить с ее помощью путь, пройдя все мосты только один раз.

2) Представление условия задачи в виде графа на ламинированном листе бумаги и маркер, чтобы посетитель мог на графе добавить дополнительное ребро.

3) В состав экспоната входит восьмой мост, чтобы посетители могли разместить его на платформе после решения задачи с помощью графа.

Экскурсовод после безуспешных попыток посетителей решить задачу с помощью веревки на экспонате с 7 мостами предлагает лист с графом (рис. 6), предлагая заменить участки суши вершинами, а мосты – ребрами графа.

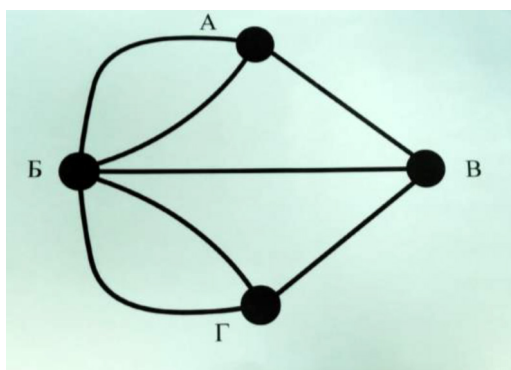


Рис. 6

В получившемся графе вершины А, В и Г имеют степень 3, а вершина Б имеет степень 5. То есть все 4 вершины графа имеют нечетную степень. Это значит, что обойти такой граф эйлеровым путем, то есть путем, который проходит ровно один раз по каждому ребру, невозможно.

Далее экскурсовод рассказывает историю задачи о семи кенигсбергских мостах и объясняет правила, предложенные Эйлером:

- если все вершины графа четные, то можно обойти граф, пройдя по каждому ребру ровно один раз и вернувшись в исходную точку;
- если у графа две нечетные вершины, то его можно обойти, начав в одной из них и закончив в другой;
- граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно обойти, пройдя по каждому ребру один раз.

После этого посетителям предлагается добавить маркером на графе ребро, которое позволит решить задачу. Оптимальное место для восьмого моста – это ребро, соединяющее вершины А и Г (обе имеют степень 3), тогда степень двух вершин станет четной (рис. 7).

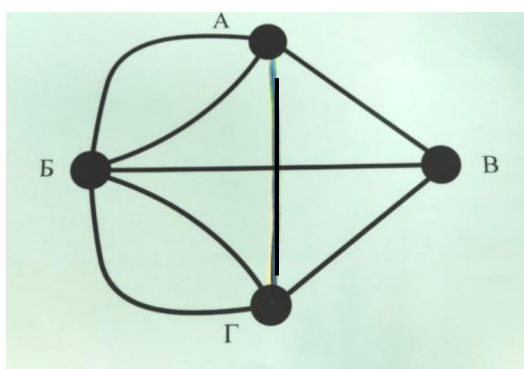


Рис. 7

Теперь посетителям предлагается «дополнить» архитектурные изыски Кенигсберга и поставить восьмой мост на платформе, зная, что вершиной А был обозначен верхний участок суши, а вершиной Г – нижний. А после проложить путь с помощью веревки, пройдя уже по восьми мостам только один раз. Решение представлено на рисунке 8.

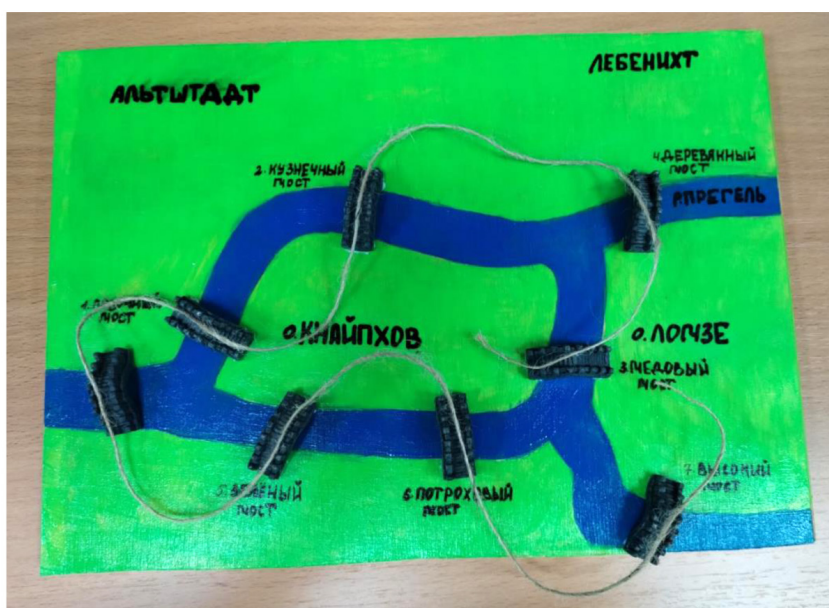


Рис. 8

Методические особенности разработки экспоната «Задача о семи кенигсбергских мостах» реализованы через описание четкой последовательности действий посетителей с составляющими экспоната и текст экскурсовода.

Библиографический список

1. Задача о семи кенигсбергских мостах // TenChat: [сайт]. URL: <https://tenchat.ru/media/3785026-zadacha-o-semi-kyonigsbergskikh-mostakh> (дата обращения: 09.11.2025).
2. История Кенигсберга // 39.zelenogradsk.ru: [сайт]. URL: <https://39zelenogradsk.ru/kaliningrad/nemnogo-istorii> (дата обращения: 10.11.2025).
3. Фляйшнер Г. Эйлеровы графы и смежные вопросы. М.: Мир, 2002. 335 с. [Fleischner H. Eulerian Graphs and Related Topics. P. 1, V. 1. Amsterdam: North-Holland, 1990.]
4. Euler L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Opera Omnia: Series 1, Vol. 7. P. 1–10. 1741.
5. Евасенко Е.К. Основы теории графов, задача о Кенигсбергских мостах // nsportal.ru: [сайт]. URL: <https://nsportal.ru/vuz/meditsinskie-nauki/library/2016/11/19/osnovy-teorii-grafov-zadacha-o-kyonigsbergskih-mostah> (дата обращения: 09.11.2025).
6. Ball W.W. Rouse Mathematical recreations and problems of past and present times. London New-York: Macmillan and Co., 1892.
7. Алябьева В.Г. Влияние Лейбница на развитие дискретной математики // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. № 3. С. 87–97 // Лань: электронно-библиотечная система. URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/322262> (дата обращения: 10.11.2025). URL: для авториз. пользователей.
8. Музей занимательной математики: [сайт]. URL: https://vk.com/exponat_v_mzm (дата обращения: 10.11.2025).

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

INFORMATION TECHNOLOGIES IN SCHOOL MATHEMATICS

В.Ю. Жартовский, М.В. Щипицин

V.Yu. Zhartovskiy, M.V. Shchipitsin

Информационные технологии, GeoGebra, Desmos, Mathcad, олимпиадная математика, компьютерное моделирование, прикладные задачи.

В статье рассматриваются современные информационные технологии как эффективные средства обучения школьной математике. Особое внимание уделяется использованию программ GeoGebra и Desmos для создания интерактивных иллюстраций и графиков, а также Mathcad – для численного моделирования и анализа данных. Приводятся примеры применения GeoGebra при решении задач ОГЭ и использования графического калькулятора Desmos в изучении функций. Показано, что цифровые ресурсы способствуют развитию исследовательских навыков и повышают качество подготовки к олимпиадам, ЕГЭ и ОГЭ. Отмечены перспективы применения компьютерного моделирования при визуализации геометрических объектов и их сечений.

Information technology, GeoGebra, Desmos, Mathcad, olympiad mathematics, computer modeling, applied problems.

The article examines modern information technologies as effective tools for teaching school mathematics. Particular attention is paid to the use of GeoGebra and Desmos for creating interactive illustrations and graphs, as well as Mathcad for numerical modeling and data analysis. Examples include the use of GeoGebra in solving geometry problems for the Basic State Exam and the application of the Desmos graphing calculator in studying functions. It is shown that digital resources help develop research skills and improve preparation for mathematical olympiads, the Unified State Exam (EGE), and the Basic State Exam (OGE). The prospects of applying computer modeling for visualizing geometric objects and their cross-sections are also discussed.

Современные информационные технологии в значительной мере расширяют возможности визуализации математического содержания. С помощью динамических программных средств учащиеся могут строить наглядные модели геометрических объектов и функций. Например, GeoGebra позволяет быстро строить аккуратные геометрические чертежи и графики функций. Е.Н. Дронова и Д.С. Захарова отмечают, что GeoGebra выступает в роли «динамической среды», свободно распространяемой для построения интерактивных иллюстраций, и иллюстрируют решения геометрических задач ОГЭ с ее помощью [1]. При этом учащиеся учатся правильно проводить вспомогательные построения и исследовать геометрию через автоматизированный инструмент. Использование цифровых калькуляторов Desmos также способствует наглядному восприятию материала: бесплатный онлайн-графический калькулятор Desmos позволяет мгновенно строить графики любых функций и экспериментировать с параметрами, что ускоряет усвоение функционального курса [2]. В результате учащиеся получают непосредственную обратную связь при изменении параметров моделей, что повышает их интерес и понимание. Использование таких инструментов на уроке способствует развитию пространственного воображения и аккуратности в оформлении решений.

Информационные технологии оказывают существенную поддержку при подготовке старшеклассников к олимпиадам, ЕГЭ и ОГЭ. В частности, учителя нередко используют онлайн-тесты и тренажеры, которые содержат задания уровня ЕГЭ/ОГЭ с автоматической проверкой ответов. О.В. Жигулина и Н.Г. Турусова отмечают, что интернет-ресурсы (например, сайты EGE.ru и uztest.ru) предоставляют тысячи задач по всем темам школьной математики и позволяют сформировать индивидуальные тренировочные варианты для каждого ученика [3]. Такая система тренингов помогает отслеживать прогресс и оперативно устранять пробелы: при неправильном решении ученику предоставляются наводящие вопросы и похожие примеры. Кроме того, учебные платформы с элементами геймификации (интерактивные викторины, карточные игры, мобильные приложения) вовлекают творчески настроенных школьников, делая подготовку более мотивирующей. В контексте подготовки к олимпиадам ИТ-инструменты также позволяют моделировать комплексные задачи и проверять гипотезы: например, с помощью Mathcad или CAS-сред решение системы неравенств или оптимизационной задачи становится более систематичным, а полученный ответ удобно визуализировать.

Компьютерное моделирование расширяет горизонты изучения геометрии и математических абстракций. С помощью современных средств возможно создание трехмерных моделей фигур, динамическая визуализация их изменений и сечений. Так, Т.О. Калинина с соавторами подчеркивают, что компьютерные модели позволяют использовать разнообразные объемные геометрические фигуры и демонстрировать их сечения, взаимное расположение плоскостей и скрещивающихся прямых [4]. Студенты могут, например, вращать в GeoGebra построенный тетраэдр, получать различные проекции и исследовать свойства фигур на лету. Интерактивная среда стимулирует поиск математических закономерностей через эксперименты: меняя параметры модели, учащиеся выявляют зависимости. Абстрактные математические объекты (например, кривые третьего порядка, фракталы, поверхности) также можно визуализировать в специальных средах. Инструменты компьютерной алгебры в сочетании с графическими программами дают возможность переводить символьные описания в наглядные образы, что особенно полезно при изучении тем вроде геометрии в пространстве и аналитической геометрии.

Для решения прикладных задач, особенно с инженерным и экономическим уклоном, широко применяются системы математических вычислений. MathCAD (PTC MathCAD) демонстрирует высокую эффективность в школьных проектах, связанных с реальными приложениями математики. Этот пакет позволяет сочетать символьные и численные вычисления с созданием наглядных графиков. Ученики могут использовать MathCAD, например, для расчета оптимальной конструкции моста, проведя смету затрат, решив уравнения равновесия и построив графики нагрузок. MathCAD поддерживает шаговые преобразования, позволяющие сохранять ход решения, что тренирует математическую культуру. Таким образом, при решении прикладных задач школьники не только получают ответ, но и наглядно видят процесс, что особенно актуально на конкурсах и олимпиадах

по математике и смежным дисциплинам. Кроме того, использование MathCAD развивает навыки программной математики и межпредметное мышление.

В заключение следует подчеркнуть, что внедрение информационных технологий в школьную математику обеспечивает более глубокое понимание материала и повышает интерес учащихся к предмету. Использование GeoGebra, Desmos, MathCAD и аналогичных инструментов делает решение задач более наглядным и интерактивным. Учитель, применяющий эти средства, может сосредоточиться на развитии умений ученика исследовать и анализировать задачи, предлагая все более творческие проблемы. Компьютерное моделирование и онлайн-ресурсы особенно полезны для подготовки к олимпиадам и экзаменам, поскольку дают мгновенную обратную связь и способствуют самостоятельной работе учащихся. В будущем ожидается дальнейшее расширение возможностей ИТ в образовании, включая виртуальную и дополненную реальность для визуализации математики.

Библиографический список

1. Дронова Е.Н., Захарова Д.С. Использование программы GeoGebra для решения геометрических задач основного государственного экзамена по математике // Вестник Алтайского госуниверситета. 2017. № 2 (31). С. 25–32.
2. Иванова О.В., Слепцова Я.В. Использование графического калькулятора Desmos при обучении учащихся понятиям функциональной линии курса алгебры основной школы // Школьные технологии. 2020. № 1. С. 39–42.
3. Жигулина О.В., Турусова Н.Г. Подготовка к ЕГЭ по математике посредством ИКТ // Молодой ученый. 2016. № 17 (121). С. 105–107.
4. Калинина Т.О., Добрикова С.О., Вострикова Т.В. Компьютерное моделирование на уроках математики // Сборник трудов региональной научно-практической конференции. Воронеж, 2023. С. 15–20.

ТОЧКИ, КОТОРЫЕ ДВИГАЮТСЯ: ИЗУЧАЕМ ГМТ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

POINTS THAT MOVE:
EXPLORING GMT USING THE LIVING GEOMETRY
DYNAMIC MATHEMATICS PROGRAM

В.С. Перминова, И.В. Хотенко

V.S. Perminova, I.V. Khotenko

Программа динамической математики «Живая геометрия», компьютерный эксперимент, интерактивное исследование, геометрическое место точек, треугольник.

В статье раскрыт вопрос о том, почему именно геометрия является наиболее подходящей платформой для проведения компьютерных экспериментов. Показана важность включения интерактивных исследований при изучении различных тем данной школьной дисциплины. Рассмотрено определение геометрического места точек и на примере конкретной задачи разобрано, как именно можно применять программу динамической математики «Живая геометрия» для поиска и фиксации всех возможных вариантов ее решения.

Dynamic Mathematics program “Living Geometry”, computer experiment, interactive study, geometric locus of points, triangle.

The article explores why geometry is the most suitable platform for conducting computer experiments. It highlights the importance of incorporating interactive research into the study of various topics in this school subject. The article examines the definition of a geometric locus and uses a specific problem to demonstrate how the dynamic mathematics program “Live Geometry” can be used to find and record all possible solutions.



Математика – один из наиболее многогранных учебных предметов, которые изучаются в школе. В седьмом классе программа углубляется: изучаются алгебра с переменными и уравнениями, геометрия, исследующая свойства фигур и принципы построения доказательств, а также вводятся элементы статистики и теории вероятностей.


Во всем разнообразии учебных дисциплин геометрия занимает одну из лидирующих позиций для проведения исследований. Располагают к такой деятельности объекты, подвластные изменениям, поэтому на уроках выбранной дисциплины положительного эффекта можно добиться благодаря включению в процесс учебной деятельности интерактивной образовательной среды «Живая геометрия» [3]. В таких программах можно строить фигуры, двигать точки и сразу видеть, как меняются углы и длины, делать измерения и прибегать к анимации геометрических объектов. Это помогает не просто запоминать правила, а понимать, почему так получается, экспериментировать с разными задачами.


У меня особый интерес вызвала тема, связанная с геометрическим местом точек. В школьном учебнике оно определяется как множество точек, удовлетворяющих какому-либо условию [2]. Геометрическое место точек может быть

линией, состоять из нескольких линий, представлять собой часть линии (отрезок, дугу) или состоять из нескольких таких частей [1]. Я решила научиться строить некоторые геометрические места точек при помощи программы динамической математики «Живая геометрия»

Задача 1. Выяснить, что представляет собой геометрическое место вершин C треугольников, имеющих общее основание AB , у которых боковая сторона AC равна данному отрезку:

1. зададим на плоскости отрезок a , который равен боковой стороне AC (длину выбираем произвольно, так как конкретное значение не задано); для этого выбираем инструмент «построение отрезка» , и двумя последовательными щелчками мыши задаем произвольный отрезок; затем выбираем инструмент «ввод текста»  и двойным щелчком мыши по самому отрезку вводим его обозначение – a ;

2. теперь построим прямую, на которой расположим искомое геометрическое место точек: выбираем инструмент «построение прямой»  и двумя последовательными щелчками мыши задаем этот объект;

3. приступим к построению общего основания AB (его строим произвольно, так как конкретное значение не задано); выбираем инструмент «построение точки»  и щелчком мыши ставим две такие точки, на имеющейся прямой и при помощи инструмента «ввод текста» обозначаем их соответственно A и B (рис. 1);

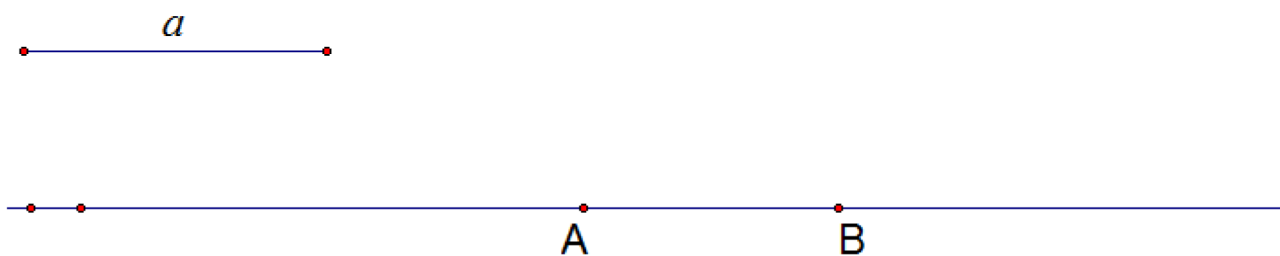



Рис. 1

4. выбираем инструмент «стрелка»  и последовательно щелчком мыши подсвечиваем точку B и отрезок a , находим в меню «построения» команду «окружность по центру и радиусу»; на построенной окружности находятся точки, которые равноудалены от вершины B , на расстояние, равное данному в условии задачи отрезку;

5. при помощи инструмента «построение точки» помещаем точку на окружность и обозначаем ее C ;

6. выбираем инструмент «стрелка» и последовательно щелчком мыши подсвечиваем точки A , B и C , находим в меню «построения» команду «отрезки» и выбираем ее, снова выделяем указанные точки и в том же меню нажимаем команду «внутренняя область», на чертеже появляется треугольник, окрашенный в желтый цвет (рис. 2).

7. на предыдущем шаге мы получили только одно из возможных решений задачи; выбираем инструмент «стрелка» и подсвечиваем вершину C , в меню «вид» нажимаем команду «оставлять след», затем команду «анимация» (рис. 3).

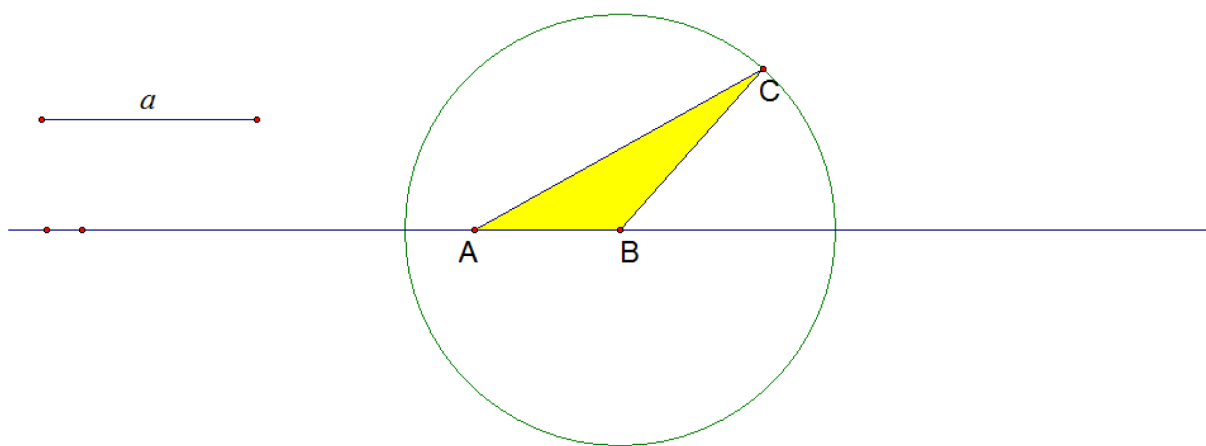


Рис. 2

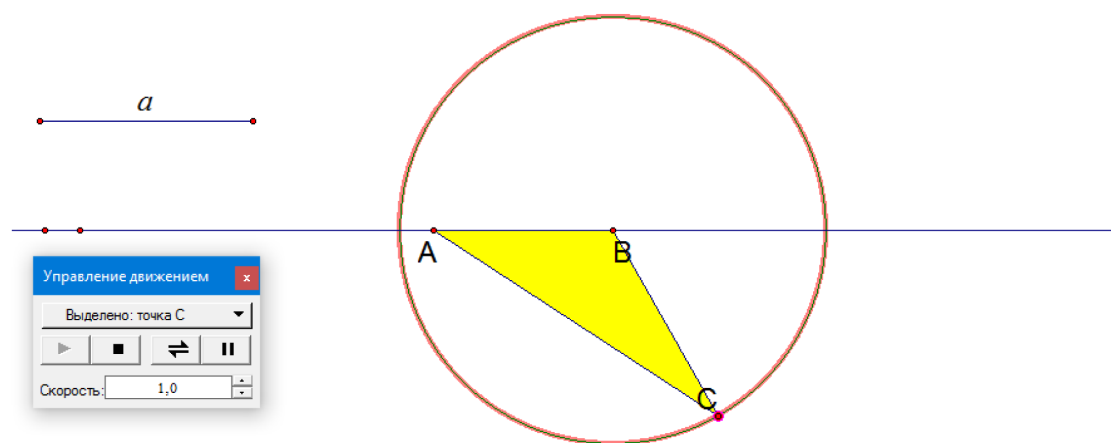


Рис. 3

След вершины C описывает окружность, которая и представляет собой геометрическое место вершин C треугольников, имеющих общее основание AB , у которых боковая сторона AC равна данному отрезку. По итогам проведенного эксперимента возникает закономерный вопрос «всегда ли существует такой треугольник?». Во время анимации мы увидели случай, когда треугольник исчез с чертежа, это произошло в тот момент, когда все три вершины A , B и C оказались лежащими на одной прямой (рис. 4).

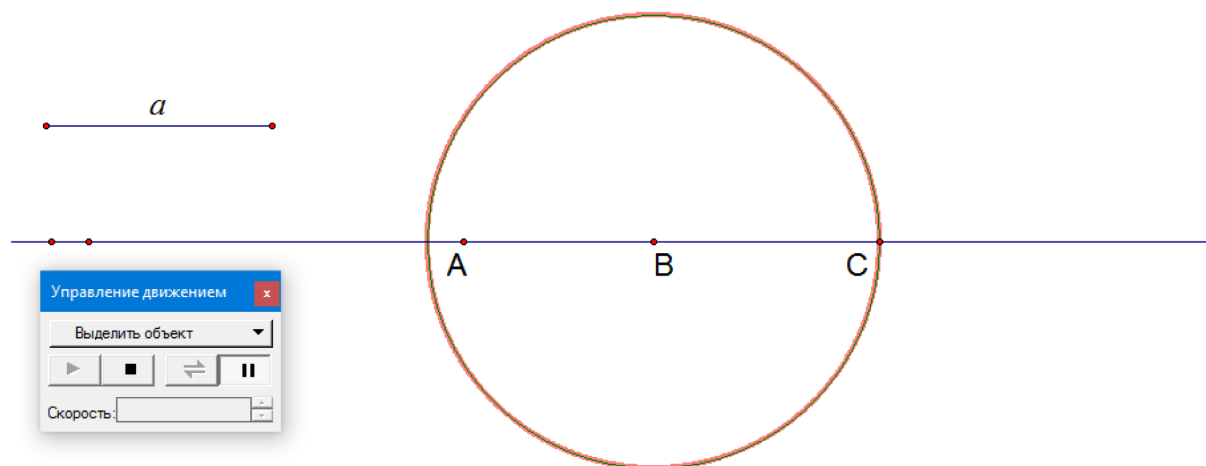


Рис. 4

Таким образом, за счет возможностей программы «Живая геометрия» учащиеся могут увидеть все возможные варианты решений поставленной задачи и заметить случаи, когда такое решение не существует.

Библиографический список

1. Александров И.И. Геометрические задачи на построение и методы их решения. М., 1934.
2. Атанасян Л.С. Геометрия 7–9 класс: учебник. М.: Просвещение, 2025.
3. Хотенко И.В. Математическое образование в условиях современной формации / Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева. Часть 1. Красноярск, 2019. С. 140–143.

ИСТОРИКО-НАУЧНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ТЕМЫ «ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ» В КУРСЕ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА»

THE HISTORICAL AND SCIENTIFIC COMPONENT OF THE TOPIC “OPERATIONS ON SETS” IN THE COURSE “PROBABILITY AND STATISTICS”

В.С. Теплухина

V.S. Tepluhina

Операции над множествами, вероятность и статистика, образовательные результаты, средства визуализации.

В статье представлены возможности развития средств визуализации операций над множествами для достижения планируемых образовательных результатов при изучении данной темы в курсе «Вероятность и статистика».

Operations on sets, probability and statistics, educational outcomes, visualization tools.

The article presents the possibilities of developing visualization tools for operations on sets to achieve the planned educational results when studying this topic in the course “Probability and Statistics”.

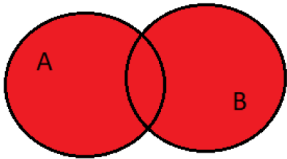
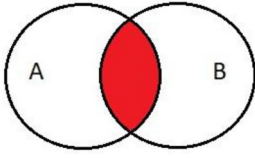
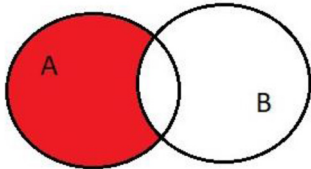
Понятие множества является одним из фундаментальных, основополагающих понятий математики. Необходимость в его определении возникла как абстракция того факта, что предметы, окружающие нас, встречаются не столь изолированными, сколько в совокупности: множество птиц, коллекция монет, ряд целых чисел – все эти сочетания называют множествами.

Множества в неявном виде встречались в математике со времен Древней Греции, греки в VI–IV вв. до н.э. интенсивно изучали свойства чисел и классифицировали их (натуральные, целые, простые, нечетные). Зачатки идеи о равномощности множеств встречаются у Галилея, его вывод – судить об одинаковом количестве элементов можно только для конечных множеств [1].

В XVIII в. Леонард Эйлер при решении целого ряда задач использовал идею изображения множеств с помощью кругов, которые и получили название «Круги Эйлера». В 1760–1763 гг. Л. Эйлер дважды в неделю писал письма немецкой принцессе, пятнадцатилетней племяннице Фридриха Великого. Из этих писем получился прекрасный учебник, в котором он впервые использовал свой метод «Круги Эйлера» [2].

Круги Эйлера – это геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами. Это новый тип задач, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи. Как показано в таблице, данный метод позволяет наглядно представить пересечение, объединение и дополнение множеств, что делает его важным инструментом для решения логических задач.

Наглядное представление метода кругов Эйлера

Математическая запись	Операция	Метод круги Эйлера (геометрическая интерпретация)	Результат операции
$A \cup B$	$A + B$		Объединение множества A и B – множество, состоящее из элементов, принадлежащих множествам A и B
$A \cap B$	$A \times B$		Пересечения множества A и B – множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно и множеству A и множеству B
$A \setminus B$	$A - B$		Дополнение множества A и B – множество, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B

В начале XIX века Карл Фридрих Гаусс явно не выделял бесконечные множества или классы как самостоятельные объекты и отвергал возможность использования актуальной бесконечности в математических доказательствах. Он опасался бесконечности как завершенного объекта, в отличие от процесса, не имеющего конца [3].

Формальное становление теории множеств как самостоятельной математической дисциплины относится к XIX веку, ключевую роль в этом сыграли: Бернхард Больцано, Бернхард Риман, Рихард Дедекиннд.

Бернхард Больцано исследовал бесконечные множества и предложил оригинальную концепцию бесконечного в своей работе «Парадоксы Бесконечного», где впервые строго показал, что бесконечное множество может быть равномощно своей части, однако он не сумел разработать общий метод оперирования совокупностями любой природы [4].

Бернхард Риман занимал противоположную позицию, и в своей знаменитой работе 1854 г. «О гипотезах, лежащих в основе геометрии» он не только развивал топологию, но и утверждал, что теория множеств является фундаментом для математики [5].

Вклад Рихарда Дедекиннда в область теории множеств оказался фундаментальным и судьбоносным. Он использовал мощь теоретико-множественного мышления для решения проблем оснований математики. Самый известный его вклад – решение проблемы непрерывности. В 1872 г. в своей работе «Непрерывность и иррациональные числа» он предложил «дедекиндовы сечения».

Таким образом, он открыл путь для Г. Кантора, прочно укрепив теоретико-множественный язык [6].

С 1872 по 1899 г. продолжалась переписка уважаемого и известного математика Рихарда Дедекинда с молодым, но довольно амбициозным профессором Георгом Кантором, ставшая катализатором рождения теории множеств. Благодаря такому тандему, Кантор пришел к идее различных мощностей бесконечности, показав, что множество натуральных и действительных чисел имеют разную мощность, следовательно, их элементы нельзя поставить во взаимно однозначное соответствие, а Рихард Дедекинд в 1877 г. впервые дал определение бесконечного множества [7].

Согласно требованиям ФГОС ООО к образовательным результатам в результате обучения курса «Вероятность и статистика» для 7–9 классов по теме «Отношения над множествами» относятся:

1. Использовать графические модели: дерево случайного эксперимента, диаграммы Эйлера, числовая прямая.

2. Оперировать понятиями: множество, подмножество, выполнять операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, перечислять элементы множеств, применять свойства множеств.

3. Использовать графическое представление множеств и связей между ними для описания процессов и явлений, в том числе при решении задач из других учебных предметов и курсов.

В учебнике [8, с. 125] данная тема рассматривается на трех страницах, из визуализации представлено только три рисунка (рис. 1–3).



Рис. 1

ПРИМЕР 4. Дана диаграмма Эйлера (рис. 52). Запишем все связи между множествами A , B и C , которые только можно увидеть на этой диаграмме.

Мы не знаем, что это за множества и каковы их элементы. Диаграмма Эйлера даёт мало информации, но всё же кое-что сказать можно.

1. Множества A и B имеют непустое пересечение.
2. Множество C является подмножеством множества A : $C \subset A$.
3. Множества C и B не пересекаются. Можно сказать, что их пересечение — пустое множество: $B \cap C = \emptyset$.

Рисунок 52

Рис. 2

ПРИМЕР 5. В первом классе 24 ученика, из них 15 — девочки. Обозначим множество всех учеников буквой A , а множество, состоящее из всех девочек этого класса, — буквой G . Сколько элементов содержит множество: а) $A \cap G$; б) $A \cup G$?

Решение. Каждая девочка в классе является ученицей. Поэтому $G \subset A$. Изобразим множества на диаграмме (рис. 53, а).

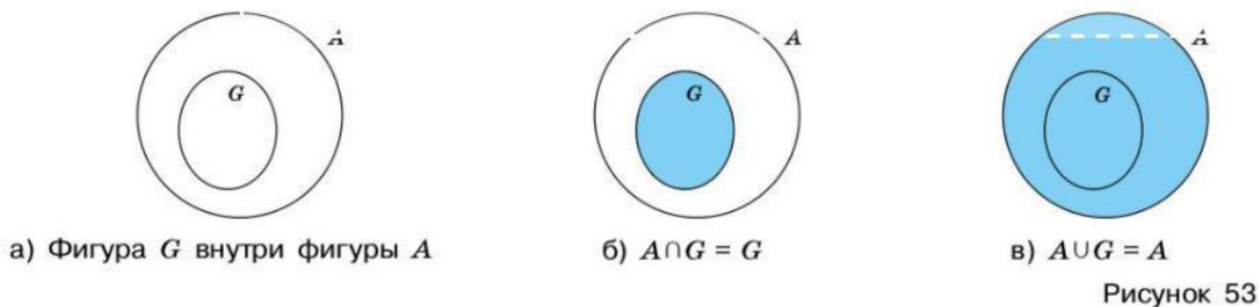


Рис. 3

Задачный материал состоит из 7 задач (рис. 4).

Задачи

203 Даны: два множества $C = \{a, o, d, q\}$ и $D = \{p, o, t, q\}$.
 а) Перечислите элементы множества $C \cap D$;
 б) Перечислите элементы множества $C \cup D$.

204 Даны: два числовых промежутка $(-3; 4]$ и $(-2; 7]$. Запишите промежуток, который является:
 а) их объединением;
 б) их пересечением.

205 Изобразите на диаграмме Эйлера множества X и Y , для которых выполняются соотношения:
 а) $X \cap Y = X$; б) $X \cup Y = X$; в) $X \cup Y = \emptyset$.

206 Перерисуйте в тетрадь диаграмму Эйлера (рис. 54) и укажите на ней множество:
 а) $A \cup (B \cap C)$; б) $A \cap (B \cup C)$.

207 Пользуясь диаграммой Эйлера, проверьте, верно ли равенств:
 а) $A \cup (B \cap A) = B$; б) $A \cap (B \cup A) = A$.

208 Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

209 Двенадцать малышей вышли во двор играть в песочнице. Каждый, кто принёс ведёрко, принёс и совочек. Забыли дома ведёрко девять малышей, совочек забыли двое. На сколько меньше тех, кто принёс ведёрко, чем тех, кто забыл дома ведёрко, но принёс совочек?

Рисунок 54

Рис. 4

Следовательно, для удовлетворения требований ФГОС ООО необходимо усилить деятельностную составляющую при освоении данной темы, включая дополнительные средства визуализации и средства деятельности.

Учителям приходится искать дополнительный материал, чтобы способствовать формированию заявленных образовательных результатов.

Мы предлагаем дополнить освоение материала учебника [8] включением учащихся в деятельность по решению заданий Л. Эйлера из писем к немецкой принцессе [2].

Например, в письме 103 «О силлогизмах и об их различных формах, если первое предложение общее» [2, с. 220] Эйлер представляет, как можно графически представить общие понятия: если подлежащее предложения изобразить кругом, содержащим А, а сказуемое – другим кругом, содержащим В. От характера самого предложения зависит: помещается ли круг А весь целиком, или частично внутри круга В, или же по меньшей мере некоторая часть его расположена вне круга В, или же, наконец, находится ли круг А весь целиком вне круга В. Тогда получается четыре вида предложений (рис. 5).



Рис. 5

Это приносит пользу для умозаключений, которые, если они выражены словами, называются силлогизмами; здесь речь идет о том, чтобы вывести правильное заключение из нескольких заданных предложений [2, с. 221]. Например, по рисунку 6 мы можем сказать следующее: понятие А будет включать в себя понятие В все целиком.

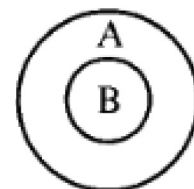


Рис. 6

Так, например, если А – это понятие дерева вообще, а В – понятие грушевого дерева вообще, содержащееся, без сомнения, все целиком в первом понятии, то можно будет составить из этой фигуры следующие предложения:

1. Все грушевые деревья – деревья.
2. Некоторые деревья – грушевые.
3. Некоторые деревья не являются грушевыми.



Рис. 7

А когда из двух кругов один находится весь целиком вне другого (рис. 7), то могут получиться предложения «Ни один человек не есть дерево» и «Ни одно дерево не есть человек» [2, с. 221].

Добавим еще одно множество С, которое все целиком содержится в А, оно также будет находиться все целиком в круге В (рис. 8).

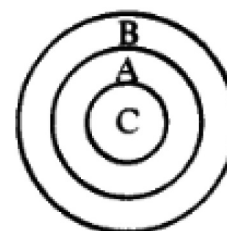


Рис. 8

Откуда выводится следующая форма силлогизма:


Всякое А есть В. При том, что всякое С есть А. Следовательно, всякое С есть В.

Что и является заключением. Например, понятие А включает в себя все деревья, понятие В – все, что имеет корни, а понятие С – все вишневые деревья. Тогда силлогизм будет иметь следующий вид:

Всякое дерево имеет корни. Всякая вишня – дерево. Следовательно, всякая вишня имеет корни.

Представим задания для учащихся по составлению силлогизмов к следующим визуализациям из этого же письма Л. Эйлера (рис. 9).


II. Если одна часть понятия С содержится в А, то та же часть будет находиться и в круге В, поскольку понятие А входит все целиком в понятие В:



Откуда выводится второй вид силлогизма:

Всякое А есть В.
При том, что некоторое С есть А.
Следовательно:
Некоторое С есть В.

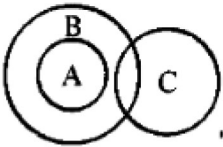
III. Если понятие С будет все целиком вне понятия В, то оно будет также находиться вне понятия А, как это показывает следующая схема:



откуда выводится следующая форма силлогизма:

Всякое А есть В.
При том, что ни одно С не есть В, или ни одно В не есть С.
Следовательно:
Ни одно С не есть А.

IV. Если часть понятия С находится вне понятия В, то эта же часть, очевидно, будет вне понятия А, поскольку последнее все целиком содержится в понятии В:



откуда выводится следующий силлогизм:

Всякое А есть В.
При том, что некоторое С не есть В.
Следовательно:
Некоторое С не есть А.

Рис. 9

Мы считаем, что для достижения планируемых образовательных результатов при изучении темы «Операции над множествами» в курсе «Вероятность и статистика» необходимо расширять деятельностные формы обучения учащихся с включением историко-научных данных и развивать средства визуализации операций над множествами.

Библиографический список

1. О равномошности множеств // Проза.ру. URL: <https://proza.ru/2009/01/03/595> (дата обращения: 05.11.2025).
2. Эйлер Л. «Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях» // Наука. Санкт-Петербург, 2002. 719 с. URL: https://www.phantastike.com/philosophy/pis697ma_k_nemetskoj_printsesse/djvu/view/ (дата обращения: 05.11.2025).
3. Самохин В.П., Мещеринова К.В., Тихомирова Е.А. Карл Фридрих Гаусс (240-летие со дня рождения) // Машиностроение и компьютерные технологии. 2017. № 9. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/karl-fridrih-gauss-240-letie-so-dnya-rozhdeniya> (дата обращения: 06.11.2025).
4. Габрусенко К.А. О предпосылках теории бесконечных множеств в работах Б. Больцано // Философия науки. 2015 . № 1. С. 18–28. URL: <https://rucont.ru/efd/357400> (дата обращения: 06.11.2025).
5. Раннее развитие теории множеств // Стэнфордская философская энциклопедия. URL: <https://plato.stanford.edu/ENTRIES/settheory-early/> (дата обращения: 05.11.2025).
6. Синкевич Г.И. Метафизика Рихарда Дедекинда // Архитектура – строительство – транспорт: материалы 71-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета, Санкт-Петербург, 07–09 октября 2015 года / Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. Часть. 1. СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2015. С. 31–35.
7. Синкевич Г.И. Понятие непрерывности у Дедекинда и Кантора // Труды XI Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль: Издательство ЯГПУ, 2013. С. 336–347.
8. Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Математика. Вероятность и статистика: 7–9-е классы: базовый уровень, учебник, 1 часть. М.: Просвещение, 2023. 177 с.

Секция 4

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ

AI-ТЕХНОЛОГИИ В ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

AI-TECHNOLOGIES IN THE TRAINING OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE TEACHERS

В.Н. Аниськин, В.И. Богословский,
Т.В. Добудько, О.И. Пугач

V.N. Aniskin, V.I. Bogoslovsky,
T.V. Dobudko, O.I. Pugach

Цифровая трансформация образования, искусственный интеллект, сквозные технологии, подготовка учителей математики и информатики, предметно-дидактические возможности AI-технологий, организационно-дидактический инструментарий, холистичная информационно-образовательная среда.

В работе рассматриваются предметно-дидактические возможности в подготовке учителей математики и информатики компьютерных технологий, функционирующих на основе искусственного интеллекта (AI-технологий), анализируются их преимущества и недостатки, определяются перспективы использования этих и других сквозных технологий как вспомогательного организационно-дидактического инструментария.

Digital transformation of education, artificial intelligence, cross-cutting technologies, training of mathematics and computer science teachers, subject-based teaching capabilities of AI-technologies, organizational and teaching tools, a holistic information and educational environment.

The paper examines the subject-didactic possibilities of computer technologies operating on the basis of artificial intelligence (AI technologies) in the training of mathematics and computer science teachers, analyzes their advantages and disadvantages, and determines the prospects for using these and other cross-cutting technologies as auxiliary organizational and didactic tools.

Регламентирующий подготовку бакалавров-педагогов ФГОС ВО определяет, что в рамках освоения основных образовательных программ (ООП) выпускники педвузов готовятся к решению задач будущей профессиональной деятельности, к которым помимо педагогических и методических относятся проектные и организационно-управленческие, а в содержание универсальных и общепрофессиональных компетенций, осваиваемых будущими учителями-предметниками, ФГОС включает способности для поиска, критического анализа и синтеза информации, а также понимание принципов работы современных информационных технологий для их использования при решении задач профессиональной деятельности [1].

В условиях цифровой трансформации образования эти задачи могут оперативно, правильно и эффективно решаться с использованием современных и перспективных сквозных технологий: виртуальной и дополненной реальности, технологий обработки больших данных, систем распределенного реестра, робототехники, AI-технологий (нейросетей). Можно с уверенностью предположить, что последние технологии, функционирующие на основе искусственного интеллекта (AI), наиболее продуктивны и перспективны для решения задач, содержащихся в ФГОС ВО.

Такое предположение выдвинуто нами с опорой на трактовку ключевых понятий Национальной стратегии развития искусственного интеллекта на период до 2030 года, утвержденной Указом Президента Российской Федерации от 10 октября 2019 года № 490 [2]. В редакции Указа Президента Российской Федерации от 15 февраля 2024 года № 124 этот документ определяет искусственный интеллект как: «комплекс технологических решений, позволяющий имитировать когнитивные функции человека (включая поиск решений без заранее заданного алгоритма) и получать при выполнении конкретных задач результаты, сопоставимые с результатами интеллектуальной деятельности человека или превосходящие их» [2, с. 3]. Также в указанной стратегии приводится трактовка содержания комплекса технологических решений, лежащего в основе искусственного интеллекта, который «включает в себя информационно-коммуникационную инфраструктуру, программное обеспечение (в том числе, в котором используются методы машинного обучения), процессы и сервисы по обработке данных и поиску решений» и определяется понятие AI-технологий, рассматриваемых как «совокупность технологий, включающей в себя компьютерное зрение, обработку естественного языка, распознавание и синтез речи, интеллектуальную поддержку принятия решений и перспективные методы искусственного интеллекта» [2, с. 3].

Очевидно, что приводящиеся в данном государственном акте содержательные характеристики искусственного интеллекта позволяют нам определять этот феномен в качестве стратегии и тактики развития подготовки учителей математики и информатики на ближайшую пятилетку и выполнять при этом не только требования ФГОС ВО, а и дополняющего его комплекса методических рекомендаций и обязательных требований к профессиональной подготовке педагогов «Ядро высшего педагогического образования» («Ядро ВПП») [3], внедренного в образовательную практику российских педвузов с 2022 года. По своему содержанию этот комплекс является основой для реализации концепции единого образовательного пространства педвузов России с целью обеспечения образовательной мобильности студентов и формирования целостной (холистичной) системы управления качеством подготовки будущих учителей, а также повышением квалификации и переподготовки педагогических кадров (демонстрационный экзамен, федеральный интернет-экзамен, аттестация учителей и др.). Внедрение комплекса «Ядро ВПП» призвано обеспечить более эффективные предметно-методические, научно-исследовательские и организационно-управленческие подходы к отбору и дополнению ООП вариативным содержанием в той части инвариантной подготовки учителей-предметников, которое соответствует реалиям грядущего цифрового образования [4].

Считаем, что эти действия имеют особую актуальность при подготовке учителей математики и информатики с использованием предметно-дидактического потенциала сквозных технологий, в частности AI-технологий (нейросетей), даже несмотря на некоторые недостатки комплекса «Ядро ВПП», такие, например,

как явная перенасыщенность содержания учебной дисциплины «Основы искусственного интеллекта». При ее изучении предполагается освоение студентами всего лишь за один семестр разделов: «Основы логического программирования (Пролог)», «Чат-боты и виртуальные ассистенты. Примеры разработки», «Системы компьютерного зрения и визуализация обработки информации», «Инженерия знаний», «Представление знаний», «Машинное обучение», «Основы технологий обработки больших данных» и др. Однако в содержании математических и информационно-технологических дисциплин комплекса «Ядро ВПП», предшествующих изучению будущими учителями информатики курса «Основы искусственного интеллекта», не включены такие ключевые темы, как: «Математическая статистика», «Теория вероятностей» «Язык программирования Python» и др. фундаментальные разделы, которые являются индустриальным стандартом для работы с большими данными и машинного обучения [3–7]. И это только часть разрыва между декларируемыми Национальной стратегией развития искусственного интеллекта целями и реальным содержанием программ подготовки учителей информатики и математики, реализуемыми педвузами на основе комплекса «Ядро ВПП», не говоря уже о ФГОС ВО.

Поэтому, основываясь на собственном опыте подготовки педагогов-предметников, отраженном в работах [4–7], а также на результатах исследований особенностей и условий применения организационно-управленческого, методического и предметно-дидактического потенциала AI-технологий в обучении математике и др. предметам, представленных в работах К.Г. Череповой, О.В. Новиковой, И.К. Мореншильдт [8]; Ф.С. Китаевой [9]; М.М. Ораковой, М.К. Бориевой, Р.Р. Нагаплежевой, А.А. Текуевой, З.А. Цеевой [10]; Н.В. Апатовой, А.И. Гапоновым, О.Ю. Смирновой [11] и др. ученых-педагогов, считаем необходимым реформирование ООП бакалавриата по подготовке учителей математики и информатики, в основе которых должно лежать не простое добавление учебных курсов, а глубокая холистичная интеграция цифровых компетенций в нынешние учебные планы.

Мы убеждены в том, что при таком подходе введенные на более ранних этапах обучения фундаментальные концепции будут способствовать созданию прочной основы для итогового учебного курса по основам искусственного интеллекта, что позволит превратить его из поверхностного введения в мощный синтезирующий элемент всей программы. Также в эти учебные планы было бы целесообразно ввести новый обязательный модуль «Педагогика и этика искусственного интеллекта», который мог бы наполняться такими важными для будущих педагогов темами, как: этические дилеммы AI (кибербуллинг, предвзятость, прозрачность, ответственность), методика преподавания AI в школе, диагностика и коррекция заблуждений учащихся, разработка учебных материалов с использованием AI-технологий, оценка образовательных AI-платформ и др. [7].

Для содержательного наполнения лабораторно-практической части реформированных учебных планов можно использовать уже известные и применяемые в

обучении математике программы, приложения, платформы и инструменты реализации AI-технологий, такие, например, как: программа Merlin AI для выполнения домашних заданий; «образовательный эквалайзер» и личный репетитор Wolfram|Alpha для решения математических задач и примеров при помощи камеры смартфона; математическая платформа Smodin Omni для решения сложных задач; приложение Photomath; образовательная платформа Brilliant для изучения математических концепций и исследования стратегии решения задач; универсальная платформа Microsoft Math Solver для пошагового выполнения задания и генерирования наглядных материалов, улучшающих понимание и способы решения задач обучающимися и др. [8].

Очевидно, что цифровая трансформация экономики и социальной сферы и реализация Национальной стратегии развития AI невозможны без создания системы подготовки IT-кадров на всех уровнях образования. Такой постулат предъясвляет новые требования к подготовке педагогов-предметников, в первую очередь учителей информатики и математики, перед которыми в настоящее время наиболее остро стоит задача освоения AI-технологий и др. инструментов для анализа данных на базе сквозных технологий, не только как средства обучения, а и как объекта изучения, структуру и содержание которого необходимо объяснить и довести до обучающихся [7].

Вместе с тем необходимо отметить, что использование AI-технологий в образовании сопряжено с новыми вызовами и рисками, среди которых наиболее заметны такие, как: обеспечение конфиденциальности данных, неравенство в доступности AI-технологий для обучающихся и обучающихся, недостаточно высокое качество обучающего и контролирующего контента, некоторые морально-этические и др. вопросы [9]. Поэтому мы согласны с утверждением о том, что именно преподаватель «остается центральной фигурой в учебном процессе, обеспечивая индивидуальную поддержку, мотивацию студентов, развитие критического мышления, а также учитывая этические аспекты использования AI» [10, с. 87] и поддерживаем мнение авторов работы [11], считающих, что «при решении задач, требующих участия человеческого интеллекта, искусственный интеллект может быть только вспомогательным инструментом» [11, с. 31].

Приведенные подходы к определению роли и места AI-технологий, рисков и вызовов применения их в обучении показывают, что в современном общем и высшем образовании, в том числе и в подготовке учителей математики и информатики, искусственный интеллект пока еще «не является универсальным решением и не может заменить традиционные методы обучения и преподавателя» [10, с. 87]. Наряду с этим, проходящие ныне процессы цифровой трансформации обуславливают интенсивное внедрение новейших и перспективных AI-технологий в учебный процесс образовательных организаций всех уровней. Поэтому нет оснований сомневаться в том, что эти и другие сквозные технологии могут стать уже в недалеком будущем основными универсальными средствами обучения в условиях единой холистической информационно-образовательной среды.

Подводя итоги нашим рассуждениям, можно с уверенностью предположить, что систематическое использование в подготовке учителей математики и информатики информационного и предметно-дидактического потенциала AI-технологий позволит оптимизировать разработку интеллектуальных обучающих систем, персонализированных репетиторов, автоматизированных систем проверки знаний и генерирования учебных заданий, а также обеспечит создание эффективного организационно-дидактического и управленческого инструментария для проектирования, конструирования, моделирования и производства новых цифровых образовательных ресурсов, обладающих кибернетическими свойствами.

Библиографический список

1. ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки Педагогическое образование. Портал ФГОС ВО. URL: <https://fgosvo.ru/fgosvo/index/24/94> (дата обращения: 17.10.2025).
2. Национальная стратегия развития искусственного интеллекта на период до 2030 г. Утверждена Указом Президента РФ от 10.10.2019 г. № 490. URL: <http://www.kremlin.ru/acts/bank/44731> (дата обращения: 17.10.2025).
3. Методические рекомендации по подготовке кадров по программам педагогического бакалавриата на основе единых подходов к их структуре и содержанию «Ядро высшего педагогического образования». URL: https://legalacts.ru/doc/pismo-minprosveshchenija-rossii-ot-14122_021-n-az-110008-o-napravlenii/?ysclid=laznbrm2b6896844362 (дата обращения: 17.10.2025).
4. Богословский В.И., Аниськин В.Н., Добудько Т.В., Пугач О.И. Подготовка современного учителя информатики на базе «Ядра высшего педагогического образования»: вопросы целеполагания и дидактического проектирования // Научное мнение. 2022. № 12. С. 90–98.
5. Аниськин В.Н., Богословский В.И., Добудько Т.В. Особенности профессиональной подготовки будущих учителей математики в условиях холистичной образовательной среды // Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе: материалы V всероссийской научно-практической конференции. Омск: ОмГПУ, 2025. С. 316–320.
6. Богословский В.И., Аниськин В.Н., Добудько Т.В. Подготовка будущих учителей информатики в области искусственного интеллекта и обработки больших данных // Новые образовательные стратегии в открытом цифровом пространстве: сборник научных статей по материалам международной научно-практической конференции. СПб.: Астерион, 2025. С. 27–30.
7. Аниськин В.Н., Добудько А.В., Добудько Т.В. Подготовка учителя информатики: курс на искусственный интеллект и большие данные // Компьютерные науки и инженерные технологии: материалы междунаучно-технической конференции. Ч. 1. Джизак: Джизакский филиал Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 2025. С. 199–202.

8. Черепова К.Г., Новикова О.В., Мореншильдт И.К. Место и роль искусственного интеллекта на уроках математики // Молодой ученый. 2023. № 45 (492). С. 127–129. URL: <https://moluch.ru/archive/492/107509> (дата обращения: 18.10.2025).
9. Китаева Ф.С. Возможности и ограничения применения технологий искусственного интеллекта в развитии педагогических инструментов персонализации обучения // Финансовые рынки и банки. 2024. № 9. С. 17–20.
10. Оракова М.М., Бориева М.К., Нагаплежева Р.Р., Текуева А.А., Цеева З.А. Интеграция AI-технологий в процесс изучения иностранных языков в вузе // Известия Тульского гос. университета. Педагогика. 2025. № 2. С. 84–89.
11. Апатова Н.В., Гапонов А.И., Смирнова О.Ю. Возможности искусственного интеллекта в обучении высшей математики // Ученые записки Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского. Социология. Педагогика. Психология. 2021. Т. 7 (73). № 2. С. 27–39.

РИСКИ И ВОЗМОЖНОСТИ ЦИФРОВОЙ СРЕДЫ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ У ВТОРОКЛАССНИКОВ

RISKS AND OPPORTUNITIES OF THE DIGITAL ENVIRONMENT FOR THE DEVELOPMENT OF SPATIAL THINKING IN SECOND-GRADERS

М.Ю. Баранова, В.С. Горохова

M.Yu. Baranova, V.S. Gorohova

Математика, начальная школа, цифровая среда, мышление, пространственное мышление, второй класс.

В данной статье описана роль формирования пространственного мышления в начальной школе на уроках математики. В содержании раскрывается подход, при котором использование цифровой среды не искажает, а помогает в восприятии пространственных отношений. Автор не только обращает внимание на возможные риски использования цифровой среды на уроках в младшем школьном возрасте, но и указывает на преимущества сочетания работы с реальными и виртуальными объектами. Приводится пример задания 2 класса, изучение которого можно дополнять цифровыми платформами.

Mathematics, elementary school, digital environment, thinking, spatial thinking, second grade.

This article describes the role of developing spatial thinking in primary school mathematics lessons. It explores an approach in which the use of a digital environment does not distort, but rather enhances, the perception of spatial relationships. The author not only highlights the potential risks of using a digital environment in primary school lessons but also points to the benefits of combining work with real and virtual objects. An example of a second-grade assignment is provided, the study of which can be supplemented by digital platforms.

Пространственное мышление, по определению И.С. Якиманской, представляет собой «вид умственной деятельности, обеспечивающий ориентацию человека в пространстве, оперирование образами пространственных объектов, а также их преобразование в уме» [2]. Это ключевой навык, необходимый для успешного освоения не только геометрии, но и таких предметов, как математика, физика и география. Его недостаточное развитие может приводить к трудностям в усвоении учебного материала, решении практических задач и социальной адаптации.

Особая восприимчивость младшего школьного возраста для развития этого типа мышления объясняется тем, что именно в этот период обучающиеся начинают накапливать важный опыт работы с трехмерными объектами реальности, что позволяет им выполнять мыслительные операции в плоскости [6]. В процессе формирования пространственного мышления младших школьников выделяют две основные группы способностей: визуализация пространственных объектов (умение воспроизводить визуальные образы для установления отношений между элементами) и ориентация в пространстве (умение ориентироваться по местности и работать с картами и схемами) [6].

С другой стороны, исследования Н.Д. Мацько позволяют выделить четыре уровня развития пространственного мышления у детей младшего возраста [3]:

1. Аккумулятивный – накопление и узнавание пространственных признаков и отношений. Дети накапливают разнообразные пространственные представления, учатся узнавать пространственные объекты, их отдельные признаки и отношения, дают название объекту, часто отсутствует соответствие между образом и словом и наоборот.

2. Репродуктивный – воспроизведение представлений памяти. Развитие у детей способности воспроизводить (в представлении, словесно, на рисунке) модели.

3. Конструктивный – самостоятельное конструирование образа на основе сформированных представлений. На основе сформированных пространственных представлений дети создают новые представления и оперируют ими, пользуясь словесным описанием, числовыми данными, рисунками.

4. Интеллектуальный – мысленное оперирование образами, выполнение сложных преобразований (симметрия, перенос, поворот). Для этого этапа характерно умение мысленно перемещать пространственные объекты, находить на рисунке положение фигуры после ее перемещения, вид перемещения, формируется запас пространственных представлений и терминов, позволяющий свободно дифференцировать пространственные признаки и отношения.

Федеральная образовательная программа по математике для 2 класса предполагает умение ориентироваться на плоскости, распознавать и изображать геометрические фигуры (точка, прямая, угол, ломаная, многоугольник), работать с чертежами и схемами, находить периметр [1]. Программа предусматривает ограниченное количество часов на изучение геометрического материала на протяжении всех четырех лет начальной школы (всего 540 часов, из которых непосредственно на «Пространственные отношения и геометрические фигуры» во 2 классе отводится 19 часов) [1].

Для учащихся второго класса, изучающих математику по системе «Учусь учиться» (автор – Л.Г. Петерсон), актуальны первые три уровня [4]. Проанализировав данный учебник для 2 класса, мы пришли к выводу, что заданий, направленных исключительно на развитие пространственного мышления, недостаточно. Большинство упражнений носят репродуктивный характер и не предполагают активного мысленного манипулирования образами. Учителя часто сталкиваются с вопросом: «Как объяснить учащимся своего класса, что значит «мысленно повернуть или перевернуть фигуру» без опоры на наглядность.

Использование цифровой среды может помочь учителю в развитии пространственного мышления второклассников. Но некорректное внедрение цифровой среды сопряжено с серьезными рисками, которые необходимо учитывать:

1. Л.А. Венгер подчеркивал, что развитие пространственного мышления должно начинаться с манипуляций с реальными предметами [5]. Чрезмерное увлечение цифровыми моделями может привести к тому, что у ребенка не сфор-

мируется прочная связь между абстрактным образом и его материальным воплощением.

2. Быстрое и легкое манипулирование объектами на экране может не требовать глубокого анализа их свойств. Ученик может действовать методом проб и ошибок, не задумываясь о сути преобразований [2].

3. Возможно нарушение представления ряда объектов второклассниками в случае некорректной анимационной платформы, которая искажает восприятие наглядной информации.

4. Отсутствие необходимого оборудования в кабинетах, недостаточная цифровая грамотность педагогов и яркие, избыточно анимированные интерфейсы, отвлекающие от сути задачи, также снижают потенциальные преимущества цифровых ресурсов.

Несмотря на риски, грамотное использование цифровой среды обладает значительным потенциалом для компенсации указанных дефицитов. Нами было выделено несколько таких преимуществ.

1. Анимированные модели помогают понять процессы, сложно демонстрируемые на рисунке: симметрия, поворот, масштабирование. Это позволяет сформировать наглядную основу для последующего мысленного преобразования.

2. Задания, в которых ученик может вращать, перемещать, складывать и разбивать геометрические фигуры на экране, превращают абстрактное понятие в объект для экспериментов. Например, составление новых фигур из заданных треугольников и квадратов в цифровом формате позволяет провести десятки проб за минуту.

3. Программа мгновенно оценивает правильность выполнения задания (например, «собери квадрат из этих частей»), что мотивирует ученика и позволяет сразу корректировать действия.

4. Игровые элементы повышают интерес к решению задач, которые в традиционном формате могут показаться скучными.

Для гармоничного развития пространственного мышления, которое будет наиболее эффективным при использовании приемов, стимулирующих познавательную активность и концентрирующих внимание на пространственных представлениях [6], рекомендуем использовать цифровую среду как дополнение к практической деятельности.

Пример 1. Тема: «Оси симметрии»

Практический этап: ученики второго класса получают бумажные фигуры (квадраты, прямоугольники, равнобедренные треугольники). Им предлагается сложить фигуру и проверить, совпадут ли половинки. Физическое действие закрепляет понимание симметрии.

Цифровой этап: интерактивное задание, в котором нужно переместить виртуальную ось симметрии так, чтобы она разделила фигуру на две одинаковые части. Это задание на проверку и точность.

Пример 2. Тема: «Составные фигуры»

Практический этап: ученикам предлагается конструирование фигур из картонных геометрических деталей.

Цифровой этап: использование конструктора или интерактивных тренажеров, в которых нужно собрать заданную фигуру из предложенных элементов. Данное упражнение развивает комбинаторные способности и конструктивный уровень мышления.

Приведем пример конкретного задания для второклассников. В учебнике 2 класса предложены задания на нахождение выхода из лабиринта. Данные задания содержат дополнительные условия, например, обозначения в разных точках лабиринта, указывающие на направление движения относительно перемещающего объекта. Игра помогает развивать логическое мышление, умение планировать и принимать решения, а также навыки ориентации в пространстве. Прохождение лабиринта требует координации движений, мелкой моторики и внимания к деталям. Детям приходится проявлять терпение и настойчивость, чтобы найти правильный путь.

Такая игра способствует развитию умения воспринимать и анализировать пространственные отношения, а победа или успешное прохождение лабиринта вызывает радость и удовольствие, что важно для эмоционального развития ребенка (рис. 1).

Только одна дорога может привести Тигрёнка к Кенгурёнку, Зайчику или Мишке. Что это за дорога? Точка на дороге означает, что Тигрёнок должен повернуть направо, а звёздочка – что он должен повернуть налево.



Рис. 1. Игра-лабиринт, представленная в учебнике для 2 класса

При этом определение правой и левой стороны относительно другого объекта может быть затруднительным по нескольким причинам. Во-первых, правая и левая стороны зависят от точки зрения наблюдателя, т.е. если наблюдатель повернется или изменит позицию, его восприятие сторон изменится. Во-вторых, если объекты или человек меняют свое положение или ориентацию, то определение сторон требует постоянного обновления информации. Таким образом, чтобы точно определить правую или левую сторону относительно другого объекта, необходимо учитывать точку обзора, ориентацию и контекст ситуации.

Поэтому платформы, позволяющие играть в такие лабиринты, позволят не только визуализировать перемещение в пространстве, но и на первом этапе помогают представить поворот при движении, а значит, упростить понимание правой и левой стороны объекта. На сегодняшний день существует большое количество детских бесплатных онлайн-игр, включающих лабиринты, которые позволяют не только развить это умение, но и сформировать соответствующий навык. Примером такой платформы является игра Mylabirint (рис. 2).

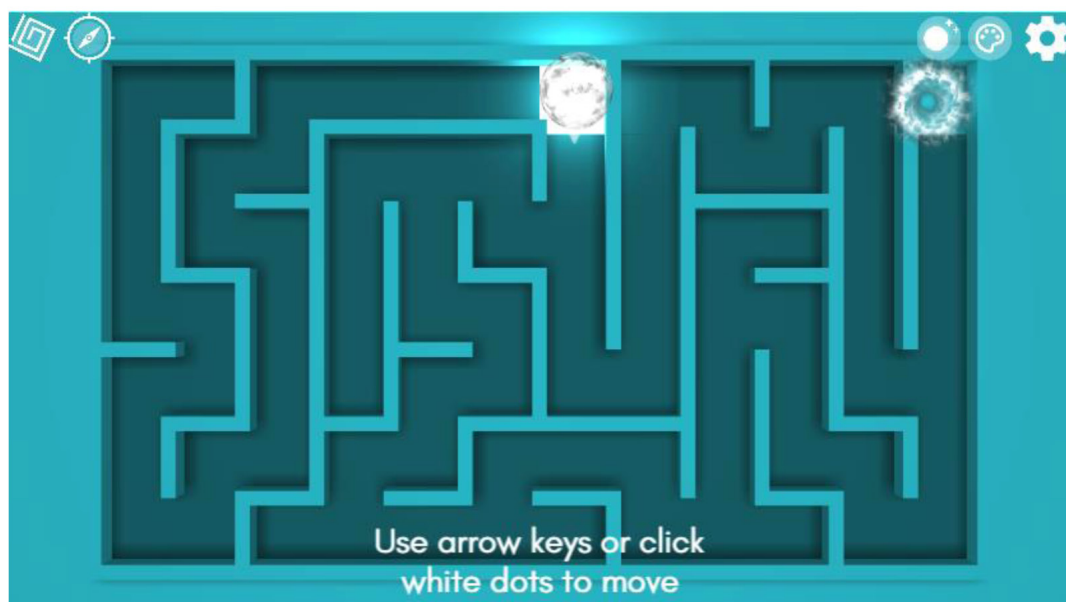


Рис. 2. Пример онлайн-лабиринта

В завершение приведем рекомендации по использованию цифровой среды на уроках математики.

1. Сочетайте упражнения с реальными объектами и цифровые задания.
2. Используйте программы с минималистичным дизайном, чтобы внимание было сконцентрировано на учебной задаче.
3. Обсуждайте с детьми, чем работа с реальным объектом отличается от работы с цифровой моделью.
4. Включайте задания, где нужно предсказать результат преобразования до его выполнения на экране.

Цифровая среда обладает значительным потенциалом для развития пространственного мышления второклассников, особенно в условиях ограниченного количества учебных часов. Она позволяет визуализировать сложные преобразования, обеспечить персонализацию и мгновенную обратную связь. Однако ее эффективность напрямую зависит от грамотного методического сопровождения. Ключевая задача педагога – использовать цифровые ресурсы как мощное дополнение к практической деятельности, а не ее замену, создавая содержание с задачами и играми, стимулирующими познавательную активность [6]. Только при таком сбалансированном подходе возможности цифровой среды будут реализованы в полной мере, а риски – минимизированы.

Библиографический список

1. Федеральная рабочая программа начального общего образования по математике (для 1–4 классов). М., 2025.
2. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика, 1980. 240 с.
3. Мацько Н.Д. Уровни развития пространственного мышления у детей // Актуальные вопросы психологии. 2018. № 4. С. 56–62.
4. Петерсон Л.Г. Математика «Учусь учиться». 2 класс. Часть 1, 2, 3 / Учебник комплекта «Учебник + рабочие тетради». Изд. 5-е, перераб. М.: Ювента, 2013. 80 с.:
5. Венгер Л.А., Холмовская В.В. и др. Диагностика умственного развития дошкольников / под ред. Л.А. Венгера, В.В. Холмовской. М.: Педагогика, 1978. 248 с.
6. Особенности развития пространственного мышления у младших школьников // Вестник науки. 2023. № 5 (54). С. 112–118.

ИНТЕРАКТИВНЫЕ КОНТЕКСТНЫЕ ЗАДАЧИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

INTERACTIVE CONTEXTUAL PROBLEMS FOR FORMING FUNCTIONAL MATHEMATICAL LITERACY

О.Л. Безумова, И.В. Шутрова

O.L. Bezumova, I.V. Shutrova

Функциональная математическая грамотность, интерактивные контекстные задачи, основное общее образование, математическое образование.

Действующими федеральными рабочими программами по математике закреплена необходимость формирования функциональной математической грамотности. Достижению данного результата, по мнению авторов, способствует включение в процесс обучения математике интерактивных контекстных задач. В статье рассмотрены возможности конструктора интерактивных материалов, размещенного на портале «1С-урок», для разработки интерактивных контекстных задач на формирование функциональной математической грамотности, а также представлены примеры таких задач, разработанных авторами публикации.

Functional mathematical literacy, interactive contextual tasks, basic general education, mathematical education.

The current federal working programs on mathematics stipulate the need to form functional mathematical literacy both in classroom and extracurricular activities. According to the authors, the inclusion of interactive contextual tasks in the mathematics learning process contributes to achieving this result. The article examines the capabilities of the interactive materials designer available on the «1С-Urok» portal for developing interactive contextual tasks aimed at forming functional mathematical literacy, and provides examples of such tasks developed by the authors.

Формирование функциональной математической грамотности относится к одной из приоритетных целей, закреплённых действующей федеральной рабочей программой по математике для 5-9 классов (базового и углубленного уровней) [5]. Достижение данной цели предполагает сформированность «умений распознавать математические объекты в реальных жизненных ситуациях, применять освоенные умения для решения практико-ориентированных задач, интерпретировать полученные результаты и оценивать их на соответствие практической ситуации» [5, с. 10].

Общепринятым средством, применяемым для диагностики и формирования функциональной математической грамотности, является практико-ориентированная задача, поставленная в контекстной форме (контекстная задача).

Разновидностью контекстных задач являются интерактивные контекстные задачи. Применение таких задач в учебном процессе позволяет разнообразить форму введения ответа (выбор одного ответа, выбор нескольких ответов, раскрывающийся список и т.д.), способ представления и получения входной информации, а также автоматизировать ввод и проверку ответов [1; 7]. Указанные преимущества

подчеркивают целесообразность использования таких задач в процессе обучения математике для формирования функциональной математической грамотности.

Интерактивные контекстные задачи активно применяются в системе образования для проведения диагностик, направленных на оценку уровня сформированности функциональной математической грамотности, при этом достаточно редко используются для ее формирования в процессе обучения математике. Прежде всего это связано с небольшим количеством интерактивных контекстных задач, представленных в свободном доступе.

Например, разработкой интерактивных контекстных задач занимается Московский центр качества образования (МЦКО), но в силу специфики организации – проведение независимых диагностик, задачи включены в единую диагностическую систему и не могут быть использованы в качестве средств формирования функциональной математической грамотности [7]. Издательством «Просвещение» разработан банк интерактивных контекстных задач, которые предназначены как для диагностики, так и для формирования функциональной математической грамотности, однако бесплатное использование задач данного банка доступно только в деморежиме на 14 дней [6].

Все вышеперечисленное подчеркивает необходимость разработки интерактивных контекстных задач, направленных не только на диагностику, но и на формирование функциональной математической грамотности. Одним из возможных сервисов создания таких задач является конструктор интерактивных материалов, размещенный на портале «1С урок»: <https://urok.1c.ru/constructor/>.

В качестве примеров рассмотрим некоторые из разработанных нами интерактивных контекстных задач для формирования функциональной математической грамотности.

Пример 1. В контексте интерактивной задачи «Экспедиция в Арктику» [4] описана профессиональная ситуация, характерная для людей, занимающихся исследовательской деятельностью. Персонажу данной задачи необходимо подготовить презентацию для представления результатов исследования, проведенного в ходе экспедиции «Арктический плавучий университет» (рис. 1).

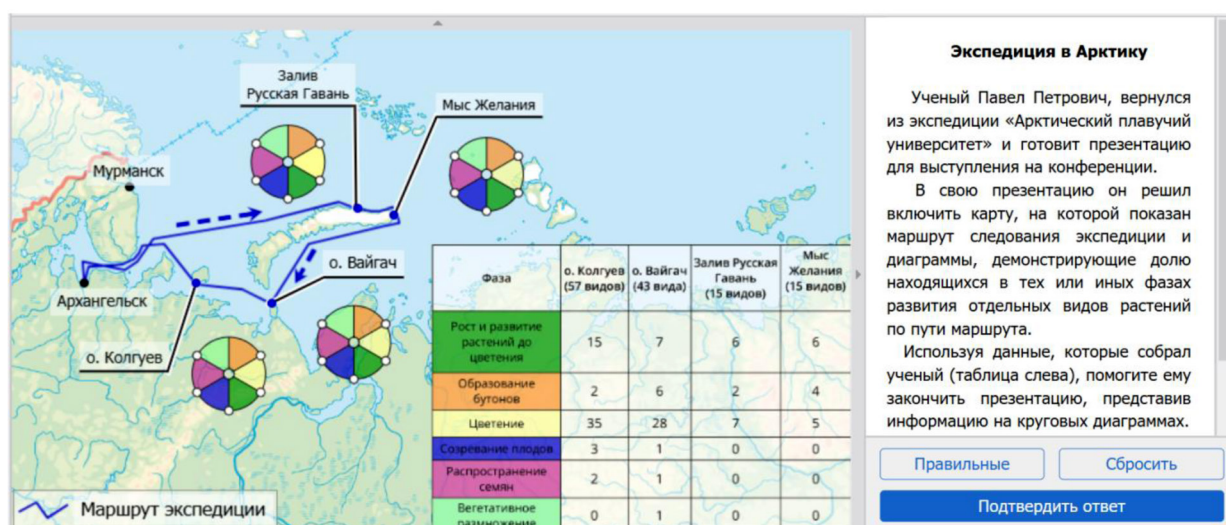


Рис. 1. Интерактивная контекстная задача «Экспедиция в Арктику»

Для успешного решения задачи обучающимся необходимо считать данные с таблицы; для каждого из объектов по маршруту экспедиции найти процент растений, находящихся в той или иной фазе развития; изменяя размеры секторов круговых диаграмм, размещенных на карте, зафиксировать полученные результаты. Соответствие сектора фазе развития растений фиксируется цветом, что важно для реализации возможности автоматической проверки результата.

В результате решения интерактивной контекстной задачи обучающийся автоматически получает обратную связь от системы в виде оценки/отметки/количестве набранных баллов.

Автоматическая проверка может быть настроена по-разному, в зависимости от планируемой образовательной функции интерактивной контекстной задачи. Если основная функция задачи – обучающая, имеет смысл предоставить обучающимся бесконечное количество попыток без ограничения по времени, а также настроить возможность просмотра правильности отдельных элементов ответа. На рисунке 2 зеленым цветом отмечены диаграммы, которые построены верно, и красным, которые построены неверно.

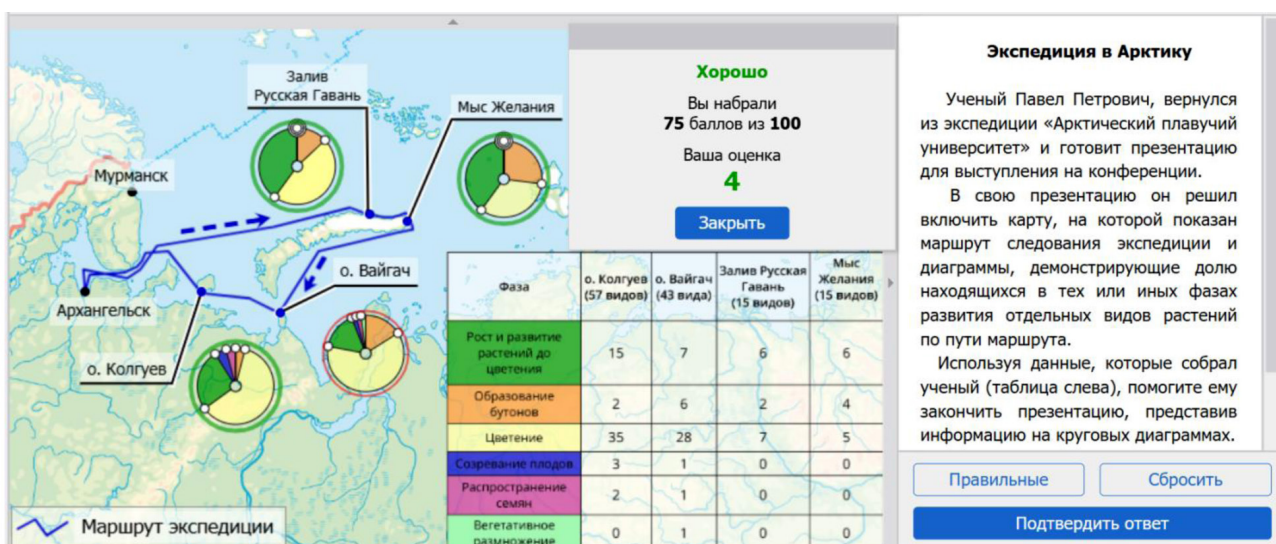


Рис. 2. Результат автоматической проверки решения задачи

Если задача используется для диагностики сформированности функциональной математической грамотности, функционал конструктора позволяет ограничить время решения и количество попыток, которое отводится на решение задачи.

Данная интерактивная контекстная задача отнесена к теме «Круговые и столбчатые диаграммы», изучаемой в 6 классе, поскольку ее решение требует сформированности умений находить процент от числа и строить диаграммы по массивам значений.

Пример 2. Контекст интерактивной задачи «Часовые пояса» [3] (рисунок 3) описывает типовую жизненную ситуацию согласования времени встречи с учетом часовых поясов.

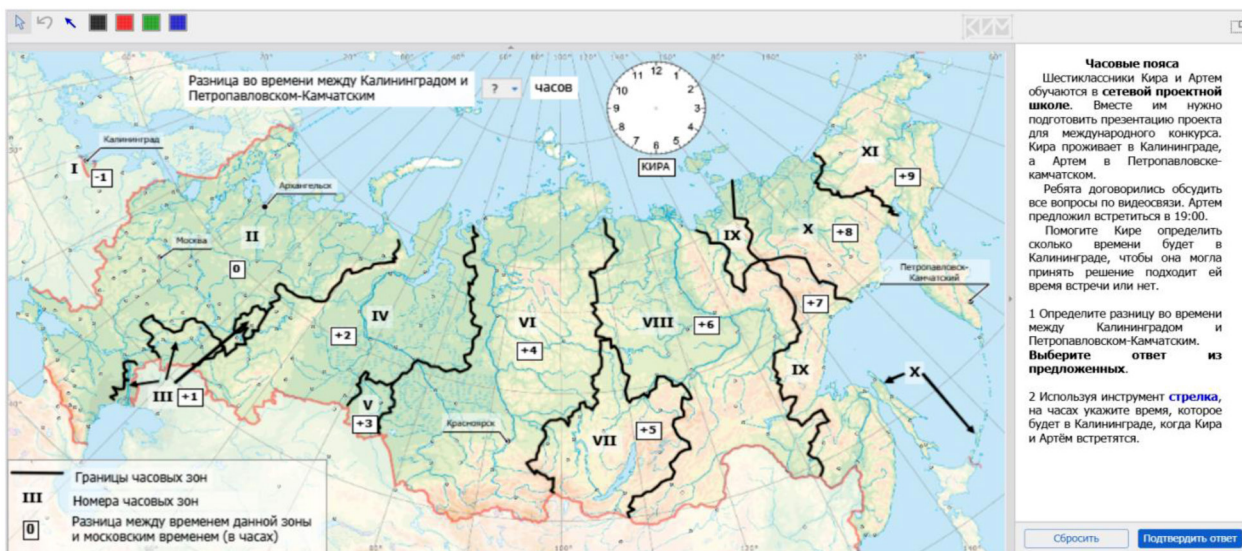


Рис. 3. Интерактивная контекстная задача «Часовые пояса»

Для решения задачи обучающимся необходимо найти в контексте информацию о местах жительства персонажей; используя карту, определить часовой пояс и разницу между каждым из часовых поясов и московским временем; рассчитать разницу во времени между часовыми поясами, в которых проживают персонажи задачи, и выбрать необходимое значение из раскрывающегося списка; определить время, которое будет у Киры на момент встречи, и указать его на часах, нарисовав соответствующие стрелки.

Данная задача может быть включена в процесс обучения математике при изучении в 6 классе темы «Арифметические действия с положительными и отрицательными числами».

Пример 3. В контексте представленной на рисунке 4 задачи описана жизненная ситуация изготовления кормушки для птиц из фанеры. Персонажу задачи необходимо определить размеры листа фанеры таким образом, чтобы уменьшить количество отходов [2].

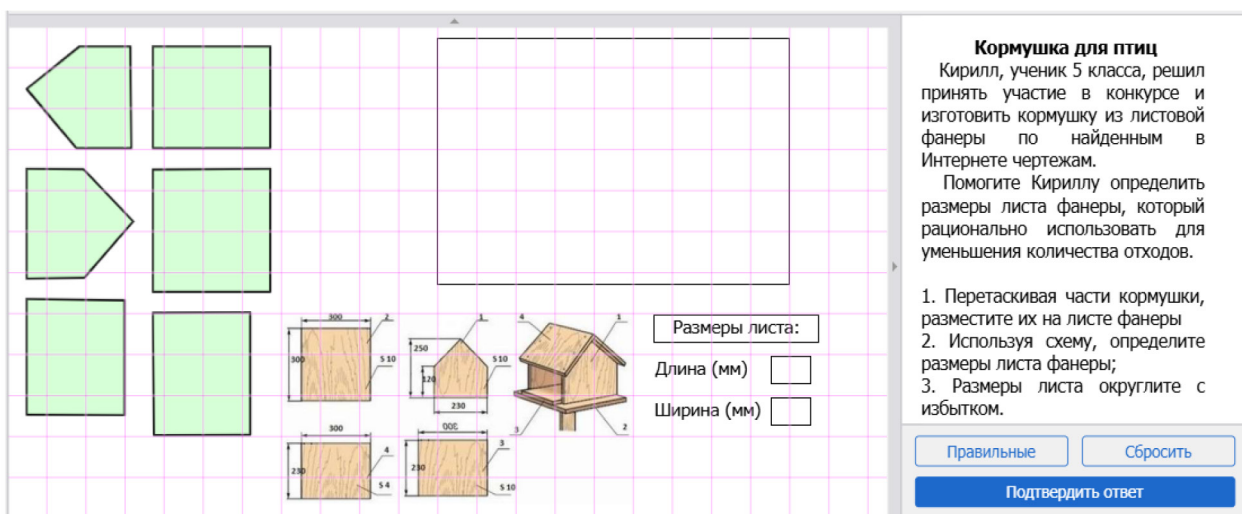


Рис. 4. Интерактивная контекстная задача «Кормушка для птиц»

Для решения задачи обучающимся необходимо разместить детали кормушки на листе фанеры; рассчитать минимальные размеры листа для изготовления кормушки; округлить полученный результат с избытком и указать его на рабочем поле. На основе предметных результатов, необходимых для решения задачи, ее можно отнести к теме «Округление натуральных чисел», изучаемой в 5 классе.

Подводя итог, отметим, что применение интерактивных контекстных задач в учебном процессе способствует формированию функциональной математической грамотности, расширяет возможности для внутришкольной диагностики сформированности функциональной математической грамотности, приводя форму ее проведения в соответствие национальным диагностикам.

Библиографический список

1. Демидова М.Ю., Камзеева Е.Е. Особенности цифрового инструментария для оценки учебных достижений по физике // Педагогические измерения. 2020. № 1. С. 10–15.
2. Интерактивная контекстная задача «Кормушка для птиц». URL: <https://urok.1c.ru/share/kim/77de38d212160de50d78ac8076cf5572/>.
3. Интерактивная контекстная задача «Часовые пояса». URL: <https://urok.1c.ru/share/kim/e1030bd20743df2c11b9b1f71eac32a9/>.
4. Интерактивная контекстная задача «Экспедиция в Арктику». URL: <https://urok.1c.ru/share/kim/c29a571f047a5c0815a751d99ed0fb00/>.
5. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень). URL: <https://edsoo.ru/rabochie-programmy/>.
6. Функциональная грамотность. Банк заданий. URL: <https://media.prosv.ru/func/lk> (дата обращения: 05.11.2025).
7. Шабанова М.В., Безумов А.А., Серпухова У.В. Интерактивные задания на использование симуляторов цифровых инструментов в системе средств диагностики математической грамотности: опыт Москвы // Педагогические измерения. 2023. № 3. С. 121–129.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В ВУЗЕ: ВЫБОРОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ С PYTHON

MATHEMATICAL STATISTICS AT THE UNIVERSITY: SAMPLE CHARACTERISTICS WITH PYTHON

М.С. Белов

M.S. Belov

Математическая статистика, информационные технологии в обучении, Python, анализ данных, выборочные характеристики, практическое применение, автоматизация.

Статья посвящена роли математической статистики как важного инструмента научного анализа и принятия решений. Особое внимание уделено базовым статистическим показателям – среднему, медиане, моде и дисперсии – и их практическому применению. Подчеркивается значение языка программирования Python и его библиотек (pandas, NumPy, matplotlib) в автоматизации анализа данных. Приведены примеры расчетов и визуализации, демонстрирующие, как статистика используется в реальных задачах. Статистика представлена как универсальный и необходимый инструмент в современных прикладных и научных областях.

Mathematical statistics, information technology in education, python, data analysis, sample characteristics, practical application, automation.

The article is devoted to the role of mathematical statistics as an important tool for scientific analysis and decision-making. Special attention is paid to the basic statistical indicators – average, median, mode and variance – and their practical application. The importance of the Python programming language and its libraries (pandas, NumPy, matplotlib) in automating data analysis is emphasized. Examples of calculations and visualizations are provided to demonstrate how statistics are used in real-world tasks. Statistics are presented as a universal and necessary tool in modern applied and scientific fields.

Вопрос применения математической статистики в разных областях науки и техники является важным аспектом современной исследовательской работы. Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, анализа, интерпретации и представления данных. Ее основная задача – на основании имеющихся данных делать обоснованные выводы о случайных явлениях и закономерностях [1]. Одним из основных элементов математической статистики является работа с вероятностными распределениями, которые помогают исследовать случайные процессы и явления. Согласно Джону Тьюки, одному из пионеров в области статистики, «статистика – это искусство собирать, анализировать и представлять данные» [2]. Это утверждение подчеркивает важность статистики как дисциплины, обеспечивающей методологическую основу для научных выводов.

Математическая статистика в контексте науки развивается с учетом новых методов и подходов. На сегодняшний день использование больших данных (Big Data) является одной из наиболее значимых областей применения статистики.

Специалисты в области статистики, такие как Джеймс Д. Уоткинс, утверждают, что математическая статистика является «необходимым инструментом для эффективного анализа больших объемов данных» [3]. Big Data и математическая статистика применяется в научных исследованиях, особенно в таких областях, как социология, экономика, медицина, психология и биология. Например, в медицинских исследованиях статистические методы часто используются для анализа клинических испытаний и оценки эффективности различных методов лечения. Как утверждают исследователи Эдмунд А. Гехан и Норин А. Лемак [4], «статистические методы позволяют исследователям убедиться в том, что результаты клинических испытаний не являются случайными и что наблюдаемые эффекты действительно являются значимыми».

Одной из главных целей изучения статистики в вузе является развитие у студентов способности применять количественные методы для принятия решений и обоснования выводов. Студенты учатся вычислять ключевые статистические показатели, такие как **среднее значение, медиана, мода, дисперсия**, и использовать их для анализа данных [5].

Современная статистика тесно связана с одним из самых популярных инструментов для решения статистических задач – языком программирования Python. Согласно мнению Бай Хунцюань и соавторов [6], Python является «крупнейшим и наиболее эффективным инструментом для обработки и анализа данных в рамках статистики и науки о данных». Это объясняется наличием множества библиотек, таких как **NumPy, Pandas, Matplotlib, Scikit-learn, Scipy**, которые позволяют не только обрабатывать данные, но и строить сложные модели и проводить анализ данных на основе различных статистических методов.

Использование Python дает следующие преимущества по сравнению с традиционными (ручными) методами:

- **Скорость:** Обработка даже больших массивов данных занимает доли секунды.

- **Точность:** Исключаются ошибки округления и вычислений, характерные для ручных расчетов.

- **Автоматизация:** Возможность повторного анализа новых данных без переписывания формул.

- **Визуализация:** Простая интеграция с библиотеками визуализации (например, **matplotlib, seaborn**) для графического анализа данных.

Пример использования Python в статистике можно рассмотреть на примере библиотеки **Pandas** [7], которая позволяет эффективно управлять большими наборами данных. Одна из ключевых особенностей этой библиотеки – ее способность работать с различными типами данных, такими как таблицы, временные ряды и другие форматы данных, что позволяет быстро и без ошибок выполнять операции с данными. Например, с использованием **Pandas** можно легко рассчитать среднее значение, медиану, дисперсию, а также строить графики для визуализации распределений и взаимосвязей данных.

Рассмотрим более подробно основные формулы:

Характеристика	Определение и формула	Пример (вручную)	Реализация на Python
1	2	3	4
Среднее арифметическое (mean)	<p>Сумма всех элементов, деленная на их количество. Это один из самых распространенных способов описания «центра» данных.</p> $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	<p>Дано: оценки студента по предмету: 70, 80, 90, 60, 100</p> $\bar{x} = \frac{70 + 80 + 90 + 60 + 100}{5} = 80$	<pre>import pandas as pd # Создаем примерный DataFrame data = {'values': [70, 80, 90, 60, 100]} df = pd.DataFrame(data) # Среднее mean = df['values'].mean() # Результат: Среднее: 80</pre>
Медиана (median)	<p>Число, которое находится посередине отсортированного ряда данных. Если количество элементов четное, берется среднее двух центральных значений</p>	<p>Массив: 60, 70, 80, 90, 100 Количество элементов: 5 (нечетное) → медиана = 80 Если массив: 60, 70, 80, 90 Количество элементов: 4 → медиана = $\frac{(70+80)}{2} = 75$</p>	<pre>import pandas as pd data = {'values': [70, 80, 90, 60, 100]} df = pd.DataFrame(data) # Медиана median = df['values'].median() # Результат: Медиана: 80</pre>
Мода (mode)	<p>Значение, которое встречается чаще всего в наборе данных.</p>	<p>Массив: 70, 80, 90, 80, 100 Значение 80 встречается дважды → мода = 80</p>	<pre>import pandas as pd data = {'values': [70, 80, 90, 80, 100]} df = pd.DataFrame(data) # Мода mode = df['values'].mode() # Результат: Мода: 80</pre>
Дисперсия (variance)	<p>Показывает, насколько сильно элементы данных отклоняются от среднего. Чем больше дисперсия, тем более «разбросаны» данные.</p> $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	<p>Массив: 70, 80, 90, 60, 100 Среднее = 80 Отклонения: $(-10)^2, 0^2, 10^2, (-20)^2, 20^2 \rightarrow 100, 0, 100, 400, 400$ Сумма: 1000 Дисперсия: $\sigma^2 = \frac{1000}{5-1} = 250$</p>	<pre>import pandas as pd data = {'values': [70, 80, 90, 60, 100]} df = pd.DataFrame(data) # Дисперсия variance = df['values'].var() # Результат: Дисперсия: 250</pre>

1	2	3	4
Стандартное отклонение (Standard Deviation, std)	<p>Показывает, насколько сильно значения отклоняются от среднего. Это одна из самых важных мер рассеивания данных.</p> $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ <p>Малое значение → данные сконцентрированы вокруг среднего Большое значение → данные сильно разбросаны</p>	<p>Массив: 70, 80, 90, 60, 100 Дисперсия: 250 Отклонение: $\sqrt{250} \approx 15.811$</p>	<pre>import pandas as pd data = {'values': [70, 80, 90, 60, 100]} df = pd.DataFrame(data) # Стандартное отклонение std_dev = df['values'].std() # Результат: Стандартное отклонение: 15.8113</pre>
Размах (Range)	<p>Разница между максимальным и минимальным значениями. Простая мера разброса. $Размах = \max(x) - \min(x)$</p>	<p>Массив: 70, 80, 90, 60, 100 Размах = 100 - 60 = 40</p>	<pre>import pandas as pd data = {'values': [70, 80, 90, 60, 100]} df = pd.DataFrame(data) # Размах range = df['values'].max() - df['values'].min() # Результат: Размах: 40</pre>
Коэффициент асимметрии (Skewness)	<p>Показывает, насколько распределение скошено влево или вправо от среднего.</p> $\alpha_1 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} * \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^3$ <p>Где: – n – количество элементов – \bar{x} – среднее значение – s – выборочное стандартное отклонение – x_i – элементы массива <i>Асимметрия > 0 → хвост справа (положительная)</i> <i>Асимметрия < 0 → хвост слева (отрицательная)</i> <i>Асимметрия ≈ 0 → симметричное распределение</i></p>	<p>Массив: 70, 80, 90, 60, 100 Среднее: 80 Отклонение: ≈ 15.811 Найдем для каждого числа значение $\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^3$ 70: -0.253 80: 0 90: 0.253 60: -2.024 100: 2.024 Сумма кубов: –0.253+0+0.253–2.024+2.024=0 Подставим в формулу: $\alpha_1 = \frac{5}{(5-1)(5-2)} * 0 = 0$ Коэффициент асимметрии = 0, распределение симметричное относительно среднего</p>	<pre>from scipy.stats import skew # Асимметрия skewness = skew(df['values']) # Результат: Асимметрия: 0</pre>

1	2	3	4
Эксцесс (Kurtosis)	<p>Показывает, насколько «остро» или «плоско» выглядит распределение по сравнению с нормальным.</p> $\alpha_2 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} * \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$ <p>Где: – n – количество элементов – \bar{x} – среднее значение – s – выборочное стандартное отклонение – x_i – элементы массива Эксцесс $> 0 \rightarrow$ остроконечное распределение (лептокуртическое) Эксцесс $< 0 \rightarrow$ плоское распределение (платикуртическое) Эксцесс $\approx 0 \rightarrow$ близко к нормальному</p>	<p>Массив: 70, 80, 90, 60, 100 Среднее: 80 Отклонение: ≈ 15.811 Найдем для каждого числа значение $\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4$ 70: 0.159 80: 0 90: 0.159 60: 2.56 100: 2.56 Сумма z^4: $0.159+0+0.159+2.56+2.56=5.438$ Подставим в формулу: $\alpha_2 = \frac{5 * 6}{4 * 3 * 2} * 5.438 - \frac{3 * 16}{3 * 2}$ $= -1.202$ – α_2: плоское распределение (платикуртическое). – Данные распределены более равномерно, чем в нормальном распределении – нет выраженного «пика» в центре.</p>	<pre>from scipy.stats import kurtosis # Эксцесс kurt = kurtosis(df['values']) # Результат: Эксцесс: -1.202</pre>

Ниже показан пример, объединяющий указанные метрики:

Задача: Анализ времени ожидания клиентов в ресторане.

Ресторан хочет улучшить обслуживание и сократить время ожидания клиентов. Сотрудники записывают время ожидания клиентов в минутах, и теперь ресторан хочет проанализировать данные, чтобы увидеть, как варьируется время ожидания.

Данные (время ожидания клиентов в ресторане в минутах):

[12, 15, 18, 10, 20, 30, 22, 17, 19, 12, 14, 18, 25, 22, 21, 17, 14, 15, 19, 30]

Найти: среднее, медиану, моду, дисперсию, размах, стандартное отклонение, коэффициент асимметрии.

Пример на Python (рис. 1).

```
import pandas as pd
import statistics
from scipy.stats import skew, kurtosis

# Время ожидания клиентов в ресторане (в минутах)
wait_times = [12, 15, 18, 10, 20, 30, 22, 17, 19, 12, 14, 18, 25, 22,
              21, 17, 14, 15, 19, 30]
data = {'values': wait_times}
df = pd.DataFrame(data)

# Статистические расчёты
mean = df['values'].mean()
median = df['values'].median()
mode = df['values'].mode().tolist()
variance = df['values'].var()

std_dev = df['values'].std()
range = df['values'].max() - df['values'].min()
skewness = skew(df['values'])
kurt = kurtosis(df['values'])

# Вывод результатов
print(f"Среднее время ожидания: {mean} минут")
print(f"Медиана времени ожидания: {median} минут")
print(f"Мода (список) времен ожидания: {mode} минут")
print(f"Дисперсия времени ожидания: {round(variance, 0)} минут")
print(f"Стандартное отклонение времени ожидания: {round(std_dev, 0)} минут")
print(f"Размах времени ожидания: {range} минут")
print(f"Асимметрия времени ожидания: {skewness}")
print(f"Экссесс времени ожидания: {kurt}")
```

Рис. 1. Код решения задания

Вывод данных (рис. 2).

```
Среднее время ожидания: 18.5 минут
Медиана времени ожидания: 18.0 минут
Мода (список) времени ожидания: [12, 14, 15, 17, 18, 19, 22, 30] минут
Дисперсия времени ожидания: 30.0 минут
Стандартное отклонение времени ожидания: 5.0 минут
Размах времени ожидания: 20 минут
Асимметрия времени ожидания: 0.66
Экссесс времени ожидания: -0.07
```

Рис. 2. Результат

По полученным данным можно сделать следующие выводы:

Среднее время ожидания – 18,5 минут. Посетитель может ожидать, что в среднем обслуживание начнется примерно через 19 минут после прибытия. Это не очень быстро, но и не критично долго.

Медиана – 18,5, что говорит о почти симметричном распределении и подтверждает среднюю оценку.

Мода не выражена – нет ярко выраженного наиболее частого значения. Это означает, что время ожидания сильно варьируется, и нет четко выраженного самого частого значения.

Дисперсия: 30 минут. Это показатель разброса значений. В данном случае он говорит о достаточно заметной вариативности в обслуживании.

Стандартное отклонение 5 мин – умеренный разброс. Посетитель будет от 13 до 24 минут.

Размах – 20 минут (от 10 до 30 минут) – существенная разница между минимальным и максимальным значениями. Данный показатель показывает, что один гость может быть обслужен через 10 минут, а другой – через полчаса.

Асимметрия – 0,66 (положительная). Распределение немного смещено вправо, то есть в сторону длинных ожиданий. Это значит, что чаще бывают средние или короткие ожидания, но иногда – резко очень долгие.

Экссесс (вытянутость): -0,07. Значение около нуля указывает на то, что время ожидания близко к нормальному – большинство посетителей ждут примерно одинаково.

Использование математической статистики в сочетании с современными цифровыми технологиями – особенно языком программирования Python и его библиотеками – значительно повышает эффективность изучения и применения статистических методов. В отличие от традиционного подхода, основанного преимущественно на ручных расчетах и теоретических заданиях, практико-ориентированное обучение с использованием реальных задач и автоматизированного анализа позволяет студентам глубже понять статистические показатели, осознать их смысл и увидеть практическую ценность.

Рассмотренный пример анализа времени ожидания клиентов в ресторане наглядно демонстрирует, как базовые статистические характеристики помогают интерпретировать реальные данные, выявлять закономерности и делать обоснованные выводы. Благодаря Python студенты могут быстро производить расчеты, устраняя рутинные ошибки и сосредоточиваясь на интерпретации результатов. Это позволяет не только развивать аналитическое мышление, но и формировать ключевые навыки для будущей профессиональной деятельности в разных научных областях.

Таким образом, сочетание математической статистики с современными программными средствами и прикладными задачами не только облегчает процесс обучения, но и делает его более наглядным, мотивирующим и практически значимым. Статистика из абстрактной дисциплины превращается в универсальный и необходимый инструмент для анализа окружающего мира и принятия обоснованных решений на основе данных.

Библиографический список

1. Wikipedia: Википедия. Математическая статистика // Википедия: свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Математическая_статистика (дата обращения: 10.08.2025).

2. Tukey J.W., Tukey J.W. Exploratory Data Analysis. Reading (Mass.): Addison-Wesley, 1977. 656 p.
3. Watkins J. D. Watkins J. D. The Importance of Statistical Methods in Data Science // Journal of Data Science. 2015. Vol. 13, No 1. P. 75–89.
4. Гехан Е.А., Лемак Н.А. Statistics in Medical Research: Developments in Clinical Trials. New York: Springer, 1994. DOI:10.1007/978-1-4615-2518-9
5. Теория вероятностей и математическая статистика рабочая программа дисциплины (модуля). URL: <https://ump.vogu35.ru/obrazovatelnye-programmy/bakalavriat/ochnaya-forma-obucheniya?task=download.send&id=57924&catid=1973&m=0>, свободный. (дата обращения: 07.04.2025).
6. Bai H., Wang X., Zhao L. Effects of the Problem-Oriented Learning Model on Middle School Students' Computational Thinking Skills in a Python Course // Frontiers in Psychology. 2021. Vol. 12. Article 771221. URL: <https://www.frontiersin.org/journals/psychology/articles/10.3389/fpsyg.2021.771221/full> (дата обращения: 05.09.2025).
7. McKinney W. Data Structures for Statistical Computing in Python // Proc. of the 9th Python in Science Conference. 2010. P. 51–56. DOI: 10.25080/Majora-92bf1922-00a.

НЕКОТОРЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИИ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ – БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

SOME DIRECTIONS OF ORGANIZING HEURISTIC ACTIVITIES OF STUDENTS – FUTURE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

О.А. Борзенкова, Л.В. Лысогорова

O.A. Borzenkova, L.V. Lysogorova

Учитель начальных классов, педагогическое направление, методические умения, эвристическая деятельность студентов, структура эвристической деятельности, методико-математические задания.

Статья демонстрирует авторский подход к проблеме организации эвристической деятельности будущих педагогов начальной школы как важного вектора профессиональной подготовки в вузе. Обоснована структура и основные характеристики такой деятельности. Перспективным направлением развития названной деятельности у студентов является включение в образовательный процесс методико-математических заданий.

Primary school teacher, pedagogical direction, methodological skills, heuristic activities of students, structure of heuristic activities, methodological and mathematical tasks.

The article demonstrates the author's approach to the problem of organizing the heuristic activities of future primary school teachers as an important vector of professional training at the university. The structure and main characteristics of such activities are substantiated. A promising direction for developing these activities among students is the inclusion of methodological and mathematical tasks in the educational process.

Проблема обеспечения качественной подготовки студентов разных направлений и профилей – актуальна с теоретической и методической точки зрения. Модель будущего учителя к осуществлению педагогической деятельности складывается из сформированности значимых компетенций, методических умений и личностных качеств. Обозначим аспект развития эвристической деятельности студентов как важного методического умения.

Анализ актуальных исследований (труды В.И. Андреева [1], Д.Ю. Мурмиловой [5], О.К. Огурцовой [6], Д. Пойа [7], В.Н. Пушкина [8], Е.Е. Семенова [9], Е.И. Скафа [10], Ю.Г. Тымко [11], А.В. Хуторского [12] и др.) выявил недостаточное обоснование методической линии организации и развития такой деятельности у студентов.

Цель статьи – показать некоторые методические направления организации эвристической деятельности будущих учителей начальной школы.

Эвристическая деятельность студентов организовывается преподавателем с использованием разнообразных эвристических средств и технологий; направлена на создание новой системы действий по поиску неизвестных ранее закономерностей и процессов, обеспечивающие познавательную и творческую

деятельность, в результате которой «студенты активно овладевают знаниями и развивают эвристические умения, формируют познавательные мотивы и организационные качества» (Ю.Г. Тымко).

Эвристическая деятельность включает триаду взаимосвязанных компонентов: мотивационный (побуждение к деятельности) ↔ деятельностный (выполнение действий для достижения цели) ↔ личностный (стремление самостоятельно получить новые знания с учетом потребностей, интересов, жизненного опыта и др.) ↔ оценочный (анализ и корректировка полученных результатов).

В структуре эвристической деятельности при решении задачи Г. Уоллес выделяет следующие стадии: подготовка (поиск необходимой информации) ↔ инкубационный период (период непроизвольной работы над задачей) ↔ озарение (нахождение алгоритма или способа решения задачи) ↔ научное знание и практическая проверка результата (корректировка решения, доказательство правильности) [13].

Важные характеристики эвристической деятельности:

- учебно-познавательная деятельность (Ю.Г. Тымко);
- разновидность человеческого ума (В.Н. Пушкин);
- самостоятельность в овладении знаниями и опытом творческой деятельности (А.В. Хуторской);
- «открытие новых способов действий» и др.

Вовлечение студентов в творческую деятельность способствует саморазвитию и самоорганизации в процессе решения задач будущей педагогической деятельности. Вовлекать студентов в эвристическую деятельность необходимо не только для их творческого и умственного развития, но и для того, чтобы будущие педагоги могли организовать такую деятельность на уроках в начальной школе.

Организация и развитие эвристической деятельности студентов для обучения младших школьников математике – показатель высшего уровня сформированности методико-математической компетентности педагога (О.А. Борзенкова).

Сам по себе учитель начальных классов – творческая, интегративная и информационная личность. Интегративный (творческий) компонент занимает должное место в методико-математической подготовке будущего учителя начальной школы; студент владеет основами педагогического мастерства, рационально применяет образовательные результаты в различных научных областях [2].

Будущий педагог, организуя творческую деятельность детей, осознает смысл и цели образовательной деятельности (любое предметное содержание), способен «видеть индивидуальные возможности детей и организовать работу по их развитию» с учетом закономерностей, умеет распознавать «детские открытия», владеет различными формами организации индивидуальных творческих работ обучающихся, способен к личностному росту и др. (В.А. Мижериков). Эвристическая деятельность предполагает наличие заданий, характерных для научного самостоятельного исследования, и направлена на «открытие лично значимых для ученика знаний» (А.К. Артемов).

Результативным средством организации и развития эвристической деятельности у студентов является включение в образовательный процесс комплекса

специальных заданий. Назовем их методико-математические задания (имеют интегративный характер, основаны на теоретических положениях математики, методики, педагогики, психологии).

Приведем примеры методико-математических заданий по организации эвристической деятельности будущих учителей начальных классов.

Пример 1.

Формулировка задания. В развитии эвристической деятельности младших школьников педагогами выделяются три уровня (А.К. Артемов):

первый – педагог сам ставит проблему и намечает пути ее решения, само решение (его алгоритм) предстоит найти младшим школьникам;

второй – учитель ставит проблему, но пути, методы решения, также само решение ученику предстоит найти самостоятельно;

третий – дети сами ставят проблему, осуществляют поиск ее решения, находят само решение (алгоритм).

Приведите по два задания математического содержания на каждый этап; тема и класс выбирается самостоятельно студентом (математика в начальных классах). Какие ошибки могут допустить младшие школьники? Обоснуйте их. Какие образовательные компьютерные ресурсы помогут детям избежать ошибки? Назовите два ресурса.

Бланк выполнения.

Студенты могут оформить ответ в виде словесного описания или показать в таблице (пример заполнения таблицы рассмотрен ниже).

Уровни развития эвристической деятельности младших школьников	Формулировка задания (указать класс, тему)	Образовательные информационные ресурсы
Первый	1. 2.	1. 2.
Второй	1. 2.	
Третий	1. 2.	
Ошибки, их обоснование	1. 2.	

Критерии оценивания.

Требования к выполнению задания	Приведены по два примера математического содержания на каждый этап организации эвристической деятельности обучающихся; обоснованы ошибки детей; продемонстрированы два ресурса, способствующие предупреждению ошибок. Ответ оформлен в виде словесного описания или представлен в таблице
Максимальное количество баллов	10 баллов
Самооценка студентов	
Рекомендации преподавателя	

Примечание.

В Самарском государственном социально-педагогическом университете на факультете начального образования студенты обучаются по образовательной программе, предусматривающей сдвоенный профиль подготовки. Таким образом, выпускники готовы определять результативные направления и осуществлять педагогическую деятельность в области дошкольного и начального образования, также в предметных областях общего образования («Информатика», «Иностранный язык»).

Предложенное задание можно рассматривать в рамках дисциплины «Методика обучения математике младших школьников», направленность (профиль) «Начальное образование» и «Информатика».

Пример 2.

Формулировка задания. Обоснуйте методические особенности формирования вычислительных умений у детей 6-7 лет (разные образовательные программы). Пропишите методические приемы организации эвристической деятельности детей старшего дошкольного и младшего школьного возраста. На каждый прием подберите или разработайте одно задание для старших дошкольников и одно задание для младших школьников. Сформулируйте и запишите основные требования к таким заданиям (2-3 требования). Ответ оформите в таблице.

Бланк выполнения.

Методический прием	Формулировка задания		Требования к творческим заданиям
	старшие дошкольники	младшие школьники	
Перенос ранее усвоенных знаний в новые условия	1.	1.	1. 2. 3.
Переключение на обратный ход мыслей при выполнении взаимообратных действий	1.	1.	
Перекодирование информации	1.	1.	
Видение проблемы в заданной ситуации: прием преобразования тренировочных заданий в творческие	1.	1.	
Альтернативность мышления: умение перебирать всевозможные варианты выполнения исходного задания	1.	1.	

Критерии оценивания.

Требования к выполнению задания	Обоснованы методические особенности формирования вычислительных умений у детей 6–7 лет; на каждый прием приведены по одному примеру заданий для старших дошкольников и обучающихся начальной школы. Прописаны 2–3 требования к творческим заданиям. Ответ представлен в таблице
Максимальное количество баллов	15 баллов
Самооценка студентов	
Рекомендации преподавателя	

Примечание. Пример задания можно рассматривать на дисциплине «Методика обучения математике младших школьников», направленность (профиль) «Дошкольное образование» и «Начальное образование».

Организация эвристической деятельности будущих учителей – важное направление сформированности комплекса значимых компетенций у студентов. Грамотно организованная работа преподавателем (включение специальных методико-математических заданий в рамках освоения методических дисциплин) способствует развитию такой деятельности у будущих педагогов, совершенствованию методико-математической компетентности, возможности организации и управления эвристической деятельности студентом на уроках в начальных классах.

Библиографический список

1. Андреев В.И. Педагогика: учебный курс для творческого саморазвития / под ред. А.И. Андреева. Казань: Центр инновационных технологий, 2012. 608 с.
2. Артемов А.К., Тихонова Н.Б. Основы методического мастерства учителя в обучении математике младших школьников: учебное пособие для учителей и студ. ф-та педагогики и методики начального образования. Самара: СГПУ, 1999. 118 с.
3. Лысогорова Л.В., Борзенкова О.А. Организация методической деятельности будущих педагогов начального образования // Управление качеством образования: проблемы и перспективы: материалы Всерос. научно-практ. конф. Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2022. 225 с. С. 10–14.
4. Мижериков В.А., Ермоленко М.Н. Введение в педагогическую деятельность. М.: Педагогическое общество России, 2002. 268 с.
5. Мурмилова Д.Ю., Скафа Е.И. Этапы организации эвристической деятельности студентов-математиков в процессе обучения решению задач по линейной алгебре // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты-2015: материалы Международной научно-практической интернет-конференции (Донецк, 25 мая 2015 г.). Донецк, ДонНУЭТ, 2015. С. 112–113.
6. Огурцова О.К. Частные эвристики как условие включения учащихся в поисковую деятельность на уроках стереометрии: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. Нижний Новгород, 2002. 208 с.
7. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителей / пер. с англ. [В.Г. Звонаревой и Д.Н. Белла]; под ред. Ю.М. Гайдука. М.: Учпедгиз, 1959. 208 с. URL: https://www.mathedu.ru/text/poaya_kak_reshat_zadachu_1959/p0/
8. Пушкин В.Н. Эвристика – наука о творческом мышлении. М.: Политиздат, 1967. 207 с.
9. Семенов Е.Е. Размышления об эвристиках // Математика в школе. 1995. № 5. С. 39.
10. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: монография. Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. 439 с.

11. Тымко Ю.Г. Методическая система формирования профессионально ориентированной эвристической деятельности будущего учителя математики: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Юлия Григорьевна Тымко. Донецк, 2012. 244 с.
12. Хуторской А.В. Современная дидактика: учебник для вузов. СПб.: Питер, 2001. 544 с.
13. Graham Wallas The art of thought. New York: Harcourt,Brace and co., cop.1926. 314 p.

РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИИ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МАСТЕРСКАЯ» В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

REALIZATION OF THE MATHEMATICAL WORKSHOP TECHNOLOGY IN THE CONTEXT OF EDUCATION DIGITALIZATION

А.Е. Букреева

A.E. Bukreeva

«Математическая мастерская», деление с остатком, цифровые инструменты, деятельностный подход, познавательный интерес.

Статья посвящена апробации технологии «математическая мастерская» в 5 классе на тему «Деление с остатком». В контексте цифровизации образования исследована возможность интеграции интерактивных методов, сочетающих предметное содержание с игровыми элементами. На основе анализа обратной связи учащихся и рефлексии педагога показано, что данный подход способствует не только глубокому усвоению алгоритма деления с остатком, но и развитию метапредметных навыков (коммуникация, сотрудничество).

“Mathematics workshop”, division with remainder, digital tools, activity-based approach, learning motivation.

The article is devoted to the testing of the “mathematical workshop” technology in the 5th grade on the topic “Division with a remainder”. In the context of the digitalization of education, the possibility of integrating interactive methods that combine subject content with game elements has been investigated. Based on the analysis of student feedback and teacher reflection, it is shown that this approach contributes not only to the deep assimilation of the division algorithm with a remainder but also to the development of meta-subject skills (communication, collaboration).

Современная парадигма образования, обусловленная процессами цифровизации, ориентирует учителя на переход от репродуктивной модели обучения к деятельностной, где ученик является активным субъектом, конструирующим собственные знания. В этом контексте особую значимость приобретают инновационные педагогические технологии, способные формировать критическое мышление, навыки сотрудничества и умение самостоятельно открывать новое знание. Одной из таких технологий, наиболее полно отвечающей вызовам времени, является «педагогическая мастерская». Ее частной реализацией в предметной области выступает «математическая мастерская», апробации которой в 5 классе на тему «Деление с остатком» и посвящена данная статья.

Технология «педагогическая мастерская» уходит корнями в идеи свободного воспитания Ж.-Ж. Руссо, утверждавшего, что «ребенок не сосуд, который нужно заполнить, а факел, который необходимо зажечь» [6]. Психологическую основу технологии составляют труды Л.С. Выготского о зоне ближайшего развития и социальной природе мышления, где познание возникает в процессе сотрудничества и диалога [2], а также в концепции Ж. Пиаже о том, что знание не передается извне, а конструируется самим субъектом в процессе взаимодействия со средой [5].

Непосредственным идеологом и практиком технологии выступила «Французская группа нового образования» (GFEN), провозгласившая лозунг «Все способны!» и разработавшая конкретные методики организации коллективного мыслительного процесса, направленного на «преодоление препятствия» и «разрыв» с прежним уровнем понимания [3].

Ключевые принципы технологии включают:

– Принцип диалогичности: знание рождается в диалоге с собой, другими и культурой.

– Принцип свободы и равенства: отсутствие официального оценивания на этапе поиска, равенство всех голосов.

– Принцип неопределенности: создание «разрыва» между имеющимся опытом и новой проблемой.

– Принцип деятельности: знание добывается в личностно значимой деятельности.

Классическая структура мастерской включает следующие этапы.

1. *Индукция* (создание проблемной ситуации).

2. *Самоконструкция* (индивидуальный поиск).

3. *Социоконструкция* (групповой поиск).

4. *Социализация* (представление гипотез).

5. *Афширование* (предъявление результатов).

6. *Разрыв* (инсайт, переход на новый уровень понимания).

7. *Рефлексия*.

«Математическая мастерская» максимально использует потенциал предмета для создания «ситуации разрыва» – момента, когда существующие алгоритмы и знания перестают работать, требуя выхода на новый уровень обобщения. Тема «Деление с остатком» особенно удачна для этого: учащиеся владеют действием деления, но проблема проверки результата без знания частного (как в задаче с «шифровкой») создает интеллектуальный тупик, мотивирующий к поиску общей закономерности (формулы $a = b \times q + r$).

Роль учителя кардинально меняется. Из транслятора он превращается в архитектора образовательной среды, дирижера дискуссии и фасилитатора. Его задача – точно подобрать «индуктор» (проблему), организовать коммуникацию, фиксировать рождающиеся гипотезы и мягко подводить группу к осознанию «разрыва» и его преодолению.

Таким образом, «математическая мастерская» представляет собой мощный дидактический инструмент, основанный на прочном философско-психологическом фундаменте. Его применение позволяет перевести изучение математики из плоскости запоминания алгоритмов в плоскость личностного открытия закономерностей, что полностью соответствует целям современного образования в эпоху цифровизации.

Опираясь на теоретические положения, рассмотренные выше, была разработана и проведена математическая мастерская для учащихся 5 класса, нацеленная

не только на усвоение алгоритма деления с остатком, но и на создание условий для самостоятельного вывода ключевого правила $a = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < b$ [1].

Целью занятия стало создание условий для открытия учащимися алгоритма деления с остатком и осознания связи между его компонентами через решение проблемной задачи в игровом контексте. Задачи были сформулированы следующим образом: 1) организовать деятельность по «открытию» нового знания через серию индивидуальных и групповых заданий; 2) обеспечить усвоение понятий «неполное частное» и «остаток»; 3) сформировать навык выполнения и проверки деления с остатком; 4) развивать регулятивные и коммуникативные УУД.

Для достижения поставленных целей и задач была реализована следующая структура мастерской, органично сочетающая традиционные формы работы с цифровыми инструментами (интерактивная доска, онлайн-таблицы, Яндекс Формы).

Таблица 1

Этапы математической мастерской и деятельность участников

№	Этап мастерской	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1	Индукция	Создает проблему в формате «шифровки агента»: проверить сообщение, зная только остатки от деления числа 38	Включаются в игровой сюжет, осознают недостаточность имеющихся знаний, формулируют учебную проблему
2	Самоконструкция	Предлагает индивидуально описать результат деления 17 на 5, представив все компоненты	Индивидуально работают с задачей, пытаются найти способ записи (выход на запись вида $17 = 5 \times 3 + 2$)
3	Социоконструкция	Организует работу в группах, раздает наборы примеров для анализа и выведения общей формулы	В группах решают примеры, заполняют онлайн-таблицу, совместно анализируют закономерности, формулируют гипотезу (формулу и правило $r < b$)
4	Социализация	Организует презентацию групповых гипотез, фиксирует их на доске	Представляют выводы своей группы, слушают другие, вступают в дискуссию
5	Афиширование	Представляет «официальный алгоритм» (формулу $a = b \cdot q + r$ и правило $r \leq b$), обобщая выводы групп	Сверяют собственные выводы с эталоном, корректируют записи
6	Разрыв	Возвращает к исходной задаче с «шифровкой»	Применяют новый алгоритм для успешной проверки сообщения агента, испытывая интеллектуальное удовлетворение.
7	Рефлексия	Организует итоговое обсуждение и сбор обратной связи	Анализируют свой путь познания, высказываются, что узнали, что было трудно, что понравилось

Апробация была проведена в 5 классе с высокой учебной мотивацией. Анализ обратной связи показал, что учащиеся высоко ценят коллективный поиск и испытывают удовлетворение от самостоятельного открытия знаний, а также позволил выявить ключевые тенденции:

1. *Мотивация и вовлеченность.* Учащиеся единодушно отметили высокий интерес к занятию, обусловленный игровым контекстом («было интересно чувствовать себя агентом»). Это подтверждает тезис о том, что мастерская создает уникальную эмоционально-интеллектуальную среду.

2. *Ценность коллективного разума.* На вопрос «Что понравилось больше всего?» доминировал ответ: «особенно понравилось заполнять таблицу в команде». Этап социоконструкции стал центральным, что полностью соответствует принципам технологии Л.С. Выготского о социальной ситуации развития [2].

3. *Преодоление познавательных барьеров.* Характерной реакцией было утверждение: «трудно на уроке не было». Это свидетельствует о том, что технология мастерской позволяет равномерно распределить когнитивную нагрузку, обеспечивая «ситуацию успеха» для каждого участника, о чем писал еще Ж.-Ж. Руссо [6].

4. *Достижение предметных и метапредметных результатов.* Учащиеся уверенно оперировали понятиями «неполное частное» и «остаток», а также выведенной формулой, что доказывает прочность самостоятельно построенного знания.

Рефлексия учителя показала, что успех мастерской определялся точным выбором «индуктора» и четкой организацией этапов. Роль учителя как фасилитатора, предсказанная в теоретических работах GFEN [3], оказалась ключевой. Аналогично отмечают О.В. Тумашева и М.В. Солдаева [10], что при организации учебного взаимодействия важно создавать условия для развития универсальных компетенций через совместное обсуждение и обмен позициями. Цифровые инструменты (интерактивная доска, онлайн-таблицы) выступили катализатором группового взаимодействия, не подменяя, а усиливая живой диалог.

В условиях цифровизации, когда ценность переносится с простого усвоения информации на умение ее добывать, критически осмысливать и применять в сотрудничестве, «математическая мастерская» представляется одним из наиболее перспективных инструментов модернизации математического образования.

Библиографический список

1. Виленкин Н.Я. Математика. 5 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. 5-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2025. 280 с.
2. Выготский Л.С. Мышление и речь. 5-е изд., испр. М.: Лабиринт, 1999. 352 с.
3. Дьюи Дж. Демократия и образование / Дж. Дьюи; пер. с англ. М.: Педагогика-Пресс, 2000. 384 с.
4. Окунев А.А. Как учить не уча, или Способ мастерской // Школьные технологии. 1998. № 1-2. 485 с.

5. Пиаже Ж. Речь и мышление ребенка. М.: Педагогика-Пресс, 1994. 528 с.
6. Руссо Ж.-Ж. Эмиль, или О воспитании. М.: Педагогика, 1981. 310 с.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: утв. приказом Минпросвещения России от 31.05.2021 № 287. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_389560/ дата обращения: 10.10.2025).
8. Тумашева О.В., Солдаева М.В. Методические дебаты как эффективная педагогическая технология развития универсальных компетенций будущих учителей // Педагогика. Вопросы теории и практики. 2023. Т. 8. Вып. 6. С. 656–663.

РЕШЕНИЕ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

SOLVING ACADEMIC RESEARCH PROBLEMS IN MATHEMATICS USING COMPUTER TECHNOLOGIES

А.В. Букушева, Н.А. Бурмистрова

A.V. Bukusheva, N.A. Burmistrova

Высшее образование, математическое образование, Python, дифференциальное уравнение, статистика, анализ данных, визуализация.

Рассматривается исследовательский подход при обучении математике в вузе с использованием Python. Применение вычислительных инструментов позволяет проводить компьютерные исследования в учебном процессе. Приведены примеры задач по дифференциальным уравнениям, статистике, анализу данных, в решении которых могут быть использованы компьютерные технологии.

Higher education, mathematics education, Python, differential equations, statistics, data analysis, visualization.

This article explores a research-based approach to teaching mathematics at a university using Python. The use of computational tools enables computer-based research in the educational process. Examples of problems in differential equations, statistics, and data analysis that can be solved using computer technologies are provided.

Стремительное развитие вычислительных инструментов предоставляет преподавателю высшей школы возможность решать сложные задачи с большей эффективностью и точностью. В данном контексте Python занимает лидирующие позиции как язык программирования, предлагающий обширный набор библиотек, специально разработанных для проведения численных расчетов и анализа данных. В области прикладной математики Python предоставляет надежную вычислительную платформу для решения дифференциальных уравнений, оптимизации и статистического моделирования. Такие библиотеки, как SciPy, NumPy и SymPy, обеспечивают качественные численные решения, а инструменты визуализации, такие как Matplotlib и Seaborn, делают математические результаты более понятными обучающимся. Использование библиотек визуализации позволяет строить графики функций, анализировать статистические распределения и динамически исследовать сложные модели. Указанные инструменты помогают преодолеть разрыв между абстрактной математической теорией и реальными приложениями, обеспечивая визуальную обратную связь. Появление блокнотов Jupyter сделало возможным динамическую визуализацию и пошаговые вычисления, что, в свою очередь, обеспечивает создание интерактивной и исследовательской учебной среды в ходе образовательного процесса. Представляется важным отметить, что инструмент Jupyter позволяет объединить написание кода, визуализацию результатов и добавление комментариев в едином интерфейсе, повышая при этом наглядность процесса решения задачи [1–2].

Можно выделить пассивное и активное внедрение компьютерных инструментов в обучении математике. В первом случае преподаватель на лекции или практическом занятии демонстрирует визуализацию или выполняет вычисление. При активном использовании на лабораторных занятиях или в рамках самостоятельной работы студенты получают задание или готовый код с комментариями. Задача обучающихся модифицировать код, объяснить полученные результаты. Также можно дать задание, для решения которой нужно самостоятельно или в группе написать код. Например, по данному датасету построить уравнение линейной регрессии, оценить параметры и качество модели.

Приведем примеры решения учебно-исследовательских задач, которые можно использовать в образовательном процессе. Рассмотрим возможности построения графика, отображающего векторное поле, и это поможет оценить, как могут визуально выглядеть частные решения обыкновенного дифференциального уравнения при различных начальных условиях.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def yprime(x, y): # y' = x-y
    return x - y
x = np.linspace(-1, 1, 20)
y = np.linspace(-1, 1, 20)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
U = np.ones(X.shape)
V = yprime(X, Y)
N = np.sqrt(U**2 + V**2)
    U /= N
    V /= N
plt.quiver(X, Y, U, V)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y");
```

Полученный результат демонстрирует векторное поле.

Очевидно, что решение выглядит по-разному в зависимости от начальных условий, но в каждом случае решение следует направлению векторного поля.

```
sol2 = solve_ivp(yprime, (-0.5, 1), (0.5,), t_eval=np.
    linspace(-0.5, 1))
sol3 = solve_ivp(yprime, (0.0, 1), (-1,), t_eval=np.
    linspace(0.0, 1))
sol4 = solve_ivp(yprime, (0.0, 1), (1,), t_eval=np.
    linspace(0.0, 1))
plt.plot(sol2.t, sol2.y[0], "r", lw=2)
plt.plot(sol3.t, sol3.y[0], "g", lw=2)
plt.plot(sol4.t, sol4.y[0], "b", lw=2)
plt.quiver(X, Y, U, V)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y").
```

Визуализация полученных частных решений представлена на рис. 1.

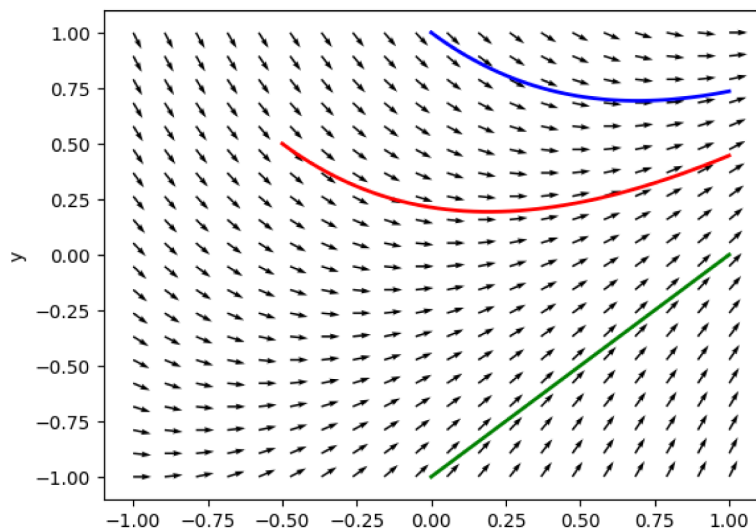


Рис. 1. Интегральные кривые векторных полей

Рассмотрим задачу построения уравнения парной линейной регрессии. Генерируем данные.

```
X, y = make_regression(n_samples=50, n_features=1, noise=15,
                      random_state=4)
y = np.log(y + 240)
sns.scatterplot(x=X.ravel(), y=y);
```

Делим на обучающую и тестовую выборки:

```
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y, test_
size=0.4, random_state=8)
sns.scatterplot(x=X_test.ravel(), y=y_test);
sns.scatterplot(x=X_train.ravel(), y=y_train);
```

Обучаем модель:

```
line_model = LinearRegression()
line_model.fit(X_train, y_train)
y_pred_train = line_model.predict(X_train)
y_pred_test = line_model.predict(X_test)
sns.scatterplot(x=X_test.ravel(), y=y_test);
sns.scatterplot(x=X_train.ravel(), y=y_train);
sns.lineplot(x=X_train.ravel(), y=y_pred_train);
sns.lineplot(x=X_test.ravel(), y=y_pred_test);
```

Сделаем оценку модели:

```
line_model.score(X_train, y_train), line_model.score(X_test, y_test)
(0.8260041204448749, 0.7638116955134387)
mean_squared_error(y_train, y_pred_train), mean_squared_
error(y_test, y_pred_test)
(0.00390046483459174, 0.006336444195434351)
```

Полученный результат демонстрирует хорошее соответствие модели данным и предсказательную способность.

Рассмотрим возможность улучшения линейной модели парной регрессии. Построим полиномиальную модель.

```
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
poly_model = LinearRegression()
poly_features = PolynomialFeatures() # degree=3
X_poly_train = poly_features.fit_transform(X_train)
X_poly_test = poly_features.transform(X_test)
poly_model.fit(X_poly_train, y_train)
y_pred_train = poly_model.predict(X_poly_train)
y_pred_test = poly_model.predict(X_poly_test)
r2_score(y_train, y_pred_train), r2_score(y_test, y_pred_test)
(0.8800020524235332, 0.824499647921608)
mean_squared_error(y_train, y_pred_train), mean_squared_
error(y_test, y_pred_test)
(0.002689993440890109, 0.004708311826198344)
```

Анализ полученных результатов показывает, что данные имеют нелинейные отношения.

Подведем итог. Широкое внедрение компьютерных технологий в преподавание математики в образовательный процесс высшей школы набирает обороты во всем мире, особенно в странах с быстро растущим уровнем развития цифровых ресурсов. Использование программирования на языке Python с его возможностью визуализации абстрактных математических понятий представляет собой ценный инструмент для субъектов образовательного процесса, позволяющий эффективно изучать учебный материал, который довольно сложно осваивать с привлечением традиционных методов обучения.

Библиографический список

1. Криволапов С.Я., Хрипунова М.Б. Математика на Python: учебник. М.: КНОРУС, 2022. 456 с.
2. Mulla A. Teaching and Learning the Fundamental of Calculus through Python-based Programming // International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology. 2024. Vol. 12. Iss.1. P. 510–514.

ОТЕЧЕСТВЕННЫЙ ОПЫТ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И СОВРЕМЕННЫЕ ТРЕБОВАНИЯ

DOMESTIC EXPERIENCE IN TEACHING MATHEMATICS AND MODERN REQUIREMENTS

М.В. Васильева

M.V. Vasilyeva

Математика, цели обучения, программа, пособия, виды деятельности, умения.

Статья основывается на сравнительном анализе целей и результатов обучения математике сегодня и сто лет назад. Анализируются требования примерной рабочей программы по математике 1920 г. и задания пособий 1927 г., которые способствуют активной учебно-познавательной деятельности школьников, развитию математической функциональной грамотности.

Mathematics, learning objectives, curriculum, teaching aids, activities, skills.

This article is based on a comparative analysis of the goals and outcomes of mathematics education today and a hundred years ago. It analyzes the requirements of the 1920 model mathematics curriculum and the assignments of 1927 teaching aids that promote active learning and cognitive activity in schoolchildren and the development of functional mathematical literacy.

Очевидно, что для решения различных математических задач, доказательства математических утверждений обучающемуся необходимы развитые интеллектуальные и творческие способности, познавательная активность, исследовательские умения, критичность мышления.

Обратим внимание на задачу пособия 1927 г., в которой автор отмечает необходимость дать подростку математическую грамоту, научить его понимать математический язык, научить пользоваться вычислениями при разрешении вопросов, как житейских, так и общественно-экономических, и политических и содействовать расширению кругозора [2]. Обратим внимание, что задача указанного пособия сходна с определением математической функциональной грамотности.

Интерес представляет примерная рабочая программа по математике для школ I ступени 1920 г. [3], в которой отмечалась необходимость изучения математики во взаимосвязи с другими предметами, также указывалось, что обучение арифметике имеет огромное практическое значение, так как потребность в арифметических расчетах ощущается людьми всех профессий на каждом шагу. Однако, согласно данной программе, эта практическая ценность арифметики не должна заслонять перед учащимися основную задачу, которая выдвигает новая школа (1920 г.) – воспитание у детей способности действовать самостоятельно и осмысленно, что согласуется с современными требованиями, с принципом системно-деятельностного подхода. Кроме того, в объяснительной записке по арифметике были сформулированы цели, сравним их с актуальными приоритетными целями обучения математике согласно федеральным рабочим программам, НО, ООО и СОО (табл.).

Сравнение целей обучения математике

Цели обучения		
1920 год	2023 год	
примерная программа по математике для школ I ступени [3]	федеральная рабочая программа начального общего образования [4]	федеральные рабочие программы ООО и СОО [6-9]
развитие душевных сил ребенка – воли, мышления, воображения, наблюдательности, находчивости, инициативы	становление учебно-познавательных мотивов, интереса к изучению и применению математики, важнейших качеств интеллектуальной деятельности: теоретического и пространственного мышления, воображения, математической речи, ориентировки в математических терминах и понятиях	развитие интеллектуальных и творческих способностей обучающихся, познавательной активности, исследовательских умений, критичности мышления, интереса к изучению математики
развитие у учащихся способности решать вопросы количественного характера, содержание которых заимствовано из окружающей жизни и области различных наук	понимание математических отношений выступает средством познания закономерностей существования окружающего мира, фактов, процессов и явлений, происходящих в природе и в обществе (например, хронология событий, протяженность по времени, образование целого из частей, изменение формы, размера)	подведение обучающихся на доступном для них уровне к осознанию взаимосвязи математики и окружающего мира, понимание математики как части общей культуры человечества
сознательное усвоение учащимися арифметических действий и приобретение твердых навыков в устных и письменных вычислениях с целыми и дробными числами	освоение начальных математических знаний – понимание значения величин и способов их измерения, использование арифметических способов для разрешения сюжетных ситуаций, становление умения решать учебные и практические задачи средствами математики, работа с алгоритмами выполнения арифметических действий	формирование центральных математических понятий (число, величина, геометрическая фигура, переменная, вероятность, функция), обеспечивающих преемственность и перспективность математического образования обучающихся

Как видно из таблицы, цели обучения математики как сейчас, так и сто лет назад ориентировали на развитие обучающихся, формирование умений и навыков, применение приобретенных знаний.

В учебном пособии «Математическая грамота» для городских школ подростков не моложе 12–14 лет 1927 г. [2] (рис. 1) математический материал изложен в рамках комплексных тем, выстроен таким образом, что можно сравнить с современными материалами по формированию функциональной грамотности (рис. 2).

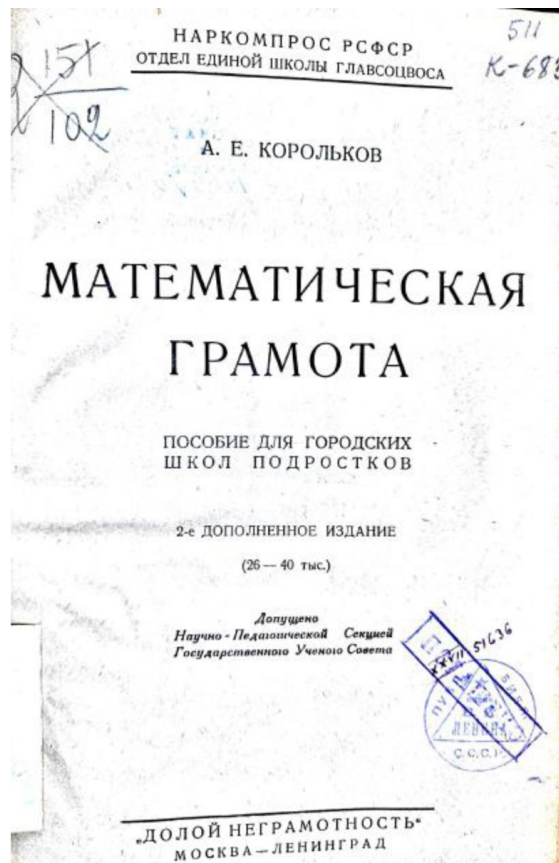


Рис. 1. Титульный лист пособия «Математическая грамота» [2]

ОГЛАВЛЕНИЕ.	
Математический материал.	Стр.
Отдел I. Нумерация до тысячи. Сложение и вычитание в пределе сотни. Измерение времени. Сложение и вычитание в пределе тысячи. Меры длины. Линейные диаграммы. Умножение однозначного числа на однозначное. Деление на однозначное число. Простейшие доли. Процент. Круговые диаграммы. Круг. Измерение температуры. Измерение веса	7—36
Отдел II. Нумерация до миллионов. Сложение и вычитание в пределе тысяч. Десятичные дроби. Сложение и вычитание десятичных дробей. Умножение на 10 и на 100. Перенесение запятой на 1 знак, на 2 знака. Деление на 10; на 100; на 1000. Умножение многозначного числа на однозначное. Прямоугольник. Квадрат. Треугольник. Измерение площади прямоугольника. Измерение площади квадрата. Таблица умножения Пифагора. Знакомство с планом. Выделение прямоугольных участков земли. Эскер. Меры площадей. Умножение десятичной дроби на однозначное целое число. Измерение объемов. Литр. Запись прибыли и убытка в одной графе. Положительные и отрицательные числа. Среднее арифметическое	37—67
Отдел III. Круговые диаграммы. Процентный транспортёр. Прямоугольные диаграммы. Замена части числа процентами. Нахождение процентов числа по таблице	68—72
Отдел IV. Нумерация многозначных чисел. Сложение и вычитание многозначных чисел. Фигурные диаграммы. Округление чисел. Сокращённая за-	
	Комплексные темы.
Отдел I. <i>Подросток и его труд.</i> Труд подростка. Грамотность среди подростков. Измерь самого себя. Продолжительность рабочего дня для подростков в разных странах	7—36
Отдел II. <i>Наш город.</i> Население города: число жителей, социальный состав, распределение по занятиям. Кустарная промышленность. Пофсоюзам. Горсовет. Продолжительность рабочего времени. Заработная плата. План города	37—67
Отдел III. <i>Октябрьская революция.</i> Состав XI Всероссийского Съезда Советов. Состав II Съезда Советов СССР. Распределение земли до и после Октябрьской революции. Рост работы по ливкбазу по СССР. Сокращение рабочего дня	68—72
Отдел IV. <i>Союз Советских Социалистических Республик.</i> Площадь и население Союза ССР. Крупная промышленность и сельское хозяйство. Государственные доходы и расходы СССР. Добыча	

Рис. 2. Оглавление пособия «Математическая грамота» [2]

Обращают на себя внимание формулировки текстов заданий, например, в комплексной теме «Подросток и его труд» задания «Подъемная сила руки человека», «Физическая сила подростков» (рис. 3) [2] во-первых, связь с реальной жизнью человека, тексты выполняют не только информационную, но и воспитательную и развивающую функцию, во-вторых связь с другими предметными областями, в частности с историей и с обществоведением (1920 г.), зоркий взгляд педагога заметит связь информации в заданиях с современным обществознанием.

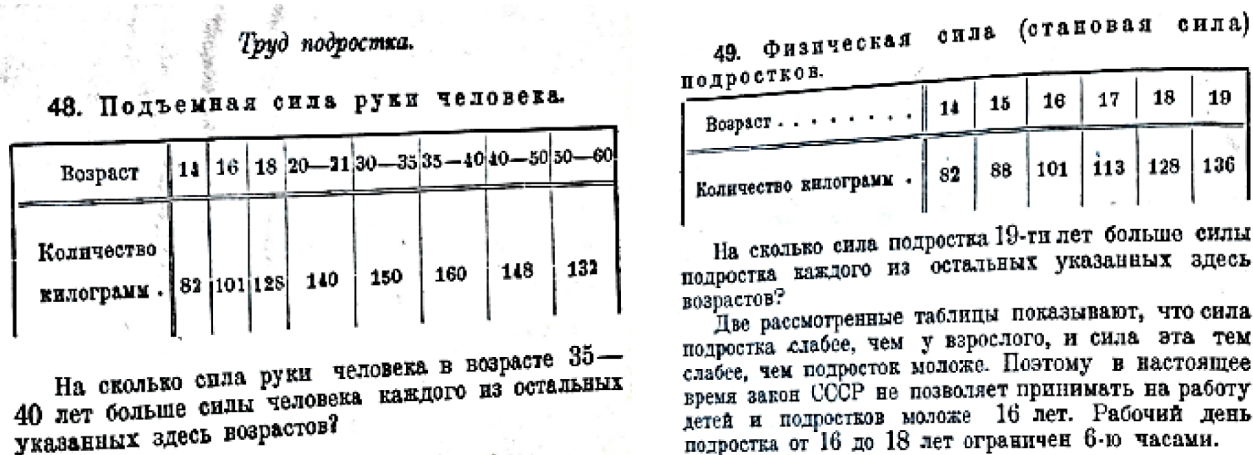


Рис. 3. Тексты заданий «Подъемная сила руки человека» и «Физическая сила подростков» из пособия «Математическая грамота» [2]

Как видно из примерной рабочей программы по математике для школ I ступени 1920 г. и пособия «Математическая грамота» для городских школ подростков не моложе 12–14 лет 1927 г., умения, которые сегодня прописаны в федеральных рабочих программах по математике, уделялось внимание уже сто лет назад. Таким образом, уже более чем век назад при обучении математике у обучающихся формировались виды деятельности, которые сегодня мы относим к функциональной математической грамотности.

Рассмотрим пособие по математке для шестого года обучения в трудовой школе 1927 г. [1] (рис. 7). Задания пособия сформулированы таким образом, что способны побуждать школьников выдвигать гипотезы, анализировать свойства математических объектов и их влияние на свойства отдельных элементов, это хорошо прослеживается в теме «Треугольник» данного пособия (рис. 7–9).

Так, в задании 2 стр. 55 пособия (рис. 7) сформулированы два проблемных вопроса: «Верно ли, что сумма любых двух сторон более третьей? Почему так должно быть во всяком треугольнике?». Необходимость ответить на подобные вопросы побуждает школьника к активной учебно-познавательной деятельности, например, чтобы ответить на первый вопрос, можно провести измерения нескольких треугольников и сравнить в каждом треугольнике суммы двух сторон с третьей. Ответ на данные вопросы требует от школьника аргументации суждений, выдвижение гипотез.

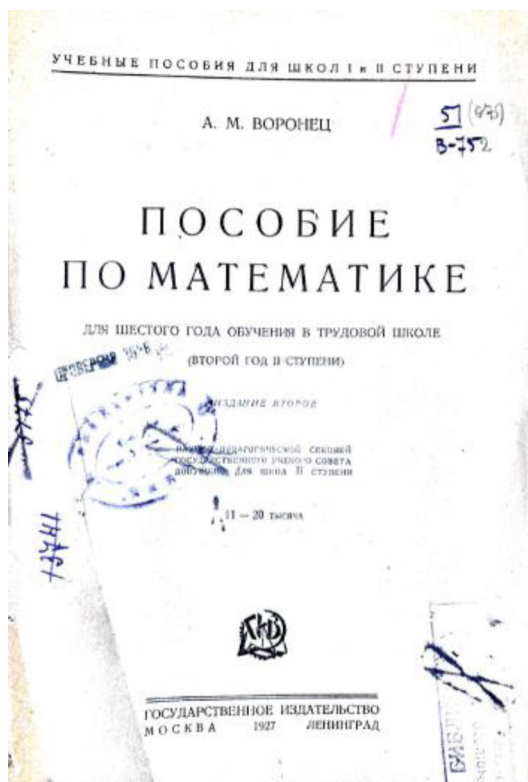


Рис. 4. Воронец М.А. Пособие по математике для шестого года обучения в трудовой школе. 1927 г. Титульный лист (слева), стр. 55 (справа) [1]

ТРЕУГОЛЬНИК.

§ 26. Основные определения. Классификация треугольников.

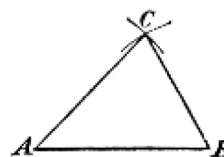
1. Треугольником называется фигура, ограниченная тремя, попарно пересекающимися, линиями. Образовавшиеся отрезки называются сторонами треугольника. Точки пересечения сторон называются вершинами треугольника.

Треугольник читается тремя буквами, обозначающими его вершины. Слово „треугольник“ принято записывать с помощью значка Δ . Запись ΔABC обозначает треугольник, вершины которого суть точки A , B и C .

2. Начертить произвольный треугольник, измерить миллиметрами его стороны. Верно ли, что сумма любых двух сторон более третьей? Почему так должно быть во всяком треугольнике?

3. Из всяких ли трех отрезков можно сформировать треугольник? Формулировать условие возможности построения треугольника из трех данных отрезков.

4. Чтобы построить треугольник, стороны которого даны, например, 9, 7 и 5 см, откладываем на произвольной прямой отрезок $AB = 9$ см, из точки A описываем дугу радиусом 7 см, а из точки B описываем дугу радиусом 5 см. Эти дуги пересекутся (черт. 15, масштаб уменьшен) над линией AB в точке C , соединив которую с точками A и B , получим искомый треугольник ACB .



Черт. 15.

Анализ содержания данного пособия, в частности по теме «Треугольник» показал, что в большей части материал состоит из вопросов, сформулированных таким образом, что в результате их выполнения школьники самостоятельно могли формулировать выводы.

Вопрос одного из заданий данного пособия «Как проще всего построить равнобедренный треугольник» ориентирует школьника на самостоятельную деятельность по поиску способа рационального построения равнобедренного треугольника. Кроме этого, в задании подобрать (найти) жизненные примеры равнобедренного треугольника. В конце задания предлагается исследование углов равнобедренного треугольника, при котором необходимо выяснить, против каких сторон лежат равные углы, и сформулировать свойство углов равнобедренного треугольника.

Отметим, что подобная деятельность направлена на развитие познавательной активности, исследовательских умений обучающихся, а это именно то, что прописано в одной из приоритетных целей обучения математике сегодня: развитие интеллектуальных и творческих способностей обучающихся, познавательной активности, исследовательских умений, критичности мышления.

Таким образом, можно сделать вывод, что цели обучения математике 1920-х гг. согласуются с современными приоритетными целями обучения, задания рассмотренных пособий способствуют активной учебно-познавательной и исследовательской деятельности школьников, то есть все то, что сейчас относится к метапредметным результатам освоения Федеральной основной образовательной программы, все это находит отражение в пособиях 1927 г.

Библиографический список

1. Воронец М.А. Пособие по математике для шестого года обучения в трудовой школе. 1927 г.
2. Корольков Е.А. Математическая грамота. Пособие для городских школ подростков 2-ое дополненное издание / НАРКОПРОС РСФСР ОТДЕЛ ЕДИНОЙ ШКОЛЫ ГЛАВСОЦВОСА. М. 7-ая типография «Искра революции», 1927 г. 129.
3. Примерная рабочая программа по математике для школ I ступени / Арзамасский Уездный Отдел Народного Образования. Г. Арзамас, 1920 г. 24 с.
4. Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования: приказ Министерства просвещения РФ от 31.05.2021. № 287. URL: <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/> (дата обращения: 12.11.2022).
5. Федеральная рабочая программа начального общего образования. Математика (для 1–4 классов образовательных организаций). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/08_1_ФРП_Математика-1-4_классы.pdf (дата обращения: 20.11.2024).
6. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Базовый уровень (для 5–9 классов образовательных организаций). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf (дата обращения: 20.11.2024).
7. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Углубленный уровень (для 7–9 классов образовательных организаций). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/14_ФРП_Математика-7-9-классы_угл.pdf (дата обращения: 20.11.2024).
8. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Базовый уровень (для 10–11 классов образовательных организаций). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/19_ФРП-Математика-10-11-классы_база.pdf (дата обращения: 20.11.2024).
9. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Углубленный уровень (для 10–11 классов образовательных организаций). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20_ФРП_Математика-10-11-классы_угл.pdf (дата обращения: 20.11.2024).

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К СОВРЕМЕННОМУ ОБУЧЕНИЮ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В УНИВЕРСИТЕТАХ БЕЛАРУСИ

ON SOME APPROACHES TO MODERN TEACHING HIGHER MATHEMATICS AT BELARUSIAN UNIVERSITIES

А.М. Волк, И.Ф. Соловьева

A.M. Volk, I.F. Solovjova

Фундаментальное образование, высшая математика, классические разделы, современные условия, моделирование процессов, цифровизация, искусственный интеллект, интернет-технологии, самостоятельная работа.

Расширение цифровизации во всех сферах деятельности государства характеризуется наличием больших объемов информации и широкой возможностью доступа к ней. Данный аспект имеет особо важное значение при подготовке инженерных кадров для всех отраслей промышленности. Выпускник технического высшего учебного заведения должен обладать умением применять цифровую инженерию для решения определенных производственных задач. Умение пользоваться искусственным интеллектом невозможно приобрести без знания базовых разделов высшей математики.

Fundamental education, higher mathematics, classical sections, modern conditions, process modeling, digitalization, artificial intelligence, internet technologies, independent work.

The expansion of digitalization in all areas of government activity is characterized by the availability of large volumes of information and broad access to it. This aspect is particularly important in the training of engineering personnel for all industries. Graduates of a technical higher educational institution must possess the ability to apply digital engineering to solve specific production problems. The ability to use artificial intelligence is impossible to acquire without knowledge of the basic sections of higher mathematics.

Современная эпоха, связанная с цифровизацией, радикально изменила подход к обучению высшей математике не только в школах, но и в университетах всего земного шара. Сегодня студенты и школьники живут в мире, где информация доступна мгновенно, стоит только лишь достать мобильный телефон из кармана, или, сидя дома на диване, открыть планшет или ноутбук и получить любую интересующую их информацию за считанные секунды. Остается только поверить, что эта информация действительно важная, а не просто компьютерная игра, каких очень много в интернете.

В современном мире вычислительные инструменты способны решать задачи намного быстрее человека. Поэтому основной вызов образования – научить не только выполнять вычисления, но и понимать математические идеи, строить модели и критически мыслить. Особенно это относится к вузам, выпускающим инженеров всех видов деятельности. К таким вузам относится и наш Белорусский государственный технологический университет.

Раньше основное внимание уделялось вычислениям, выполненным на бумаге вручную, а теперь приоритетом становится умение формулировать задачу,

строить модель и анализировать результаты. Это формирует направление математической грамотности и развивает умение применять высшую математику в цифровой инженерии, экономике, науке и, конечно, на производстве в своей будущей профессии. Сейчас перед всеми преподавателями высшей математики появляется новая задача: не только научить студентов высшей математике, но и научить творческому ее применению, аналитическому и критическому мышлению [1]. А это далеко не просто. По-прежнему большинство студентов поступают на инженерные специальности с очень слабой математической подготовкой. Ребята с достойными баллами идут на специальности, связанные с компьютером: в «айтишники», цифровые «дизайнеры» и другие специальности, обещающие в будущем не только интересную работу, но и неплохой доход от нее. На инженерных специальностях таких ребят, как правило, не хватает. Поэтому нужно учить своих, тех, кто поступил к нам и хочет в дальнейшем связать свою судьбу с производством.

С каждым годом математическое образование становится более прикладным и междисциплинарным, ориентируясь на задачи цифровой экономики: анализ больших данных, криптографию, моделирование процессов, машинное обучение. Однако нужно сохранить фундаментальную роль классических разделов математики, так как именно они дают универсальные способы мышления. Кстати, в нашем университете на кафедре высшей математики преподают криптографию, а к классическим разделам высшей математики относятся очень бережно. Ведь нужно научить наших будущих инженеров учитывать знак при переносе выражения в правую часть, грамотно раскрывать скобки, выделять полный квадрат, строить графики линейных, квадратичных и т. д. функций, проходимых в школе. Конечно, это все может сделать за них искусственный интеллект, но проверить правильность результатов нужно уметь самим. Мы считаем, что не в коем случае нельзя отказываться от традиций изучения высшей математики с ее главными классическими разделами: математическим анализом, высшей алгеброй, аналитической геометрией, дифференциальными уравнениями, теорией вероятностей, широкий спектр которых всем известен, и остальными разделами, а развивать их с помощью современных технологий. Главное – научить использовать высшую математику как инструмент для решения реальных проблем в мире, где цифровые технологии становятся повседневностью.

В главном вузе страны Белорусском государственном университете (БГУ) проводят онлайн-лекции, дистанционно проверяют и консультируют студентов по курсовым и дипломным проектам, осуществляют контроль знаний, т. е. проверяют студенческие работы на антиплагиат на специальностях: философия, информатика, педагогика, филология.

В Белорусском национальном техническом университете (БНТУ) осуществляется электронный контроль над учебным процессом, проводятся дистанционные лекции, принимают зачеты и даже экзамены на специальностях: программирование, машиностроение, экономика.

В Белорусском государственном университете информатики и радиоэлектроники (БГУИР) проводится проектное обучение, проекты по IT- дисциплинам с последующей защитой их в Zoom на специальностях: программирование, искусственный интеллект (ИИ), радиоэлектроника.

В Витебском государственном университете им. П.М. Машерова проводятся Онлайн-занятия, лекции, взаимодействие преподавателей со студентами, проверка контрольных работ, консультации со студентами специальностей: педагогика, филология, лингвистика.

Более подробно хочется рассказать о нашем Белорусском государственном технологическом университете (БГТУ). У нас цифровая трансформация процессов в системе образования включает в себя оптимизацию и совершенствование образовательных процессов на основе развивающихся цифровых технологий. Начиная с 2020 года все студенты нашего Белорусского государственного технологического университета подписаны на СДО (система дистанционного обучения), где можно ознакомиться с программой дисциплины, лекционными материалами, практическими заданиями, подробно разобранными примерами по всему курсу высшей математики [2]. Проводятся онлайн-курсы, загрузка лабораторных работ, проверка и разбор курсовых и дипломных проектов. Кроме того, курсы со школьниками 11 классов осуществляются по выбору: на онлайн-занятиях и за партами с преподавателем, объясняющим материал у доски с мелом в руках. Однако, исходя из опыта преподавания высшей математики в обоих случаях, лучшее решение – это, скорее всего, совмещение новых цифровых возможностей с классическим обучением как в школе, так и в вузе.

У нас в БГТУ учатся разные студенты. И звезд с неба они не хватают. И если им не объяснить спокойно и доходчиво не понятую ими тему по математике, то никакой компьютер им в этом не поможет.

Практически в каждом вузе есть доминирующая платформа Moodle. Zoom и Teams используются как стандарт для онлайн-занятий.

Активно развиваются электронные библиотеки и практически каждый вуз, в том числе и наш БГТУ, создал собственный цифровой архив. Совмещая классическое обучение студентов с дистанционным, мы надеемся получить наилучшие результаты в образовании.

Мы не исключаем из учебного процесса и наши Рабочие тетради, изданные по всем основным темам курса высшей математики и помогающие осуществлять самостоятельную работу студентов по каждой теме программы. Здесь будут работать и искусственный интеллект, и помощь преподавателя, и собственные знания студентов, и все материалы, выложенные в СДО, и наши Электронные учебно-методические комплексы (ЭУМК), разработанные преподавателями нашей кафедры по всем специальностям [2]. Они включают в себя лекционный материал, практические задания, примерные варианты контрольных работ по каждой теме, подробно решенные и разобранные примеры. И все это находится в открытом для студентов доступе. Хочется верить, что все в совокупности обязательно поможет студенту справиться с заданиями по Рабочим тетрадям.

В современном образовании надежно занял одно из главных мест искусственный интеллект (ИИ), с появлением которого возникает много вопросов, главный из которых: «а не будут ли студенты просто пользоваться им при решении конкретных задач, курсовых или дипломных проектов?». Однако это легко предотвратить, задав студенту сопутствующие один или два вопроса, и по его ответу понять, чем он пользовался при подготовке задания, соответствующе оценив его работу. Для этого также предназначена и проверка на «антиплагиат».

Создание (ИИ) прошло довольно длинный путь. Его история формировалась постепенно, вместе с развитием математики, логики и информатики. Официальным рождением (ИИ) считается середина 1950-х. Американский математик Джон Маккарти предложил сам термин «*Artificial Intelligence*» (*Искусственный интеллект*). Время шло, и он создал главный язык программирования на десятилетия вперед.

А в наши дни (ИИ) уже используется не только в образовательных технологиях, но и в реальной жизни: он может адаптировать задания под уровень студента, выявлять пробелы, предлагать более простые методы обучения, играть в шахматы и использоваться в медицине. А так как часть рутинных задач могут решать машины, то студентов, особенно инженерных специальностей, нужно учить творческому применению математики, аналитики и, конечно, критическому мышлению.

В наши дни Беларусь активно внедряет цифровые технологии в математическое образование начиная от школьного уровня, заканчивая вузовским обучением, с акцентом на подготовку специалистов, способных эффективно использовать современные инструменты в образовательном процессе. А в наших белорусских вузах достаточно много инженерных специальностей. Высшая математика формирует фундаментальные навыки, необходимые для успешной карьеры инженера, программиста, физика и других специалистов. Без нее невозможно понять ключевые принципы работы технологий, построения моделей и решения сложных задач.

А все это имеет в настоящее время огромное значение для наших вузов, наших студентов, для нашей кафедры высшей математики, для нашего вуза БГТУ и для нашей страны.

Библиографический список

1. Волк А.М., Соловьева И.Ф. Метод активизации учебного процесса при изучении высшей математики для студентов инженерных специальностей // Высшее техническое образование. Научно-методический журнал. 2017. Т. 1, № 1. С. 69–73.
2. Волк А.М., Соловьева И.Ф. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» для специальности 7-07-0712-02 «Теплоэнергетика и теплотехника», Минск, БГТУ. Рег. № 1142440928 от 17.12.2024.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ УРОКОВ ОБОБЩЕНИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

USING DYNAMIC DEMONSTRATION SOFTWARE TO CREATE LESSONS ON SUMMARIZATION AND SYSTEMATIZATION IN PLANE GEOMETRY

А.А. Ганжа

A.A. Ganzha

Динамические программы, GeoGebra, обобщение и систематизация знаний, планиметрия, визуализация, геометрические объекты, треугольник.

Важную роль играют инновационные подходы к преподаванию планиметрии. В рамках работы рассматривается роль динамических демонстрационных программных средств, таких как GeoGebra, в разработке уроков, направленных на обобщение и систематизацию знаний. Эти инструменты позволяют создавать интерактивные модели, где ученики могут манипулировать геометрическими объектами в реальном времени, визуализируя теоремы и свойства фигур.

Dynamic programs, GeoGebra, generalization and systematization of knowledge, planimetry, visualization, geometric objects, triangle.

Innovative approaches to teaching planimetry play an important role. The paper examines the role of dynamic demonstration software tools such as GeoGebra in developing lessons aimed at generalizing and systematizing knowledge. These tools allow students to create interactive models where they can manipulate geometric objects in real time, visualizing theorems and properties of shapes.

Традиционные подходы к обучению планиметрии, основанные на статичных средствах визуализации, таких как учебники и доска, демонстрируют ограниченную эффективность при обобщении и систематизации знаний. Это связано с невозможностью адекватно продемонстрировать динамические свойства геометрических объектов и их преобразования. В результате у учащихся формируется формальное понимание теорем и аксиом, без глубокого осознания пространственных закономерностей. Данная проблема приводит к поверхностному усвоению материала и затрудняет применение знаний на практике. Статичные носители информации не позволяют в полной мере визуализировать процессы изменения геометрических фигур, такие как движение точек, вращение углов или преобразования форм. Это создает когнитивные барьеры для учащихся при попытке установить взаимосвязи между различными элементами планиметрии. Как следствие, на уроках обобщения и систематизации, где требуется целостное восприятие материала, эффективность традиционных методов оказывается недостаточной для формирования глубоких и прочных знаний.

Актуальность данного исследования обусловлена современными требованиями федерального государственного образовательного стандарта [5], которые делают акцент на развитии пространственного мышления и ИКТ-компетенций школьников. Динамические программные среды, такие как GeoGebra, Desmos, Живая математика, Математический конструктор и т.д., предоставляют уникальные возможности для наглядного представления абстрактных геометрических концепций.

В условиях цифровизации образования возрастает потребность в инструментах, способных преодолеть абстрактность геометрических объектов. Динамические демонстрации позволяют учащимся непосредственно наблюдать преобразования фигур, устанавливая инвариантные свойства и закономерности. Это особенно значимо на этапе обобщения знаний, где формируется целостное представление о предмете. Таким образом, исследование возможностей данных средств для решения указанных задач представляет существенный научный и практический интерес.

В своем исследовании Э.Р. Таджиходжаева акцентирует внимание на том, что «...90 % информации человек воспринимает с помощью глаз; 50 % нейронов мозга участвуют в обработке визуальной информации. Наличие изображений увеличивает желание читать текст на 80 %. Человек запоминает 10 % услышанного, 20 % прочитанного и 80 % увиденного. Если в учебных материалах нет иллюстраций, человек усвоит 70 % информации. Если добавить туда картинки, то цифра увеличится до 95 %» [4]. Автор говорит о том, что визуализация (изображения, диаграммы, иллюстрации) значительно улучшает процесс обучения, делая его более эффективным и мотивирующим. Это особенно актуально для предметов, таких как планиметрия, где визуальное представление фигур и теорем помогает лучше понять и запомнить сложные концепции.

Использование GeoGebra в обучении математике с акцентом на ее интерактивные возможности детально описывают М.Е. Консакова, Н. Балта [2] и Д. Пардаев, С. Сидиков [3], что важно для создания уроков обобщения и систематизации планиметрии. GeoGebra как инструмент поддерживает визуализацию и динамическое представление геометрических объектов, что облегчает понимание сложных концепций, отмечают авторы.

Анимационные эффекты в динамических средах играют важную роль в формировании пространственного мышления. Непрерывная демонстрация преобразований фигур помогает учащимся воспринимать геометрические объекты в развитии. Это позволяет визуализировать процессы, которые трудно представить статически, такие как движение точек по траекториям или преобразования подобия. Анимация создает целостное представление о геометрических изменениях. «Н.В. Занько и С.В. Ларин считают, что проведение занятий в форме лабораторных работ в среде GeoGebra является перспективной при исследовательском стиле обучения математике, а анимационные рисунки представляют собой эффективный элемент новой дидактики, востребованный

задачами цифрового образования» [8, с.70]. Использование анимации поддерживает развитие пространственных представлений и способствует лучшему пониманию взаимного расположения фигур. Демонстрация непрерывных изменений формирует у учащихся динамические ментальные модели геометрических объектов.

Рассмотрим варианты применения GeoGebra на уроках обобщения и систематизации знаний по планиметрии. В совместной деятельности с Ю.В. Абраменковой [1] мы продемонстрировали иллюстрацию применения этой программы на занятиях. В публикации представлен образец плана урока по геометрии для 7-го класса на тему «Окружность и круг. Геометрические построения». Обобщая и систематизируя знания, учащимся перед выполнением контрольной работы предложили провести исследовательскую работу. Проведение подобных исследовательских работ способны: активизировать мыслительную деятельность обучающихся, привить интерес к геометрии и сформировать учебную мотивацию, а также повторить, обобщить и систематизировать знания школьников.

Например, при изучении темы «Сумма углов треугольника» предлагается учащимся выполнить практическую работу по измерению углов нескольких треугольников различного вида и вычислить их суммы. Эту работу можно автоматизировать. Используя платформу GeoGebra, школьникам хватает одного треугольника, который они анализируют: перемещая вершины, создают разные треугольники и записывают данные замеров вручную либо автоматически в таблице. Оценивая собранные данные, ученики формулируют предположение, что сумма углов треугольника составляет 180 градусов.

Разработка алгоритмов визуализации включала создание динамических преобразований для демонстрации свойств геометрических фигур. Основой стали возможности программного обеспечения, позволяющие изменять объекты в реальном времени. Данная функциональность использовалась для моделирования движения точек, вращения фигур и изменения размеров. Алгоритмы строились на принципах интерактивности, обеспечивая мгновенную реакцию на действия пользователя. Например, при изменении длины стороны треугольника автоматически пересчитываются углы и площади, демонстрируются зависимости между элементами фигуры. Это позволяет визуализировать теоремы о сумме углов, свойствах биссектрис и медиан, что особенно важно для уроков обобщения. Для окружностей возможно продемонстрировать изменение радиуса и центра, а также их влияние на положение касательных и хорд. В случае с многоугольником можно раскрыть свойства правильных фигур и их преобразования при варьировании числа сторон. Таким образом, динамические преобразования стали ключевым инструментом для исследования свойств.

Неотъемлемой частью решения задач в планиметрии является построение чертежа. Этот процесс не только визуализирует геометрические объекты, такие как точки, отрезки, углы и фигуры (треугольники, параллелограммы, окружности), но и способствует глубокому пониманию их свойств. Построение чертежа позволяет

выявлять скрытые закономерности, проверять гипотезы и экспериментировать с изменениями параметров, что особенно ценно в динамической геометрии.

Пример: «В треугольнике ABC сторона $AB = 5$ см, $AC = 7$ см, угол $BAC = 60^\circ$. Постройте треугольник и найдите его площадь.»

Шаг 1: Создайте точку A (центр, например, в $(0,0)$).

Шаг 2: Постройте отрезок AB длиной 5 см. (Используйте инструмент «Отрезок заданной длины».)

Шаг 3: Постройте угол 60° в точке A. (Инструмент «Угол с заданной величиной».)

Шаг 4: От точки A вдоль угла постройте отрезок AC длиной 7 см.

Шаг 5: Соедините B и C, чтобы получить треугольник.

Шаг 6: Измерьте площадь (инструмент «Площадь многоугольника») – GeoGebra автоматически рассчитает ее.

В результате вы получите динамический чертеж, где можно изменять параметры и наблюдать, как меняется площадь (рис.).

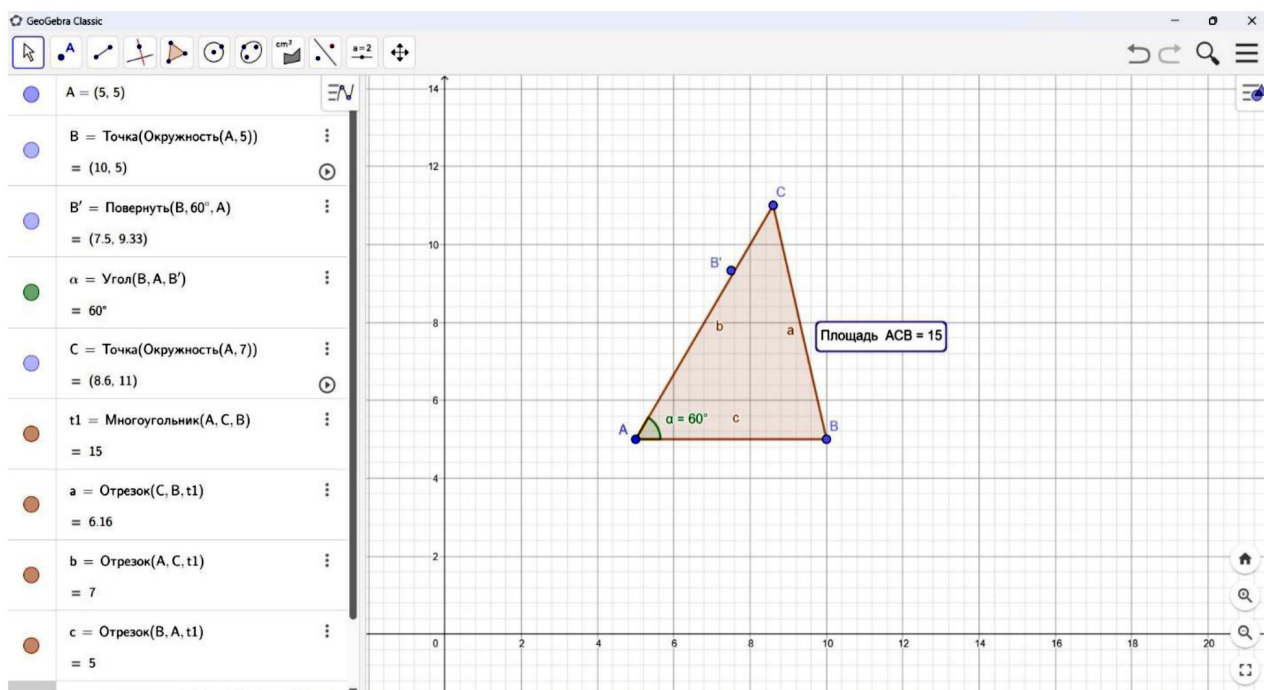


Рис. Фрагмент 6-го шага решения задачи

Визуализация динамических свойств фигур позволяет учащимся глубже понять абстрактные концепции, что особенно важно при повторении материала. Использование данных средств обеспечивает наглядное представление зависимостей между элементами геометрических объектов, что невозможно достичь при работе со статичными носителями. Это способствует формированию устойчивых связей между теоретическими знаниями и их практическим применением. Таким образом, динамические демонстрации становятся эффективным инструментом для систематизации планиметрических знаний, отвечая на актуальные вызовы современного образования.

Библиографический список

1. Абраменкова Ю.В., Ганжа А.А. Организация процесса обобщения и систематизации знаний по планиметрии с применением геометрической среды GeoGebra // Педагогическая информатика. 2024. № 1. С. 54–63.
2. Консакова М.Е., Балта Н. Применение GeoGebra для обучения математике // Dulaty University Хабаршысы. 2022. № 2. С. 14–18.
3. Пардаев Д., Сидиков С.А. Экспериментальное исследование эффективности использования GeoGebra // Информатика. Экономика. Управление – Informatics. Economics. Management. 2025. № 3. С. 2001–2010.
4. Таджиходжаева Э.Р. Визуализация учебных материалов – как инструмент эффективного вовлечения обучающихся в учебный процесс // Proceedings of MMIT'23 International Conference. Ташкент, 2023. С. 16–18.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [утвержден Приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 31 мая 2021 г. № 287; Зарегистрировано в Министерстве юстиции Российской Федерации от 5 июля 2021 г. Регистрационный № 64101]. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027> (дата обращения 01.11.2025).
6. Челнокова Т.А. Техники визуализации и их актуальность в организации работы с учебной информацией современных школьников // Педагогика и психология образования. 2019. № 3. С. 30–42.

ПОДГОТОВКА ОБУЧАЮЩИХСЯ 10–11 КЛАССОВ К РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

PREPARING STUDENTS IN GRADES 10–11 TO SOLVE TRIGONOMETRIC EQUATIONS IN THE CONTEXT OF BLENDED LEARNING IN MATHEMATICS

Г.Н. Гиматдинова

G.N. Gimatdinova

Тригонометрические уравнения, отбор корней, смешанное обучение математике.

В статье рассматриваются элементы подготовки обучающихся 10–11 классов к решению тригонометрических уравнений в условиях смешанного обучения математике: нахождение значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций, методы решения тригонометрических уравнений и отбор корней. Приводятся примеры онлайн-ресурсов для поддержки учебного процесса.

Trigonometric equations, root selection, blended learning in mathematics.

The article examines the elements of preparing students in grades 10–11 to solve trigonometric equations in the context of blended learning in mathematics: finding the values of trigonometric and inverse trigonometric functions, methods for solving trigonometric equations and selecting roots. Examples of online resources to support the learning process are provided.

Тригонометрические уравнения занимают важное место в курсе алгебры и начал математического анализа. В материалах Единого государственного экзамена по математике профильного уровня (далее – ЕГЭ), Всероссийской проверочной работы регулярно встречаются задания на решение тригонометрических уравнений и отбор корней, принадлежащих заданному промежутку.

В методических рекомендациях для учителей, подготовленных на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2025 года по математике, отмечается, что при решении тригонометрических уравнений ошибки проявляются в неверном решении простейших тригонометрических уравнений, применении формул приведения и двойного угла, некорректном использовании свойств четности и нечетности тригонометрических функций [2]. Опираясь на материалы Федерального института педагогических измерений за последние годы, отметим, что наибольшие затруднения у обучающихся вызывает задача отбора корней уравнения, принадлежащих заданному промежутку.

В данной статье рассмотрим элементы подготовки обучающихся 10–11 классов к решению тригонометрических уравнений в условиях смешанного обучения, приведем примеры онлайн-ресурсов для поддержки учебного процесса.

Подготовка к решению тригонометрических уравнений сопровождается умением находить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса с помощью единичной тригонометрической окружности, формул приведения, таблицы значений тригонометрических функций, применять тригонометрические формулы, находить значения обратных тригонометрических функций, а также решать рациональные, дробно-рациональные и иррациональные уравнения различными способами из курса основной школы.

Остановимся более подробно на некоторых темах для подготовки обучающихся к полноценному решению тригонометрических уравнений. Изучение раздела тригонометрии начинается с умения определять расположение точки на числовой окружности и находить значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента. При закреплении данной темы можно использовать групповое перевернутое обучение, подразумевающее собой в домашних условиях просмотр видеоконтента, работу с подобранными учебными материалами, а в условиях урока – объединение в группы и совместную работу над заданиями. В качестве примера видеоконтента предлагаем материал по ссылке <https://clck.ru/3QJZus>. На уроке обучающиеся в группах должны восстановить тригонометрическую окружность на заготовленном заранее шаблоне, указать точки со значениями от 0 до 2π , подписать на окружности значения тригонометрических функций в соответствии с расположением точки на окружности, а после обменяться ответами с другой группой. Для проверки каждой группе выдается эталон правильного ответа. Продолжение работы основано на совместном взаимодействии обучающихся на уроке. Каждая группа отрабатывает нахождение точек на числовой окружности, определение знаков и нахождение значений числовых аргументов тригонометрических функций. Следующие уроки должны быть ориентированы на индивидуальную отработку материала. В качестве дополнительного материала рекомендуем использовать тренажеры как в печатном, так и электронном виде. Печатный вариант удобно применять на уроках, а онлайн – в качестве домашнего задания. В дальнейшем в начале уроков обучающимся можно выдавать карточки для устного счета, в которых имеются задания на нахождение значений выражений из курса основной школы, а также числовых аргументов тригонометрических функций [1].

Довольно часто обучающиеся допускают ошибки при нахождении арккосинуса, арксинуса, арктангенса и арккотангенса числового аргумента. В условиях перевернутого обучения обучающимся можно предложить работу на дом в следующем формате: разбор темы по ссылке <https://clck.ru/3QJa2U>, выполнение викторин с мгновенной обратной связью для первичного закрепления материала. Одним из примеров может стать интерактивное упражнение по ссылке <https://clck.ru/3QLbZk>. На самом уроке требуется более детальная проработка материала. Рекомендуется предлагать обучающимся задания на нахождение ошибок в вычислении значений числовых аргументов обратных тригонометрических

функций, а также постоянно осуществлять взаимопроверку и самопроверку при выполнении заданий.

Одним из ключевых этапов подготовки является решение простейших тригонометрических уравнений. Обучающиеся должны уметь применять формулы для нахождения корней. В условиях перевернутого обучения в качестве домашнего задания предлагается просмотреть видео с объяснением всех формул решения простейших тригонометрических уравнений по ссылке <https://clck.ru/3QJbVv>, для контроля понимания материала следует выполнить тест с самопроверкой. Пример подобного теста по ссылке <https://clck.ru/3QLdMq>. На уроке рекомендуется чередовать парную и индивидуальную работу для закрепления алгоритмов решения простейших уравнений. Уровень трудности простейших уравнений должен постепенно повышаться за счет усложнения аргумента тригонометрической функции.

К основным методам решения тригонометрических уравнений относится введение новой переменной, разложение на множители, способы решения однородных и неоднородных тригонометрических уравнений первой и второй степени. Примеры решения тригонометрических уравнений с помощью этих методов рассмотрены в видео по ссылке <https://clck.ru/3QJeh6>. Обучающиеся должны разобрать и отработать алгоритм каждого метода решения уравнений. Только после этого уравнения можно дополнять различными тригонометрическими формулами, в том числе теми, которые встречаются в материалах ЕГЭ. Систематизация и обобщение материала по методам решения тригонометрических уравнений может быть проведена в формате ротации станций, где каждая команда отрабатывает основные методы решения тригонометрических уравнений, ищет ошибки в предложенных работах, взятых из методических материалов для председателей и членов предметных комиссий [3].

Приведем на рисунке фрагмент разработанного тренажера для отработки умения отбирать корни тригонометрического уравнения из заданного промежутка. Работа состоит из нескольких этапов:

- выделение заданного промежутка;
- указание точек на числовой окружности (в общем виде);
- нахождение расстояния между точками на числовой окружности;
- определение значений точек на числовой окружности, принадлежащих заданному промежутку (определение найденных корней уравнения, принадлежащих заданному промежутку).

Подчеркнем, что не обязательно все темы раздела тригонометрии изучать с применением моделей смешанного обучения. Учитель вправе выбирать формы работы с учебным материалом. Организацию учебного процесса можно дополнять различными дидактическими материалами, включая тренажеры. Тригонометрические уравнения в ЕГЭ являются заданиями повышенного уровня сложности, подготовка к их решению является многоступенчатой и должна происходить постепенно: от простого к сложному.

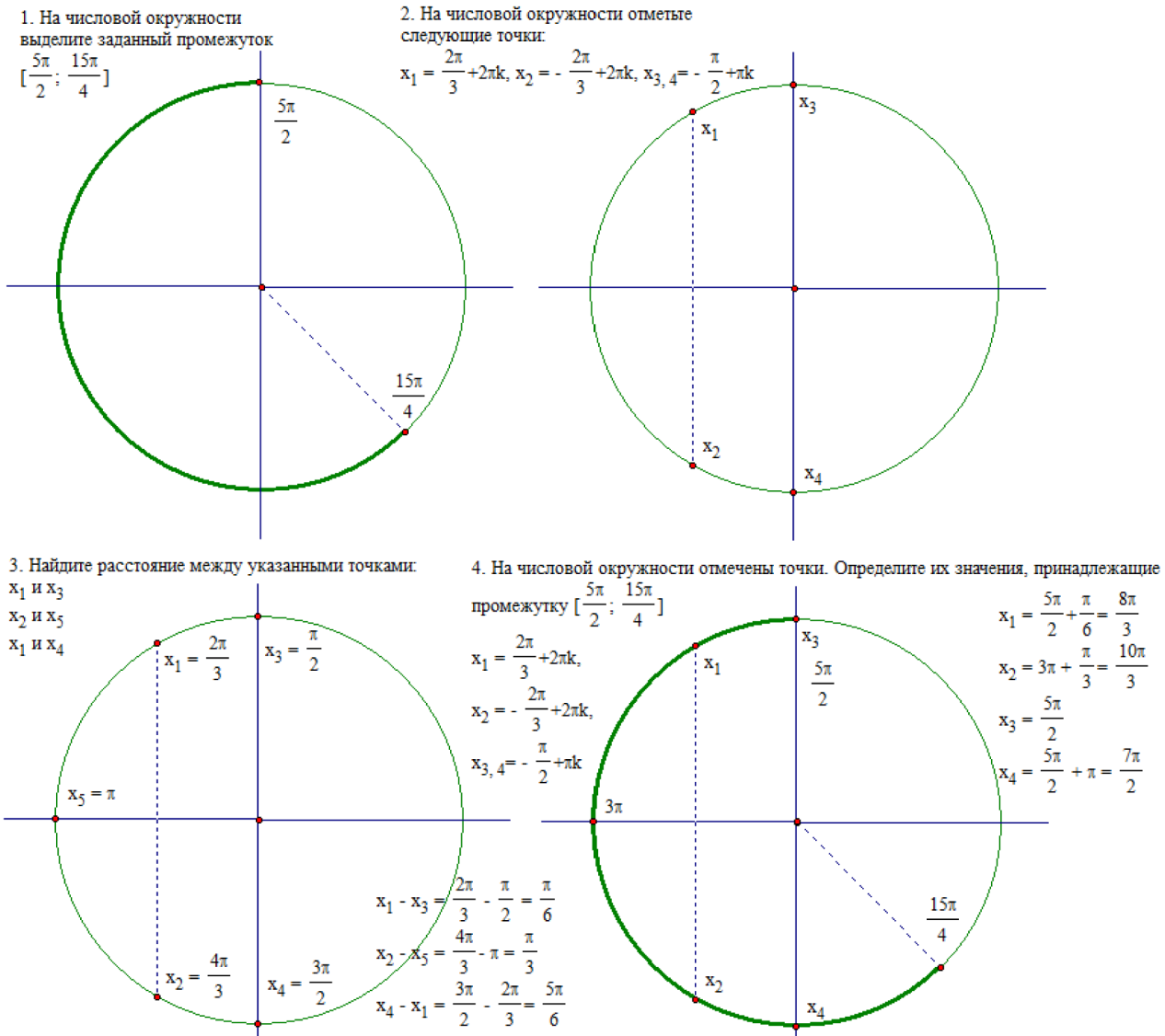


Рис. Фрагмент выполненного задания тренажера по отбору корней тригонометрического уравнения

Библиографический список

1. Хлевнюк Н.Н., Иванова М.В. Формирование вычислительных навыков на уроках математики. 10–11 классы. М.: ИЛЕКСА, 2018.
2. Яценко И.В., Высоцкий И.Р., Самсонов П.И., Семенов А.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2025 года по математике. URL: <https://clck.ru/3QFLKL> (дата обращения: 09.11.2025).
3. Яценко И.В., Семенов А.В., Трепалин А.С., Черняева М.А. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2025 года. Математика. URL: <https://clck.ru/3QLj3Y> (дата обращения: 09.11.2025).

ГЕНЕРАТОР ЗАДАНИЙ СО СЛОЖНЫМ ГРАФИЧЕСКИМ КОНТЕНТОМ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ СТУДЕНТОВ ПО РАЗДЕЛУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

GENERATOR OF TASKS WITH COMPLEX GRAPHICAL CONTENT FOR DEVELOPING STUDENTS' COMPUTATIONAL SKILLS IN THE ANALYTICAL GEOMETRY SECTION

К.П. Дуничев

K.P. Dunichev

Педагогический инструментарий, генератор заданий, формирование навыков, вычислительные навыки, сложный графический контент, математический пакет Maxima, педагогический тест, система электронного обучения Moodle.

В статье поднимается вопрос об актуальности использования педагогом цифровых инструментов для формирования у студентов вычислительных навыков по разделу «Аналитическая геометрия» в реалиях глобальной цифровизации и недостаточного уровня развития данных навыков у студентов. Представлен разработанный генератор заданий, который позволит педагогу создавать множество тестовых заданий для системы электронного обучения Moodle с целью их использования при составлении тренировочных тестов.

Teaching tools, task generator, skill development, computational skills, complex graphic content, Maxima mathematical package, pedagogical test, Moodle e-learning system.

In the article raise the issue of the relevance of using digital tools by a teacher to develop students' computational skills in the analytical geometry section in the context of global digitalization and the insufficient level of development of these skills among students. The developed task generator is presented, which will allow the teacher to create many test tasks for the Moodle e-learning system in order to use them when composing training tests.

Введение. В свете стремительного развития информационных технологий меняются и требования к уровню образования. В частности, особенно важным становится формирование у учащихся прочных навыков в области математики, так как математические дисциплины не только развивают логическое мышление и аналитические способности, но и служат основой для многих других наук и профессиональных областей. Одними из таких важных навыков в области математики являются вычислительные навыки, владение которыми подразумевает способность решать задачи различного уровня сложности, выбирая оптимальные алгоритмы, и применять математические методы в практической деятельности.

С одной стороны, в современных реалиях владение вычислительными навыками в области математики становится все более важным для будущего специалиста, а потому формирование их должно стать одним из приоритетов для сферы высшего математического образования. Но, с другой стороны, анализ показывает, что уровень овладения данными навыками студентами вузов, в том числе

и по разделу «Аналитическая геометрия», является недостаточным, что связано с уменьшением количества аудиторных занятий по математическим дисциплинам и нехваткой тренировочных и контрольно-измерительных материалов.

Для решения проблем с нехваткой тренировочных и контрольно-измерительных материалов эффективным средством является использование педагогом и учащимися систем электронного обучения (СЭО) и цифровых инструментов в них. В работе предложен вариант генератора заданий со сложным графическим контентом для формирования вычислительных навыков у студентов по разделу «Аналитическая геометрия».

Материалы и методы. Преимущества использования систем электронного обучения в современном образовательном процессе описываются многими авторами. Так, Е.В. Сергеева [3] выделяет следующие преимущества их использования: индивидуализация учебного процесса; дифференцированный подход к каждому студенту; разнообразие образовательных услуг, которые обеспечивает дистанционная форма обучения; возможность совмещения образования с другими видами деятельности; самостоятельный выбор темпа обучения.

Помимо этого, большой заслугой систем электронного обучения является предоставление педагогу возможности повышения мотивации учащихся, стимулирования их к самостоятельности и большей вовлеченности в учебный процесс [2]. Для этих целей педагогу доступно в пользование множество разнообразных визуальных средств, среди которых анимации, видеоролики, изображения, презентации, визуализации и многое другое. Для педагогов-математиков особенно полезным является наличие в таких системах возможности графического представления специфических математических объектов, таких как дроби, квадратные корни, матрицы, пределы, интегралы, уравнения, графики функций и т. д. Графические представления математических объектов, представленные на онлайн-ресурсах, будем называть «сложным графическим контентом».

С целью формирования у студентов требуемых вычислительных навыков по разделу «Аналитическая геометрия» при работе в СЭО Moodle предлагается использовать педагогические тесты, составленные из множества заданий различных типов. Формирование навыков предлагается осуществлять посредством многократного решения однотипных тестовых заданий, разнообразие которых будет достигаться путем изменения начальных числовых параметров в их условиях. Важной особенностью составленных тестов будет также доступность их повторного прохождения для отработки ошибок.

В связи со сложностью визуализации учебного материала по математике, связанной с необходимостью уметь работать со специфическим набором цифровых инструментов, и трудоемкостью создания большого числа заданий для СЭО Moodle нами предложен генератор онлайн-заданий по математике. В данном исследовании под *генератором заданий со сложным графическим контентом* будем понимать педагогический инструментарий, предназначенный для создания множества однотипных тестовых заданий различного типа, обладающий интуитивно понятным графическим интерфейсом и взаимодействующий

с математическим пакетом Maxima для генерации математических объектов и автоматического выполнения операций над ними.

Полученные результаты. Графический интерфейс раздела разработанного программного обеспечения для создания вычислительных заданий по разделу «Аналитическая геометрия» состоит из двух визуальных блоков – «Количество заданий» и «Настройка» (рис. 1). Каждый блок содержит в себе соответствующие графические элементы управления, которые доступны пользователю для уточнения требуемых характеристик генерируемых заданий.

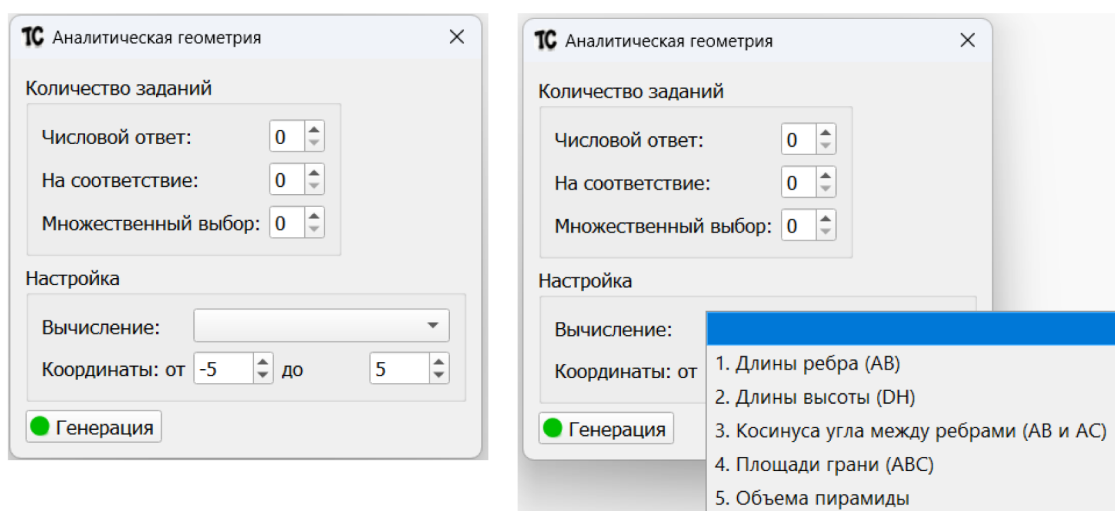


Рис. 1. Графический интерфейс раздела программы

Для создания заданий при помощи данного ПО пользователю следует придерживаться следующего порядка действий при работе с ним:

1) в блоке «Количество заданий» указать количество генерируемых заданий по каждому из типов вопросов, которые соответствуют типам вопросов в СЭО Moodle;

2) в блоке «Настройка» выбрать задание, вопросы по которому необходимо составить;

3) задать числовые параметры, которые в данном случае представляют собой границы псевдослучайных значений координат вершин треугольной пирамиды;

4) сохранить локально сформированный файл формата XML, содержащий сведения о всех созданных заданиях, и загрузить его в СЭО Moodle для автоматического добавления всех заданий в свой банк вопросов.

В результате у пользователя появится возможность составить тест из уже готового множества сгенерированных заданий различного типа (рис. 2, 3).

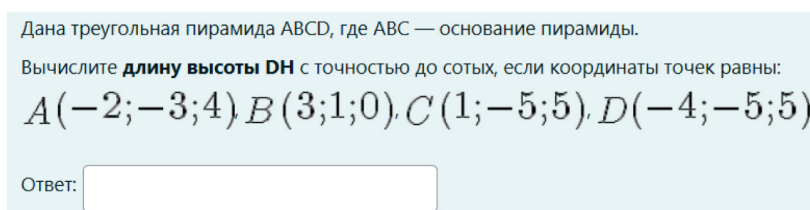


Рис. 2. Пример созданного задания типа «числовой ответ»

Дана треугольная пирамида ABCD, где ABC — основание пирамиды.

Вычислите **косинус угла ABC**, если координаты точек равны:

$$A(0; -2; 3), B(-4; -4; 2), C(4; -3; 1), D(4; 1; 2).$$

Выберите один ответ:

- $\frac{4}{7}$
- $-\frac{7}{4}$
- $\frac{7}{4}$
- $-\frac{4}{7}$

Рис. 3. Пример созданного задания типа «множественный выбор»

Заключение. Таким образом, предложен вариант генератора заданий со сложным графическим контентом для системы электронного обучения Moodle. Использование педагогом разработанного цифрового инструмента позволит ему быстро и качественно создавать множество однотипных вычислительных тестовых заданий различных типов по разделу «Аналитическая геометрия» для данной платформы. Созданные задания, в свою очередь, могут быть использованы при составлении тренировочных педагогических тестов, направленных на формирование у студентов вычислительных навыков по данному разделу математики.

Направление дальнейшего исследования заключается в расширении функционала разрабатываемого программного обеспечения, а также в исследовании подходов и концепций моделей проектирования программных систем тренажеров.

Библиографический список

1. Дуничев К.П., Трофимов И.Л., Мендель В.В. Методы генерации сложного математического контента для цифровых образовательных ресурсов // ТОГУ-Старт: фундаментальные и прикладные исследования молодых: материалы V региональной научно-практической конференции, Хабаровск, 16–20 апреля 2024 года. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2024. С. 340–344.
2. Лазарева Л.В., Стяжкова Н.М. Как цифровые технологии мотивируют студентов к обучению // Вопросы журналистики, педагогики, языкознания. 2023. № 4. С. 658–671.
3. Сергеева Е.В. Дистанционное обучение при изучении математики // Проблемы современного педагогического образования. 2019. № 62–1. С. 266–268.

ВОЗМОЖНОСТИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ШКОЛЬНИКОВ С ТРУДНОСТЯМИ В ОСВОЕНИИ МАТЕМАТИКИ

OPPORTUNITIES FOR ADDITIONAL EDUCATION BASED ON DIGITAL TECHNOLOGY TO SUPPORT SCHOOLCHILDREN WITH DIFFICULTIES IN LEARNING MATHEMATICS

В.А. Егоров, А.Е. Поличка

V.A. Egorov, A.E. Polichka

Математика, школьное образование, трудности в обучении, дополнительное образование, цифровое сопровождение дополнительного образования, преимущества внедрения CRM-систем.

В статье рассматриваются возможности использования цифровых технологий для поддержки школьников с трудностями в освоении математики. Анализируются современные CRM-системы и их роль в персонализации обучения, повышении мотивации и вовлеченности учащихся. Предлагаются формы дополнительного образования, такие как онлайн-курсы, кружки и олимпиады, с использованием цифровых ресурсов. Внедрение цифровых технологий способствует расширению доступа к образовательным материалам и развитию самостоятельности учеников.

Mathematics, school education, learning difficulties, additional education, digital support for additional education, and the benefits of implementing CRM systems.

The article explores the possibilities of using digital technologies to support students with difficulties in learning mathematics. It analyzes modern CRM systems and their role in personalizing learning, increasing motivation, and engaging students. The article suggests forms of additional education, such as online courses, clubs, and competitions, using digital resources. The implementation of digital technologies enhances access to educational materials and promotes student autonomy.

Введение. В условиях модернизации российского образования перед школой встает проблема обеспечения учащихся качественным образованием. Математическое образование – один из важнейших факторов, определяющих уровень экономического и общественно-политического развития страны. Именно поэтому повышение качества математического образования школьников является одной из наиболее актуальных и значимых задач, стоящих перед современной школой.

Несмотря на значимость математики, многие школьники сталкиваются с серьезными трудностями в ее изучении. Эти трудности могут проявляться в различных формах: от непонимания базовых концепций до потери интереса к предмету. В результате у учащихся формируется негативное отношение к математике, что может привести к снижению успеваемости и уверенности в своих способностях.

Для решения этих проблем важно не только понимать, с чем сталкиваются учащиеся, но и предлагать конкретные пути их преодоления. Создание поддерживающей образовательной среды по оказанию оперативной помощи детям в решении их индивидуальных проблем, где каждый учащийся сможет получить индивидуальную помощь и внимание, является необходимым условием для успешного освоения математики. Важно, чтобы как учителя, так и родители осознавали свою роль в этом процессе и активно участвовали в формировании положительного отношения к предмету.

В качестве варианта преодоления таких трудностей рассмотрим вариант дополнительного образования для поддержки школьников с трудностями в освоении математики.

Анализ источников и педагогической практики позволил выделить противоречие между возможностями дополнительного образования для поддержки школьников с трудностями в освоении математики и наборов цифровых средств, ориентированных на индивидуализацию обучения математики в школе. Рассматриваются фрагментарные описания применения различных образовательных платформ. Систематического описания цифрового сопровождения дополнительного образования поддержки школьников с трудностями в освоении математики в рассмотренных исследованиях не выделено. В данном исследовании рассмотрен вариант цифрового сопровождения поддержки школьников с трудностями в освоении математики на основе CRM-системы.

Материалы и методы. В условиях роста цифровой трансформации образования особое внимание уделяется инструментам, способным персонализировать обучение для учащихся с индивидуальными трудностями. Дополнительное образование, ориентированное на поддержку школьников с проблемами в освоении математики, может значительно выиграть от интеграции цифровых технологий, таких как системы управления отношениями (CRM).

В статье С.Е. Юленкова, С.В. Котельникова и А.С. Касаткина «Роль современных CRM-систем в образовательных учреждениях» подробно рассматривается применение систем управления отношениями (CRM), традиционно используемых в бизнесе, в образовательной сфере, где они адаптируются для анализа индивидуальных потребностей учеников, персонализации учебного процесса и эффективной интеграции взаимодействий с родителями, учителями и внешними партнерами. Авторы определяют CRM как комплексный инструмент для сбора, хранения и анализа данных о взаимодействиях, что позволяет образовательным учреждениям лучше понимать предпочтения и трудности обучающихся, тем самым способствуя индивидуализированному подходу к обучению. Они подчеркивают, что такая система не только снижает административную нагрузку на персонал, но и повышает вовлеченность заинтересованных сторон, например, через автоматизированные уведомления о прогрессе учеников и рекомендации по дополнительным ресурсам. Также приводятся примеры успешного внедрения CRM в школах, где это привело к улучшению качества образовательного процесса за счет фокуса на индивидуальном развитии, что делает ее особенно релевантной для программ дополнительного

образования на основе цифровых технологий, ориентированных на преодоление барьеров в математике и повышение мотивации учащихся [5].

Рассматриваемый подход цифрового сопровождения дополнительного образования поддержки школьников с трудностями в освоении математики будем основывать на следующих факторах, влияющих на успешность обучения [1; 2].

1. Недостаток мотивации, связанный с тем, что многие школьники не видят практического применения математических знаний в повседневной жизни, связи между изучаемым материалом и реальными жизненными ситуациями.

2. Сложность материала, требующая от учеников высокого уровня абстрактного мышления и логического анализа.

3. Отсутствие индивидуального подхода, приводящее к тому, что ученики, нуждающиеся в дополнительной поддержке, остаются без внимания, что усугубляет их трудности.

4. Нехватка учителей математики в школах, что влияет на уменьшение количество часов занятий, а также на качество их проведения.

5. Недостаточная поддержка со стороны родителей, не имеющих достаточных знаний для оказания помощи своим детям в изучении математики.

Полученные результаты. В данном исследовании выбор цифрового сопровождения дополнительного образования будем основывать на формах дополнительного образования, которые могут учитывать указанные факторы, влияющие на успешность обучения на основе цифрового сопровождения учащихся. В исследовании выделены следующие *варианты дополнительного образования* [3].

1. Индивидуальные занятия с репетитором как один из наиболее эффективных способов дополнительного образования в области математики.

2. Групповые занятия в кружках и секциях по математике, являющиеся эффективным способом дополнительного образования.

3. Онлайн-курсы и ресурсы по математике, предлагающие интерактивные уроки, видеоуроки, практические задания и тесты, которые помогают учащимся учиться в удобном для них темпе.

4. Математические центры и клубы, предлагающие более структурированный подход к дополнительному образованию в области математики.

5. Летние школы и лагеря по математике, предлагающие учащимся возможность углубить свои знания и навыки в неформальной и интерактивной обстановке.

6. Математические конкурсы и олимпиады, предлагающие учащимся возможность продемонстрировать свои навыки и знания, а также получать признание и награды за свои достижения.

Использование «цифровых» технологий при наличии и поддержке талантливых педагогов способно превратить дополнительное образование в одно из лучших на национальном уровне [4]. *Под цифровым сопровождением поддержки школьников с трудностями в освоении математики на основе дополнительного образования будем понимать использование цифровых технологий и ресурсов для улучшения образовательного процесса в этой сфере.*

К возможностям такого сопровождения отнесем:

- расширение диапазона доступных образовательных и научных ресурсов (за счет доступа к вебсайтам, базам данных и др.);
- повышение мотивации и вовлеченности обучающихся за счет иммерсионных инструментов и геймификации;
- укрепление самостоятельности учащихся, поддержка их субъектной активности (уменьшение зависимости от педагога и вывод за рамки пассивного восприятия информации);
- расширение возможностей коммуникации и коллаборации между учащимися (например, объединение в проекты и исследования учащихся в различных регионах и странах);
- персонализация процесса обучения, создание возможности обучаться в своем ритме;
- формирование навыков проведения исследований современного типа (с использованием цифровых инструментов, средств сбора и анализа данных, моделирования окружающей среды).

Выводы и дискуссионные вопросы. В данном исследовании выбора цифрового сопровождения дополнительного образования выделен вариант форм дополнительного образования, которые могут учитывать указанные факторы, влияющие на успешность обучения на основе цифрового сопровождения учащихся.

Предложен вариант трактовки цифрового сопровождения поддержки школьников с трудностями в освоении математики на основе дополнительного образования в виде использования цифровых технологий и ресурсов для улучшения образовательного процесса в этой сфере и выделены варианты такого сопровождения.

Заключение. Проблемы освоения математики в школьной системе являются многогранными и требуют комплексного подхода для их решения. Недостаток мотивации, сложность материала, отсутствие индивидуального подхода и нехватка учителей – это лишь некоторые из факторов, которые могут препятствовать успешному обучению. Дополнительное образование играет ключевую роль в поддержке учащихся, сталкивающихся с трудностями в освоении математики. Рассмотренные варианты цифрового сопровождения дополнительного образования и преимущества внедрения CRM-систем смогут значительно повысить интерес школьников к предмету. Эти меры помогут не только улучшить успеваемость учащихся, но и сформировать у них положительное отношение к математике, что, в свою очередь, будет способствовать их дальнейшему развитию и успеху.

Дальнейшее исследование направлено на изучение отношений стремительного развития информационных технологий и необходимостью образовательных учреждений быть в курсе современных трендов для удовлетворения запросов участников образовательного процесса, а также для управления ресурсами и процессами в условиях постоянно меняющегося образовательного рынка. Планируется разработка модели проектирования программных систем образовательных учреждений для удовлетворения запросов учителей, родителей

и образовательных учреждений в условиях реформирования и цифровой трансформации региональной системы образования. Это позволит, в частности, преодолеть существующие трудности и обеспечить каждому ребенку возможность успешно осваивать математику.

Библиографический список

1. Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и педагогическом вузе / И.М. Смирнова [и др.]. М.: Прометей, 2017. 238 с.
2. Актуальные проблемы преподавания математики в школе / Л.Г. Сенаторова, Н.С. Гейда, И.О. Бобрешова [и др.]. // Педагогическое мастерство: материалы XXXII Междунар. науч. конф. (г. Казань, июнь 2022 г.). Казань: Молодой ученый. 2022. С. 33–37.
3. Егоров В.А., Поличка А.Е. Вариант цифрового сопровождения поддержки школьников с трудностями в освоении математики // Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе: материалы V Всероссийской научно-практической конференции, Омск, 14 марта 2025 года. Омск: Омский государственный педагогический университет, 2025. С. 153–157. EDN TUXEVG.
4. Шашло Н.В. Цифровая среда учреждений дополнительного образования школьников: информационные технологии проектирования и психолого-педагогические условия обеспечения // Инновационная наука: Психология, Педагогика, Дефектология. 2023. № 3. С. 93–104.
5. Юленков С.Е., Котельникова С.В., Касаткин А.С. Роль современных CRM-систем в образовательных учреждениях // Решетневские чтения. 2016. № 20.

-

К ВОПРОСУ ОРГАНИЗАЦИИ ГИБРИДНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

METHODS OF ORGANIZATION OF HYBRID MATHEMATICS EDUCATION IN SECONDARY SCHOOLS

Н.Ф. Зарывных, Т.Л. Блинова

N.F. Zaryvnykh, T.L. Blinova

Гибридное обучение, методика, методы обучения, средства обучения, субъектность обучающегося, цифровые технологии, синхронные и асинхронные занятия, электронное обучение.

Данная статья посвящена исследованию вопроса организации гибридного обучения в школе. Обосновывается актуальность его внедрения в образовательный процесс. Спроектирована структурно-функциональная модель организации гибридного обучения. На основе этой модели описана методика организации гибридного обучения математике в общеобразовательной школе на примере элективных курсов. Даны различные рекомендации для успешной реализации гибридного обучения. Приведены примеры методов обучения, которые можно гибко адаптировать для любого формата.

Hybrid learning, methodology, teaching methods, learning tools, student subjectivity, digital technologies, synchronous and asynchronous classes, e-learning.

This article is devoted to the study of the organization of hybrid education in schools. The relevance of its implementation in the educational process is substantiated. A structural and functional model of hybrid learning organization has been designed. Based on this model, a methodology for organizing hybrid mathematics education in secondary schools is described, using the example of elective courses. Various recommendations are given for the successful implementation of hybrid learning. Examples of teaching methods that can be flexibly adapted to any format are given.

В последние десятилетия образовательная система трансформируется под влиянием цифровых технологий и изменяющихся общественных условий. Традиционные формы обучения часто оказываются неэффективными, что требует внедрения инновационных форматов.

Согласно Федеральному закону № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 (ред. от 30.12.2021), каждый гражданин имеет право на качественное образование независимо от жизненных обстоятельств. Закон предусматривает возможность организации непрерывной и результативной образовательной деятельности с использованием электронного обучения (ст. 13, п. 2). Распоряжение Правительства РФ № 2506-р от 24 декабря 2013 г. утверждает «Концепцию развития математического образования в Российской Федерации». В документе подчеркивается необходимость внедрения новых образовательных

технологий, включая электронные платформы и инструменты для самостоятельной работы обучающихся, для повышения эффективности изучения математики. Все это становится возможным благодаря гибриднему обучению, которое, объединяя достоинства очных и дистанционных занятий, представляет собой одно из наиболее перспективных направлений современного образования.

В последние годы интерес исследователей к проблематике гибридного обучения значительно возрос. Некоторые авторы [1; 2; 4] рассматривают теоретические аспекты организации гибридного обучения. Большинство исследований посвящено организации гибридного обучения в высших учебных заведениях [3; 8; 9], однако вопрос интеграции гибридного обучения в практику школ [5; 7; 11] изучен недостаточно.

Под гибридным обучением будем понимать такую форму организации образовательного процесса, в которой сочетаются онлайн- и офлайн-форматы с оптимальным балансом синхронных (непосредственный контакт обучающихся и преподавателя в реальном времени) и асинхронных (самостоятельная работа учеников вне строгого расписания) форм взаимодействия участников учебного процесса.

Анализ и обобщение изученной научной литературы и эмпирических исследований показали, что внедрение гибридного обучения целесообразно и эффективно для обучающихся старших классов (9–11 классы), реализуемого с помощью элективных курсов. Мы это объясняем тем, что старшеклассники, обладая более высокой степенью самостоятельности, рефлексивных и организаторских навыков, способны эффективно воспринимать гибридную модель. Такие условия формируют у них важные компетенции: критическое мышление, цифровую грамотность, умение работать с информацией и брать ответственность за собственное обучение, которые прописаны в ФГОС. В свою очередь, элективные курсы обеспечивают индивидуализацию и дифференциацию содержания, что способствует глубокому усвоению математического материала и подготовке к итоговой аттестации с учетом разнообразных образовательных потребностей обучающихся.

Была спроектирована структурно-функциональная модель организации гибридного обучения, отражающая основные модули курса и этапы их реализации (рис. 1). На основе этой модели опишем предлагаемую нами методику организации гибридного обучения математике в общеобразовательной школе на примере элективных курсов.

1 этап – аналитика. На данном этапе рекомендуем оценить технические возможности учебного заведения и подобрать соответствующее оборудование и программное обеспечение (цифровые классы, интерактивные доски, системы видеоконференций, платформы для управления обучением и др.), что способствует созданию эффективной и удобной образовательной среды. Для наглядности предложим конфигурацию оборудования учебного класса при гибридном обучении (рис. 2).

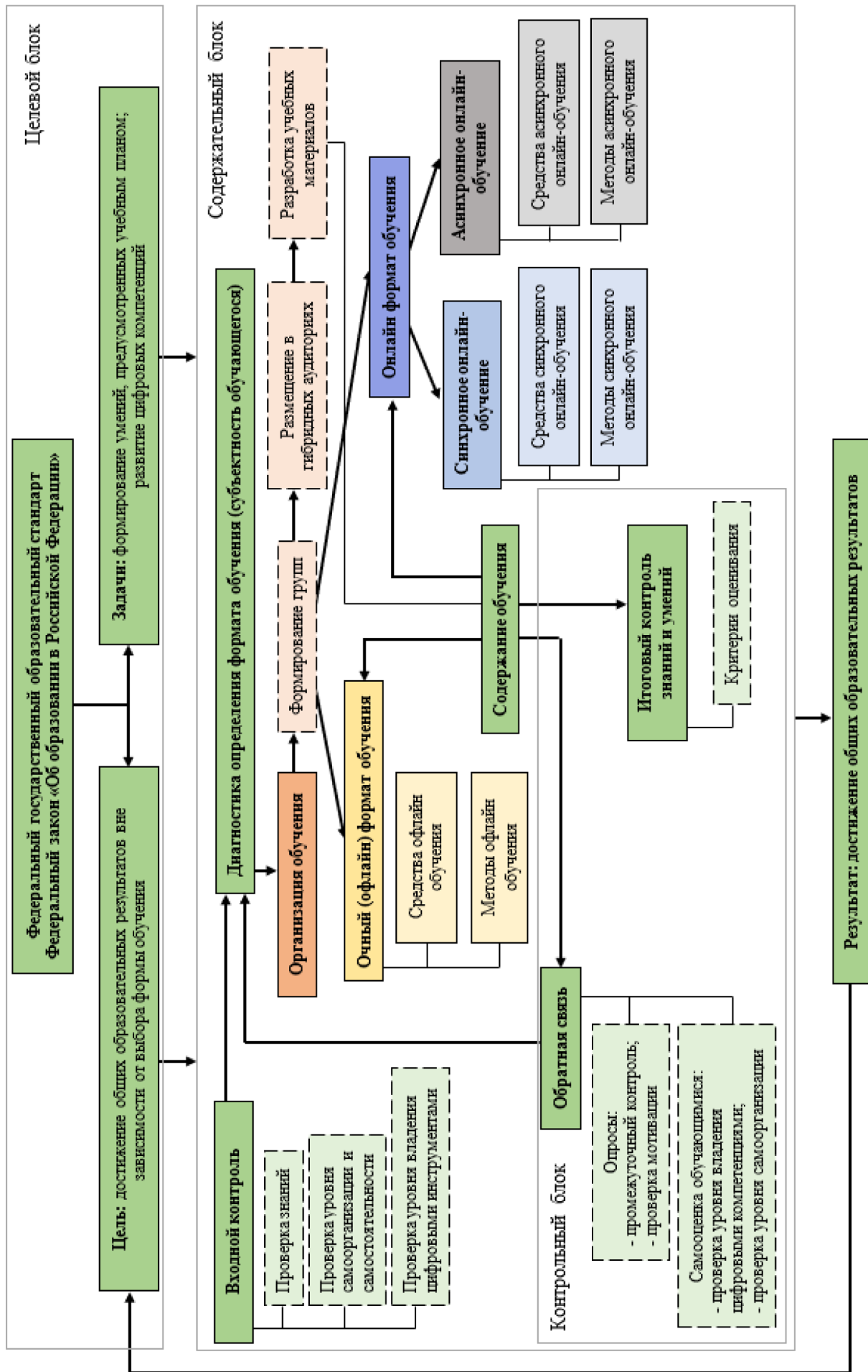


Рис. 1. Структурно-функциональная модель организации гибридного обучения

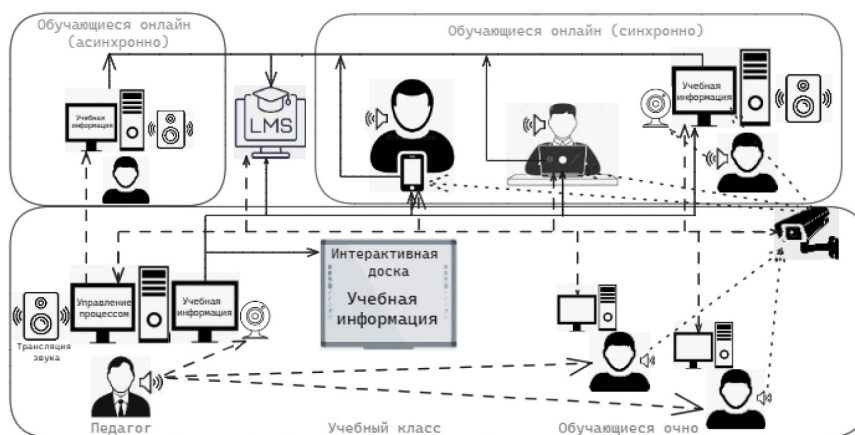


Рис. 2. Конфигурация оборудования учебного класса

При внедрении гибридного обучения следует уделить внимание квалификации и ключевым компетенциям педагогов, среди которых: цифровая грамотность, педагогический дизайн, умение управлять учебным процессом, навыки коммуникации и взаимодействия, гибкость в восприятии инноваций, способность к многозадачности и стрессоустойчивость, а также постоянное профессиональное развитие и умение критериального оценивания достижений обучающихся [6; 10].

2 этап – обучение преподавателей. Начало внедрения гибридного обучения заключается в подготовке педагогов: проведении тренингов и мастер-классов, которые направлены на освоение цифровых платформ, применение активных методов обучения, работу с техническими средствами и навыки управления гибридным уроком.

3 этап – целеполагание. На данном этапе формулируются четкие и измеримые образовательные цели элективного курса по математике. В нашей модели гибридного обучения цель стоит общая для всех обучающихся, вне зависимости от формата их участия в занятии, но каждый достигает ее по своему «маршруту». Такой подход учитывает разнообразие учебных потребностей и формирует условия для эффективного усвоения математического материала как в очной, так и в дистанционной среде.

4 этап – разработка структуры курса. На этом этапе выделяются ключевые тематические блоки, формируется их последовательность с учетом особенностей усвоения математических понятий и навыков. Составляется рабочая программа элективного курса, в которой оптимально сочетаются синхронные и асинхронные занятия.

5 этап – подбор методов и средств для реализации элективного курса. В условиях современного образования гибридное обучение предполагает использование разнообразных цифровых платформ (LMS), которые поддерживают создание учебных материалов, проведение интерактивных занятий, тестирование, организацию коммуникации и управление учебным процессом. Например, для математики особенно актуальна интеграция теоретических онлайн-лекций с интерактивными практическими занятиями, использование адаптивных систем и цифровых ресурсов для самостоятельной работы и контроля знаний. Приведем примеры таких методов (табл.).

Представленный набор методов можно гибко адаптировать для любого формата. Гибридное обучение тем и ценно, что позволяет преподавателю выбирать и комбинировать подходы, оптимально соответствующие конкретным задачам, особенностям учеников и техническим возможностям образовательной среды.

Таблица

Методы обучения, используемые в очном и онлайн-форматах

Формат обучения	Методы	Описание метода
Очное обучение	Групповое обсуждение	Совместный анализ и решение задач в группе для развития критического мышления
	Практические занятия	Решение задач, лабораторные работы, моделирование
	Проектная деятельность	Создание и презентация проектов для закрепления знаний
	Мозговой штурм	Генерация идей и коллективное обсуждение решений
	Ролевые игры	Моделирование ситуаций для закрепления теории
	Дискуссии и дебаты	Аргументированное обсуждение тем
	Обратная связь	Регулярный обмен мнениями и корректировка обучения
	Игра-обучение	Включение игровых элементов для мотивации и вовлечения
	Индивидуальные консультации	Персональная помощь учителя
	Демонстрация	Показ наглядных примеров и решений
Онлайн (синхронно) обучение	Вебинары	Уроки с живым объяснением и обсуждением в режиме реального времени
	Виртуальные дискуссии	Обмен мнениями через голосовые и видеозвонки
	Совместное решение задач	Интерактивные платформы или доски для групповой работы
	Опросы и квизы	Проверка знаний в режиме реального времени
	Работа в breakout-комнатах	Разделение на маленькие группы для работы
	Обратная связь в чате	Мгновенные комментарии и вопросы
	Демонстрация экранов и материалов	Визуализация информации
	Видеоразборы	Разъяснение сложных тем на примерах
	Мотивационные тренинги	Создание позитива и активности
Игровые элементы онлайн	Использование геймификации методов	
Онлайн- (асинхронно) обучение	Видеолекции	Просмотр записанных уроков в удобное время
	Самостоятельные задания	Практика по материалам
	Тестирование и проверка знаний	Онлайн-тесты для самопроверки
	Форумы и обсуждения	Обмен мнениями и помощь друг другу
	Проектная деятельность	Самостоятельная творческая работа
	Электронные учебники	Интерактивные тексты и задания
	Ведение портфолио	Систематизация результатов обучения
	Планирование учебного времени	Развитие самоорганизации
Анализ ошибок и рефлексия	Работа над ошибками	
Мультимедиаресурсы	Обучение с видео, анимацией, симуляцией	

6 этап – диагностика, определяющая формат обучения. Далее рекомендуем произвести деление обучающихся на группы согласно выбранному ими формату участия в учебном занятии. Особое внимание хотим обратить на то, что обучающиеся делают выбор самостоятельно или основываясь на результате организованной диагностики. Диагностику можно провести в форме анкеты, где обучающимся нужно ответить на вопросы, выбрав один вариант ответа. Каждому варианту соответствует определенное количество баллов, сумма которых в итоге поможет определить формат участия обучающегося в занятии. Важно отметить, что этап выбора формата обучения – ключевой компонент существования модели гибридного обучения – субъектность обучающегося. Субъектность обучающегося – это комплекс личностно-деятельностных характеристик, проявляющийся в активной и осознанной позиции, самостоятельном принятии решений и ответственности за учебную деятельность, развитии саморегуляции и мотивации, а также способности к рефлексии и внутренней независимости.

7 этап – разработка теоретического и практического учебного материала. Данный этап предполагает создание или адаптацию учебных программ и материалов по математике для очных и дистанционных форматов с применением предложенных методов на этапе 5. Содержание всех учебных материалов должно быть одинаковым для каждой группы обучающихся, отличие лишь в формате представления.

8 этап – проведение гибридных занятий в тестовом режиме. Внедрение гибридного обучения лучше начать с тестового проведения уроков по разработанной модели. Рекомендуется внимательно наблюдать за ходом занятий, оценивая как методические, так и технические аспекты, чтобы выявить проблемы и проверить эффективность выбранных методов и средств, а также работу цифровых платформ и оборудования. Для получения обратной связи удобно использовать опросы, которые помогут внести необходимые коррективы, чтобы создать комфортные условия для всех участников учебного процесса.

9 этап – организация полноценного гибридного обучения. Процесс организации гибридного обучения можно рассматривать как пошаговое развертывание и оптимизацию всех его составляющих. Важной практикой является распределение ролей и задач между учителями и учениками для эффективного взаимодействия. Параллельно важно выстраивать системы контроля и оценки с применением как традиционных тестов и контрольных, так и онлайн-инструментов с мгновенной обратной связью. Регулярная коммуникация через очные консультации и онлайн-каналы. Предоставление доступа к материалам в любое время сочетается с мотивацией к участию в синхронных занятиях и обсуждениях. Непрерывный мониторинг позволяет своевременно корректировать методику и адаптировать содержание заданий в зависимости от результатов и отзывов. Такой системный и гибкий подход позволяет эффективно интегрировать лучшие практики очного и дистанционного обучения, значительно повышая качество и результативность образовательного процесса.

Гибридное обучение открывает перед учителями новые возможности для персонализации и повышения качества образования. Представленная статья предлагает практические рекомендации и структурно-функциональную модель, адаптированную для условий школы и специфики преподавания математики. Использование гибридных форматов позволяет учителям эффективно сочетать традиционные и цифровые методы, поддерживать высокий уровень вовлеченности обучающихся и обеспечивать гибкость учебного процесса. Это важный шаг к развитию современных образовательных практик, способствующий профессиональному росту педагогов и успешному формированию ключевых компетенций у учеников.

Библиографический список

1. Аймалетдинов Р.Т., Львова С.В., Пустовойтенко М.В., Семеняченко Ю.А., Фортунатов А.А. Особенности обучения студентов с использованием гибридных аудиторий // Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования. 2022. № 3 (61). С. 58–73.
2. Алкубаева В.С., Блинов В.С., Рубцов М.А. Анализ моделей современного смешанного и гибридного обучения // Проблемы управления качеством образования: сборник статей XIV Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 70-летию Пензенского государственного аграрного университета, Пенза, 21–22 декабря 2021 года. Пенза: Пензенский государственный аграрный университет, 2021. С. 10–13.
3. Байзаров А.Е. Гибридное обучение в университетах: модели внедрения // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы VII Международной научной конференции, Красноярск, 19–22 сентября 2023 года. Красноярск: Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2023. С. 140–143.
4. Белая книга. Гибридное обучение / Высшая школа менеджмента Санкт-Петербургского государственного университета, Мосгорпедуниверситет, Банк ВТБ (ПАО); среди авторов: О.Н. Алканова, Д.П. Ананин, К.А. Баранников, Н.Г. Стрикун и др. М.; СПб.: Грин Принт, 2022. 120 с.
5. Гимазова Л.М., Желтышева А.С., Хвостанцева Д.Г., Слепухин А.В. Методические рекомендации для учителя по организации гибридного обучения в средней школе с участием родителей // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. 2024. № 1. С. 45–51.
6. Дроботенко Ю.Б. Компетентность педагога для реализации гибридного обучения: характеристика и содержание // Тенденции развития образования: педагог, образовательная организация, общество-2022: материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Чебоксары, 23 августа 2022 года. Чебоксары: Среда, 2022. С. 169–172.

7. Каковкина М.А. Гибридное обучение как эффективный метод решения педагогической проблемы в средней и старшей школе общеобразовательного учреждения // Современные проблемы лингвистики и методики преподавания русского языка в вузе и школе. 2022. № 38. С. 173–176.
8. Лесин С.М. Основные подходы к гибриднему обучению в вузе // Большая конференция МГПУ: сборник тезисов: в 3 т., Москва, 28–30 июня 2023 года. Московский городской педагогический университет. Том 1. Москва: ПАРАДИГМА, 2023. С. 170–174.
9. Рудинский И.Д., Давыдов А.В. Гибридные образовательные технологии: анализ возможностей и перспективы применения // Вестник науки и образования Северо-Запада России. 2021. № 1. С. 1–9.
10. Ходоровская А.Л. Гибридное обучение: особенности проектирования учебного занятия // Экология медиасреды: сборник материалов V Открытой межвузовской научно-практической онлайн-конференции молодых исследователей, Москва, 21 апреля 2022 года. М.: Московский педагогический государственный университет, 2023. С. 188–196.
11. Шмелев М.К., Крылатова Я.Г. Возможности организации гибридной формы обучения в школе на уроках химии // Фундаментальные и прикладные проблемы получения новых материалов: исследования, инновации и технологии: материалы XVII Международной научно-практической конференции, Астрахань, 25–27 апреля 2023 года. Астрахань: Астраханский государственный университет имени В.Н. Татищева, 2024. С. 295–299.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММЫ WOLFRAM MATHEMATICA И ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ ГЕНЕРИРОВАНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

USING THE WOLFRAM MATHEMATICA PROGRAM AND PSEUDORANDOM SEQUENCES TO GENERATE CONTROL PAPERS

Т.К. Иконникова, Е.С. Крупицын

T.K. Ikonnikova, E.S. Krupitsyn

Wolfram Mathematica, методическое обеспечение, контрольные работы, проверка, бинарный расширенный алгоритм Евклида, линейные конгруэнтные псевдослучайные последовательности.

Рассматриваются особенности составления контрольно-измерительных материалов для студентов в современных условиях на примере темы «Бинарный расширенный алгоритм Евклида» в рамках курса «Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии» с использованием Wolfram Mathematica.

Wolfram Mathematica, methodological support, test, checking, the binary extended Euclidean algorithm, linear congruent pseudorandom sequences.

The features of compiling control and measuring materials for students in modern conditions are considered using the example of the topic “Binary extended Euclidean algorithm” in the course “Number-theoretic algorithms in cryptography” using Wolfram Mathematica.

Цифровизация врывается во все аспекты современной жизни семимильными шагами, и образование не является исключением. Однако вместе с новыми возможностями для преподавателей она приносит с собой и новые возможности для студентов, которые далеко не всегда являются положительными с точки зрения организации образовательного процесса. Ни для кого не секрет, что современные студенты все чаще пользуются нейронными сетями для написания всякого вида работ, вызывая тем самым у преподавателей необходимость тратить дополнительные ресурсы на отслеживание этого момента, пользуются различными программами для решения контрольных работ и даже собирают и хранят архивы решенных контрольных работ по предметам, которые передают «по наследству» следующим поколениям. Все это ставит для преподавателя во главу угла вопрос адекватной проверки знаний студентов, обходящих эти новые возможности. Составление каждый год новых вариантов контрольных работ и их проверка является рутинным делом, отнимая много ресурсов преподавателя, а, учитывая, что в современных реалиях учебный план не предусматривает часов на эту работу, актуальной является автоматизация этого процесса. Составление тестов не решает проблему, поскольку, во-первых, существует крайне мало ресурсов, позволяющих набор

математического текста в тесте, а, во-вторых, есть необходимость проверки всего хода решения, а не только ответа.

В качестве варианта решения этой проблемы предлагается использовать программируемую систему Wolfram Mathematica и псевдослучайные последовательности. Единожды написанная программа может заменой входных параметров псевдослучайных последовательностей генерировать столько новых вариантов, сколько это необходимо, сразу описывая все этапы решения для облегчения проверки.

Сформулируем задачу. Для некоторой алгоритмической задачи с определенными шагами решения требуется сгенерировать заданное количество различных вариантов и вывести для них пошаговое решение. Вторая часть задачи реализуется в системе Wolfram Mathematica посредством встроенных алгоритмов, и ее решение, зависящее от конкретной задачи, не составляет содержания настоящей статьи. В качестве примера будем использовать задачи по теме «Бинарный расширенный алгоритм Евклида» в рамках курса «Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии» [1].

Рассмотрим вопрос генерации нужного количества различных вариантов в системе Wolfram Mathematica с помощью использования псевдослучайных последовательностей.

Самым простым вариантом псевдослучайной последовательности является линейная конгруэнтная псевдослучайная последовательность, то есть последовательность, задаваемая формулой

$$x_{n+1} \equiv a \cdot x_n + b \pmod{m}$$

и некоторым начальным значением x_0 . Известно, например [3], что для того, чтобы период последовательности был равен m , необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

- $(b, m) = 1$;
- $p|a - 1$ для некоторого простого делителя $p|m$;
- $4|m \Rightarrow 4|a - 1$.

Поскольку задание учебное, то числа должны быть относительно небольшими, кроме того, варианты должны быть более-менее равноценными по сложности. Поэтому основные параметры задания, то есть числа a и b , генерируются в виде

$$a = 2^{s_1} \cdot p_1 \cdot p_2, \quad b = 2^{s_2} \cdot p_1 \cdot p_2',$$

где $p_1, p_2' \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, а p_2 – некоторое простое число, большее или равное 17. Степени двойки формируются в зависимости от номера варианта w следующим образом:

$$s_1 = \text{rest}(w, 4) + 1, \\ s_2 = \text{rest}(3w + 1, 4) + 1.$$

Нетрудно видеть, что $s_1 \neq s_2$ в силу того, что сравнение

$$w \equiv 3w + 1 \pmod{4}$$

неразрешимо, и значения s_1, s_2 повторяются через 4.

Выберем в качестве параметров p_1, p_2' элементы списка

$$l_1 = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

с номерами, определяемыми линейными конгруэнтными псевдослучайной последовательностями

$$x_{n+1} \equiv x_n + 3 \pmod{5},$$

$$y_{n+1} \equiv 4 \cdot y_n + 5 \pmod{6},$$

а именно: $p_1 = l_1[y_w + 1], p_2' = l_1[x_w + 1]$. Таким образом, получаем, что при генерации числа b мы использовали три последовательности с периодами, равными 4, 6 и 5, значит, получили уже 60 различных вариантов. Мы еще не указали, как выбирать параметр p_1 . Он выбирается из списка простых чисел, начинающихся с 17, длина которого n задается формулой $n = \text{Max}\{7, \lceil \frac{col}{60} \rceil\}$, где col отвечает за количество требуемых вариантов и задается пользователем в первой строке программы.

Таким образом, поменяв параметры псевдослучайных последовательностей или вид формирования основных параметров a и b , или набор исходного массива l_1 , можно мгновенно получить новый набор вариантов какой угодно длины с готовыми решениями.

Приведем начало такой программы на примере темы «Бинарный расширенный алгоритм Евклида» в рамках курса «Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии» и начало результата ее работы.

```

бинарный ае.nb * - Wolfram Mathematica 12.1
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

In[29]:= col := 10

l1 = {3, 5, 7, 9, 11, 13}; n := Max[7, Ceiling[ $\frac{col}{60}$ ]]; l2 = Table[Prime[i], {i, 7, 7 + n}];

xw = 1; yw = 1;
For[w = 1, w < col + 1, w++,
Print[Style["Вариант № ", Darker[Green], 28], Style[w, Darker[Green], 28]];
s1 = Mod[w, 4] + 1; s2 = Mod[3w + 1, 4] + 1; s3 = Mod[w, n] + 1;
xw = Mod[xw + 3, 5]; yw = Mod[4yw + 5, 6];
m1 = 2s1; m2 = 2s2; a = m1 × l2[{s3}] × l1[{yw + 1}]; b = m2 × l1[{xw + 1}] × l1[{yw + 1}];

Print[Style["Переведите числа a=", 20], Style[a, 20], Style[" и b=", 20], Style[b, 20],
Style["в двоичную систему и реализуйте для них расширенный бинарный алгоритм Евклида.", 20]];

```

Рис. 1. Начало программы «Бинарный расширенный алгоритм Евклида»

Вариант № 1

Переведите числа $a=684$ и $b=198$

в двоичную систему и реализуйте для них расширенный бинарный алгоритм Евклида.

Решение.

$$684=2 \times 342+0$$

$$342=2 \times 171+0$$

$$171=2 \times 85+1$$

$$85=2 \times 42+1$$

$$42=2 \times 21+0$$

$$21=2 \times 10+1$$

$$10=2 \times 5+0$$

$$5=2 \times 2+1$$

$$2=2 \times 1+0$$

$$a=1010101100_2$$

$$198=2 \times 99+0$$

$$99=2 \times 49+1$$

$$49=2 \times 24+1$$

$$24=2 \times 12+0$$

$$12=2 \times 6+0$$

$$6=2 \times 3+0$$

$$3=2 \times 1+1$$

$$b=11000110_2$$

$$a=2 \times 101010110_2$$

$$b=2 \times 1100011_2$$

i	a_i	b_i	x_i	y_i	u_i	v_i
0	101010110_2	1100011_2	1_2	0_2	0_2	1_2
1	10101011_2	1100011_2	110010_2	-10101011_2	0_2	1_2
2	1001000_2	1100011_2	110010_2	-10101100_2	0_2	1_2
3	100100_2	1100011_2	11001_2	-1010110_2	0_2	1_2
4	10010_2	1100011_2	111110_2	-11010110_2	0_2	1_2
5	1001_2	1100011_2	11111_2	-1101011_2	0_2	1_2
6	1001_2	1011010_2	11111_2	-1101011_2	-11111_2	1101100_2
7	1001_2	101101_2	11111_2	-1101011_2	100010_2	-1110101_2
8	1001_2	100100_2	11111_2	-1101011_2	11_2	-1010_2
9	1001_2	10010_2	11111_2	-1101011_2	110011_2	-10110000_2
10	1001_2	1001_2	11111_2	-1101011_2	1001011_2	-100000011_2

ОТВЕТ: $\text{НОД}(1010101100_2, 11000110_2) = 18 = (11111_2) \times 101010110_2 + (-1101011_2) \times 1100011_2$

или $\text{НОД}(684, 198) = 18 = (31) \times 684 + (-107) \times 198$

Рис. 2. Начало результата работы программы

В завершение нужно отметить, что, безусловно, можно использовать и другие генераторы псевдослучайных последовательностей, которых в математике известно много [1; 2; 3], однако применительно к поставленным задачам достаточно будет простейших вариантов.

Таким образом, на наш взгляд, применение псевдослучайных последовательностей в программировании в системе Wolfram Mathematica способствует уменьшению рутинного труда преподавателя и позволяет обеспечивать нужный объем обновленных дидактических материалов по алгоритмическим задачам с облегченной проверкой.

Библиографический список

1. Деза Е.И., Котова Л.В. Введение в криптографию: теоретико-числовые основы защиты информации: учебное пособие. М.: ЛЕНАНД, 2018.
2. Герман О.Н., Нестеренко А.Ю. Теоретико-числовые методы в криптографии: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. М.: Академия, 2012.
3. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Том 2. Получисленные алгоритмы. 3-е изд. М.: Диалектика, 2020.

ОБ УРОВНЕ ВЛАДЕНИЯ БУДУЩИМИ УЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ ИНСТРУМЕНТАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ON THE LEVEL OF PROFICIENCY
OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS
WITH COMPUTER MATHEMATICS TOOLS

М.А. Кейв, Н.А. Журавлева

M.A. Keiv, N.A. Zhuravleva

Профессиональная подготовка будущих учителей математики, профессиональные компетенции в области применения инструментов компьютерной математики.

Рассматривается структурно-содержательная модель профессиональной компетенции будущего учителя математики в области применения инструментов компьютерной математики в профессиональной деятельности. Представлен анализ результатов исследования уровня владения инструментами компьютерной математики выпускниками и обучающимися старших курсов бакалавриата института математики, физики и информатики Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы Математика и информатика.

Professional training of future mathematics teachers, professional competencies in the field of application of computer mathematics tools.

This article examines a structural and substantive model of professional competence for future mathematics teachers in the application of computational mathematics tools in their professional activities. It also analyzes the results of a study examining the proficiency in computational mathematics tools among graduates and senior undergraduate students of the Institute of Mathematics, Physics, and Informatics at V.P. Astafyev Krasnoyarsk State Pedagogical University, major 44.03.05 Pedagogical Education (with two training profiles), and the focus (profile) of the Mathematics and Informatics educational program.

Обучение школьников цифрового поколения невозможно представить без использования компьютерных технологий. Компьютеризация и информатизация образования сегодня отнюдь не являются внешними приметами повышения качества учебного процесса. За ними видится смена педагогической парадигмы, переход к принципиально новому типу обучения посредством организации более эффективной познавательной деятельности обучаемого. Согласно требованиям федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования, предполагается разумное и безопасное использование цифровых технологий, обеспечивающих повышение качества результатов образования и поддерживающих очное образование [9].

Умение применять системы компьютерной математики в своей будущей профессиональной деятельности уже сегодня является одним из важнейших

компонентов содержания компьютерной грамотности будущих учителей математики. Согласно федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования, будущий учитель математики должен обладать общепрофессиональной компетентностью (ОПК-9): «Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности» [8]. В рамках подготовки будущего педагога в КГПУ им. В.П. Астафьева по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) одной из основных профессиональных компетенций является (ПК-1): «Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач». Среди основных элементов компетенции ПК-1 обозначен образовательный результат (ПК-1.3): «Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные». В проекции на профессиональную деятельность будущего учителя математики, на наш взгляд, в структуру ПК-1.3 целесообразно включить требование: «Владение инструментами компьютерной математики».

Под компьютерной математикой мы будем понимать «комплексные программные средства, обеспечивающие автоматизированную, технологически единую и замкнутую обработку задач математической направленности при задании их условий на специально предусмотренном языке пользователя» [4, с. 16].

Н.А. Полищук и Ю.Н. Калайдо констатируют, что будущий учитель математики должен уметь разумно использовать информационно-коммуникационные технологии в педагогической деятельности, а процесс подготовки учителей-предметников требует внесения существенных изменений [7]. Д.А. Лактионова считает, что будущим учителям математики необходимо осуществлять подбор целесообразных цифровых ресурсов и оценивать их качество, разрабатывать новые цифровые инструменты и учиться применять цифровые технологии в будущей профессиональной деятельности [5, с. 227]. В.А. Губанов отмечает, что в процессе обучения математическим дисциплинам студентов необходимо знакомить с особенностями использования компьютера, исследовать дидактические возможности компьютера в разделах школьной математики, а в процессе методической подготовки – разработать методику включения программных средств при обучении математике в школе [2].

Рассмотрим основные технологии подготовки студентов к использованию средств информационных технологий в будущей профессиональной деятельности. Ю.А. Абраменко – в начале студенты осваивают программное обеспечение, далее создают интерактивные и динамические модели, изучают особенности использования компьютерных тренажеров, электронных образовательных ресурсов, интерактивных средств обучения в учебном процессе [1]; Л.П. Латышева, А.Ю. Скорнякова, Е.Л. Черемных – студенты разрабатывают мини-проекты дистанционных курсов по математике, составляют паспорт ЦОР с описанием воз-

возможностей его использования в обучении математике [6, с. 27]; Е.Г. Евсеева, Д.А. Скворцова – индивидуальные задания по разработке авторских средств работы в ЦОС; интегративные проекты разработки компьютерно-ориентированных и электронных уроков и сайт «Цифровой помощник учителя математики», содержащий описание процедур проектирования, создания и использования в обучении цифровых средств учебного назначения и интегративных проектов [3, с. 93].

В статье представим структурно-содержательную модель профессиональной компетенции будущего учителя математики: «Владение инструментами компьютерной математики». Среди основных уровней владения инструментами компьютерной математики выделим: недостаточный, базовый, продвинутый (табл.).

Таблица

**Структурно-содержательная модель профессиональной компетенции
будущего учителя математики:
«Владение инструментами компьютерной математики»**

Элемент компетенции	Характеристика уровня сформированности элемента компетенции		
	Недостаточный	Базовый	Продвинутый
1	2	3	4
Знание современных зарубежных и отечественных программных средств компьютерной математики	Обучающийся затрудняется перечислить зарубежные и отечественные программные средства компьютерной математики	Обучающийся уверенно перечисляет некоторые (одно или два) зарубежные и отечественные программные средства компьютерной математики	Обучающийся уверенно перечисляет разнообразные (больше двух) зарубежные и отечественные программные средства компьютерной математики
Знание в области методов, способов и приемов применения инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся недостаточно полно описывает методы, способы и приемы применения инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся достаточно полно описывает основные методы, способы и приемы применения инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся широко и подробно описывает основные методы, способы и приемы применения инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач
Умение применять инструменты компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся испытывает затруднения и не всегда верно применяет инструменты компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся уверенно и верно применяет инструменты компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач базового уровня сложности	Обучающийся уверенно и верно применяет инструменты компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач базового, продвинутого и высокого уровня сложности

1	2	3	4
Опыт применения инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся редко применяет инструменты компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся периодически применяет инструменты компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся часто применяет инструменты компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач
Отношение к деятельности, связанной с применением инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся нейтрально относится к деятельности, связанной с применением инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся проявляет интерес к деятельности, связанной с применением инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач	Обучающийся испытывает потребность в деятельности, связанной с применением инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач

На базе института математики, физики и информатики КГПУ им. В.П. Астафьева было проведено исследование уровня владения инструментами компьютерной математики выпускниками и обучающимися старших курсов бакалавриата, направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы Математика и информатика. В выборку вошли 53 респондента из числа выпускников 2025 года и обучающихся старших курсов бакалавриата.

Результаты диагностики свидетельствуют о следующем:

- зарубежные и отечественные программные средства компьютерной математики 8 % респондентов затрудняются перечислить; перечисляют некоторые – 43 %, а разнообразные – 49 %;

- описывают методы, способы и приемы применения инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов: 28 % опрошенных недостаточно полно; 57 % – достаточно полно; 15 % – широко и подробно, а в ходе решения математических задач: 28 % респондентов недостаточно полно; 55 % – достаточно полно; 17 % – широко и подробно;

- применение инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач у 43 % опрошенных вызывают затруднения; 47 % – справляются при решении задач базового уровня сложности; и только 10 % – при решении задач базового, продвинутого и высокого уровня сложности;

- 43 % респондентов отметили, что редко применяют инструменты компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач; 43 % – применяют периодически; 14 % – часто применяют инструменты компьютерной математики;

– к деятельности, связанной с применением инструментов компьютерной математики в ходе изучения математических объектов и решения математических задач, 28 % респондентов относятся нейтрально, 57 % – проявляют интерес; 15 % – испытывают потребность в такого рода деятельности.

На основании структурно-содержательной модели (таб.) был определен уровень владения инструментами компьютерной математики (рис.).



Рис. Уровень владения инструментами компьютерной математики

Полученные результаты исследования уровня владения инструментами компьютерной математики выпускниками и обучающимися старших курсов бакалавриата педагогического вуза обосновывают необходимость обязательного включения систем компьютерной математики в содержание предметной и методической подготовки будущих учителей математики.

Библиографический список

1. Абраменкова Ю.А. Обучение будущих учителей математики и информатики созданию и использованию средств икт в будущей профессиональной деятельности // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы IV Международной научной конференции: в 2 ч. Красноярск, 2020. С. 10–15.
2. Губанов В.А. Подготовка будущего учителя математики к рациональному выбору используемых программных продуктов // Научные исследования в образовании. 2009. № 2. С. 12–16.
3. Евсеева Е.Г., Скворцова Д.А. Средства подготовки будущих учителей математики к организации обучения в цифровой образовательной среде // Человеческий капитал. 2025. № 5 (197). С. 87–95.
4. Зайцева Ж.И. Методика преподавания высшей математики с применением новых информационных технологий (в техническом вузе): автореф. дис. ... канд. пед. наук. М., 2005. 27 с.
5. Лактионова Д.А. Подготовка будущих учителей математики в условиях цифровизации образования // Эвристическое обучение математике. V Международная научно-методическая конференция. Донецк, 2021. С. 224–229.
6. Латышева Л.П., Скорнякова А.Ю., Черемных Е.Л. О цифровой грамотности будущих учителей математики // Advanced Science. 2020. № 4 (19). С. 27–30.

7. Полищук Н.А., Калайдо Ю.Н. Современные тенденции в подготовке будущих учителей математики // Инновационные процессы в профессиональном образовании и его ценностно-смысловые ориентиры: материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Луганск, 2024. С. 123–125.
8. Приказ Минобрнауки России от 22.02.2018 № 125 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)». URL: <https://fgos.ru/fgos/fgos-44-03-05-pedagogicheskoe-obrazovanie-s-dvumya-profillyami-podgotovki-125/> (дата обращения: 04.11.2025).
9. Приказ Минпросвещения России от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027> (дата обращения: 04.11.2025).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ

USING THE DYNAMIC GEOMETRIC ENVIRONMENT GEOGEBRA IN THE STUDY OF ELEMENTARY MATHEMATICS AT THE UNIVERSITY

Н.А. Кириллова, Е.А. Михалкина

N.A. Kirillova, E.A. Mikhalkina

Динамическая среда GeoGebra, математическое образование, элементарная математика, замечательные точки треугольника.

В статье рассматривается возможность применения интерактивной геометрической среды GeoGebra при изучении замечательных точек треугольника на занятиях элементарной математики в вузе. Будущие учителя математики должны уметь использовать в своей профессиональной деятельности цифровые технологии, ведь этого требует современное образование.

GeoGebra dynamic environment, mathematics education, elementary mathematics, remarkable points of a triangle.

This article examines the potential of using the interactive geometric environment GeoGebra to teach remarkable points of a triangle in elementary mathematics classes at a university. Future mathematics teachers must be able to use digital technologies in their professional work, as this is required by modern education.

Современное образование в России находится в процессе цифровизации. Это касается как самого учебного процесса, так и его организации. Цифровая трансформация образования коснулась содержания образования, планируемых образовательных результатов, методов и технологий обучения, организации учебной деятельности школьников и пр. Современная школа имеет новые возможности и инструменты для обучения детей. Поэтому будущих учителей необходимо знакомить с новыми реальными возможностями цифровых технологий. Необходимость цифровизации в системе образования приводит к внесению изменений в традиционную методику изучения большинства школьных предметов. Одним из таких предметов является школьный курс геометрии.

На занятиях по элементарной математике в вузе будущих учителей математики можно познакомить с возможностями организации компьютерной поддержки обучения геометрии. Основным средством организации такой поддержки являются интерактивные геометрические среды (например, динамическая геометрическая среда GeoGebra), которые представляют собой программное обеспечение, позволяющее выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные отношения неизменными.

Удобство использования интерактивных геометрических сред в процессе обучения геометрии определяется тем, что система их операций совпадает с системой операций, характерных для самой геометрии (построить прямую, проходящую через точку; провести окружность заданного радиуса с центром в данной точке и т.д.). Кроме того, они допускают упрощение геометрических построений за счет создания инструментов для выполнения более сложных операций (деление отрезка пополам, вписывание треугольника и окружности и т.д.). Однако главным их достоинством является возможность создания динамических чертежей, которые делают видимым динамическую устойчивость и изменчивость свойств геометрических фигур.

При изучении геометрии на занятиях по элементарной математике будущих учителей математики можно познакомить с решением многовариантных задач или, как их еще называют, задачи с альтернативным условием с использованием программы GeoGebra. При решении таких задач с помощью циркуля и линейки учащиеся затрачивают колоссальное количество времени только при построении чертежей, поэтому такие задачи редко рассматривают при изучении геометрии. О положительном влиянии таких задач высказывались Т.А. Безусова, Э.Г. Гельфман, Л.М. Фридман и др. Наглядность геометрического материала позволяет учащимся усваивать знания более успешно, тем более, если они сами могут изменить параметры построения и наблюдать за текущими изменениями. Студент – будущий учитель, имеющий такой опыт решения задач, сможет помочь более эффективно школьникам усвоить материал, вникнуть в самую суть проблемы.

Приведем пример построения чертежа к многовариантной задаче с использованием GeoGebra. Рассмотрим пример: в равнобедренном треугольнике со сторонами 10 и 13 см найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник. В условии задачи не говорится, какие именно стороны равны 10 и 13, поэтому у этой задачи будет два решения и, соответственно два чертежа.

Студентам предлагается рассмотреть первое решение, когда боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10, а основание 13. Учащимся необходимо будет выполнить следующие шаги:

1) Для того, чтобы построить равнобедренный треугольник с фиксированными длинами, потребуется построить отрезки длиной 10 и 13 (инструмент – отрезок с фиксированной длиной).

2) Далее необходимо начертить прямую EF и, используя инструмент циркуль, построить окружность диаметром 13, взяв за центр точку E . Пересечение окружности с прямой обозначить точкой H .

3) Вторую окружность с диаметром 13 начертить, взяв за центр точку H . Провести перпендикуляр, опущенный из точки пересечения двух окружностей к прямой EF . Построить окружность диаметром 10, взяв за центр точку E , и отметить за L точку пересечения перпендикуляра к прямой и данной окружности.

4) Соединить точки ELH и получить треугольник, у которого $EL=LH=10$ и $EH=13$.

5) После найти точку пересечения биссектрис и построить вписанную окружность.

б) Найти пересечение окружности со стороной треугольника, провести прямую и найти радиус вписанной окружности (рис.).

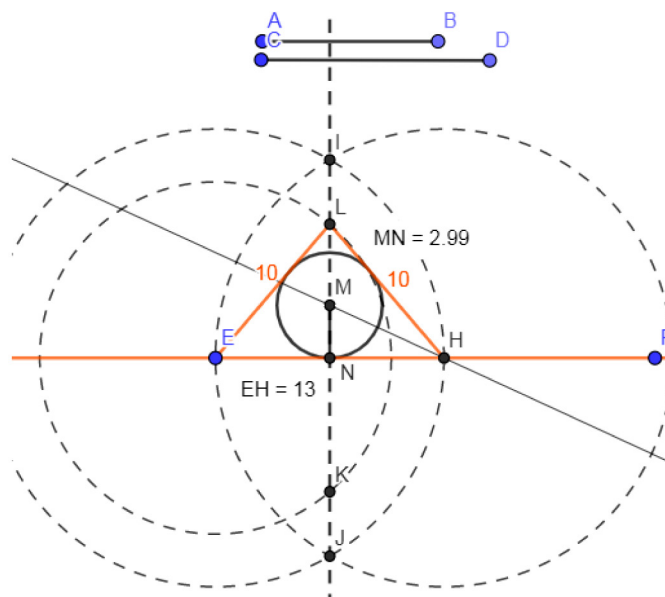


Рис. Динамический чертеж


Легко и быстро выявить все способы реализации условия многовариантной задачи помогает интерактивная геометрическая среда, так как динамическая модель, выполненная по данным задачи, позволяет изменять значения величин и взаимное расположение отдельных элементов чертежа [3]. Для начала студентам можно предложить осуществить предложенный алгоритм решения этой задачи. Позже они самостоятельно смогут решать подобные задачи.

Приведем другой способ построения модели к этой задаче в табл..

Таблица

Построение модели к задаче

	<p>1. Построить два ползунка a и b для варьирования длин равнобедренного треугольника</p>
	<p>2. Построить основание треугольника AB – отрезок по точке и длине a, с отображением на чертеже значения его длины</p>
	<p>3. Построить вершину C как точку пересечения окружностей с центрами в точках A и B и радиусом b. Соединить точку C с A и B отрезками, отображением на чертеже значения длин</p>

	<p>4. Построить окружность, вписанную в треугольник:</p> <ul style="list-style-type: none"> – биссектрисы углов A и C; – центр окружности как точку их пересечения; – точку касания как пересечение основания с биссектрисой угла C; – окружность по центру и точке касания
<p>$a = 0$</p>  <p>$b = 0$</p> 	<p>5. Установить ползунки a и b на нулевые отметки.</p> <p>6. Передвигая движки ползунков, получить два альтернативных чертежа к задаче</p>

Таким образом, данную задачу можно разрешить двумя способами, используя одно изменяющееся динамическое построение, что повысит навыки построения учащихся не только в данной геометрической среде, но и с помощью циркуля и линейки в ходе использования инструмента «циркуль».

Благодаря этому инструменту студенты могут изменять параметры построенной фигуры (менять длины сторон, углы и т.д.). Таким образом, им потребуется один треугольник, который они могут изменять и рассматривать, как будет изменяться радиус вписанной окружности.

Решению многовариантных задач следует уделять время с первых занятий элементарной математики, где можно сначала использовать не особо сложные задачи, чтобы студенты научились тому ходу мышления, которое предполагает несколько вариантов развития. Затем усложнить задания.

Таким образом, использование математической программы GeoGebra на занятиях элементарной математики при изучении замечательных точек треугольника вносит движение в преподавание геометрии. Построение динамических чертежей при решении планиметрических задач делают процесс решения более наглядным и осязаемым, что способствует не только качественному усвоению материала, но и развитию познавательного интереса студентов.

Библиографический список

1. Безумова О.Л. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие. Архангельск: КИРА, 2011.
2. Овсянникова Т.Л. Использование программы GeoGebra на уроках геометрии в школе // Педагогические и психологические технологии в условиях модернизации образования. Самара: АЭТЕРНА, 2017. С. 166–170.
3. Сергеева Т.Ф. Наглядная планиметрия. GeoGebra: учебное пособие для 8 класса. М.: Илекса, 2018.
4. Смирнов В.А. Геометрия с GeoGebra: планиметрия. М.: Прометей, 2018.

ПРОВЕДЕНИЕ МЕРОПРИЯТИЙ ПО РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРАЕВЕДЧЕСКИХ ЗАДАЧ

CONDUCTING EVENTS FOR SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS OF LOCAL LORE

Е.Г. Киркина

E.G. Kirkina

Математическое образование, краеведческие задачи, популяризация, математическая культура, образовательный процесс.

Данная статья посвящена описанию опыта организации мероприятий по решению краеведческих математических задач. Обосновывается необходимость проведения конкурса краеведческих математических задач. Краеведческие задачи позволяют моделировать деятельность детей и возможность их использования в образовательном процессе.

Mathematical education, local history problems, popularization, mathematical culture, educational process.

This article is devoted to the experience of performing mathematical tasks. The necessity of holding a contest of local history mathematical problems is justified. Local history problems allow you to model the activities of children and the possibility of their use in the educational process.

Во многих регионах России, таких как Ярославской, Ленинградской, Саратовской, Астраханской областях, Хакасии, Татарстане, Башкортостане, педагоги используют краеведческие задачи на уроках математики [1]. Поэтому опыт российских регионов в разработке и использовании на уроках математики задач краеведческого содержания представляет интерес. Математической задачей можно назвать рассказ, в который введены значения некоторых величин, и необходимо найти другие известные значения величин, которые зависят от данных и связаны с ними определенными соотношениями, о чем указано в условии [1]. Согласно точке зрения Л.М. Фридмана, задачей является «требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче» [9]. Задача – это проблема, которая требует разрешения, т.е. обучение решению задач по математике – один из путей решения проблемы и является эффективным средством формирования методов математического мышления и математической деятельности [9]. В Рязанской, Костромской, Тюменской и Ростовской областях изданы сборники задач по математике с использованием краеведческого материала [4]. Учителя отмечают, что необходимо привлекать детей к составлению задач с применением краеведческого компонента. И как бы учебник ни был прекрасно составлен, он не может удовлетворить потребности учащихся в познании своего края [3], поэтому объясняется необходимость издания подобных сборников задач. Например, в книге Н.И. Мерлиной «Фольклорные и краеведческие математические задачи народов России» представлены фольклорные и краеведческие математические задачи народов России, проживающих в Астраханской области, Бурятии,

Татарстане, Удмуртии, Чувашии, Якутии и других регионах. В той же монографии в первой главе представлены краеведческие математические задачи города Архангельска [4] на фольклорном, историческом и краеведческом материале. Этот материал можно использовать в качестве средства в учебной и познавательной деятельности по овладению математическими знаниями, с извлечением научной информации в процессе интеллектуального труда по составлению и решению математических задач из истории родного народа [4]. Математические задачи, кроме выполнения обучающей функции, могут быть использованы и в целях популяризации математического образования.

Для примера представим несколько условий задач из сборника Н.И. Мерлиной о Соломбале: Задача 1. С 1986 г. завод отремонтировал судов в 6 раз больше, чем построил лихтеров. Сколько лихтеров построил завод, если всего построено и отремонтировано 70 судов? Задача 2. Соломбальцы с «Красной кузницы» героически сражались на фронтах Великой Отечественной войны. Только три цеха: корпусной, трубопроводный и кузнечный дали фронту 280 человек. Корпусной цех дал в 7,4 раза больше людей, чем кузнечный, а из кузнечного цеха ушло на фронт на 45 человек меньше, чем из трубопроводного. Сколько человек дал фронту каждый цех? Учитель Л.П. Глазунова при проведении урока закрепления изученного материала по теме «Натуральные числа» использовала задачи, посвященные Маргаритинской ярмарке г. Архангельска [2].

Одним из способов привлечения внимания учеников школ, педагогов Архангельской области к использованию краеведческих задач на уроках математики является проведение ежегодного областного Конкурса краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах». Конкурс организуется с целью повышения интереса школьников к математике, традициям, культуре и истории родного края, для развития краеведческой деятельности. Он проходит в Архангельске с 2013 года [7], после опыта был успешно внедрен коллегами из других регионов России, например, в Чувашии, Астрахани. В Архангельской области категория участников Конкурса краеведческих задач со временем расширилась: первый Конкурс был рассчитан на учащихся 5–11 классов, в пятом Конкурсе могли участвовать уже учащиеся общеобразовательных школ со 2 по 11 класс. Задачи финалистов и участников первого Конкурса «Архангельская область в математических задачах» стали основой для проведения нового Конкурса по решению краеведческих математических задач «Реши задачу – узнай об Архангельском крае» [7]. В основном это были алгебраические задачи, которые содержали сведения об исторических, культурных и природно-географических особенностях Архангельской области. Из опыта Республики Чувашия в организации Конкурса для школьников: с 2015 года проходит Конкурс краеведческих математических задач для школьников: «Чувашская Республика в математических задачах». Он проводится в трех возрастных группах: среди учеников 1–4 классов, 5–8 классов и 9–11 классов. На Конкурс принимались сюжетные математические задачи, фабула которых строится на краеведческом материале о Чувашской Республике [4]. Аналогичный Конкурс стал проходить и в Республике

Татарстан – конкурс краеведческих математических задач «Татарстан в математических задачах», который проходил в Казани [8].

Таким образом, все больше российских регионов подхватили инициативу проведения Конкурсов краеведческих математических задач для формирования математической деятельности школьников и привлечения внимания учеников школ, педагогов и общественности к использованию краеведческих задач на уроках математики.

Библиографический список

1. Белошистая А.В. Формирование и развитие математических способностей дошкольников: Вопросы теории и практики: курс лекций для студ. дошк. факультетов высш. учеб. заведений. М.: ВЛАДОС, 2003. 400 с.
2. Глазунова Л.П. Математическое путешествие по Маргаритинской ярмарке // Северная Двина. 2007. № 2. С. 40–44.
3. Корощенко Н.А., Кушнир Т.И. Этнографическое региональное содержание как фактор формирования творческой активности учащихся в процессе обучения математике // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2015. № 6. С. 504–508.
4. Мерлина Н.И., Мерлин А.В., Карташова С.А. и др. Математические задачи на основе фольклорного и краеведческого материала народов России (часть 1) // Математика в школе. 2012. № 7. С. 49–58. URL: Библиотека ИМИКТ.
5. Областной конкурс краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах». URL: <http://www.uchportfolio.ru/s1366183020?page=14069> (дата обращения: 29.10.2020).
6. Томилова А.Е. Использование краеведческих математических задач при обучении математике в школе // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П.А. Ларичева / М-во обр. и науки РФ; Вологод. гос. ун-т; Вологод. отд. науч.-метод. совета по матем.; Яросл. гос. пед. ун-т. им. К.Д. Ушинского. Вологда: ИП Киселев А.В., 2017. С. 273–277.
7. Томилова А.Е., Конечная Т.А. Краеведческие математические задачи как средство популяризации математических знаний и продуктивности математического образования // Технологии продуктивного обучения математике: традиции и инновации: сборник статей участников Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Арзамас, 2016. С. 95–98.
8. Фазлеева Э.И. Республиканский конкурс краеведческих математических задач. URL: <http://kpfu.ru/math/malyjimm/konkurs-kraevedcheskih-zadach/> (дата обращения: 15.11.2020).
9. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов сред. школы. 3-е изд., доработанное. М.: Просвещение, 1989.

ЦИФРОВОЙ РАБОЧИЙ ЛИСТ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

A DIGITAL WORKSHEET AS A MEANS OF DEVELOPING STUDENTS' FUNCTIONAL LITERACY

Е.М. Лапшина

E.M. Lapshina

Цифровой рабочий лист, функциональная грамотность, интерактивное обучение, математическое образование, Яндекс Формы, школьное образование.

В статье рассматривается роль цифровых рабочих листов как эффективного инструмента развития функциональной грамотности обучающихся. Анализируются преимущества и ограничения использования цифровых технологий, особое внимание уделяется Яндекс Формам. Исследуются направления функциональной грамотности и их влияние на социальное и профессиональное развитие личности. Представлены практические примеры заданий. Результаты исследования могут быть использованы педагогами для повышения качества образовательного процесса.

Digital worksheet, functional literacy, interactive learning, mathematical education, Yandex Forms, school education.

The article examines the role of digital worksheets as an effective tool for developing students' functional literacy. The advantages and limitations of using digital technologies are analyzed, with special attention being paid to Yandex Forms. The directions of functional literacy and their impact on the social and professional development of a personality are investigated. Practical examples of tasks are presented. The research results can be used by teachers to improve the quality of the educational process.

В условиях стремительной цифровизации всех сфер жизни появляются новые требования к уровню функциональной грамотности обучающихся. Современный человек должен не только владеть базовыми предметными знаниями, но и уметь применять их в реальных жизненных ситуациях, работать с информацией в цифровой среде, критически оценивать данные и принимать обоснованные решения. Для этого можно использовать интерактивный рабочий лист, который выступает перспективным педагогическим инструментом, позволяющим внедрять цифровые технологии в образовательный процесс и целенаправленно развивать ключевые компетенции обучающихся, повышать уровень практического применения знаний. Цель данной статьи – описать роль цифровых рабочих листов в развитии функциональной грамотности обучающихся.

Согласно обновленным федеральным государственным образовательным стандартам, функциональная грамотность определяется как способность решать учебные задачи и жизненные проблемные ситуации на основе сформированных предметных, метапредметных и универсальных способов деятельности, включающая овладение ключевыми компетенциями, составляющими основу готовности к успешному взаимодействию с изменяющимся миром и дальнейшему успешному образованию [4].

На данный момент принято выделять следующие основные направления функциональной грамотности: читательская, математическая, естественно-научная, общекультурная грамотность, креативное мышление, финансовая и правовая грамотность и ряд других, возникающих в ответ на потребности общественного развития [3].

Недостаток формирования функциональной грамотности на уроках математики в школе может привести к серьезным проблемам в будущем. Во-первых, это чревато трудностями в социальной адаптации: математические задачи часто требуют совместной работы, аргументации своей позиции и понимания логики других людей. Во-вторых, отсутствие базовых математических компетенций напрямую влияет на финансовую грамотность. В-третьих, математика развивает критическое мышление и способность к логическому анализу – без этих навыков человек теряет способность критически оценивать информацию. Таким образом, недостаточное внимание к формированию функциональной грамотности на уроках математики не только ограничивает личностное и профессиональное развитие человека, но и повышает его уязвимость в современном информационном и экономическом пространстве.

Удобное средство формирования и развития функциональной грамотности – цифровой (интерактивный) рабочий лист, под которым понимают электронный рабочий лист, созданный учителем для совместной работы на уроке или самостоятельной работы ученика [1].

Интерактивные рабочие листы обладают рядом преимуществ по сравнению с другими электронными и бумажными ресурсами: могут содержать краткий теоретический материал и интерактивные задания [2], позволяют мгновенно осуществлять проверку, удобны для распространения, легко редактируются и способствуют повышению мотивации учеников за счет современных форматов работы. Однако у цифровых рабочих листов есть и недостатки: зависимость от технического оснащения, ограничение во времени по использованию цифровых ресурсов на уроке, трудоемкость разработки качественных интерактивных материалов для педагога. Из сказанного следует, что эффективность цифровых рабочих листов во многом зависит от умелого сочетания их сильных сторон с учетом возможных ограничений.

Существует множество различных сайтов для создания интерактивного образовательного контента: FlikTop, Interacty, Wordwall, Liveworksheets, Wizer.me, Яндекс Формы, «Квестодел» и другие. Каждый из них имеет свои плюсы и минусы. При выборе ресурса педагогу важно убедиться, что сервис включен в перечень допустимых Министерством образования.

Остановимся на платформе Яндекс Формы, которая представляет собой бесплатный онлайн-сервис для создания интерактивных форм, опросов, тестов и викторин. Он может быть полезен для составления рабочих листов, но имеет как преимущества, так и ограничения. Среди плюсов простота использования, разнообразие типов вопросов (рис. 1), автоматическая обработка данных, доступность на разных устройствах, интеграция с другими сервисами, например, Яндекс Диск, бесплатный доступ, выбор и создание темы для рабочего листа.

К минусам же можно отнести ограниченные возможности для создания сложных интерактивных заданий, ограниченную визуализацию, зависимость от интернета, отсутствие встроенных функций для совместной работы.



Рис. 1. Виды вопросов на платформе Яндекс Формы

Рассмотрим несколько заданий, которые можно предложить обучающимся.

Задача 1. Проанализируйте ситуацию и ответьте на вопросы. Семья собирается в отпуск на машине. Расстояние до места отдыха – 1200 км. Автомобиль расходует в среднем 8 литров бензина на 100 км. Цена бензина – 50 рублей за литр.

1. Сколько литров бензина потребуется на всю поездку туда и обратно?
2. Сколько денег потребуется на бензин для поездки туда и обратно?
3. Если семья сделает 2 остановки для заправки, сколько бензина нужно заливать при каждой заправке?
4. Предложи более экономичный маршрут, если есть альтернативный путь длиной 1500 км, но с расходом топлива 7 литров на 100 км. Что будет выгоднее?

Задача 2. Проанализируйте круговую диаграмму, на которой представлено распределение времени школьника в течение дня, и ответьте на вопросы. Справочная информация: сон – 30 %, учеба в школе – 25 %, домашние задания – 15 %, отдых и развлечения – 20 %, еда и личная гигиена – 10 %.

1. Сколько часов в сутки школьник спит?
2. На сколько процентов время, затраченное на учебу в школе, больше времени на домашние задания?
3. Сколько часов в день школьник тратит на отдых и развлечения?

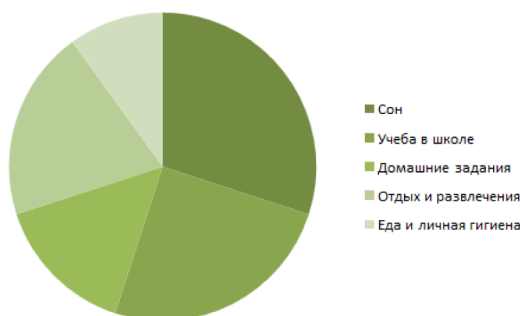


Рис. 2. Распределение времени школьника в течение дня

Исследование показало, что цифровые рабочие листы являются эффективным инструментом развития функциональной грамотности обучающихся, сочетающим интерактивность, удобство использования и возможности мгновенной проверки. При этом их результативность зависит от грамотного сочетания преимуществ с учетом существующих ограничений. Платформа Яндекс Формы демонстрирует потенциал для создания базовых интерактивных материалов, способствующих повышению мотивации учащихся и улучшению качества усвоения материала, однако требует комплексного подхода к внедрению в образовательный процесс.

Библиографический список

1. Мозговая М.П. Создание рабочих интерактивных листов с помощью сервисов wizer.me, liveworksheets и применение их на уроках математики // Форум. 2022. № 2 (25). С. 89–92.
2. Николаева К.А. Использование интерактивных рабочих листов на уроках математики в основной школе // RATIO ET NATURA. 2023. № 1 (7).
3. Пакина Т.А. Развитие функциональной грамотности и формирование понятия «функциональная грамотность» в России // Вестник педагогических наук. 2022. № 5. С. 201–206.
4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: утв. приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г. № 287. URL: <https://base.garant.ru/401433920/53f89421bbdaf741eb2d1ecc4ddb4c33/> (дата обращения: 02.11.2025).

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЙ ИНТЕГРАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

ON THE ISSUE OF THE IMPLEMENTATION
OF INTERDISCIPLINARY INTEGRATION
IN TEACHING MATHEMATICS TO STUDENTS
OF INFORMATION TRAINING AREAS

Т.Н. Логиновская, Н.А. Лозовая

T.N. Loginovskaya, N.A. Lozovaya

Обучение математике, междисциплинарная задача, интеграция, студент, информационные направления подготовки.

В работе актуализирована роль междисциплинарной интеграции при обучении математике студентов информационных направлений подготовки. Рассмотрены этапы междисциплинарного взаимодействия и обозначены трудности и пути их решения при реализации междисциплинарной интеграции. Представлен пример междисциплинарной задачи и ее решение.

Teaching mathematics, interdisciplinary task, integration, student, information training areas.

This paper highlights the role of interdisciplinary integration in teaching mathematics to students majoring in information science. It examines the stages of interdisciplinary collaboration and identifies challenges and solutions to implementing interdisciplinary integration. An example of an interdisciplinary problem and its solution are presented.

Квалифицированному инженеру в области информационных технологий важно обладать рядом профессиональных компетенций, связанных с готовностью работать с возрастающим объемом информации и анализом данных, разработкой программного обеспечения для решения инновационных задач. В связи с этим одним из перспективных направлений в обучении студентов информационных направлений подготовки при изучении дисциплин естественно-научного и профессионального циклов является интеграция знаний и практических умений нескольких дисциплин. В этом случае, многократно применяя знания по математике за ее рамками в новых условиях, студент развивает умения использовать знания в различных ситуациях и, в том числе, профессиональной деятельности [2].

Цель настоящей работы заключается в описании приема реализации междисциплинарной интеграции при обучении математике студентов информационных направлений подготовки.

Реализация междисциплинарной интеграции сопряжена с использованием междисциплинарных задач, решение которых основано на знаниях из нескольких дисциплин [1], имеющих прикладную направленность, что в дальнейшем

способствует вовлечению обучающихся в проектную деятельность при изучении математики [3]. При выполнении междисциплинарных задач важно учитывать уровень интеграции. О.В. Ноговицина, С.М. Головизнин, Д.Р. Хамзина и А.В. Сарапулова придерживаются трех уровней интеграции математики и физики: выявление междисциплинарных связей ранее изученного и текущего учебного материала на уровне понятий; выявление общих закономерностей и моделирование физических процессов посредством математического аппарата; формулирование выводов путем обобщения знаний и практических умений на стыке различных областей [4]. Распространение предложенного приема на различные дисциплины с учетом прикладного аспекта решаемых задач позволяет организовать междисциплинарную интеграцию в процессе обучения математике.

На кафедре высшей математики СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева накоплен определенный опыт реализации междисциплинарной интеграции в процессе изучения дисциплин математического цикла, при этом целесообразно выделить несколько ее этапов.

На первом этапе, когда студенты только приступают к изучению высшей математики и других дисциплин, сложно в полной мере осуществить междисциплинарную интеграцию. Здесь важно уделить внимание рассмотрению задач, для решения которых необходимо применение знаний нескольких разделов математики и интеграция знаний двух дисциплин, например, математики и информатики, что позволяет, в частности, решать задачи линейной алгебры при использовании прикладных компьютерных программ. В дальнейшем приобретенный опыт применяется на следующих этапах.

На втором этапе, по мере накопления математических и специальных знаний, целесообразно использовать задачи, решение которых опирается на несколько дисциплин. Например, при решении электротехнической задачи по расчету цепей синусоидального тока приходится оперировать комплексными значениями электрических величин, составить систему уравнений и решить ее, используя прикладные компьютерные программы.

На третьем этапе студентам предлагаются задачи творческого блока, которые могут быть использованы для студенческих конференций. Приведем пример задачи, рассмотренной со студентами второго курса направления подготовки «Программная инженерия» для выступления на конференции.

Пояснительная записка: колебательные движения механических систем описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило нелинейных, относительно обобщенных координат системы [6]. Требуется исследовать механический колебательный процесс методами линейной алгебры с использованием компьютерных технологий.

Формулировка задачи. Два жестких стержня, для каждого из которых известна масса и длина, соединены идеальным шарниром и подвешены на трех пружинах, жесткость каждой из которых также известна. Определить закон, по которому совершаются малые свободные колебания данной системы при заданных начальных условиях.

Этапы решения задачи: адаптация алгоритма метода для решения поставленной физической задачи; составление программы на языке C++, реализующей данный алгоритм; нахождение закона, по которому совершаются малые свободные колебания системы при начальных условиях $X_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$,

$$X_0' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} & \frac{2}{m} & -\frac{1}{m} \end{bmatrix}^T.$$

Используя разработанную программу, студенты решили поставленную задачу: найден закон малых свободных колебаний системы

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.628 \\ -0.46 \\ 0.628 \end{bmatrix} 0.288 \cos\left(1.256t + \frac{\pi}{2}\right) + \begin{bmatrix} 0.325 \\ 0.888 \\ 0.325 \end{bmatrix} 0.288 \cos\left(0.65t - \frac{\pi}{2}\right).$$

С помощью прикладных компьютерных программ также был представлен график колебания выбранных точек.

Отметим, что при использовании созданной студентами программы пользователь, анализируя поставленную задачу, выбирает обобщенные координаты и задает: количество значительно отклоняющихся точек; точность вычисления, применяемую в методе Якоби; массу стержней, которая может быть неодинаковой для всех стержней; жесткость пружин, которая также может быть различной для всех пружин; начальные условия (если требуется найти частное решение) [5].

Обобщение вышеизложенного позволяет сформулировать трудности, возникающие при реализации междисциплинарной интеграции математических и профильных дисциплин, а именно: адаптация учебного материала к разному уровню начальной математической подготовки студентов; синхронизация рабочих программ дисциплин; потребность во временном ресурсе для подготовки междисциплинарных задач преподавателями и решения их студентами.

Для устранения обозначенных трудностей могут быть предложены следующие меры: усиление прикладной направленности обучения, использование компьютерных программ и электронных образовательных ресурсов, разбиение тем на короткие независимые разделы различного уровня сложности, межкафедральное сотрудничество и административная поддержка для обеспечения взаимодействия участников учебного процесса.

В совокупности перечисленные меры ориентированы на способности обучающихся, синхронизацию учебного процесса и формирование целостного представления о предмете исследования.

Библиографический список

1. Васильева Л.Н., Володина Е.В., Ильина И.И. Междисциплинарные задачи как средство развития профессиональной компетентности студентов технических направлений // Проблемы современного образования. 2019. № 6. С. 220–231.

2. Логиновская Т.Н., Вопилова Л.В. О концепции интеграции знаний естественно-научных и специальных дисциплин // Образовательные ресурсы и технологии. 2016. № 2 (14). С. 51–55.
3. Лозовая Н.А., Сомова М.Н. Ключевые аспекты в обучении математике студентов информационных направлений подготовки // Современные проблемы науки и образования. 2024. № 4. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=33638> (дата обращения: 07.10.2025).
4. Ноговицина О.В., Головизнин С.М., Хамзина Д.Р., Сарапулова А.В. Методические аспекты реализации интегрированного обучения математике и физике в техническом вузе // Педагогическое образование. 2023. Т. 4, № 3. С. 156–161.
5. Першин А.А., Чумаков И.С., Щербаков И.Б. Программное обеспечение нахождения закона малых свободных колебаний средствами линейной алгебры // Молодые ученые в решении актуальных проблем науки: сб. материалов Всер. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Красноярск: СибГУ им. М.Ф. Решетнева, 2020. С. 568–570.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения: учебник для вузов. М.: Ленанд, 2024. 312 с.

ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ: ПРИМЕР ФОРМИРОВАНИЯ ОПЫТА ПО СОЗДАНИЮ ЦИФРОВЫХ УЧЕБНЫХ МАТЕРИАЛОВ

TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS: AN EXAMPLE OF CREATING DIGITAL EDUCATIONAL MATERIALS

О.В. Макеева, А.С. Ашихмин

O.V. Makeeva, A.S. Ashikhmin

Цифровые компетенции учителя, педагогическое математическое образование, инструменты LaTeX и GeoGebra, преобразование графиков элементарных функций.

Цифровые компетенции являются необходимым инструментарием успешной работы педагога-предметника в современной системе образования. Описан практический опыт организации учебной деятельности студентов 1-го курса – будущих учителей математики, направленной на комплексное формирование предметно-методических и цифровых компетенций в ходе разработки дидактических учебных материалов по теме «Преобразование графиков элементарных функций» в рамках учебной практики по математике.

Digital competencies of a teacher, pedagogical mathematical education, LaTeX and GeoGebra tools, transformation of graphs of elementary functions.

Digital competencies are a necessary tool for a subject teacher to work successfully in the modern education system. The article describes the practical experience of organizing the educational activities of 1st-year students – future mathematics teachers, aimed at the comprehensive formation of subject-methodical and digital competencies in the course of developing didactic educational materials on the topic “Transformation of graphs of elementary functions” within the framework of the mathematics training practice.

Характерной чертой современной системы образования является ее цифровизация. Эта общемировая тенденция связана с активным развитием и внедрением во все сферы жизни современного общества цифровых технологий. Стратегический уровень управления цифровой трансформацией образования в России регламентируется распоряжением Правительства РФ¹. Одним из положений стратегии является подготовка преподавателей и студентов к работе с цифровыми инструментами. При этом важную роль среди качественных показателей, формирующих оценку изменений процесса цифровой трансформации образовательной системы, играет уровень подготовки педагогических кадров [6, с. 142].

Сформированность цифровых компетенций действующих педагогов постоянно находится в фокусе внимания исследователей [4]. Существуют различные подходы к классификации цифровых компетенций учителей. Опираясь на работу

¹ Об утверждении стратегического направления в области цифровой трансформации образования, относящейся к сфере деятельности Министерства просвещения РФ, и признании утратившим силу распоряжения Правительства РФ от 2 дек. 2021 г. № 3427-р [Электронный ресурс] : Распоряжение Правительства РФ от 18 окт. 2023 г. № 2894-р. Доступ из информ.-правовой системы «Гарант».

сотрудников Санкт-Петербургской академии постдипломного педагогического образования, выделим:

- информационные компетенции;
- коммуникационные компетенции;
- медиакоммуникацию;
- информационную безопасность;
- технологические компетенции [3, с. 1].

Рассмотрим подробнее компетенции, которые непосредственно необходимы учителю для создания цифровых дидактических материалов в текстовом формате – самом распространенном формате представления учебной информации.

Это информационные компетенции, которые включают [3, с. 20]:

- 1) умения представлять информацию, то есть излагать информацию кратко и точно, в том числе письменно, опираясь на законы логического построения текстов;
- 2) умения находить информацию;
- 3) умения сохранять информацию, в том числе формализовать, структурировать и преобразовывать информацию к табличному и схематичному виду, знать особенности сохранения информации в цифровом виде.

Это медиакомпетенции, которые предполагают [3, с. 32]:

- 4) обработку текста, в том числе умение работать в текстовом редакторе, знание правил стилевого оформления текста;
- 5) обработку графики, в том числе понимание свойств и различий растровой и векторной графики, умение создавать векторные рисунки и редактировать растровые изображения.

Очевидно, что формирование этих компетенций должно начинаться в педагогическом вузе, что и отражено в рабочих учебных планах программ бакалавриата по направлению подготовки Педагогическое образование. Однако предусмотренные планом учебные дисциплины и практики в подавляющем большинстве случаев не предполагают взаимодействия с предметным содержанием образования. Они направлены на формирование универсальных умений, необходимых любому учителю независимо от его профиля. Особенности предмета, свойственная ему специфика представления учебных материалов остаются вне поля зрения. Но именно они играют ключевую роль в эффективности работы учителя-предметника.

Особое положение в данном проблемном поле занимает учитель математики. Подготовка качественных учебных математических текстов, изобилующих аналитической и графической информацией, требует специальной подготовки и использования специальных инструментов. Хорошим примером такого инструмента служит профессиональная система набора текста LaTeX [5]. Изучение возможностей LaTeX может быть организовано в рамках аудиторной и самостоятельной внеаудиторной работы студентов по инициативе самих студентов и преподавателей [1; 2].

Очевидно, что освоение будущими учителями математики инструмента LaTeX как инструмента создания учебного контента в текстовом формате может и должно осуществляться на предметном математическом материале. При этом более раннее освоение LaTeX расширяет временные границы его использования в рамках учебной деятельности студентов в вузе.

В ФГБОУ ВО УлГПУ им. И.Н. Ульянова примером успешной образовательной площадки для организации знакомства и освоения некоторых возможностей системы LaTeX для студентов направления подготовки Педагогическое образование с профилем «Математика» стала «Учебная практика по математике» обязательной части Блока 2. «Практика» предметно-методического модуля по профилю «Математика».

Эта практика проходит в первом семестре и имеет объем 3 зачетные единицы. Формат практики (а не учебной дисциплины) позволяет студентам в свободной, творческой атмосфере образовательной среды получить опыт будущей профессиональной деятельности. При этом в ходе работы продуктивно реализуются возможности формирования у студентов компетенций, предусмотренных учебным планом (табл. 1).

Таблица 1

**Компетенции, формирование которых планируется
в рамках учебной практики по математике**

Универсальные компетенции	Профессиональные компетенции
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач
УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности	ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО

В одном из отчетных заданий в рамках данной практики студентам предлагается разработать и оформить в цифровом формате дидактический материал. В качестве предметного математического содержания этого задания выбрана тема «Элементарные функции, их свойства и графики». Результат работы должен содержать полное, структурированное, подробно комментированное решение задачи по преобразованию графика сложной элементарной функции, содержащей знак модуля. Данная тема изучается в школьном курсе математики. Актуализация материала в вузе необходима для устранения пробелов в знаниях и является залогом успешного освоения курса математического анализа.

Выполнение задания «Постройте график функции. Выделите этапы преобразования графика и опишите каждый этап» организовано для студентов в малых группах, предполагает наличие методического обеспечения и проходит в несколько этапов (таблица 2). Предусмотрено комбинирование групповых и индивидуальных форм работы, аудиторной и самостоятельной внеаудиторной работы. Очевидно, что студентам потребуются самостоятельный поиск недостающей информации и консультирование по проблемным вопросам у преподавателя. Результатом работы должен стать качественный образовательный продукт, который может послужить основой для разработки серии дидактических материалов и может быть использован в реальной педагогической практике учителя математики.

**Этапы организации работы студентов по выполнению задания
на преобразование графика сложной функции**

№ п/п	Форма работы	Содержание работы	Методическое обеспечение	Представление результата
1.	Аудиторная, внеаудиторная; в малой группе	Выделение этапов построения графика сложной функции путем элементарных преобразований графика	Документ № 1 в формате pdf, содержащий перечень элементарных преобразований графиков функций и пример – иллюстрацию структурированного в виде таблицы выделения и описания этапов построения графика функции	Рукописная запись в тетради одна от малой группы
2.	Аудиторная, внеаудиторная; в малой группе	Построение графиков функций каждого из выделенных этапов преобразования (п. 1)	Документ № 2 в формате pdf, содержащий пример выполнения в системе LaTeX задания из документа № 1	Рукописная запись в тетради одна от малой группы
3.	Аудиторная, внеаудиторная; в малой группе	Разработка макета документа, в котором оформлено выполнение задания (пп. 1-2)	Документ № 2 в формате pdf, содержащий пример выполнения в системе LaTeX задания из документа № 1	Рукописная запись в тетради одна от малой группы
4.	Аудиторная, внеаудиторная; в малой группе / индивидуально	Создание документа в системе LaTeX (п. 3)	Документ № 3 в формате txt, содержащий справочную информацию о возможностях оформления материалов в LaTeX (программный код) Документ № 4 в формате pdf, результат компиляции программного кода из документа № 3 в pdf формат	Документ с программным кодом в формате tex Результат компиляции документа в формате pdf один от малой группы / индивидуально
5.	Аудиторная, внеаудиторная; индивидуально	Создание и экспортирование в графическом калькуляторе GeoGebra изображений графиков каждого этапа преобразования (п. 2)	Консультации преподавателя	Документы в формате ggb индивидуально
6.	Аудиторная, внеаудиторная; индивидуально	Подготовка итогового документа (вставка рисунков п. 5 в документ п. 4)	Документ № 2 в формате pdf, содержащий пример выполнения в системе LaTeX задания из документа № 1	Документ с программным кодом в формате tex Результат компиляции документа в формате pdf индивидуально

Выполнение предложенного кейс-задания предполагает, что в процессе решения профессиональной задачи студенты дополнительно осваивают цифровые инструменты LaTeX и GeoGebra. Постоянный контроль на всех этапах работы со стороны преподавателя обеспечивает надлежащее качество готового продукта. Формат творческой педагогической математической мастерской является успешным примером создания естественных условий для комплексного формирования компетенций у будущих учителей математики. Здесь уверенно можно выделить предметно-математические, профессионально-методические и, наконец, медиа и информационные компетенции, актуальные для современного цифрового образовательного пространства.

Библиографический список

1. Ашихмин А.С., Макеева О.В. Инструмент LaTeX в образовательном пространстве студента педагогического вуза // Математика и математическое образование в эпоху цифровизации: материалы XIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, Красноярск, 14–15 ноября 2024 года. Красноярск: Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2024. С. 308–312. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=80245524>
2. Ашихмин А.С. Становление будущего учителя физики и математики: инструменты Latex и Manim // Вопросы математики, методики ее преподавания и цифровизации образования в учебно-исследовательских работах: материалы Всероссийской научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов вузов, Пермь, 09 апреля 2024 года. Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2024. С. 70–71. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=72801200>
3. Гайсина С.В., Давыдова И.П. Методические рекомендации по цифровому образованию «Карта цифровых компетенций». СПб.: АППО, 2021. 84 с. URL: <https://spbappo.ru/wp-content/uploads/2021/03/Карта-компетенций-ИТОГ.pdf>
4. Игнатьева Е.Ю., Шилова О.Н. Цифровые компетенции учителей: анализ современного состояния // Непрерывное образование: XXI век. 2023. № 2 (42). С. 110–129. <https://doi.org/10.15393/j5.art.2023.8467>.
5. Кузнецов А.В. Основы LATEX: учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: НИЯУ МИФИ, 2024. 504 с.
6. Шматко А.Д., Волкова А.А. Цифровая трансформация образования: тренды и перспективы развития // Общество: социология, психология, педагогика. 2025. № 6. С. 139–147. <https://doi.org/10.24158/spp.2025.6.16>.

СМЕШАННОЕ ОБУЧЕНИЕ В РОССИЙСКОЙ ШКОЛЕ В КОНТЕКСТЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССОВ

BLENDED LEARNING IN RUSSIAN SCHOOLS IN THE CONTEXT OF MATHEMATICAL EDUCATION IN SPECIALIZED CLASSES

Д.Р. Матюшкин

D.R. Matyushkin

Смешанное обучение, математическая подготовка, профильные классы, физико-математическое образование, цифровые образовательные технологии, российские образовательные платформы, педагогические модели, индивидуализация обучения, образовательная траектория.

Статья посвящена исследованию возможностей внедрения моделей смешанного обучения в процесс математической подготовки обучающихся 10–11 классов физико-математической направленности. Рассмотрены нормативно-правовые аспекты использования цифровых ресурсов в российских школах, проанализированы отечественные образовательные платформы, применимые для углубленного изучения математики. Предложены адаптированные модели смешанного обучения, такие как «перевернутый класс», «автономная группа» и др., направленные на повышение мотивации и академических результатов обучающихся.

Blended learning, mathematical preparation, specialized classes, physics and mathematics education, digital educational technologies, Russian educational platforms, pedagogical models, individualization of learning, educational trajectory.

The article explores the possibilities of implementing blended learning models in the mathematical preparation of 10th–11th grade students specializing in physics and mathematics. The regulatory and legal aspects of using digital resources in Russian schools are considered, and domestic educational platforms applicable for advanced mathematics study are analyzed. Adapted blended learning models, such as the “flipped classroom” and “station rotation,” are proposed to enhance student motivation and academic performance. Particular attention is paid to the methodological aspects of integrating digital tools into the educational process, considering the specifics of specialized mathematics education.

В контексте преподавания математики в профильных классах в современной литературе (А.В. Хуторской, И.М. Осмоловская, Е.С. Полат и др.) рассматривается смешанное обучение как ключевой инструмент для углубленного изучения предмета. Исследования подчеркивают, что интеграция онлайн-платформ (таких как Stepik, GeoGebra, Wolfram Alpha и др.) с очными форматами работы позволяет эффективно персонализировать образовательную траекторию, что особенно важно для старшеклассников с выраженным интересом к точным наукам. Анализ публикаций показывает, что модели «ротация станций» и «перевернутый класс» способствуют развитию навыков самостоятельного исследования сложных математических концепций, от доказательств теорем до решения

нестандартных задач [5]. При этом в научном сообществе отмечаются и вызовы: необходимость тщательного отбора цифрового контента, соответствующего профильному уровню, и важность методической подготовки учителя для интеграции технологий в процесс формирования математического мышления.

Современное математическое образование в профильных классах переживает трансформацию, ведется поиск эффективных технологий обучения. Технология смешанного обучения (СО) открывает уникальные возможности для углубленного изучения математики, сочетая традиционные методики работы с одаренными детьми и современные цифровые технологии. Исследования и педагогическая практика демонстрируют, что грамотно выстроенное смешанное обучение повышает эффективность освоения сложных математических концепций, развивает аналитическое мышление и формирует способность к самостоятельному построению образовательной траектории [1]. В условиях российской системы образования, где физико-математические классы дают обучающимся карьерный потенциал и базу для большого перечня технических и инженерных специальностей, смешанное обучение становится инструментом обеспечения равного доступа к качественному математическому образованию.

Технологическая основа является фундаментом для педагогических инноваций в преподавании математики. Наиболее эффективными для профильных математических классов являются несколько моделей смешанного обучения. Модель «автономная группа» позволяет дифференцировать обучение: пока одна группа работает с учителем над решением задач высокого уровня сложности, олимпиадных задач, другая группа отрабатывает навыки на компьютерных тренажерах, а третья занимается математическим проектированием.

Модель «перевернутый класс» особенно продуктивна для изучения сложных математических тем. Обучающиеся знакомятся с теоретическим материалом дома через специально созданные видеоуроки, а аудиторное время посвящается решению нестандартных задач, доказательству теорем и углубленному обсуждению математических концепций под руководством педагога.

Для работы с наиболее мотивированными обучающимися математических классов оптимальна «гибкая модель», где ученик движется по индивидуальной траектории, используя онлайн-ресурсы для самостоятельного изучения дополнительных тем, а учитель выступает в роли тьютора и консультанта по сложным математическим проблемам.

Переход к смешанному обучению в математических классах требует тщательного планирования. На подготовительном этапе создается рабочая группа из учителей математики, IT-специалистов и методистов, которая проводит аудит школьной инфраструктуры, тестирует математические платформы и разрабатывает нормативную базу. Параллельно осуществляется обучение педагогов, включающее не только цифровую грамотность, но и методики интеграции новых инструментов в преподавание сложных математических дисциплин.

Внедрение следует начинать с пилотных математических классов, отрабатывая модель, обеспечивая техническую поддержку и собирая обратную связь [2].

Особое внимание уделяется рискам цифрового неравенства, проблемам цифровой грамотности и профилактике выгорания учителей через использование готового математического контента и постепенное внедрение изменений.

Схема на рис. наглядно представляет тенденцию внедрения смешанного обучения в российских профильных математических классах. Она отражает четыре ключевых компонента: концептуальные основы, этапы внедрения, преимущества и недостатки, а также практическую реализацию.

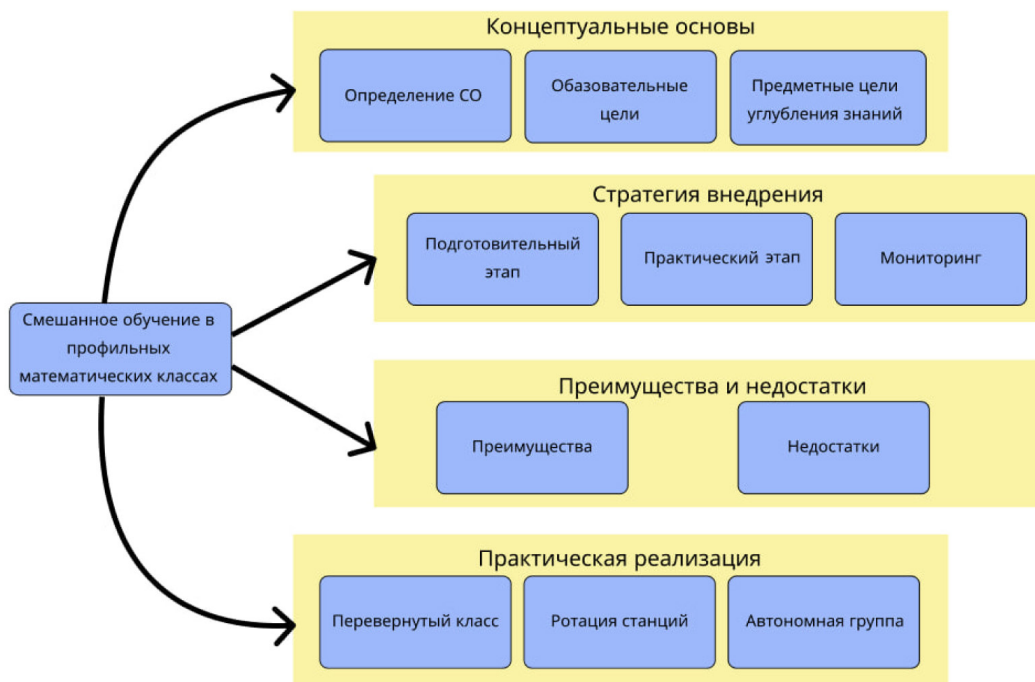


Рис. Тенденция внедрения смешанного обучения в российских профильных математических классах

Визуализация демонстрирует взаимосвязь между теоретической базой, практическими механизмами и ожидаемыми результатами преобразования образовательного процесса. Схема служит структурной основой, обеспечивая целостное восприятие исследуемой проблемы и путей ее решения.

Успешное внедрение смешанного обучения в математическом образовании начинается с понимания нормативно-правового поля. Ключевыми ориентирами являются Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ и Федеральный закон «О персональных данных», требующий хранения личной информации школьников и педагогов на территории России, и политика Роскомнадзора, ограничивающая доступ к иностранным образовательным платформам [3]. Для российского образования это создало необходимость перехода на отечественные технологические решения, соответствующие требованиям безопасности и образовательным стандартам.

Ответом на эти вызовы стал активный переход на российские технологические решения, адаптированные для углубленного изучения математики. В таблице приведен перечень платформ для реализации смешанного обучения в условиях перехода на отечественные платформы.

**Применение цифровых образовательных ресурсов
в смешанном обучении математике профильных классов**

Категория ЦОР	Платформа/ Инструмент	Возможности для математического образования	Пример использования в смешанном обучении
Интерактивные платформы	Учи.ру	– раздел «Олимпиадная математика»; – задачи с параметром; – адаптивные тренажеры по стереометрии	В модели «Перевернутый класс»: домашнее изучение теории через интерактивные материалы, а на очном уроке – разбор сложных задач с учителем
Платформы для создания курсов	iSpring Learn	– создание интерактивных модулей; – интеграция GeoGebra; – сценарии ветвления для дифференциации	В «Гибкой модели»: учитель создает персонализированные маршруты для групп обучающихся с разным уровнем подготовки
Специализированные математические платформы	ЛЕСТА	– электронные учебники углубленного уровня; – виртуальные лаборатории; – задачи с поэтапной проверкой	В модели «Ротация станций»: на одной из станций обучающиеся работают с виртуальными лабораториями для математического моделирования
Университетские платформы	«Открытое образование»	– курсы от МФТИ и ведущих вузов; – теория вероятностей и статистика; – видеолекции с проверочными заданиями	В модели «Перевернутый класс»: обучающиеся изучают университетские курсы онлайн, а на очных занятиях углубляют понимание с учителем
Системы компьютерной математики	MathCAD, Scilab	– решение вычислительных задач; – визуализация моделей; – численные эксперименты	В проектной деятельности: обучающиеся проводят исследования с использованием профессиональных математических инструментов
Инструменты визуализации	GeoGebra	– интерактивная геометрия; – построение графиков; – 3D-моделирование	На всех этапах обучения: от демонстрации учителем до самостоятельного исследования обучающихся при решении задач
Адаптивные платформы	Яндекс.Учебник	– персонализированные задания; – автоматическая проверка; – аналитика прогресса	В модели «Индивидуальная ротация»: система автоматически подбирает задания в зависимости от успехов ученика

Государственная платформа ФИС «Моя школа» предоставляет верифицированный учебный контент по математике, включающий интерактивные задания, видеолекции и методические материалы для профильного уровня. Для организации дистанционных занятий и математических консультаций используются российские сервисы видеосвязи – VK Звонки, Mind от Сбера, TrueConf и RuMeet, обеспечивающие безопасное взаимодействие учителя и обучающихся.

В сегменте интерактивного обучения математике особенно востребованы платформы Учи.ру и Яндекс.Учебник, предлагающие разнообразные задачи и упражнения для профильных классов. Для создания собственных математических курсов и интерактивных материалов преподаватели используют iSpring Learn, позволяющий разрабатывать учебные модули с комплексными математическими задачами. Особое значение для математических классов имеют специализированные платформы – ЛЕСТА с электронными учебниками углубленного уровня, «Открытое образование» с курсами ведущих технических вузов, а также системы компьютерной математики MathCAD и Scilab, адаптированные для образовательных учреждений.

Московская электронная школа и аналогичные региональные платформы предоставляют комплексные решения для математического образования, включающие электронные журналы, библиотеки материалов и системы проверки знаний. Все эти платформы соответствуют требованиям российского законодательства, обеспечивают безопасное хранение данных и интегрируются с государственными информационными системами.

Современные условия и ограничения, как ни парадоксально, дают импульс для развития математического образования в России. Технология смешанного обучения лежит в основе создания безопасной и современной образовательной среды в физико-математических классах. В рамках этого подхода учитель выполняет роль проводника в мире математики, а ученик превращается в самостоятельного исследователя. Смешанное обучение, интегрирующее традиционные аудиторные занятия с цифровыми инструментами, позволяет создать гибкую, современную и, что крайне важно в текущих условиях, безопасную образовательную экосистему для профильных математических классов [4].

Смешанное обучение позволяет создать современную, безопасную образовательную среду для профильных математических классов, где учитель становится навигатором в мире математических знаний, а ученик – активным исследователем, способным к самостоятельному математическому творчеству и построению индивидуальной образовательной траектории в области точных наук. Таким образом, преодоление внешних ограничений не просто сохраняет, но и качественно обогащает математическое образование, переводя его на новый уровень персонализации, технологичности и автономности, что в конечном итоге способствует подготовке высококвалифицированных кадров для стратегических отраслей российской экономики и науки.

Библиографический список

1. Захарова И.Г. Смешанное обучение: от теории к практике // Народное образование. 2017. № 6. С. 122–129.
2. Саввина О.В. Совершенствование математической подготовки школьников в условиях цифровой образовательной среды // Математика в школе. 2021. № 3. С. 35–42.
3. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 24.04.2023) «Об образовании в Российской Федерации» // Собрание законодательства РФ. 2012. № 53 (ч. 1). Ст. 7598.
4. Хорн М.Б., Стейкер Х. Смешанное обучение. Использование прорывных инноваций для улучшения школьного образования; пер. с англ. М.: Альпина Паблишер, 2016. 328 с.
5. Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) в обучении // Моя компания Методическая копилка. URL: <https://anisimovaav.nethouse.ru/page/1394020> (дата обращения: 11.11.2025).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА ДЕТЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

MATHEMATICAL TRAINING OF CHILDREN WITH DISABILITIES IN THE CONTEXT OF DIGITAL TRANSFORMATION OF EDUCATION

Е.А. Михалкина, Н.А. Кириллова,
И.А. Курганова, А.В. Целуйко,
С.Р. Боцман

E.A. Mikhalkina, N.A. Kirillova,
I.A. Kurganova, A.V. Tseluyko,
S.R. Botsman

Обучающиеся с ограниченными возможностями здоровья, обучение математике с использованием интерактивных технологий, индивидуальная траектория обучения.

Рассматривается подход к обучению школьников с ограниченными возможностями здоровья математике в условиях адаптированной общеобразовательной школы. В рамках подхода иллюстрируется возможность организации индивидуальной образовательной траектории изучения математики с использованием в условиях цифровой трансформации образования.

Students with disabilities, mathematics education using interactive technologies, and individual learning paths.

The article discusses an approach to teaching mathematics to students with disabilities in an adapted general education school. The approach illustrates the possibility of organizing an individual educational trajectory for studying mathematics using digital transformation of education.

Современная школа создает образовательную среду, обеспечивающую доступность качественного образования для всех лиц, в том числе с ограниченными возможностями здоровья. Пройдя непростой путь адаптации, образовательная система максимально социализирует детей с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ), детей-инвалидов, детей, оставшихся без попечения родителей, находящихся в трудной жизненной ситуации.

Согласно ФГОС СОО, обучающимся с ОВЗ, способным обучаться в условиях массовой школы, гарантируется получение образования по индивидуальным адаптированным программам. Такое обучение осуществляется при оказании специальной помощи, психолого-педагогической поддержки через создание адекватных условий для реализации особых образовательных потребностей, включая помощь в формировании полноценной жизненной компетенции.

Работа с детьми с ОВЗ требует индивидуального подхода, учета особенностей восприятия, внимания и памяти каждого ребенка, так как при обучении такого сложного предмета, как математика, у школьников нередко наблюдаются ослабленные память и внимание, несформированность универсальных учебных действий, заторможенность мыслительных действий, отсутствия рациональных способов усвоения материала, недостаточный (минимальный) объем знаний по предмету. Такие «естественные» ограничения препятствуют для получения

детьми с ОВЗ качественного образования, формируют у них негативное отношение к обучению.

Математика является одним из основных предметов в усвоении образовательной программы средней общеобразовательной школы. Необходимо и возможно использовать математические знания для повышения уровня общего развития детей с ОВЗ. Имеется возможность на уроках математики повысить качество познавательной сферы, развивать работоспособность, умение планировать работу, прогнозировать результат своей деятельности и доводить начатое дело до завершения, самостоятельность, самоконтроль, воспитывать трудолюбие, терпеливость.

Детям с ОВЗ требуется больше времени на усвоение новых понятий, новых способов действий. Учебники, используемые в учебном процессе, не предназначены для обучения детей с ОВЗ и требуют при подготовке учителя к уроку больше временных затрат, искать новые методы обучения математике в совместных классах – общеобразовательных и детей с ОВЗ. Считаем, что для повышения эффективности интегрированного обучения учащихся с ОВЗ необходимо использовать следующие методы:

1. Дифференцированный подход. Подбираются задания, соответствующие уровню развития ребенка, начиная с простых упражнений и постепенно усложняя материал.

2. Использование наглядных пособий. Применяя визуальные средства обучения, такие как схемы, таблицы, диаграммы, картинки и модели геометрических фигур, лучше воспринимаются абстрактные понятия.

3. Поддержка устного счета. Регулярно проводятся упражнения на развитие устного счета, используя интерактивные технологии, флеш-карты, карточки с примерами. Через эту систему обеспечивается повторяемость и постепенное закрепление полученных навыков.

4. Разбор жизненных ситуаций. Приводим реальные жизненные ситуации, применяя изучаемые математические знания. Например, вместе рассчитайте стоимость покупок, поделите конфеты поровну среди друзей, измерьте длину комнаты или посчитайте количество предметов вокруг себя.

Эти подходы позволяют эффективно организовать учебный процесс и создать условия для успешной социализации и интеграции детей с особыми образовательными потребностями в общество.

Интерактивные технологии предоставляют широкие возможности для эффективной подготовки детей к экзамену по базовой математике. Они делают обучение увлекательным, повышают вовлеченность учеников и облегчают восприятие сложных понятий. Рассмотрим основные методики работы с использованием современных интерактивных ресурсов:

Предоставление возможности построения индивидуальных образовательных траекторий личностного роста обучающегося нашло отражение в стратегическом направлении в области цифровой трансформации образования, относящееся к сфере деятельности Министерства просвещения Российской Федерации [2]. Под цифровой трансформацией образования понимается обновление

планируемых образовательных результатов, содержания образования, методов и организационных форм учебной работы, а также оценивания достигнутых результатов в быстроразвивающейся цифровой среде для кардинального улучшения образовательных результатов каждого обучающегося [1].

Индивидуализация процесса обучения. Каждый ребенок имеет уникальные потребности и способности. Интерактивные программы позволяют адаптировать содержание уроков под конкретного учащегося, предлагая разные уровни сложности и темп освоения материала.

Наглядность и мультимедийные презентации. Использование анимации, видеороликов и схем облегчает понимание абстрактных математических концепций. Пример: Демонстрация геометрии с помощью виртуальных моделей пространственных тел или графического представления функций на экране. Совместное решение с учителем практических задач с помощью онлайн-доски (Microsoft Whiteboard).

Совместная работа родителей и педагогов. Родители также могут активно участвовать в процессе подготовки, используя специально разработанные домашние задания и рекомендации от учителей. Пример: Рекомендации родителям по проведению домашних занятий с использованием специализированных приложений (Learning).

Технические инструменты и программное обеспечение

Для реализации указанных методов используются разнообразные интерактивные решения: онлайн-тренажеры и симуляторы: ЯКласс, Khan Academy, Study.ru; приложения для интерактивных досок: SMART Notebook, ActivInspire; специальные образовательные платформы: IMOOOLA, конструктор тестов Учи.ру; цифровые учебники и пособия: электронные версии учебных изданий с дополнительными материалами.

Таким образом, грамотное внедрение интерактивных технологий значительно упрощает подготовку школьников с ОВЗ к базовому экзамену по математике, делая процесс интересным, доступным и эффективным.

Дети с проблемами памяти требуют особого подхода при обучении математике. Основная задача педагога заключается в создании условий, способствующих развитию долговременной и рабочей памяти, формированию устойчивых ассоциаций и минимизации нагрузки на кратковременную память. Ниже приведены наиболее эффективные методы работы с такими учениками.

Применение цветового кодирования. Цветовая маркировка чисел, формул и операций помогает лучше структурировать информацию и облегчить ее запоминание. Использование разноцветных маркеров, карандашей или фломастеров для выделения ключевых элементов.

Наглядность и визуализация. Предоставляется большое количество иллюстративного материала: плакаты, графики, диаграммы, рисунки. Запоминание усиливается благодаря зрительным образам. Например, иллюстрация треугольника с подписанными сторонами облегчит запоминание формулы площади.

Формирование ассоциативных связей. В процессе изучения устанавливаются смысловые связи между новыми и известными понятиями. С помощью

разработки метафор, аналогий, историй, помогающих связать новые идеи с предыдущими знаниями.

Отработка автоматизированных навыков. Автоматизация базовых математических навыков освобождает пространство рабочей памяти для обработки новых знаний. Ежедневно уделяется время тренировкам быстрого счета, узнавания числовых последовательностей и основных фактов.

Дети с двигательными нарушениями, включая тремор рук, сталкиваются с определенными трудностями при изучении математики. Чтобы сделать обучение комфортным и продуктивным, учителю необходимо учитывать специфические потребности такого ребенка. Эффективные методы работы включают:

Игровые формы обучения. Некоторые математические задачи представлены в виде игр. Ребенок, испытывающий трудности с письмом, легче воспримет новое знание через игровое действие, которое отвлекает от физических ограничений. Можно использовать компьютерные игры или настольные математические игры, которые укрепляют концентрацию и познавательные навыки.

Модификация письменных заданий. Ребенок с тремором рук испытывает затруднения при письме и работе с мелкими предметами, поэтому ему предлагаются альтернативные варианты выполнения заданий:

Используются планшетные компьютеры с большими кнопками или специальным стилусом. Организовывается проверка знаний через диктовку ответов учителю, который фиксирует их в тетради. Другой вариант выдать заранее напечатанный лист с заданиями, чтобы ребенок мог отмечать правильные ответы карандашом или маркером.

Работа с интерактивными панелями. Такие панели обладают крупными клавишами и легко управляемым интерфейсом, что идеально подходит для детей с двигательными нарушениями. Учитель может демонстрировать интерактивные задачи, позволяющие ребенку решать математические выражения, кликая мышью или касаясь пальцами больших областей экрана.

Минимизация требований к письму. При составлении контрольных работ и домашних заданий уменьшается объем письменной работы, отдавая предпочтение вопросам с выбором правильного ответа или заполнением пропусков в готовых шаблонах.

Применяя перечисленные методы, учитель обеспечит каждому ребенку комфортные условия для изучения математики, снизит влияние физического ограничения и создаст основу для устойчивого успеха в учебе.

Библиографический список

1. Трудности и перспективы цифровой трансформации образования / под ред. А.Ю. Уварова, И.Д. Фрумина. М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2019.
2. Распоряжение Правительства РФ от 18.10.2023 № 2894-р «Стратегическое направление в области цифровой трансформации образования, относящейся к сфере деятельности Министерства просвещения Российской Федерации».

ЦИФРОВАЯ КОМПЕТЕНТНОСТЬ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ КАК КЛЮЧЕВОЙ ФАКТОР МОДЕРНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

DIGITAL COMPETENCE OF MATHEMATICS TEACHER AS A KEY FACTOR IN EDUCATION MODERNIZATION

А.М. Могилева

A.M. Mogileva

Цифровая компетентность, эксперимент, моделирование, модернизация, наглядность.

В условиях цифровой трансформации образования значимость приобретает цифровая компетентность педагога – особенно учителя математики, работающего с учащимися разного возраста: от младших школьников, только начинающих осваивать арифметику, до старшеклассников, изучающих алгебру, геометрию и начала анализа. В данной статье раскрывается, как единая педагогическая позиция, подкрепленная цифровой грамотностью и участием в курсах повышения квалификации, позволяет выстраивать преемственность обучения, учитывая возрастные и когнитивные особенности школьников. Автор делится опытом применения цифровых инструментов на уроках в 1–4 и 5–11 классах, подчеркивая, что рост педагога – это рост всей образовательной траектории ученика.

Digital competence, experimentation, modeling, modernization, visibility.

In the context of the digital transformation of education, the digital competence of teachers is becoming increasingly important-especially mathematics teachers working with students of various ages: from elementary school students just beginning to master arithmetic to high school students studying algebra, geometry, and basic calculus. This article explores how a unified pedagogical approach, reinforced by digital literacy and participation in professional development courses, enables the development of learning continuity, taking into account the age and cognitive characteristics of students. The author shares her experience using digital tools in lessons for grades 1-4 and 5-11, emphasizing that teacher growth is synonymous with student growth throughout their educational journey.

Сегодня учитель математики все чаще оказывается в ситуации двойной нагрузки: он ведет уроки и в начальной школе (где важно сформировать позитивное отношение к предмету через игру и визуализацию), и в старших классах (где требуется строгость, абстрактное мышление, подготовка к экзаменам). Эта разноуровневая ответственность требует не только методической гибкости, но и высокой цифровой компетентности, понимаемой как способность: подбирать адекватные цифровые инструменты под возраст и уровень подготовки, выстраивать преемственность в использовании технологий (например, от простой арифметики – к программированию на Python), постоянно совершенствовать свои навыки через курсы повышения квалификации и профессиональные сообщества [1; 2].

Цифровая компетентность педагога – это не владение гаджетами, а умение осмысленно использовать цифровые инструменты для решения педагогических задач. Рассмотрим несколько компонентов такой компетентности [5].

1. Работа с информацией и анализ данных – формирование умений находить, структурировать, критически оценивать и интерпретировать информацию, представленную в цифровых форматах (таблицы, графики, интерактивные модели), в том числе при решении прикладных и исследовательских математических задач.

2. Цифровая коммуникация и совместная деятельность – освоение навыков взаимодействия в цифровой образовательной среде при выполнении групповых проектов, дискуссий, публичных выступлений с использованием цифровых инструментов (например, совместное решение задач в онлайн-редакторах, защита исследовательских работ в виде цифровых презентаций).

3. Моделирование и создание цифровых математических продуктов – применение цифровых инструментов (геометрические конструкторы, динамические таблицы, визуальные среды программирования) для построения и исследования математических моделей, создания интерактивных учебных материалов (например, цифровых задачник, анимированных доказательств, интерактивных тренажеров), что соответствует линии «Математическое моделирование» и метапредметному умению «представлять результаты деятельности в цифровой форме».

4. Цифровая безопасность и этика в математической деятельности – формирование ответственного отношения к использованию цифровых ресурсов: соблюдение авторских прав при цитировании источников, корректное оформление ссылок в исследовательских работах, осознанная защита персональных данных при использовании онлайн-сервисов, что включено в требования к личностным результатам.

5. Применение цифровых инструментов для решения учебно-исследовательских задач – использование цифровых средств для постановки гипотез, планирования и проведения исследований, проверки решений и самодиагностики, что поддерживает формирование универсальных учебных действий: целеполагания, планирования, контроля и коррекции [3, 4].

Такая компетентность позволяет учителю математики «оживлять» урок – от азов математики в начальной школе до исследовательских проектов в старшей.

Для начальной школы очень много полезных интерактивных заданий на Учи.ру. Когда ученик проходит буквально квест. Для старшей школы подобные задания могут казаться скучными. Для них разработана образовательная платформа «Просвещение». Там присутствуют: репеТИГР – рабочая тетрадь и помощник; олимпиадный тренажер и электронный учебник.

Мне очень нравится, когда повышение квалификации учителя связано с практическим применением. Мне запомнился методический марафон «Инженерное образование в школе: 17 содержательных контентов», он проводился в октябре 2024 года в ИТШ Санкт-Петербурга № 777. Мы практиковались в VR/AR-разработке, в программировании, компьютерном зрении и тд. Полученные практические навыки можно внедрять на уроках. Я считаю, что без повышения квалификации учителей не будет модернизации образования.

Библиографический список

1. Гончарова Н.Ю., Тимошенко А.И. Информационно-коммуникационная компетентность педагога как интегративный показатель профессионализма в современных условиях // Сибирский педагогический журнал. 2009. № 3.
2. Картукова А.А. Цифровая образовательная среда как фактор профессионального развития педагога // Цифровая образовательная среда: новые компетенции педагога: сборник материалов участников конференции. СПб.: Международные образовательные проекты, 2019. С. 8–11.
3. Косенок С.М., Куренкова Т.Н. Цифровая компетентность педагога в условиях формирования цифровой образовательной среды // Гуманитарный научный вестник. 2020. № 11. С. 25–30.
4. Колыхматов В.И. Педагог в условиях цифровизации образования // Ученые записки университета имени П.Ф. Лесгафта. 2018. № 9 (163). С. 152–158.
5. Сухомлин В.А., Зубарева Е.В., Якушин А.В. Методологические аспекты концепции цифровых навыков // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13, № 2. С. 146–152.

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КАК ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ПРОФОРИЕНТАЦИИ ШКОЛЬНИКОВ

SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS AS A WAY TO PROFESSIONAL ORIENTATION FOR SCHOOLCHILDREN

Д.М. Некрасова, Н.Г. Дюкина

D.M. Nekrasova, N.G. Dyukina

Математическое образование, профессиональная ориентация, методы профориентационной работы, математические задачи, прикладные задачи, профессионально ориентированные задачи, основной государственный экзамен.

В статье рассматривается вопрос профессиональной ориентации школьников в процессе изучения математики. В рамках исследования дается определение профессионально ориентированной математической задачи. Автором приведена классификация форм и методов профориентационной работы. На примере изучения обязательных тем школьного курса математики представлены примеры профессионально ориентированных задач.

Mathematical education, professional orientation, methods of career guidance, mathematical problems, applied problems, professionally oriented problems, basic state exam.

The article discusses the issue of vocational guidance for schoolchildren in the process of studying mathematics. The study defines a professionally oriented mathematical problem. The author provides a classification of forms and methods of career guidance. Examples of professionally oriented problems are presented on the example of studying compulsory topics of the school course of mathematics.

В настоящее время вопросы профессиональной ориентации являются достаточно сложными среди школьников. Будучи еще школьниками, они должны без сомнений определиться с выбором профессии, чтобы быть более конкурентоспособными на рынке труда и реализовать свои возможности и надежды в желанной профессиональной сфере.

Сегодня некоторые старшеклассники не владеют информацией или владеют, но не в полной мере, о новых профессиях, уровне сформированности необходимых компетентностей. Для решения этих вопросов классные руководители во внеурочной деятельности проводят в процессе изучения курса профориентационных занятий «Россия – мои горизонты» разговоры о современных тенденциях на рынке труда. Но и учителя-предметники, в том числе и математики, также могут направить процесс обучения для решения вопросов профориентации обучающихся.

Профессиональная ориентация – сложная комплексная проблема. По своим методам и содержанию она психолого-педагогическая и медикофизиологическая, по сфере действия – социальная, а результаты ее сказываются в экономической жизни [3].

Проведенный анализ научно-методической литературы позволил выделить следующие основные формы и методы профориентационной работы при изучении программных тем школьного курса математики, а именно:

- беседы о профессиях, связанных с изучаемым материалом;

- решение прикладных задач с профориентационной фабулой;
- проведение практических работ, связанных с той или иной профессиональной сферой;
- составление кроссвордов по математике с профориентационной направленностью;
- выполнение проектов по математике профориентационной направленности;
- просмотр фрагментов учебных фильмов и кинофильмов, учебных телепередач, демонстрирующих применение знаний, получаемых при изучении темы или курса непосредственно в практической деятельности людей [1].

Рассмотрим более подробно организацию решения прикладных задач с профориентационной фабулой в процессе изучения математики. Одна из функций этих задач состоит в том, чтобы дать обучающимся представление о возможностях использования математики для решения проблем, поставленных другими областями знаний [4]. Они знакомят обучающихся с различными сферами деятельности, тем самым способствуя профессиональному самоопределению [5].

Профессионально ориентированной будем называть такую математическую задачу, условие и требование которой задают модель реальной профессиональной или приближенной к ней ситуации [2]. В школьной математике профессионально ориентированная задача понимается как задача, содержание которой связано с объектами будущей профессии обучаемого, а ее решение способствует осознанному применению математических знаний. Посредством ее решения учащиеся смогут получить первоначальные сведения о профессии, обнаружить интерес к какому-либо виду деятельности [5].

Приведем примеры профессионально ориентированных задач для разных классов.

Пример 1. Бригада из трех рабочих окрасила здание. Первый окрасил на 20 м² больше, чем второй. Сколько денег получит каждый рабочий, если вместе они окрасили 450 м², а стоимость покраски 1 м² составляет 530 руб?

Задача для урока математики в 5 классе, фабула описывает профессию строителя. Она направлена на понимание значимости профессии строитель и позволит задуматься о фактическом объеме работы людей этой профессии и об их оплате труда.

Пример 2. В результате утреннего обхода медсестра измерила артериальное давление у 15 пациентов. Полученные измерения систолического давления составляют собой ряд чисел: 108, 115, 133, 110, 108, 112, 118, 118, 112, 127, 120, 110, 110, 127, 102, 160. Расположите полученные измерения в порядке возрастания и определите моду, медиану, размах. Также помогите медсестре рассчитать процент пациентов с нормальным давлением (нормальное значение систолического показателя от 120 до 130 мм рт. ст.).

Задача относится к курсу «Вероятность и статистика» в 7 классе. Это задача медицинской направленности. После решения задачи целесообразно провести краткое обсуждение, выяснив ответы на следующие вопросы: Что такое систолическое давление? Какие еще обязанности, выполняемые медицинскими

работниками, знаете? Как часто сами или их родственники обращаются за медицинской помощью? Последний вопрос особенно акцентирует внимание на том, что профессия врача – очень необходимая, жизненно важная не только для окружающих, но и для себя, потому и является востребованной.

Пример 3. Фирма «Войти в IT» оказывает услуги по созданию программного обеспечения. Для разработки программ четырех типов в зависимости от решаемых задач от сотрудников требуется определенная квалификация и знание конкретных языков программирования. В представленной ниже таблице приведены сведения о стоимости создания приложений (в руб) в зависимости от использования какого-либо языка программирования или внедрения некоторого элемента.

Таблица

Стоимость создания приложений

Программа	Использование языка		Настройка Push-уведомлений	Персонализация внешнего вида	Интеграция с социальными сетями
	HTML	JavaScript			
A	60	33	23	23	31
B	50	45	25	21	36
C	63	50	30	20	33
D	45	50	27	22	32

Учитывая, что при написании кода программы можно использовать только один язык программирования, определите наиболее оптимальный тип приложения по стоимости.

Задача относится к разделу «Выбор оптимального варианта». Она может использоваться в процессе подготовки к ОГЭ по математике. Фабула задачи актуальна, профессия востребована и в настоящее время высокооплачиваема.

После решения этой задачи необходимо провести с обучающимися беседу, предложив им ответить на вопросы: знакомы ли с языками программирования? Какие языки программирования используются профессиональными IT-специалистами в профессиональной сфере? Планируют ли они связать свою будущую профессию с программированием, WEB-программированием?

Таким образом, систематическое решение профессионально ориентированных задач в процессе обучения школьному курсу математики позволит обучающимся познакомиться с профессиями, позволит применять приобретенные знания в жизненных ситуациях.

Апробация полученных данных проходила в МБОУ «Гимназия № 6» города Глазова Удмуртской Республики (35 человек). Результаты апробации показали, что профессионально ориентированные задачи действительно поддерживают интерес к учебному предмету, способствуют возникновению желания изучить ту или иную профессиональную деятельность более детально, развивают любознательность и внимательность.

В дальнейшем планируется разработка большего количества подобных задач для разных классов для их дальнейшего применения на уроках математики.

Библиографический список

1. Заварзина Л.В., Солощенко М.Ю. Профориентационная работа учителя математики // Аллея науки. 2020. № 1 (40). С. 700–705.
2. Никаноркина Н.В. Профессионально ориентированные задачи как средство осуществления профессионально направленного обучения математике студентов экономических вузов // Молодой ученый. 2014. № 13 (72). С. 276–279.
3. Сазонов А.Д. Профессиональная ориентация учащихся: учебное пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2120 «Общетехнические дисциплины и труд». М.: Просвещение, 1988. 223 с.
4. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 96 с.
5. Фомина Т.П., Хорцев А.В. Профессионально ориентированные задачи в обучении школьников 7–9 классов математике // Педагогика. Вопросы теории и практики. 2020. № 6. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/professionalno-orientirovannye-zadachi-v-obuchenii-shkolnikov-7-9-klassov-matematike> (дата обращения: 03.11.2025).

ФОРМИРОВАНИЕ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ ЧЕРЕЗ ГЕЙМИФИКАЦИЮ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ОНЛАЙН-ПЛАТФОРМ

FORMING MOTIVATION TO STUDY MATHEMATICS THROUGH GAMIFICATION AND THE USE OF INTERACTIVE ONLINE PLATFORMS

А.А. Петров

A.A. Petrov

Образовательные платформы, геймификация, учебная мотивация, младшие школьники, математика, сравнительный анализ, цифровизация образования, интерактивные методы, цифровые ресурсы, начальное образование.

В статье представлен анализ 14 образовательных платформ с точки зрения их эффективности для формирования учебной мотивации младших школьников на уроках математики. Разработана система критериев оценки, включающая игровые механики, адаптивность, соответствие ФГОС и стоимость использования. На основе анализа предложена модель интеграции различных платформ в учебный процесс с учетом экономической эффективности. Особое внимание уделено практическим аспектам внедрения геймифицированных подходов в образовательный процесс начальной школы.

Educational platforms, gamification, learning motivation, primary school children, mathematics, comparative analysis, education digitalization, interactive methods, digital resources, primary education.

The article presents a comparative analysis of 14 educational platforms in terms of their effectiveness for forming learning motivation of primary schoolchildren in mathematics lessons. A system of evaluation criteria has been developed, including game mechanics, adaptability, compliance with the Federal State Educational Standard and cost of use. Based on the analysis, a model for integrating various platforms into the educational process, taking into account economic efficiency, is proposed. Special attention is paid to practical aspects of implementing gamified approaches in the primary school educational process.

Цифровая трансформация образования породила множество образовательных платформ, каждая из которых предлагает уникальные подходы к геймификации обучения математике. Исследования А.А. Вербицкого показывают, что «использование игровых методов в обучении способствует не только повышению мотивации, но и лучшему усвоению учебного материала» [2, с. 78]. Это особенно важно при изучении математики, где абстрактные понятия часто вызывают трудности у учащихся начальных классов. В связи с этим я посчитал нужным уделить больше внимания этой теме и провел свое исследование онлайн-платформ.

Для проведения исследования онлайн-платформ была разработана система критериев оценки, включающая:

Игровые механики – наличие систем вознаграждения, уровней сложности, соревновательных элементов.

Адаптивность – возможность персонализации обучения под индивидуальные особенности.

Соответствие ФГОС – соответствие федеральным государственным образовательным стандартам.

Обратная связь – система подсказок, анализа ошибок, рекомендаций.

Стоимость использования – модель финансирования и доступность для образовательных учреждений

Поддержка разных форматов обучения – возможность использования платформы для организации различных форм учебной деятельности.

Таблица

Сравнительный анализ образовательных платформ

Платформа	Игровые механики	Адаптивность	Соответствие ФГОС	Обратная связь	Стоимость использования	Поддержка разных форматов обучения
1	2	3	4	4	6	7
Учи.ру	Система бейджей, уровней, виртуальные награды, интерактивные персонажи	Автоматический подбор сложности на основе анализа ошибок	Полное соответствие программам 1–11 классов	Мгновенная проверка, детальный разбор ошибок, рекомендации	Бесплатно в школе, платная подписка дома (от 300 руб./мес.)	Индивидуальные и групповые задания, проектная работа
ЯКласс	Рейтинги, таблицы лидеров, математические дуэли	Базовая адаптация с выбором уровня сложности учителем	Соответствует основным требованиям ФГОС	Статистика успеваемости, анализ пробелов	Бесплатный пробный период 7 дней, далее от 150 руб./ученик	Классная работа, домашние задания, тесты
Фоксфорд	Интерактивные тренажеры, игровые сценарии уроков	Индивидуальные траектории на основе тестирования	Полное соответствие с углубленным изучением	Персональные рекомендации, обратная связь от куратора	От 500 руб./мес. за предмет	Онлайн-курсы, репетиторство, олимпиады
Инфоурок	Базовые игровые элементы, система достижений	Стандартные настройки сложности	Соответствует ФГОС с возможностью дополнения	Базовая проверка с комментариями	Бесплатные курсы и платный контент (от 200 руб.)	Курсы повышения квалификации, вебинары
Знаника	Система рейтингов, награды за участие	Групповая адаптация под уровень класса	Частичное соответствие основным программам	Стандартные отчеты об успеваемости	Преимущественно бесплатные ресурсы	Олимпиады, конкурсы, марафоны

1	2	3	4	4	6	7
РЭШ	Интерактивные уроки с элементами игры	Единая траектория для всех учащихся	Полное соответствие государственным стандартам	Систематическая проверка с критериями	Полностью бесплатная	Урочная система, самостоятельная работа
Learning-Apps	Конструктор игр и интерактивных заданий	Ручная настройка параметров	Частичное соответствие через настройку	Базовая статистика выполнения	Бесплатная платформа	Создание собственных упражнений
Mathletics	Многоуровневая система наград, международные рейтинги	Автоматическая адаптация сложности	Соответствует международным стандартам	Детальный анализ навыков	От 1000 руб./ученик в год	Индивидуальные и командные соревнования
Matific	Сюжетные игры, развивающие сценарии	Интеллектуальная адаптация на основе AI	Адаптировано под российские стандарты	Персональный коучинг, рекомендации	Платформенная подписка от 2000 руб./класс	Игровые эпизоды, проекты
Quizizz	Интерактивные опросы	Базовая адаптация скорости	Не соответствует стандартам	Статистика ответов в реальном времени	Бесплатные основные функции	Викторины, домашние задания
Core	Адаптивные обучающие игры	Персональный подход на основе аналитики	Соответствует основным требованиям	Аналитика прогресса и рекомендации	Коммерческая лицензия от 50000 руб./год	Персонализированное обучение
МЭШ	Цифровые сценарии уроков	Стандартизированный подход	Полное соответствие московским стандартам	Системная проверка и отчетность	Бесплатная для московских школ	Все формы обучения
ЛЕСТА	Интерактивные элементы в учебниках	Минимальная адаптация через настройки	Полное соответствие ФГОС	Базовая проверка знаний	Условно-бесплатная с ограничениями	Электронные учебники, курсы
Skysmart	Комплексная геймификация уроков	Умная адаптация на платформе	Полное соответствие обновленным ФГОС	Персональные рекомендации по обучению	Бесплатно для учителей, платно для учеников	Интерактивные рабочие тетради

Проведенное исследование позволило выделить платформы с наиболее эффективными механизмами геймификации и оптимальным соотношением цена-качество. Skysmart демонстрирует комплексный подход с развитой системой

адаптации и качественной визуализацией при доступной стоимости. Учи.ру отличается хорошо проработанной системой мотивации через бейджи и награды с возможностью бесплатного использования базового функционала. Matific предлагает уникальные сюжетные игры с интеллектуальной адаптацией сложности заданий, однако требует финансовых вложений.

Для организации учебного процесса могу рекомендовать комбинированное использование платформ с учетом их экономической эффективности:

- бесплатные платформы (РЭШ, LearningApps) – для базовой работы;
- условно-бесплатные платформы (Учи.ру, ЯКласс) – для расширенного функционала;
- специализированные платформы (Matific, Mathletics) – для углубленного изучения при наличии финансирования.

Проведенный анализ образовательных платформ показал перспективность системного подхода к их интеграции в учебный процесс. На основе сравнительной оценки выявлены оптимальные модели использования цифровых ресурсов с учетом их методического потенциала и экономической эффективности. Предложенная модель использования платформ демонстрирует возможность создания сбалансированной системы цифрового обучения, сочетающей требования федеральных государственных образовательных стандартов с современными подходами к геймификации образования.

Библиографический список

1. Баранова И.В. Анализ образовательных платформ в обучении // *Ceteris paribus*. 2022. № 4. С. 65–67. URL: <https://www.elibrary.ru/kazlwq>
2. Вербицкий А.А. Игровые формы обучения в современной школе // *Вопросы образования*. 2021. № 3. С. 76–89.
3. Болтенко А.П. Особенности применения образовательного портала «ЯКласс» в процессе обучения // *Методика преподавания математических и естественно-научных дисциплин: современные проблемы и тенденции развития: материалы VI Всерос. науч.- практ. конф.* Омск: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 2019. С. 106–109. URL: <https://elibrary.ru/vfnjz>.
4. Борисейко В.А. Возможности открытой цифровой образовательной среды в условиях организации обучения в общеобразовательной школе // *Общество: социология, психология, педагогика*. 2020. № 2. URL: <https://www.elibrary.ru/yqzqwd>.
5. Гиматдинова Г.Н. Возможности использования онлайн-сервиса «ЯКласс» для формирования регулятивных универсальных учебных действий обучающихся 7–9 классов // *Концепт*. 2020. № 8. С. 87–99. URL: <https://www.elibrary.ru/giwwhz>

РАЗВИТИЕ КОГНИТИВНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

DEVELOPMENT OF COGNITIVE ABILITIES OF STUDENTS WITH LIMITED HEALTH OPPORTUNITIES THROUGH MATHEMATICAL COMPUTER SIMULATION

Д.А. Потылицын

D.A. Potylitsyn

Когнитивность, компьютерное моделирование, объект, слайм, программное средство Sweet Home 3d, K-3 Коттедж, Archicad, математический конструктор, геометрические фигуры.

Рассматривается подход к изучению компьютерного моделирования во внеурочной деятельности с использованием программ Sweet Home 3d, K-3 Коттедж, Archicad, математический конструктор для моделирования объектов. В рамках подхода наглядно иллюстрируются геометрические фигуры, плоскость, объекты окружающего нас мира, которые приводят к соответствующим геометрическим фигурам, дополняя тем самым школьную теорию. Применение представленных моделей в школьной практике позволит продемонстрировать геометрические фигуры, показать взаимосвязь между геометрическими объектами, что приближает математику к жизни, повысить когнитивные способности. Важно подчеркнуть практическую направленность занятий, чтобы обучающиеся могли самостоятельно создавать проекты и применять полученные знания.

Cognition, computer modeling, object, slime, Sweet Home 3d software, K-3 Cottage, Archicad, mathematical constructor, geometric shapes.

The article discusses an approach to studying computer modeling in extracurricular activities using the programs Sweet Home 3d, K-3 Cottage, Archicad, and a mathematical constructor for modeling objects. This approach clearly illustrates geometric shapes, planes, and objects that lead to corresponding geometric shapes, thereby complementing school theory. The application of these models in school practice allows for the demonstration of geometric shapes, enhances cognitive abilities, and highlights the relationship between geometric objects, bringing mathematics closer to real-life situations. It is important to emphasize the practical nature of the classes, so that students can create projects on their own and apply the knowledge they have gained.

В условиях модернизации российского образования перед школой встает проблема обеспечения учащихся качественным образованием. Математическое образование – один из важнейших факторов, определяющих уровень экономического и общественно-политического развития страны. Именно поэтому повышение качества математического образования школьников, особенно для детей с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ), является одной из наиболее актуальных и значимых задач, стоящих перед современной школой.

Когнитивные способности представляют собой ментальные процессы. Освоенные повседневные навыки помогают людям ориентироваться в окружающем пространстве, например запомнить дорогу домой, и обеспечивают базовый уровень самообслуживания, такой как приготовление пищи [1]. Эти практические умения важны не только для повседневной независимости: они создают платформу для обучения и профессионального развития, облегчают налаживание социальных связей и стимулируют творческую активность. С точки зрения образования фундаментальные понятия, такие как аксиомы и теоремы, играют ключевую роль в формировании логического мышления и решения задач; соответствующие примеры и упражнения подробно изложены в учебных пособиях по геометрии [2].

Математика на сегодняшний день усваивается многими обучающимися с большой трудностью, ведь вокруг огромное количество отвлекающих факторов: мобильные устройства, интернет и т.д. Детям с ОВЗ, особенно тундровым детям – коренным жителям Крайнего Севера, с каждым годом становится все сложнее понять математику, их когнитивные способности ухудшаются.

Для улучшения понимания математики, повышения когнитивных способностей был выявлен прием, который развивает логическое мышление, визуализацию объектов, творчество, так необходимые современному школьнику и детям с ОВЗ. Для этого в работе применяются программы для моделирования Sweet home 3d и K-3 Коттедж, Archicad, математический конструктор. Компьютерное моделирование – это пошаговая реализация алгоритма, каждый шаг которого представлен в графической форме, и состоит из геометрических фигур [3]. Для детей с ОВЗ осуществляется поэтапное освоение математики от простой программы Sweet home 3d [4] до математического конструктора. Были проведены четыре показательных урока в программах для компьютерного моделирования, выполнен опрос и анализ выполнений заданий, который показал глубокий интерес обучающихся основной школы к освоению и пониманию математики при помощи моделирования, что в последующем привело к улучшению их навыков в решении математических задач и повышению общего уровня успеваемости. Также отмечен рост мотивации к изучению STEM-дисциплин, проявляющийся в активном участии учащихся в проектной деятельности. Учащиеся начали более уверенно применять математические методы для решения реальных задач, что способствовало более глубокому пониманию теоретических концепций. Эти уроки продемонстрировали, что компьютерное моделирование может стать не только инструментом для обучения, но и мощным средством развития критического мышления и креативности, что привело к внедрению дополнительной внеурочной деятельности под названием «моделирование объектов». Особый интерес вызвала программа Математический конструктор.

Первым этапом внеурочной деятельности по моделированию объектов является работа в программе Sweet home 3d, которая предлагается обучающимся 7 классов как начальный этап построения моделей. Она выбрана в силу того, что освоение принципов работы с ней не вызывает сложностей. Первым проектом

для мини-групп становится задание спроектировать комнату (рис. 1) и расставить в ней мебель. И затем обсуждается удобство предложенной планировки. Все ли логично расположено в комнате? Все ли необходимые объекты размещены? Такой подход позволяет не только получить первые представления о геометрических объектах и их привязке к реальной жизни, но и развивать когнитивные способности детей через критический самоанализ построенной модели.

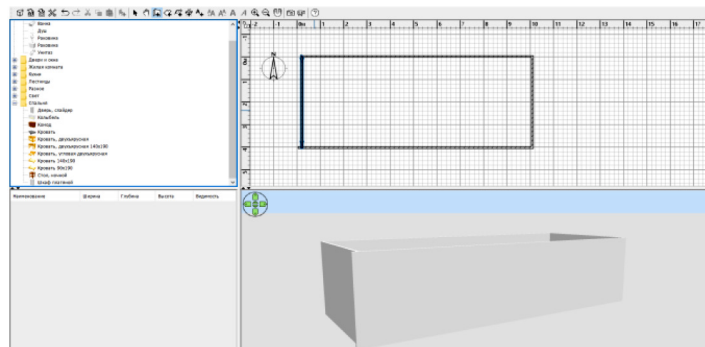


Рис. 1. Создание комнаты в программе Sweet home 3d с помощью геометрических фигур.

На втором этапе обучения учащихся 8-х классов, освоивших Sweet Home 3D, в программе К-3 [5] предлагается смоделировать выбранный жилой объект (избу, баню, чум – национальное жилье тундровых жителей в виде конуса, коттедж и другие строения) и затем создать полноценные объекты в К3-Коттедж (рис. 2).

Учащиеся должны выполнить следующие задачи: разработать основу проекта, определив назначение, функциональность и основные характеристики объекта; спроектировать и разместить окна и двери с учетом освещения и удобства; выбрать и создать конструкцию крыши, соответствующую стилю здания и защищающую от погодных условий; спроектировать и выполнить фундамент (залитку бетона); разработать ландшафтный дизайн с подбором деревьев, кустарников и цветов для гармоничного окружения; и спроектировать систему освещения местности для безопасности и уюта в вечернее время.

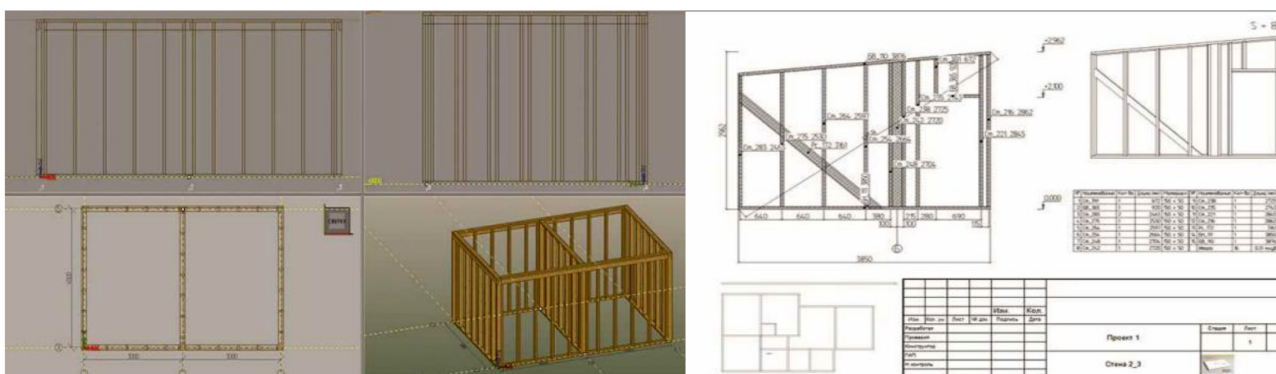


Рис. 2. Моделирование объектов в программе К3-Коттедж с привязкой точек к плоскости

Этот проект поможет учащимся развить навыки планирования, креативного мышления и работы с различными материалами, а также углубить понимание архитектуры и дизайна.

Третий этап – создание объектов в программе Archicad (рис. 3). На третьем этапе в 9 классе ученики работают с программой Archicad [6]. Проекты могут быть большими, поэтому каждый распределяется между 2–3 группами. Ученикам нужно сделать рисунок и чертеж своего проекта. В задания можно включить простые геометрические вещи, например «взаимосвязь фигур». Это значит, что можно посмотреть, как точка может служить началом для разных фигур и как фигуры взаимодействуют друг с другом: квадрат, круг, ромб, трапеция, параллелограмм, пирамида. Такое задание помогает развивать навыки проектирования и лучше понимать геометрию и связи между фигурами.

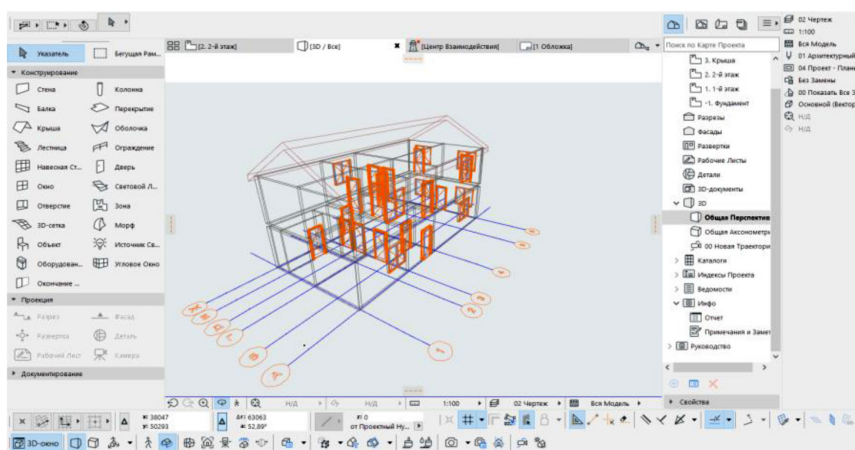


Рис. 3. Моделирование объектов в программе Archicad

Четвертый этап компьютерного моделирования – для учеников 7 классов открывается множество путей для дальнейшего развития. Важно, чтобы эти пути были интересными, практичными и соответствовали их возрасту и уровню понимания. В нашем случае выбор пал на математический конструктор [7], а именно виртуальную математическую лабораторию, входящую в программную среду математический конструктор. В периоды температурных колебаний одной из ключевых проблем для коренных жителей тундры, ведущих кочевой образ жизни, является непрерывное обустройство пути и возведение краткосрочных переправ для преодоления естественных препятствий. В этом процессе дети оказывают активную помощь своим родителям. Визуальная лаборатория МК позволяет смоделировать, разобрать и посмотреть различные жизненные ситуации при перемещении и транспортировке груза, тем самым вызывает большой интерес обучающихся (рис. 4).

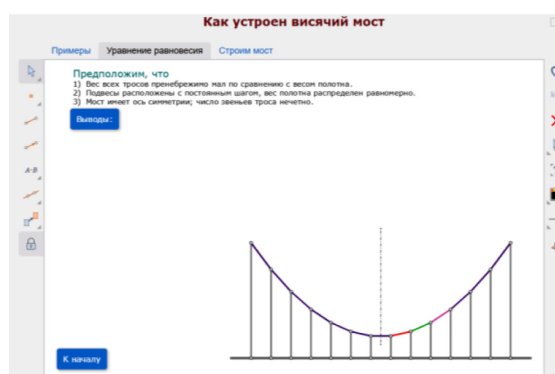


Рис. 4. Виртуальная математическая лаборатория «IC: Математический конструктор»

Подводя итог, отмечу, что такой прием составляет реальную основу для формирования пространственного воображения, логического мышления и самостоятельности в изучении математики. При моделировании проектов, так как дети с ОВЗ обучаются в классах с обычными детьми, обучающиеся получали индивидуальные и групповые задания. В обоих случаях дети с большим интересом выполняли работу и достигали поставленных задач. Моделируя различные объекты, дети сами принимают решения и аргументируют свой выбор, повышая свои когнитивные способности, учащиеся с ОВЗ рассуждают логически и постепенно приходят к конечному результату, повышая свои когнитивные способности, не боятся делать ошибки и творчески подходят к выполнению задания.

Библиографический список

1. Меркулов И.П. Когнитивные способности. М., 2005. 182 с.
2. Атанасян Л. С. Геометрия. 7–9 класс: учебник. М.: Просвещение, 2023. 416 с.
3. Плотников С.А., Семенов Д.М., Фрадков А.Л., Математическое моделирование систем управления. СПб.: Университет ИТМО, 2021. 193 с.
4. Электронный ресурс. Методическое пособие Sweet home 3d. URL: <https://www.sweethome3d.com/ru/documentation.jsp>.
5. Основы проектирования деревянных домов на базе программы «КЗ-Коттедж». Методические указания к практическим занятиям. СПб.: Университет УЛГУ, 2009. 124 с.
6. Малова Н.А. ArchiCAD 20 в примерах. Русская версия. СПб.: БХВ-Петербург, 2017. 576 с.
7. Электронный ресурс. Виртуальная математическая лаборатория «1с:Математический конструктор». URL: <https://obr.1c.ru/mathkit/>

О РАЗРАБОТКЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

ON THE DEVELOPMENT OF AN EDUCATIONAL INFORMATION APPLICATION FOR THE STUDY OF STEREOOMETRY IN SCHOOL

И.В. Прояева, В.А. Веселовский

I.V. Proyaeva, V.A. Veselovsky

Информационные технологии, автоматический анализ, отбор и прогнозирование, компьютер.

В статье обосновывается необходимость внедрения информационных технологий в процесс образования для облегчения изучения различных вопросов геометрии – одного из самых сложных разделов математики. Наряду с преимуществами, внедрение информационных технологий может иметь и отрицательные стороны. Также в работе отражены элементы разрабатываемого образовательного информационного приложения, которое поможет обучающимся увидеть и иметь представление о том, что изучает стереометрия.

Information technology, automatic analysis, selection and forecasting, computer.

This article substantiates the need to integrate information technology into the educational process, particularly to facilitate the study of various topics in geometry, one of the most complex areas of mathematics. Along with its advantages, the introduction of information technology can also have its downsides. The paper also presents elements of an educational information application being developed that will help students understand and gain an understanding of the subject matter of solid geometry.

В настоящее время значительно увеличилась роль информационных технологий в жизни людей. Современное общество включилось в общеисторический процесс, называемый информатизацией. Этот процесс включает в себя доступность для каждого человека к источникам информации, проникновение информационных технологий в бытовые, научные, производственные, общественные сферы, повышение уровня информационного обслуживания. Процессы, происходящие в связи с информатизацией общества, способствуют не только ускорению научно-технического прогресса, интеллектуализации всех видов человеческой деятельности, но и созданию качественно новой информационной среды социума, обеспечивающей развитие творческого потенциала человека [1].

Одним из приоритетных направлений процесса информатизации современного общества является информатизация образования, представляющая собой систему методов, процессов и программно-технических средств, интегрированных с целью сбора, обработки, хранения, распространения и использования информации в интересах ее потребителей. Цель информатизации состоит в глобальной интенсификации интеллектуальной деятельности за счет использования новых информационных технологий: компьютерных и телекоммуникационных [2].

Значительное место в системе формирования интеллектуальной и творческой личности обучающегося отводится изучению геометрии как естественно-научной дисциплины, обладающей огромным гуманитарным и мировоззренческим потенциалом.

Результаты Единого государственного экзамена по математике показывают, что уровень знаний геометрии обучающихся и их умение решать задачи является достаточно низким, значительное число обучающихся не справляются с решением геометрических задач [4].

Решению этой проблемы способствует внедрение в учебный процесс новых информационных технологий, являющихся эффективным средством управления познавательной деятельностью и формирования пространственных представлений обучающихся. При их использовании открываются огромные возможности изменения и совершенствования методики отбора необходимой теоретической и практической информации, которая способствует улучшению формирования пространственного воображения обучающихся на уроках геометрии. Такой процесс обучения характеризуется индивидуальным и дифференцированным подходом, приводит к изменению содержания характера деятельности между учителем и обучающимся [3].

Усиление логической составляющей курса геометрии, стремление построить курс на строго дедуктивной основе привело к тому, что проблема развития пространственного мышления, наглядного представления, воображения отошла на дальний план, что отрицательно отразилось на результатах обучения геометрии, а в первую очередь стереометрии.

Процесс формирования и развития пространственных представлений характеризуется умением мысленно конструировать пространственные образы или схематические конфигурации изучаемых объектов и выполнять над ними мыслительные операции, соответствующие тем, которые должны быть выполнены над самими объектами.

Одной из основных проблем при изучении стереометрии является проблема наглядности, связанная с тем, что изображения даже простейших стереометрических фигур, выполненные в тетрадах или на доске, как правило, содержат большие погрешности. Такая работа, проведенная с помощью компьютерных программ, позволяет избежать таких ошибок и сделать задачи наглядно обозримыми, развивать пространственное воображение в правильном направлении [4].

Современному учителю на уроке геометрии необходимо проявлять повышенный интерес к информационным технологиям, в частности и к виртуальному трехмерному моделированию и его применениям в школе.

Таким образом, вместе с развитием информационных технологий происходит модернизация процесса обучения в школе. Информация в современном мире стала доступна, компьютерные программы помогают наглядно показывать свойства геометрических тел в пространстве и их взаимное расположение, вместе с тем и перемещение.

В настоящее время нами разрабатывается образовательное информационное приложение, которое поможет обучающимся увидеть и иметь представление о том, что изучает стереометрия. В дальнейшем мы представим результат нашей разработки.

Приложение помогает ученику перевести условие стереометрической задачи в объемную модель, которую он строит сам – шаг за шагом. Сначала выбирает фигуру: куб, прямой или наклонный параллелепипед, задает обозначения вершин (А, В, С...), а потом добавляет нужные элементы: точки на ребрах, прямые, плоскости. Как только заданы три точки, определяющие сечение, программа мгновенно строит его, находя все пересечения с ребрами фигуры. Однако в стереометрии пересечение часто происходит вне самой фигуры – например, между скрещивающимися прямыми или при продолжении плоскостей. Чтобы продемонстрировать ученику как это выглядит в пространстве, мы встроили специальный режим – «Анализ пересечений в пространстве». Он позволяет проверить, пересекаются ли две прямые, прямая и плоскость или две плоскости. Если точка пересечения существует, система автоматически продлевает объекты, показывает ее на графике и сопровождает пояснением (рис. 1). Такой анализ поможет ученику разобраться, чем скрещивающиеся прямые отличаются от параллельных или почему плоскости не пересекаются в пространстве, хотя кажется, что должны.

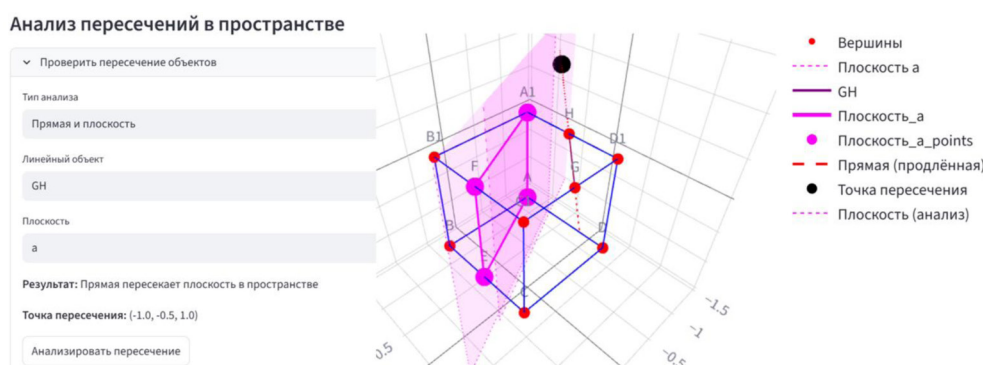


Рис. 1. Анализ пересечения плоскости AA_1F и прямой GH (F, G, H – середины граней)

Особое внимание уделено визуальным элементам (рис. 2):

- плоскости отображаются как полупрозрачные прямоугольники, выделенные своим цветом для более четкого восприятия;
- при расчете углов, они визуализируются дугами на графике;
- все объекты подписываются, а координаты выводятся в читаемом виде.

Чем отличается от существующих решений?

Безусловно, GeoGebra является одним из лучших инструментов для геометрии. Однако из-за ее универсальности могут возникать трудности при решении типовых задач. Чтобы построить сечение куба плоскостью, которая проходит через три точки на ребрах, ученику приходится вручную искать пересечения, строить вспомогательные линии, управлять слоями. В нашем приложении это происходит автоматически, оно создано именно под типовые задачи школьного курса (рис. 3).

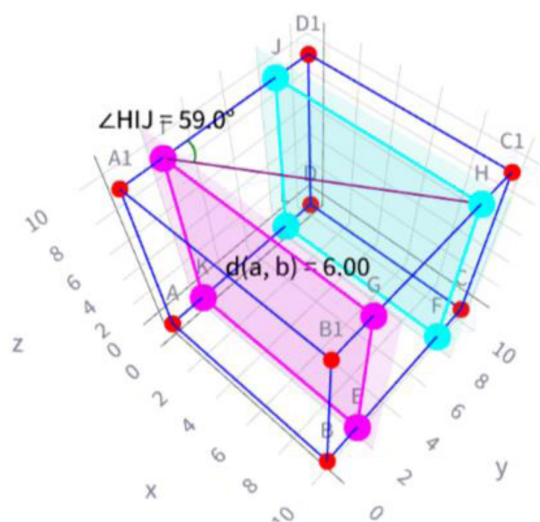


Рис. 2. Построены две плоскости, измерено расстояние между ними, рассчитан угол $\angle HIJ$

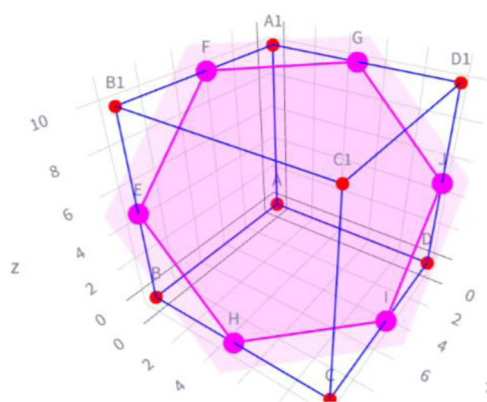


Рис. 3. Построение плоскости через точки EFG (середины граней куба)

В дальнейшем в приложение будут добавлены другие геометрические фигуры. Блок распознавания задачи по тексту и визуализация на графике, а также вспомогательный инструмент для учителя для генерации типовых задач по стереометрии.

Библиографический список

1. Абдуллаев А.Н., Инатов И.А. Некоторые методические особенности применения информационных технологий в процессе обучения математике // Молодой ученый. 2016. № 11. С. 1405–1408.
2. Агапова Н.В. Перспективы развития новых технологий обучения. М.: Велби, 2005. 247 с.
3. Прояева И.В., Колобов А.Н. Разработка компетентностно-ориентированных задач и возможные их применения в преподавании математических дисциплин // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием / под общей редакцией Т.Н. Можаровой. 2018. С. 116–119.
4. Прояева И.В., Сиделов Д.И. Особенности нахождения моментов инерции различных фигур // Проблемы и перспективы внедрения инновационных телекоммуникационных технологий: материалы IX Международной научно-практической очно-заочной конференции. Оренбург, 2023. С. 546–561.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СОВРЕМЕННОГО ПОКОЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ В УЧРЕЖДЕНИЯХ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

METHODOLOGICAL FEATURES OF TEACHING MATHEMATICS TO THE MODERN GENERATION OF STUDENTS IN SECONDARY PROFESSIONAL EDUCATIONAL INSTITUTIONS

И.В. Путинцева

I.V. Putintseva

Цифровизация образования, обучение математике, математическая компетентность, поколение Z, интерактивные платформы и приложения.

Автором статьи на основе ключевых особенностей познавательных процессов обучающихся среднего профессионального образования (представителей поколения Z) определены рекомендации по эффективной организации образовательного процесса в условиях цифровизации, направленного на формирование их математической компетентности.

Digitalization of education, mathematics education, mathematical competence, Generation Z, and interactive platforms and applications.

Based on the key features of the cognitive processes of secondary vocational education students (representatives of generation Z), the author of the article has developed recommendations for the effective organization of the educational process in the context of digitalization, aimed at developing their mathematical competence.

В настоящее время контингент студентов 1 и 2 курсов, изучающих математику на уровне среднего профессионального образования, составляют обучающиеся, которых в силу возрастных показателей относят к поколению Z. В связи с этим совершенствование образовательного процесса становится необходимостью – содержание, методы и средства обучения быть релевантными для соответствующего поколения обучающихся.

Абстрагируясь от особенностей мировоззрения и духовных ценностей поколения Z, рассмотрим важнейшие характеристики, непосредственно влияющие на их обучаемость: специфику мышления, восприятие информации, памяти. Отличительной особенностью представителей данного поколения является клиповое мышление – способность воспринимать окружающий мир через короткие яркие образы и видеоролики интернет-сетей. Как следствие, у «зумеров» прослеживается фрагментарность мышления – наличие обрывочных образов и отсутствие взаимосвязи между фрагментами, что приводит к неполному или искаженному представлению об объекте или процессе в целом. Психолого-педагогические исследования показали, что у представителей поколения Z значительно сократилась продолжительность внимания и наблюдается проблема сосредоточения на чем-либо длительное время (синдром дефицита внимания) [1]. Но в то же время важнейшим преимуществом современных студентов-зумеров является высокий уровень компьютерной грамотности, эрудированность, умение очень быстро анализировать и фильтровать огромные объемы информации.

Психолого-педагогические особенности представителей поколения Z и специфика их обучения являлись предметом изучения многих ученых (Дж. Коатс, Е.М. Шамис, Д.И. Фельдштейн и др.) [1]. Результатом научных исследований является обобщенный образ «зумера», а также общие рекомендации по организации учебно-воспитательного процесса. Однако исследователи не конкретизируют специфику обучения по отдельным учебным дисциплинам, в том числе по математике.

Цель настоящей статьи заключается в трансляции эффективных способов организации образовательного процесса, выбора технологий и методов обучения математике представителей поколения Z.

В условиях цифровой трансформации образования, учитывая психолого-педагогические особенности студентов-зумеров, считаем целесообразным применение в обучении математике технологии смешанного обучения, подразумевающей сочетание традиционных и электронных форм обучения, в том числе дистанционных. При этом средством реализации электронного обучения в образовательном процессе может являться электронный курс, разработанный на базе платформы Moodle и включающий разнообразные цифровые образовательные ресурсы по математике, интерактивные задания, контрольно-оценочные средства. Однако независимо от формы проведения занятий учебный процесс должен быть четко структурирован, а обучающемуся понятна его деятельность на каждом этапе, сроки выполнения учебных задач и критерии их оценивания. При выборе методов обучения следует отдать предпочтение интерактивным методам (кейс-метод, мозговой штурм, метод проектов, геймификация), в то время как репродуктивные свести к минимуму.

При планировании занятий в очном режиме рекомендуется обеспечить смену деятельности – разделить учебное время на промежутки по 25–30 минут, в течение каждого из которых организовать различные виды работ: составление опорного конспекта, просмотр обучающих видеороликов, решение задач, работа с интерактивными тренажерами, решение кейс-заданий, выполнение практической работы, работа с учебной литературой или раздаточным материалом, выполнение контрольной работы или электронное тестирование.

Кроме того, очевидным фактом является применение в обучении математике «зумеров» мультимедийных технологий и упор на визуализацию [2]. Так, при объяснении нового материала рекомендуется небольшие фрагменты математической информации сочетать с короткими видеоматериалами или сопровождать мультимедийной презентацией; при закреплении алгоритмов решения математических задач использовать интерактивные тренажеры (Learning Apps, Wordwall, Learnis, Quizlet), при контроле знаний интерактивные тесты (Plickers). Визуализация математических концепций с помощью графиков, диаграмм и анимаций (GeoGebra, Математический конструктор) способствует их лучшему восприятию и дальнейшему освоению [3]. Однако при реализации намеченного плана занятия следует учитывать ограничения на использование гаджетов в образовательном процессе [4].

При отборе содержания учебного материала, учитывая требования ФГОС к уровню математической подготовки студентов и запросы работодателей, следует обеспечить его практико-ориентированность. В рамках реализации технологий stem-обучения целесообразно включать в учебный материал кластер задач профессиональной направленности, способствующих формированию математической компетентности как составляющей общей профессиональной.

При организации самостоятельной работы обучающихся, преимущественно посредством электронного курса по математике, следует отдать предпочтение заданиям, повышающим их мотивацию, самостоятельность, исследовательские навыки и предоставить студентам возможность работать с материалами курса по свободному графику.

Резюмируя вышесказанное, отметим, что результативное формирование математической компетентности обучающихся поколения Z возможно при четком планировании и организации занятий по математике как в очном, так и дистанционном режиме, тщательном отборе содержания, выборе методов и средств обучения, отвечающих возрастным особенностям «зумеров» с опорой на их «сильные» стороны.

Библиографический список

1. Коатс Дж. Поколения и стили обучения. М.: Межгосударственная ассоциация последиplomного образования, 2011. 121 с.
2. Никольская А. Digital natives: как учить современных детей? URL: <http://www.psychologies.ru/roditeli/> (дата обращения: 06.09.2025).
3. Табинова О.А., Шашкина М.Б. Цифровая трансформация образования: как учить современных школьников? // Математика и математическое образование в эпоху цифровизации: материалы XIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 14–15 ноября 2024 года. Красноярск, 2024. С. 446–450.
4. Роспотребнадзор. О рекомендациях по работе с гаджетами для школьников. URL: https://www.rospotrebnadzor.ru/about/info/news/news_details.php?ELEMENT_ID=17008&sphrase_id=3244753 (дата обращения: 09.09.2025).

ПРЕОДОЛЕНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ ЗАТРУДНЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ КАК УСЛОВИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ЦЕЛОСТНОГО ПОДХОДА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

OVERCOMING STUDENTS' COGNITIVE DIFFICULTIES AS A CONDITION FOR IMPLEMENTING THE HOLISTIC APPROACH IN MATHEMATICS EDUCATION

М.В. Солдаева

M.V. Soldaeva

Целостный подход к обучению, познавательные затруднения, понимание в математике, субъектный опыт, формализм.

В статье рассматривается проблема познавательных затруднений обучающихся как закономерного этапа процесса обучения математике. Подчеркивается, что работа с затруднениями не может рассматриваться как устранение ошибок, а должна выступать механизмом формирования осмысленного знания. Теоретической основой исследования является целостный подход, ориентированный на интеграцию субъектного опыта, смысловой интерпретации математических объектов и вариативных способов действия. Представлены типология познавательных затруднений и стратегии их преодоления, включающие работу с субъектным опытом, переход от образа к символу.

Holistic approach to learning; cognitive difficulties; mathematical understanding; prior learning experience; formalism.

The article examines students' cognitive difficulties as a natural and meaningful stage of learning mathematics. It is emphasized that addressing such difficulties should not be seen merely as correcting errors, but rather as a mechanism for developing meaningful understanding. The theoretical foundation of the study is the holistic approach, which integrates learners' subjective experience, conceptual meaning-making, and multiple solution strategies. A typology of cognitive difficulties and strategies for overcoming them is presented, including activation of prior experience, progression from conceptual representation to symbolic notation.

Современное математическое образование сталкивается с противоречием между декларируемой ориентацией на формирование функциональной грамотности и реальной практикой обучения, в которой нередко доминируют механическое выполнение алгоритмов, фрагментарность содержания и исключение субъектного опыта учащихся из процесса понимания нового материала. Это приводит к явлению, описываемому в отечественной педагогической литературе как *формальное усвоение знаний*, при котором знания запоминаются, но не осознаются, что затрудняет их перенос в новые учебные и жизненные ситуации.

Познавательные затруднения обучающихся в данном контексте выступают не как дефект усвоения, а как показатель того, что на определенном этапе обучения нарушены связи между содержанием понятия, его образным и операционным представлением и возможностью применения знания в деятельности.

Таким образом, работа с затруднениями становится не вспомогательным, а центральным элементом развивающего обучения, позволяющим обеспечить понимание и осмысленное действие ученика.

Одним из эффективных методологических оснований такого подхода является **целостный подход в обучении математике** [5; 6], предполагающий интеграцию психолого-педагогического, философского и методического аспектов обучения. В рамках данной статьи ставится цель – показать, каким образом преодоление познавательных затруднений становится механизмом реализации целостного подхода и способствует формированию осмысленного математического мышления учащихся.

В современных исследованиях [1; 2] познавательное затруднение рассматривается как этап когнитивного конфликта, запускающий рефлексивный и поисковый процессы недостающих связей. Затруднение не свидетельствует о неспособности учащегося, а указывает на рассогласование между наличным опытом и новым содержанием. В математическом образовании выделяются следующие типы познавательных затруднений:

смысловые – отсутствие понимания сути понятия или операции;

операциональные – невозможность выполнить действие без образца;

образные – отсутствие внутренней модели объекта;

терминологические – отрыв термина от его содержания;

логические – невозможность увидеть связи между понятиями и шагами решения.

Подход, при котором затруднение рассматривается как диагностируемая точка роста, меняет педагогическую позицию учителя и характер урока: от трансляционно-контрольной модели – к организующей, развивающей, понимающей.

Итак, анализ познавательных затруднений показывает, что трудности возникают не из-за недостатка способностей обучающегося, а из-за отсутствия необходимых смысловых и структурных опор внутри изучаемого материала. Обучающийся знает, *как выполнить действие*, но не понимает, *зачем и почему оно работает*. Именно эта разобщенность приводит к формальному усвоению и затрудняет перенос знаний в новые ситуации. Поэтому работа с затруднениями требует иной организации обучения – такой, в которой содержание представлено не как набор алгоритмов, а как взаимосвязанная система смыслов, действий и образов. Такой способ организации и реализуется в целостном подходе, выступающем методологической основой перехода от формальной математики к осмысленной.

Целостный подход в обучении математике предполагает построение понимания через раскрытие связей между образом, смыслом и способом действия. Он основывается на следующих принципах:

опора на субъективный опыт обучающегося как исходную точку смыслообразования;

системность и межпонятийные связи вместо изолированного изучения тем;

смена траектории «правило → упражнение» на «*опыт → смысл → действие → обобщение*».

Целостный подход позволяет уйти от формализма [4], поскольку изменяет роль знания: оно становится не фрагментом, подлежащим запоминанию, а инструментом понимания.

Тем не менее, пока связи между смыслом, образом и действием остаются неосознанными, математическое знание не становится целостным, что приводит к возникновению познавательных затруднений. Они отражают не ошибки ученика, а отсутствие необходимых смысловых опор и являются критическим звеном, показывающим, где целостность еще не достигнута.

Возникновение затруднений связано с рядом факторов: разрывом между практическим и теоретическим уровнем задания, преждевременной символизацией, недостаточным количеством смысловых опор, отсутствием возможности выбора стратегии решения задачи, а также несформированностью учебных действий анализа, сопоставления и интерпретации.

Например, обучающиеся легко выполняют вычисления вида $-7 + (-3)$, но испытывают затруднение, когда требуется объяснить, почему результат становится «еще меньше», хотя формально присутствует сложение. Это показывает, что арифметическое действие освоено, но целостный образ понятия отсутствует.

Стратегии преодоления познавательных затруднений в рамках целостного подхода основаны на том, что знание формируется не через подготовленный образец решения, а через его смысловое открытие [5]. Одной из ключевых стратегий становится учет и активизация субъектного опыта обучающихся. Субъектный опыт выступает мостом между известным и новым содержанием, позволяя сделать математический материал лично понятным и значимым. Его выявление помогает учащемуся соотнести новое знание с уже существующими представлениями и перевести абстрактное математическое содержание в осмысленное.

Например, понятие дроби становится понимаемым только тогда, когда оно опирается на опыт деления целого: пищи, шоколада, времени, расстояния. Аналогично отрицательные числа приобретают смысл, когда обсуждаются в контексте температуры, глубины, дебета банковского счета. В этих случаях математическое понятие перестает быть формальным и начинает опираться на смысловой образ.

Следующим шагом является переход от образа к символу. В рамках целостного подхода символическая запись не подменяет собой смысл, а фиксирует уже найденную закономерность. Например, до введения формулы длины окружности учащимся предлагается измерить несколько круглых предметов, вычислить отношение длины окружности к диаметру и обнаружить его постоянство. Только после этого формула воспринимается не как внешний образец, а как зафиксированный вывод, к которому ученик пришел в процессе исследования [3].

Применение описанных принципов проявляется на различных ступенях школьного математического образования. В 5–6 классах работа опирается преимущественно на игровые, измерительные и визуальные модели, позволяющие осмыслить такие темы, как дроби, отрицательные числа и площадь фигур. В 7–8 классах акцент смещается на работу с функциями, линейными и квадратными уравнениями, где ведущими средствами становятся графические модели,

таблицы, сопоставление способов решения и ситуационные задачи. В старшей школе (9–11 классы) содержание усложняется и включает тригонометрию, логарифмы, параметры и доказательства. Здесь наиболее результативными становятся проблемные задачи и вопросы, каскады решений, исследовательские задачи и кейсы.

Реализация данных стратегий меняет роли участников образовательного процесса. В традиционной модели учитель выступает носителем готового знания и контролирует его воспроизведение, тогда как в условиях целостного подхода его функция – организовывать пространство смыслового открытия и поддерживать рефлексию учащихся. Обучающийся перестает быть исполнителем алгоритмов и становится активным субъектом познания, способным искать способы действия, анализировать их и осознавать смысл полученных результатов.

Проведенный анализ показывает, что познавательные затруднения обучающихся нельзя рассматривать как побочный продукт обучения или свидетельство «слабой подготовленности» школьников. Напротив, они являются естественным и закономерным проявлением тех мест, где нарушена целостность математического знания: разорваны связи между образом, смыслом и способом действия, не согласованы теоретический и практический уровни содержания, не опирается в достаточной степени субъектный опыт учащихся. В этом смысле познавательное затруднение выступает важнейшим диагностическим инструментом учителя, позволяющим локализовать зоны непонимания и целенаправленно перестраивать образовательную ситуацию.

Рассмотренные в статье стратегии преодоления затруднений демонстрируют, что именно целостный подход задает принципиально иную логику проектирования урока математики. Работа с субъектным опытом, переход от образа к символу, организация педагогических ситуаций выбора, возвращение к затруднениям через интерливинг позволяют не просто «исправить ошибку», а изменить структуру учебной деятельности учащегося. Математическое знание при этом перестает быть набором изолированных правил и алгоритмов и начинает выступать как связанная система смыслов и способов действий, доступная для интерпретации, обсуждения и переноса в новые контексты.

Важным результатом реализации целостного подхода становится изменение роли участников образовательного процесса. Учитель перестает быть исключительно транслятором готовых образцов решения и контрольным органом: он выступает организатором пространства смыслового поиска, медиатором между математическим содержанием и опытом ученика. Ученик, в свою очередь, выходит из позиции пассивного исполнителя алгоритмов и становится субъектом познания, который пробует различные стратегии, рефлексиирует собственные затруднения, обосновывает выбор способа решения и осознает границы применимости полученного результата. Именно такое включенное участие обеспечивает формирование у обучающихся не только вычислительных навыков, но и математического мышления, критичности, готовности к самостоятельному освоению нового знания.

Таким образом, целостный подход создает условия для формирования у обучающихся не только совокупности математических умений, но и способности применять их в реальных и учебных ситуациях, осуществлять осмысленный перенос, интерпретировать и оценивать полученные результаты. Систематическая работа с познавательными затруднениями позволяет превратить их из «проблемы» в ресурс развития, а обучение математике – из репродуктивного процесса в подлинно развивающий. Перспективы дальнейших исследований видятся в разработке диагностических инструментов выявления типов познавательных затруднений, в описании моделей методической подготовки учителя к работе в логике целостного подхода, а также в эмпирической оценке эффективности предложенных стратегий на разных ступенях обучения.

Библиографический список

1. Добродий Т.С. Модель диагностики и преодоления познавательных барьеров при обучении физике // Письма в Эмиссия.Оффлайн (The Emissia.Offline Letters): электронный научный журнал. 2022. № 12 (декабрь). ART 3197. URL: <http://emissia.org/offline/2022/3197.htm>
2. Кожевников Д.Н. Когнитивные барьеры и работа с категорией сложности в обучении в свете различных исторических типов научной рациональности // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. 2016. № 2. С. 28–37.
3. Ларченкова В.В. Познавательные барьеры при обучении физике в условиях использования информационных технологий / В.В. Ларченкова, В.В. Лаптев, А.В. Ляпцев и др. СПб: Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, 2022. 168 с.
4. Солдаева М.В. Целостный подход как средство ухода от формализма в обучении математике // Современные проблемы математики и математического образования. Международная научная конференция «78 Герценовские чтения». Санкт-Петербург, 2025. С. 149–151.
5. Солдаева М.В. Реализация целостного подхода к обучению математике как условие достижения понимания // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2013. № 161. С. 202–205.
6. Солдаева М.В. Формирование математических понятий на основе целостного подхода // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2013. № 5. С. 129–132.

НЕЙРОДИДАКТИКА КАК ОСНОВА ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДИК ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

NEURODIDACTICS AS A BASIS FOR DEVELOPING EFFECTIVE MATHEMATICS TEACHING METHODS

О.А. Табинова, М.Б. Шашкина

O.A. Tabinova, M.B. Shashkina

Дидактика математики, нейронауки, нейродидактический подход, когнитивные особенности.

Рассматриваются основные положения научного направления педагогической науки – нейродидактики, описываются принципы, которые могут быть использованы при разработке образовательных программ. Приводятся примеры реализации принципов нейродидактики в некоторых темах школьного курса математики.

Mathematics didactics, neuroscience, neurodidactic approach, and cognitive features.

The article discusses the main provisions of the scientific field of pedagogical science – neurodidactics, and describes the principles that can be used in the development of educational programs. Examples of using neurodidactics in some topics of the school mathematics course are provided.

Современное образование сталкивается с новыми вызовами, обусловленными изменением информационной среды, повышением требований к качеству обучения и необходимостью учета индивидуальных особенностей обучающихся. Одним из перспективных научных направлений в современной педагогической науке, способных оказать значительное влияние на организацию образовательного процесса, является нейродидактика – междисциплинарная область, объединяющая достижения нейронаук и педагогики. Основным предметом ее изучения – способы создания условий, способствующих более естественному, комфортному и продуктивному обучению, с опорой на понимание механизмов работы человеческого мозга.

Термин «нейродидактика» (англ. *Neurodidactics*) пока не имеет единого общепринятого определения. Однако за последние годы интерес к этой области значительно возрос как в международной, так и в отечественной дидактике. Впервые его использовал немецкий исследователь Герхард Прайс в 1988 г. в контексте раннего математического развития детей. В этой интерпретации нейродидактика представляет собой интегративную дисциплину, аккумулирующую исследования в различных областях психологии, дидактики, нейронауки и других смежных дисциплин¹.

Анализ современных исследований свидетельствует о том, что нейродидактика активно развивается как в теоретическом, так и в практическом направлении.

¹ Костромина С.Н. Введение в нейродидактику: учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2019. 182 с.

Так, в работе J. Dubinsky, G. Roehrig, S. Varma [1] рассматривается важность интеграции знаний о мозге в программы профессиональной подготовки педагогов. Авторы подчеркивают, что понимание принципов работы когнитивных функций, таких как рабочая память и внимание, позволяет разрабатывать более эффективные стратегии преподавания и учитывать индивидуальные особенности обучающихся.

Важным аспектом применения нейродидактических подходов является их использование в цифровой образовательной среде. Как отмечают В. García-Valdecasas и др., онлайн-обучение требует особых подходов к организации взаимодействия между преподавателем и студентом [2]. Учет особенностей восприятия информации в виртуальной среде, внедрение интерактивных технологий и визуализации данных позволяют повысить уровень вовлеченности и сохранить концентрацию внимания.

В российском образовании также наблюдается рост интереса к этой области. Э.Ф. Зеер говорит о нейродидактике как о содержательном ядре персонализированного образования [6]. Автор приводит примеры реализованных в образовании нейротехнологий. В общеобразовательной школе это технология «Когнифит» (CogniFit), которая направлена на развитие познавательных способностей: восприятия, внимания, памяти, мышления. Школьникам предлагаются упражнения по тренировке когнитивных функций мозга. Используемые нейротехнологии помогают преодолеть трудности в учебе, повышают обучаемость, стимулируют интерес к развитию персонализированных результатов. В профессиональной школе также используется ряд нейротехнологий: педагогические мастерские, виртуальные экскурсии и др., которые направлены на формирование hard- и soft skills на основе электронных устройств и специального оборудования.

В статье А.А. Мальсагова, В.В. Лезиной [7] анализируется текущее состояние нейродидактических исследований и практик в отечественной системе образования. Авторы отмечают, что, несмотря на относительную новизну направления, нейродидактические принципы находят применение на всех уровнях обучения – от дошкольного до высшего. При этом акцентируется внимание на необходимости адаптации зарубежного опыта к российским социокультурным условиям. Например, одним из перспективных направлений может быть разработка нейроинтерфейсов для детей с ограниченными возможностями здоровья, хотя это требует тщательной этической экспертизы и анализа потенциальных рисков.

Е.Н. Галкина, Н.Г. Перевозчикова обращают внимание на практическую направленность нейродидактических технологий [4]. По данным исследования, использование визуализаций, игровых элементов и контекстуального представления информации положительно влияет на усвоение знаний и развитие когнитивных способностей. Автор отмечает, что мнемонические техники и ассоциативные методы способствуют формированию прочных нейронных связей, что улучшает запоминание и воспроизведение информации. Вместе с тем эффективность таких методов может варьироваться в зависимости от индивидуальных особенностей памяти и мышления учащихся.

А.А. Алексеева подчеркивает важность интеграции нейродидактических принципов в деятельность учителей начальной школы. Автор отмечает, что понимание особенностей работы мозга у детей младшего школьного возраста позволяет педагогам разрабатывать более эффективные уроки, учитывающие сенсорные предпочтения и когнитивные возможности учащихся [3].

Таким образом, нейродидактика – не просто абстрактная наука, а практическая методология, ориентированная на реальные образовательные задачи. Основными чертами этой области являются: *междисциплинарность* (сочетание знаний из нейронауки, психологии и педагогики); *ориентация на работу мозга* (понимание того, как информация воспринимается, обрабатывается и запоминается); *практическая направленность* (разработка и внедрение эффективных методов обучения); *доказательность* (все подходы основаны на эмпирически проверенных данных).

Эта область позволяет взглянуть на образование через призму биологических и когнитивных особенностей человека, что особенно важно при обучении таким сложным предметам, как математика.

На основе анализа современной научной литературы можно выделить следующие ключевые принципы нейродидактики, которые должны быть положены в основу разработки и реализации образовательных программ:

Нейропластичности. Обучение способствует изменению структур и функций мозга, что делает его мощным инструментом формирования новых навыков и компетенций.

Активного обучения. Вовлечение обучающегося в познавательный процесс через исследовательскую деятельность, решение проблем и групповое взаимодействие значительно повышает эффективность обучения.

Эмоциональной значимости. Эмоциональное состояние влияет на качество усвоения информации; позитивная образовательная среда способствует лучшему запоминанию и пониманию материала.

Контекстуальности. Информация, представленная в референтном контексте, легче воспринимается и применяется на практике.

Индивидуализации. Учет индивидуальных особенностей обучающихся позволяет оптимизировать процесс обучения и повысить его результативность.

Сенсорной интеграции. Использование разных сенсорных каналов (зрительного, слухового, кинестетического) способствует комплексному усвоению знаний.

Применение этих принципов в обучении математике имеет особое значение, поскольку данная дисциплина часто вызывает трудности учащихся, связанные с абстрактностью материала, высокими требованиями к логическому мышлению и развитию метакогнитивных навыков. Включение нейродидактических подходов позволяет:

- улучшить понимание математических концепций за счет их объяснения доступным языком и использования визуальных, тактильных и контекстуальных средств;
- повысить мотивацию к изучению предмета через создание поддерживающей и эмоционально комфортной образовательной среды;

- развивать логическое и критическое мышление посредством решения проблем, исследовательских заданий и проектной деятельности;
- снизить уровень математической тревожности, предоставляя учащимся право на ошибку и возможность попробовать различные стратегии решения;
- оптимизировать процессы запоминания через использование мнемонических техник, повторения с интервалами и ассоциаций;
- формировать метакогнитивные навыки, направленные на осознание собственного мышления, саморегуляцию и планирование учебной деятельности.

В работе Л.Г. Емец, Н.В. Соловьева и Ю.В. Сорокопуд [5] обосновывается необходимость внедрения нейродидактического подхода в образовательную практику, особенно при работе с детьми, испытывающими трудности в обучении, поскольку он учитывает индивидуальные особенности функционирования мозга, способствует формированию устойчивой учебной мотивации и повышает эффективность усвоения знаний. В работе выделены четыре ключевых принципа нейродидактики: учет индивидуальных особенностей мозговой деятельности, активное включение учащегося в образовательный процесс, индивидуализация обучения и междисциплинарный характер подхода.

Применение принципов нейродидактики на практике требует адаптации существующих методик обучения и разработки новых, учитывающих особенности работы мозга. Рассмотрим некоторые способы и приемы применения нейродидактических принципов к различным темам школьного курса математики (табл.).

Таблица

Примеры использования нейродидактического подхода при изучении некоторых тем и разделов школьного курса математики

Традиционный подход	Нейродидактический подход
Обыкновенные дроби	
<p>Объяснение дробей как частей целого с использованием круговых диаграмм, но без активного вовлечения. Акцент на запоминание правил сложения, вычитания, умножения и деления</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Мультисенсорное обучение: Используйте реальные предметы, которые можно разделить. Пицца, шоколадные плитки, яблоки – все это отличные наглядные пособия. Позвольте детям физически делить их на части, чтобы они почувствовали, что значит «половина», «четверть» и т.д. 2. Эмоциональная связь: Создайте ситуацию, в которой деление на доли имеет значение. Например, предложите поделить конфеты между друзьями. Если кто-то получит меньше, это вызовет эмоциональную реакцию, которая поможет запомнить принцип равенства долей. 3. Визуализация и сторителлинг: Расскажите историю о пиратах, которые делят сокровища. Разные типы монет (золотые, серебряные, бронзовые) могут представлять разные дроби. Рисуйте карту сокровищ, на которой нужно пройти, чтобы найти «половину», «треть» или «четверть» пути. 4. Игры и соревнования: Используйте игры, такие как «Дробное домино» или «Дробное бинго», чтобы закрепить знания в игровой форме. Разделите класс на команды и предложите им соревноваться в решении задач на дроби.

Линейные уравнения	
1	2
	5. Акцент на понимание, а не на зубрежку: Вместо заучивания правил, объясните, <i>почему</i> эти правила работают. Например, покажите на реальных примерах, как приведение к общему знаменателю позволяет сравнивать и складывать дроби
Объяснение алгоритма решения уравнений с акцентом на механическое выполнение действий (перенос слагаемых, приведение подобных и т.д.).	<ol style="list-style-type: none"> 1. Визуальная метафора «Весы»: Представьте уравнение как весы, где левая и правая части должны быть в равновесии. Каждое действие над уравнением (сложение, вычитание, умножение, деление) должно выполняться на обеих сторонах, чтобы сохранить равновесие. Используйте настоящие весы и предметы для демонстрации. 2. Кинестетическое обучение: Позвольте ученикам физически перемещать предметы (например, блоки) на весах, чтобы представить члены уравнения. 3. Сторителлинг и контекст: Создайте задачу, в которой решение уравнения имеет практическое значение. Например, задача о распределении прибыли между партнерами, где неизвестный член уравнения – доля одного из партнеров. 4. Индивидуализация и «право на ошибку»: Поощряйте учеников пробовать разные подходы к решению. Объясните, что ошибки – это нормальная часть процесса обучения, и они помогают лучше понять материал. 5. Метакогнитивный подход: Задавайте ученикам вопросы, чтобы стимулировать их думать о своих мыслительных процессах. «Почему ты выбрал именно этот шаг?» «Какие еще способы решения ты видишь?» «Как ты можешь проверить свой ответ?»
Теорема Пифагора	
Заучивание формулы $a^2 + b^2 = c^2$ и решение задач на ее применение	<ol style="list-style-type: none"> 1. Визуальное доказательство: Используйте геометрические модели, чтобы продемонстрировать, почему имеет место такое соотношение между сторонами прямоугольного треугольника. Разделите квадрат на гипотенузе на меньшие квадраты, сумма площадей которых равна сумме площадей квадратов на катетах. 2. Практическое применение: Предложите ученикам измерить стороны прямоугольного треугольника и проверить теорему Пифагора самостоятельно. Используйте веревку и колышки для создания прямоугольных треугольников на улице. 3. Контекст и реальные задачи: Решите задачу о том, как строители используют теорему Пифагора для проверки прямого угла при строительстве фундамента. Или задачу о том, как пожарные используют ее для определения длины лестницы, необходимой для спасения людей из горящего здания. 4. История и культура: Расскажите об истории теоремы Пифагора, о том, кто такой Пифагор и почему его теорема до сих пор важна. Упомяните о том, что доказательства этой теоремы находили в Древнем Египте и Вавилоне, задолго до Пифагора. 5. Творческое применение: Предложите ученикам придумать собственные задачи на применение теоремы Пифагора, связанные с их интересами

1	2
Графики функций	
<p>Построение графиков функций по точкам, заучивание свойств различных функций</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Интерактивные симуляции: Используйте онлайн-инструменты (например, Desmos, GeoGebra) для построения графиков функций. Позвольте ученикам изменять параметры функций и наблюдать, как это влияет на график. 2. Визуализация преобразований: Объясните, как добавление константы к функции сдвигает график вверх или вниз, а умножение на константу растягивает или сжимает его. Используйте анимацию, чтобы показать эти преобразования в динамике. 3. Связь с реальным миром: Покажите, как графики функций используются для моделирования различных процессов, таких как рост населения, колебания температуры, траектория полета снаряда. 4. Метафоры и аналогии: Сравните график функции с американскими горками, чтобы объяснить понятия возрастания и убывания. Используйте метафору «зеркала», чтобы объяснить симметрию графиков. 5. Творческое применение: Предложите ученикам создать собственные графики функций, которые бы представляли какие-то явления или процессы, интересные им (например, график изменения популярности их любимой музыкальной группы)

Нейродидактика открывает широкие возможности для совершенствования обучения математике. Ее применение позволяет: повысить мотивацию и вовлеченность учеников; учитывать индивидуальные особенности каждого ребенка; развивать метапредметные навыки; интегрировать современные технологии в учебный процесс. Нейродидактика – мощный инструмент для повышения эффективности обучения. Особенно важны ее принципы в обучении математике, где часто возникает тревога, непонимание и низкая мотивация. Интеграция нейродидактических методов в образовательный процесс открывает путь к более осознанному, эмоционально комфортному и успешному обучению.

Успешное внедрение нейродидактического подхода и его приемов возможно лишь при условии качественной подготовки педагогов. Необходимо включать соответствующие модули в программы профессиональной переподготовки и повышения квалификации. Для этого требуется как научная поддержка, так и готовность педагогов к инновациям, сотрудничеству с психологами и нейробиологами, а также постоянное самообразование.

Библиографический список

1. Dubinsky J., Roehrig G., Varma S. (2013). Infusing Neuroscience Into Teacher Professional Development // *Educational Researcher*. 42. 317–329. DOI: 10.3102/0013189X13499403.
2. García-Valdecasas B., Sánchez I., González D., Rodríguez J. (2022). Role of neurodidactics in teacher professionalization for online teaching in higher education // *Livre Linguagem e Tecnologia*. 15. DOI: 10.35699/1983-3652.2022.40505.

3. Алексеева А.А. Нейродидактика в системе профессионально-педагогической деятельности учителя начальной общей школы // МНКО. 2023. № 3 (100). DOI: 10.24412/1991-5497-2023-3100-286-289.
4. Галкина Е.Н., Перевозчикова Н.Г. Нейродидактические технологии как средство эффективности образовательного процесса // Проблемы современного педагогического образования. 2024. № 84-3.
5. Емец Л.Г., Соловьева Н.В., Сорокопуд Ю.В. Подготовка педагогов к применению нейродидактического подхода при работе с детьми, имеющими трудности в обучении // МНКО. 2023. № 6 (103). DOI: 10.24412/1991-5497-2023-6103-405-408.
6. Зеер Э.Ф. Нейродидактика – инновационный тренд персонализированного образования // Профессиональное образование и рынок труда. 2021. № 4 (47). С. 30–38. DOI: 10.52944/PORT.2021.47.4.002.
7. Мальсагов А.А., Лезина В.В. Нейродидактика в России: развитие и перспективы // МНКО. 2021. № 4 (89). DOI: 10.24412/1991-5497-2021-489-149-150.

РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

DEVELOPMENT OF COMPUTATIONAL THINKING OF STUDENTS OF NATURAL SCIENCES IN MATHEMATICS CLASSES AT THE UNIVERSITY

С.И. Торопова

S.I. Toropova

Вычислительное мышление, модель Лесли, главное собственное число матрицы Лесли, собственный вектор, амурский тигр.

В цифровую эпоху вычислительное мышление становится одним из основных навыков для подрастающего поколения. Его развитию могут способствовать описанные в статье математические задачи, составленные на основе реальной соционаучной проблемы по сохранению на Дальнем Востоке РФ популяции амурского тигра. В процессе их решения с помощью матричных моделей Лесли студенты естественно-научных направлений подготовки не только воспроизводят вычислительные эксперименты ученых, занимающихся данной проблематикой, но и делают собственные прогнозы.

Computational thinking, model Leslie, principal eigenvalue of the Leslie matrix, eigenvector, Amur tiger.

In the digital age, computational thinking is becoming one of the main skills for the younger generation. The mathematical problems described in the article, which are based on a real social and scientific problem related to the conservation of the Amur tiger population in the Russian Far East, can help to develop this skill. By solving these problems using Leslie's matrix models, students of natural sciences not only replicate the computational experiments conducted by scientists studying this issue, but also make their own predictions.

В цифровую эпоху вычислительное мышление становится одним из востребованных навыков для подрастающего поколения [1]. Несмотря на отсутствие консенсуса по поводу определения данного понятия, большинство исследователей утверждает, что вычислительное мышление не ограничивается способностью к программированию. В частности, по мнению S. Zhu с коллегами, это научный способ мышления, который позволяет обучающимся анализировать сложные проблемы, выявлять закономерности, мыслить абстрактно и в итоге разрабатывать эффективные решения [6].

С этой точки зрения, помимо обучения программированию, вычислительное мышление включает в себя ряд навыков по решению реальных проблем вычислительным путем, формирование которых может быть осуществлено разными способами. Так, S. Zhu с соавторами предлагают китайским учащимся серию контекстных задач, основанных на применении математического моделирования [6]. M. Grizioti рекомендует развивать вычислительное мышление в междисциплинарных контекстах, побуждающих молодых людей мыслить критически о сложных и неоднозначных проблемах окружающего мира [5].

Рассмотрим еще один подход для включения вычислительного мышления в математическое образование студентов естественно-научных направлений подготовки на основе исследования реальной проблемы. Поскольку такая проблема по уровню сложности и по форме представления материала существенно отличается от привычных для обучающихся математических текстов, она была разбита на последовательность более простых задач. Приведенные ниже задачи могут быть предложены студентам после изучения основ линейной алгебры для иллюстрации применения матричного аппарата к решению важной социально-научной проблемы по сохранению популяции амурского тигра на Дальнем Востоке нашей страны.

Отметим, что обращение к данной тематике предваряется разбором следующей математической задачи.

Задача 1. В примере, опубликованном Уильямсоном в 1967 г., по моделированию гипотетической популяции самок трех возрастных групп говорится, что до некоторого момента времени наблюдаются колебания численности, после чего количество самок каждой группы возрастает, причем соотношение между ними остается постоянным [4, с. 10]. Найдите численности самок всех возрастных групп на протяжении 20 лет. Используя любой графический инструмент, постройте в одной системе координат три графика, иллюстрирующие положение, высказанное Уильямсоном.

Четырехлетняя практика решения данной задачи студентами свидетельствует, что оно выполняется с помощью MS Excel, Python или вручную на листе бумаги. Если до недавнего времени при использовании Python обучающиеся пользовались библиотекой NumPy или писали код самостоятельно, то в этом году они впервые сообщили о привлечении нейросети.

Согласно Е.В. Тарасовой, математической основой исследования численности амурского тигра являются модели шотландского физиолога П. Х. Лесли, известные как матрицы Лесли. По мнению А. А. Мурзина, отсутствие достаточного объема объективных данных привело к тому, что на сегодняшний день модели Лесли представляют собой единственный инструмент описания популяции этого особо охраняемого в России и в мире вида [2].

Одним из преимуществ применения матриц Лесли является возможность прогнозирования состояния популяции в любой наперед заданный момент времени. В частности, не представляет сложности посредством матричного произведения при известной начальной численности определить ее теоретическое значение, например, через 50 лет, и сравнить его с реальными данными.

Задача 2. В работе [3] представлена двухматричная модель Лесли моделирования динамики популяции амурского тигра в Приморском и Хабаровском краях РФ. В матрице L_1 , описывающей возрастную структуру в фазе восстановления (примерно до 1999 г.), коэффициенты выживаемости взрослых особей равны 0,815. Автор поясняет, что это значение установлено в процессе вычислительных экспериментов, исходя из теоретического значения 0,92, которое получено

из следующих соображений: средний возраст жизни амурского тигра в дикой природе – 15 лет, средний срок существования выводка – 2 года, распределение по возрастам полагаем равномерным, значит, показатель естественной смертности есть одна тринадцатая или 0,08 при округлении до сотых. Используя имеющиеся в источнике [3] данные учетов амурского тигра в период с 1959 по 2015 гг., проведите серию аналогичных вычислительных экспериментов по подбору указанного коэффициента выживаемости таким образом, чтобы значения численности популяции, найденные путем вычислений, в наибольшей степени соответствовали официальным данным переписей.

Известно, что главное собственное число матрицы Лесли характеризует скорость, с которой размножается популяция, когда ее возрастная структура стабилизировалась, а соответствующий собственный вектор отражает эту устойчивую структуру [4, с. 9, 11]. С учетом данного факта считаем целесообразным решить следующие две задачи.

Задача 3. Используя результаты исследования Е. В. Тарасовой [3], вычислите главное собственное число и соответствующий ему собственный вектор матрицы L_1 . Интерпретируйте их.

Задача 4. По матрице L_2 [3], характеризующей динамику популяции амурского тигра в фазе стабилизации (после 1999 г.), оцените устойчивую структуру популяции и соответствующую ей скорость размножения. Спрогнозируйте численность данного вида к 2030, 2040 и 2050 гг.

Подчеркнем, что решение последних двух задач невозможно выполнить вручную или с помощью MS Excel. В частности, вычисление собственного вектора с применением надстройки «Поиск решения» не дает результата: получается нулевой вектор, который по определению не может быть собственным. Одной из причин этого является то обстоятельство, что в упоминаемой надстройке не предусмотрен ввод строгих ограничений.

В заключение отметим, что представленный для развития вычислительного мышления студентов набор задач может служить основой проведения беседы с ними о значении математического самообразования и решения других, связанных с предложенными, задач. Так, обращение к биографии П.Х. Лесли позволяет установить, что ученый, не имея формального образования в области высшей математики, благодаря самообразованию и «исключительному таланту к оригинальным математическим подходам» не только внес существенный вклад в исследование динамических систем с дискретным временем, предложив матричные модели, позднее названные его именем, но и снискал уважение среди профессионально подготовленных в области математики экспертов-современников [4, с. 128].

В отношении заданий, дополняющих набор рассмотренных задач 1–4, заметим целесообразность обсуждения некоторых вопросов математического характера, вызывающих затруднения со стороны обучающихся. В частности, известно, что навыки округления чисел формируются в основной школе, но студенты вузов

могут испытывать трудности с округлением при решении прикладных задач. Например, главное собственное число матрицы Лесли позволяет определить максимально допустимую интенсивность промысла. В задаче 1.1.1 из учебного пособия [4, с. 23] доля особей, которую можно изъять так, чтобы размер популяции сохранился, есть $0,(6)$, следовательно, промысловому вылову можно подвергать не более 66 % имеющейся численности (т. е. необходимо округлить с недостатком). Наоборот, в примере [4, с. 15] моделирования популяции мучного жука с помощью матрица Лефковича, которая является обобщением матрицы Лесли, при расчете требуемого для его уничтожения количества ядохимикатов следует округлять с избытком.

Библиографический список

1. Калинин С.И., Торопова С.И. Интеграция вычислительного мышления в математическое образование студентов естественно-научных направлений подготовки // Перспективы науки и образования. 2025. № 2. С. 163–174. DOI: 10.32744/pse.2025.2.11
2. Мурзин А.А. Построение модели динамики популяции амурского тигра и прогнозные расчеты его численности на период с 2015 по 2022 год // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2018. № 11. С. 333–340.
3. Тарасова Е.В. Моделирование динамики популяции амурского тигра с помощью двухматричной модели Лесли // Современные проблемы науки и образования. 2016. № 2. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=24313> (дата обращения: 18.10.2025).
4. Торопова С.И. Математические модели в естественных науках: учеб. пособие. Киров: ВятГУ, 2025. 144 с.
5. Grizioti M. Computational thinking beyond coding: exploring student computational practices while playing and modifying a socio-scientific simulation game with integrated computational tools. Educational Technology Research Development, 2025, vol. 73, pp. 2251–2278. Doi: 10.1007/s11423-025-10477-y
6. Zhu S., Guo Q., Yang S., Yang H. H., Li H., Sun Z. Assessing Chinese middle school students' computational thinking: an evidence-centered design approach. Educational Technology Research Development, 2025, vol. 73, pp. 1891–1919. Doi: 10.1007/s11423-025-10475-0

ОТ РУЧНЫХ РАСЧЕТОВ К АВТОМАТИЗИРОВАННЫМ: ЦИФРОВЫЕ ШАБЛОНЫ В ИНЖЕНЕРНО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ

FROM MANUAL CALCULATIONS TO AUTOMATED CALCULATIONS: DIGITAL TEMPLATES IN ENGINEERING AND MATHEMATICAL TRAINING

Е.Н. Трофимец

E.N. Trofimets

Цифровые шаблоны, автоматизация расчетов, математическое моделирование, техносферная безопасность, теория вероятностей, математическая статистика.

Современная инженерная практика требует перехода от традиционных ручных расчетов к автоматизированным методам анализа. В статье рассматривается методология внедрения цифровых шаблонов как инструмента трансформации инженерно-математической подготовки. Представлены профессионально ориентированная задача и цифровые шаблоны по расчету вероятности возобновления теплоснабжения в г. Костомукше.

Digital templates, calculation automation, mathematical modeling, technosphere safety, probability theory, and mathematical statistics.

Modern engineering practice requires a transition from traditional manual calculations to automated analysis methods. The article discusses the methodology of implementing digital templates as a tool for transforming engineering and mathematics education. A professional-oriented task and digital templates for calculating the probability of resuming heat supply in Kostomuksha are presented.

Эволюция вычислительных технологий коренным образом изменила подходы к инженерным расчетам. Традиционные методы ручных вычислений, долгое время составлявшие основу инженерной подготовки, уступают место интеллектуальным автоматизированным системам. В данном контексте особую актуальность приобретает разработка цифровых шаблонов – универсальных расчетных модулей, сочетающих математическую строгость с удобством применения. В процессе инженерно-математической подготовки по техносферной безопасности цифровые шаблоны становятся наиболее значимыми и востребованными.

Современные вызовы в области техносферной безопасности требуют внедрения цифровых инструментов, позволяющих быстро и точно оценивать риски, моделировать аварийные ситуации и принимать обоснованные решения. Цифровые шаблоны, разработанные на основе нормативных документов и инженерных методик, устраняют разрыв между теоретическими знаниями и практическими навыками, обеспечивая:

- стандартизацию расчетных процедур;
- автоматизацию рутинных операций;
- визуализацию результатов для принятия решений.

Рассмотрим профессионально ориентированную задачу (ПОЗ), сформулированную на основе данных по чрезвычайным ситуациям, смоделированным в рамках проведения межведомственного опытно-исследовательского учения «Безопасная Арктика-2023» [1].

Постановка ПОЗ для будущих инженеров техносферной безопасности. В 13.00 (мск) 5 апреля 2023 года в результате сложной метеорологической обстановки (сильного снегопада и налипания мокрого снега) произошло аварийное отключение на линии Л-220/163220 кВ протяженностью 49 км, которая питает 28 трансформаторных подстанций (ТП), из них 24 ТП располагаются в г. Костомукше. В результате происшествия без электроснабжения остался Костомукшский ГОК, АО «Карельский окатыш» (рис. 1) и город Костомукша. Кроме того, из-за отключения электроэнергии на АО «Карельский окатыш» от теплоснабжения отключен г. Костомукша.

Найдите вероятность возобновления теплоснабжения в г. Костомукше к 16.30 (мск) 5 апреля 2023 года, если для этого требуется восстановление на территории АО «Карельский окатыш», по крайней мере, трех трансформаторных подстанций. Вероятность восстановления в течение трех часов каждой из четырех ТП, служащих источником электроэнергии для АО «Карельский окатыш», составляет 0,9. Учтите, что к ликвидации последствий аварийного отключения электроэнергии удалось приступить через 30 мин после аварии (процесс восстановления ТП на территории АО «Карельский окатыш» считать независимым).

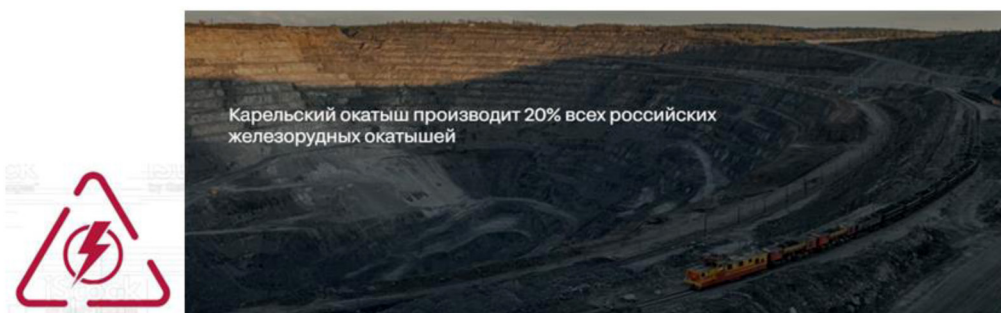


Рис. 1. Акционерное общество «Карельский окатыш»
(ведущий комбинат по добыче и переработке железной руды в России)

Классическое решение ПОЗ базируется на теоремах умножения и сложения вероятностей или более оптимального способа решения по формуле Бернулли:

$$P_{n;m} = C_n^m p^m (1 - p)^{n - m}.$$

Рассмотрим технологию решения и разработку цифровых шаблонов ПОЗ в MS Excel.

Этапы технологии решения и разработки цифровых шаблонов.

1) С использованием функции ЧИСЛКОМБ из категории «Математические».

Важно учесть, что в формулу Бернулли в качестве сомножителя входит число сочетаний из n элементов по m . Для вычисления сочетаний предлагается использовать функцию ЧИСЛКОМБ (категория Математические), которая имеет два аргумента: Число и Число_выбранных.

Для рассматриваемой ПОЗ эти аргументы имеют следующую интерпретацию:

- первый аргумент Число – минимальное число восстановленных ТП для возобновления теплоснабжения;

- второй аргумент Число_выбранных – число «успехов» (число восстановленных ТП).

Эффективность формулы Бернулли особенно проявляется при достаточно большом числе испытаний. Цифровой шаблон решения ПОЗ с использованием функции ЧИСЛКОМБ представлен на рис. 2.


	A	B	C	D
9	Решение:			
10		Ситуация	Число восст. ТП	Вероятность
11		а)	4	0,6561
12		б)	3	0,2916
13		в)	2	0,0486
14		г)	1	0,0036
15		д)	0	0,0001
16			Проверка:	1
17	P(A)	0,9477		

Рис. 2. Цифровой шаблон решения ПОЗ при помощи функции ЧИСЛКОМБ

Ответ: Вероятность того, что в четырех испытаниях событие наступит не менее трех раз, равна 0,9477.

2) С использованием функции БИНОМ РАСП (рис. 3).

Так как формула Бернулли является достаточно простой и понятной, то нет смысла повторять рутинные вычисления, поэтому для автоматизации расчетов целесообразно воспользоваться функцией БИНОМ РАСП (БИНОМРАСП в Office 2007), которая имеет четыре аргумента: Число_успехов, Число_испытаний, Вероятность_успеха, Интегральная.

Суть первых трех аргументов понятна из их названия. Четвертый аргумент – Интегральная – определяет вид функции распределения: *интегральная* (аргумент Интегральная = 1) или *весовая* (аргумент Интегральная = 0).

	A	B	C
31			
32		Число восст. ТП	Вероятность
33		0	0,0001000
34		1	0,0036000
35		2	0,0486000
36		3	0,2916000
37		4	0,6561000
38			1,000
39			
40	P	0,9477000	

Рис. 3. Цифровой шаблон решения ПОЗ при помощи функции БИНОМ РАСП

Понятие *весовой функции* соответствует понятию *плотности* (или *дифференциальной функции*) распределения для *непрерывных* случайных величин и понятию *ряда распределения* для *дискретных* случайных величин.

Схема Бернулли задает *биномиальное распределение* случайных величин, которое является дискретным.

Для решения рассматриваемой ПОЗ можно воспользоваться как функцией распределения (рис. 4), так и рядом распределения.

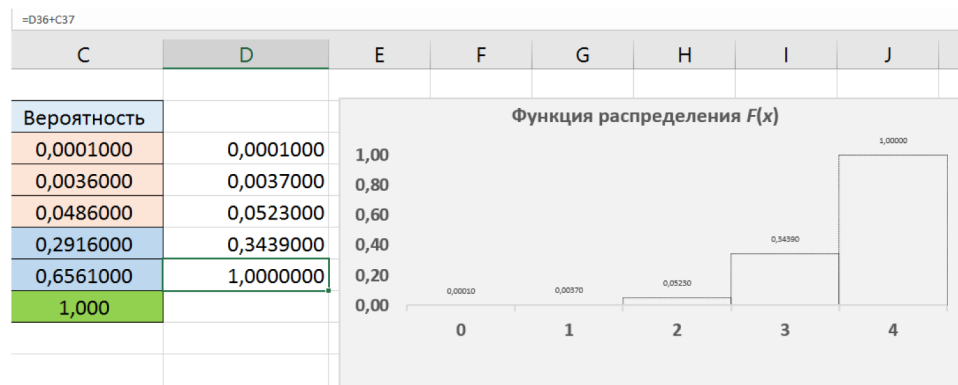


Рис. 4. Цифровой шаблон решения ПОЗ при помощи функции распределения $F(x)$

Ответ: Вероятность того, что в четырех испытаниях событие наступит не менее трех раз, равна 0,9477.

При разработке цифровых шаблонов важно учитывать правило «Уровни сложности»:

1. Базовый (готовая форма с подстановкой).
2. Промежуточный (с возможностью модификации формул).
3. Продвинутый (создание авторского шаблона или использование пустого каркаса для самостоятельного заполнения).

В образовательном процессе инженерно-математической подготовки по направлению «Техносферная безопасность» в условиях цифровизации целесообразно разрабатывать шаблоны с учетом отраслевых стандартов, обеспечивать их открытость для модификации и внедрять в учебный процесс через case-study и проектный подход [2–8]. Цифровые шаблоны позволяют решить три ключевые проблемы:

- Снижают когнитивную нагрузку при сложных расчетах;
- Позволяют сосредоточиться на инженерной интерпретации;
- Формируют цифровые компетенции, востребованные в профессии.

Можно выделить три цифровых компетенции, развиваемые при работе с шаблонами:

1. Технично-аналитические компетенции (навыки параметрического моделирования инженерных задач; умение преобразовывать нормативные требования в алгоритмические структуры; способность верифицировать цифровые модели расчетов).

2. Программно-инструментальные компетенции (владение специализированным ПО (Mathcad, Python, Excel); навыки работы с облачными расчетными платформами; умение интегрировать различные цифровые инструменты).

3. Информационно-аналитические компетенции (навыки обработки и визуализации инженерных данных; умение интерпретировать результаты автоматизированных расчетов; способность принимать решения на основе цифровых моделей).

Цифровые шаблоны становятся ключевым инструментом в техносферной безопасности, сокращая время принятия решений и повышая их обоснованность. Системное применение цифровых шаблонов в образовательном процессе формирует комплекс цифровых компетенций, соответствующих требованиям современного рынка труда в области техносферной безопасности. Внедрение цифровых шаблонов в инженерно-математическую подготовку позволит выпускать специалистов, готовых к вызовам цифровой трансформации промышленности.

Библиографический список

1. Трофимец Е.Н., Селеменова Т.А. Сборник практико-ориентированных задач по высшей математике для образовательных организаций МЧС России: учебное пособие. СПб.: С.-Петербург. ун-т ГПС МЧС России, 2024.
2. Трофимец Е.Н. Преподавание математических дисциплин в условиях развития цифровой образовательной среды // Психолого-педагогические проблемы безопасности человека и общества. 2022. № 2 (55). С. 39–43.
3. Trofimets E. Innovative methods and technologies while examining equations of mathematical physics // Journal of Physics: Conference Series [this link is disabled](#), 2022, 2373(6), 062005.
4. Selemeneva T.A. Application of mathematical methods in study of scientific and mathematical education efficiency in the higher education institutions of emergency situations ministry of russia // International Journal of Learning and Change. V. 10, № 4. P. 346–358.
5. Селеменова Т.А. К оценке эффективности компетентностно-ориентированного обучения в вузе. Тенденции развития образования: педагог, образовательная организация, общество-2018: материалы Всероссийской научно-практической конференции. 2018. Чебоксары: Среда, 2018. С. 91–93.
6. Семенов А.Л., Абылкасымова А.Е., Поликарпов С.А. Основания математического образования в цифровой век. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 511. (1). С. 3–12.
7. Смирнов Е.И., Дворяткина С.Н., Щербатых С.В. Интеллектуальное управление в математическом моделировании исследовательской деятельности школьников. Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2020. (19). С. 48–61.
8. Смирнов Е.И., Попова Т.С. Модель формирования самостоятельной деятельности школьников при углубленном обучении математике в цифровой образовательной среде. Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2022; (26). С. 57–68.

ВАРИАНТ ЦИФРОВОГО ИНСТРУМЕНТАРИЯ ПРОВЕРКИ УРОВНЯ СФОРМИРОВАННОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ СТУДЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ РАЗДЕЛА «МАТРИЦЫ»

A VARIANT OF THE DIGITAL TOOLKIT FOR CHECKING THE LEVEL OF FORMATION OF STUDENTS' COMPUTING SKILLS USING THE EXAMPLE OF THE «MATRICES» SECTION

И.Л. Трофимов

I.L. Trofimov

Вычислительный навык, оценочный материал, цифровой инструментарий, тест, генерация заданий, матрица, Maxima, система электронного обучения.

В статье рассматривается проблема проверки уровня сформированности вычислительных навыков и трудоемкости формирования банка оценочных материалов. Как один из подходов к решению предлагается использовать вариант разработанного цифрового инструментария, который позволяет автоматизировать генерацию оценочных материалов. Описаны архитектура и функциональные возможности приложения, разработанного на базе фреймворка Qt и математического пакета Maxima, а также его интеграция с системами электронного обучения.

Computational skill, assessment material, digital tools, test, task generation, matrix, Maxima, e-learning system.

The article discusses the problem of verifying the level of formation of computational skills and the complexity of forming a bank of evaluation materials. As one of the approaches to the solution, it is proposed to use a variant of the developed digital toolkit, which allows automating the generation of evaluation materials. The architecture and functionality of the application developed on the basis of the Qt framework and the Maxima mathematical package, as well as its integration with e-learning systems, are described.

Введение. В условиях реформирования и цифровизации образования качественное формирование вычислительных навыков у обучающихся остается одной из важных дидактических задач. Но эффективное развитие вычислительных навыков невозможно без оперативной высококачественной оценки. Проблема усугубляется тем, что проверка студентов преподавателем с помощью традиционных методов (опрос, тестирование, контрольные работы) осложняется уменьшением аудиторных часов при растущем объеме материала. А для качественной проверки уровня вычислительных навыков у студентов во время их самостоятельной работы существует дефицит достаточно полных и удобных цифровых инструментов.

Анализ источников показывает фрагментарность исследований и необходимость системного подхода к описанию методологии разработки цифрового инструментария проверки уровня сформированности вычислительных навыков.

Цель работы – описание варианта такого инструментария (цифрового педагогического) на примере раздела «Матрицы» в математике уровня высшего образования.

Необходимо отметить, что под «вычислительным навыком» в рамках исследования будет пониматься автоматизированное действие, характеризующееся точностью, осознанностью и рациональностью выполнения математических операций. А «цифровой педагогический инструментарий» [1] – комплекс программных средств, основанных на информационных технологиях, который используется преподавателем для организации и осуществления учебно-воспитательного процесса.

Материалы и методы. Актуальность формирования вычислительных навыков подчеркивается в работах, посвященных как школьному, так и высшему образованию. Например, исследование Е.М. Суходоловой [2] раскрывает необходимость выделения дефиниции «вычислительный навык» и условия его формирования в начальной школе.

Техническими методами в рамках исследования являются: среда разработки, фреймворк, язык программирования и математический модуль. В частности, приложение было разработано посредством кроссплатформенной среды «Qt Creator» с использованием фреймворка Qt и написанием программного кода на языке C++. Для выполнения всех символьных и численных вычислений, генерации математических выражений и их преобразования в формат компьютерной верстки TeX был интегрирован математический пакет Maxima [3]. Это позволило обеспечить корректность генерируемых заданий и их решений.

Полученные результаты. В соответствии с проделанной работой под цифровым *инструментарием проверки уровня сформированности вычислительных навыков* в нашем исследовании будем понимать продукт, разработанный на основе фреймворка Qt, языка программирования C++ и математического пакета Maxima со следующими характеристиками: интуитивно понятный интерфейс; автоматическое проведение расчетов; генерация однотипных математических объектов с последующим их преобразованием в формат компьютерной верстки; создание файла формата XML со сгенерированными заданиями, готового к импорту в системы электронного обучения Web 2.0 (Moodle, Google Classroom и другие).

Рассматривая реализацию варианта цифрового инструментария для раздела «Матрицы», необходимо отметить, что методы генерации заданий поддерживают такие операции над матрицами, как: сложение и вычитание матриц; умножение матрицы на скаляр и на другую матрицу; вычисление определителя; нахождение матрицы, обратной для данной. А также позволяют гибко настраивать параметры заданий: размерность матриц, диапазон значений элементов, количество вариантов и тип операций.

Далее будут представлены функциональные элементы разработанного приложения, которые были описаны выше как характеризующие его части. Графи-

ческий пользовательский интерфейс интуитивно понятен и прост в освоении, например, на рисунке 1 изображено поле настроек для операций над матрицами, позволяющее задавать различные параметры.

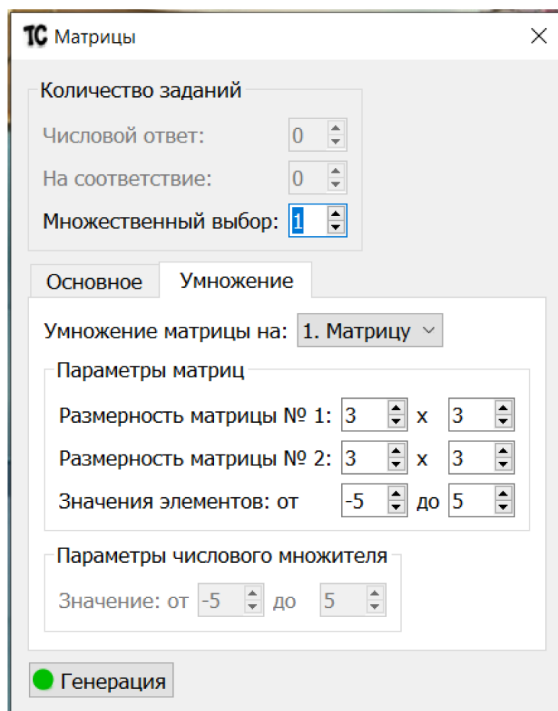


Рис. 1. Интерфейс настройки параметров для заданий на умножение матриц

Ключевым результатом является автоматическое создание файла в формате XML, содержащего сгенерированные задания в формате, готовом к импорту. Импортированное задание корректно отображается и функционирует в системах электронного обучения, основанных на технологии Web 2.0, например, в системе Moodle, что представлено на рис. 2, подтверждая практическую применимость инструмента.

Вопрос **2**

Пока нет ответа

Балл: 1,00

[Отметить вопрос](#)

Вычислите: $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Выберите один ответ:

a. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \\ -8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \\ -9 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \\ -8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \\ -8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Предыдущая страница
Следующая страница

Рис. 2. Пример вопроса на тему «Вычитание матриц» в системе Moodle

Обсуждение. Предложенный вариант цифрового инструментария помогает в устранении пробела, выявленного в начале – дефицита инструментов для формирования банка заданий для проверки уровня сформированности вычислительных навыков. А также предлагает практическую реализацию подхода, связывающего педагогический аспект – оценку уровня вычислительных навыков по критериям точности и автоматизма, с новым технологическим решением. Но стоит отметить, что в текущей версии вариант цифрового инструментария имеет ограниченное число математических разделов, для которых возможна генерация заданий.

Вывод. Таким образом, в ходе исследования описан вариант цифрового инструментария, позволяющего автоматизировать генерацию оценочных материалов для проверки уровня сформированности вычислительных навыков при работе с математическими объектами (в данном случае – матрицами). Дальнейшее исследование направлено на описание и разработку концепции «Алгоритмы проектирования программных систем тестирования в педагогическом инструментарии со сложным математическим контентом».

Библиографический список

1. Коноплянский Д.А. Педагогический инструментарий реализации педагогической стратегии формирования конкурентоспособности выпускника вуза // СибСкрипт. 2015. № 4–2 (64). С. 55–57. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/pedagogicheskiy-instrumentariy-realizatsii-pedagogicheskoy-strategii-formirovaniya-konkurentosposobnosti-vypusknika-vuza> (дата обращения: 12.10.2025).
2. Суходолова Е.М. Формирование вычислительных навыков у обучающихся начальной школы в условиях реализации нового федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования // МНКО. 2022. № 6 (97). С. 137–139. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-vychislitelnyh-navykov-u-obuchayuschih-sya-nachalnoy-shkoly-v-usloviyah-realizatsii-novogo-federalnogo-gosudarstvennogo> (дата обращения: 10.10.2025).
3. Дуничев К.П., Трофимов И.Л., Мендель В.В. Методы генерации сложного математического контента для цифровых образовательных ресурсов // ТОГУ-Старт: фундаментальные и прикладные исследования молодых: материалы V региональной научно-практической конференции, Хабаровск, 16–20 апреля 2024 года. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2024. С. 340–344.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ИГРОФИКАЦИИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ЦИФРОВОГО ИНСТРУМЕНТАРИЯ

PRACTICAL RECOMMENDATIONS FOR PRIMARY SCHOOL TEACHERS ON USING GAMIFICATION IN MATHEMATICS TEACHING WITH DIGITAL TOOLS

К.Е. Ушакова

K.E. Ushakova

Цифровые технологии, игрофикация, начальная школа, преподавание математики, 3D-моделирование, игровое приложение, цифровая грамотность, мотивация учащихся, интерактивное обучение.

В статье представлены практические рекомендации для учителей начальной школы по применению игрофикации в преподавании математики с элементами цифрового инструментария. Описаны результаты, показывающие положительное влияние на мотивацию и успехи учащихся, а также конкретные рекомендации по организации работы в классе.

Digital technologies, gamification, elementary school, mathematics teaching, 3D modeling, game application, digital literacy, student motivation, and interactive learning.

The article provides practical recommendations for primary school teachers on the use of gamification in teaching mathematics with the use of digital tools. The article uses a review of current literature and empirical observations of technology implementation. The results show a positive impact on students' motivation and performance, as well as specific recommendations for classroom organization.

Введение. Анализ педагогической практики показывает, что традиционные формы обучения зачастую недостаточно мотивированы для младших учащихся, что может приводить к снижению интереса и вовлеченности. Интеграция цифровых технологий (например, игровые приложения, 3D-моделирование) и элементов игрофикации (челленджи, уровни, значки, игровые сюжеты) открывает новые возможности: учащиеся становятся активными участниками процесса, работают с визуальными и интерактивными моделями, видят прогресс, получают мгновенную обратную связь. Тем не менее успешность интеграции технологий зависит от продуманной педагогической модели, не просто «игры ради игры», а грамотного сочетания учебного контекста, цели, методики и технологии. Перед учителем стоит задача не просто использовать приложения и модели, а организовать среду, где цифровые технологии служат средством достижения образовательных результатов.

Целью настоящей статьи является формирование набора практических рекомендаций для учителей начальной школы, направленных на эффективное внедрение игрофикации в процесс проектирования и реализации образовательных программ по математике с использованием элементов цифрового инструментария, 3D-технологий и механизмов межпоколенческого взаимодействия.

Актуальность. Современные реалии образования требуют от учителей начальной школы не только владения цифровыми инструментами, но и умения интегрировать их в процесс обучения таким образом, чтобы повышать интерес и мотивацию учеников. В этой связи особую значимость приобретает использование элементов игрофикации, 3D-технологий и форм межпоколенческого взаимодействия как средств создания увлекательных и продуктивных образовательных программ по математике. Разработка практических рекомендаций по их внедрению позволяет поддерживать высокий уровень вовлеченности учащихся и способствует формированию у педагогов готовности к эффективному проектированию цифрового образовательного процесса.

Материалы и методы исследования. В работе использованы методы теоретического анализа и педагогического моделирования. Анализ научно – методической литературы позволил выделить основные подходы к внедрению игрофикации в образовательный процесс. Сравнительно-аналитический метод применялся для оценки успешных практик использования игровых элементов в разных дисциплинах. Педагогическое моделирование обеспечило разработку практических рекомендаций по созданию обучающих программ с элементами игрофикации, учитывающих возрастные особенности и образовательные цели.

Современные исследования в области педагогики и образовательных технологий выделяют несколько ключевых подходов к внедрению игрофикации в образовательный процесс. Среди них особое внимание уделяется использованию настольных игр как эффективного инструмента игрофикации. Настольные игры представляют собой структурированные игровые модели, которые позволяют интегрировать игровые механики с учебным содержанием, способствуя повышению мотивации и вовлеченности учащихся. На основе исследований выделены ряд преимуществ использования настольных игр в педагогическом процессе. Приведем их с обоснованием: повышение мотивации и вовлеченности, так как игровая ситуация формирует эмоциональный и познавательный интерес, что способствует более активному усвоению учебного материала; развитие когнитивных и социальных навыков, так как школьники учатся анализировать информацию, планировать действия, работать в команде и принимать решения в условиях ограниченного времени и ресурсов; адаптивность к возрасту и предметной области, так как настольные игры могут быть созданы для младших школьников с простыми правилами и сюжетными заданиями, а для старших классов с усложненными стратегическими задачами и проектными элементами; систематизация знаний так как игровое поле и карточки заданий помогают структурировать информацию и закрепить изученные темы, формируя прочные когнитивные связи.

В российских школах наблюдается успешное применение настольных игр в преподавании различных дисциплин, в частности, в курсах истории для 6–7 классов [3,4] для закрепления фактических знаний и развития навыков коллективной работы; на уроках математики в начальных классах [5,6] для освоения арифметических операций и логического мышления; в курсе иностранного языка [6] для закрепления лексики и грамматических структур. Таким образом, настольные игры являются универсальным инструментом игрофикации, который может быть адаптирован под разные предметные области и возрастные группы, обеспечивая одновременно образовательные, когнитивные и социальные эффекты.

Полученные результаты. Авторские исследования показали: применение игрофикации [5] в математике способствует повышению мотивации [6], снижению тревожности при изучении математики и активизации когнитивных и аффективных доменов. Анализ теоретических источников и педагогического опыта позволил выделить ключевые *эффекты внедрения элементов игрофикации в образовательные программы*: повышение усвоения материала, так как игровые механики активизируют познавательную деятельность и помогают систематизировать знания; стимулирование мотивации, так как элементы игры способствуют вовлеченности и интересу к предмету; развитие социальных навыков, так как игрофикация формирует умение работать в команде, распределять роли и принимать решения; развитие личностных компетенций, обеспечивающие освоения учащимся навыков саморегуляции, критического мышления и творческого подхода к заданиям.

На основании анализа научных публикаций и педагогического опыта и для достижения этих эффектов на основе авторской педагогической практики в МБОУ СОШ №1 с. Князе-Волконское и МБОУ СОШ с. Восточное Хабаровского края для педагогов разработан следующий набор практических рекомендаций по проектированию обучающих программ с элементами игрофикации, адаптируемых к разным дисциплинам и возрастным группам.

1. *Рекомендация планирования игровых элементов с учетом образовательных целей.* Игровые формы должны способствовать достижению конкретных учебных задач, а не служить развлечением. Определение цели, этапа урока и цифрового инструмента (например, LearningApps)

2. *Рекомендация использование 3D-технологий при создании настольных математических игр.* Применение программы – кластера «Blender» для проектирования игровых элементов, фишек и полей. Привлечение старших школьников и студентов к совместной разработке, формируя среду межпоколенческого сотрудничества и цифрового наставничества.

3. *Рекомендация реализация мини-проектов с элементами игрофикации.* Организация творческих заданий «Создай свою математическую игру» во внеурочной деятельности, пусть учащиеся придумывают правила, задачи, визуальный стиль и цифровые элементы. Это развивает инициативу и метапредметные компетенции.

4. *Рекомендация прохождение практико-ориентированных курсов повышения квалификации.* Выбор программы, где обучение строится на реальных педагогических кейсах и проектных заданиях. Создание собственных цифровых продуктов, обмен опытом с коллегами, фиксация результатов в профессиональном портфолио.

5. *Рекомендация мотивация себя результатами учеников.* Отслеживание роста интереса и успеваемости детей при использовании игровых технологий. Личный успех учащихся усиливает профессиональную мотивацию педагога и подтверждает эффективность инноваций.

6. *Рекомендация работа в команде единомышленников.* Объединение с коллегами, ИТ-специалистами и студентами для создания цифровых игр и проектов. Взаимное наставничество помогает преодолеть профессиональные барьеры и формирует инновационную школьную среду.

7. *Рекомендация ведение методического портфолио и обмен опытом.* Фиксация своих цифровых разработок, игровых сценариев и 3D-моделей. Публикация материалов на профессиональных платформах, участвовать в конференциях и конкурсах – это повышает профессиональный статус и вдохновляет на новые проекты.

Выводы. Проведенное исследование позволило выделить практические рекомендации, которые направлены на поддержку педагогов в проектировании и реализации цифровых образовательных программ с элементами игрофикации. Их использование позволит повысить эффективность учебного процесса, адаптировать образовательную среду к потребностям современного ученика и создать условия для формирования у школьников устойчивой познавательной активности.

Библиографический список

1. Койшина И.В., Попова М.А. Игрофикация в школьном обучении: методические подходы. Педагогическое образование в России, 2023.
2. Ушакова К.Е. К вопросу организации интеграции игрофикации как средства сопровождения обучения математики в начальной школе. ТОГУ, Хабаровск, 2025.
3. Бибарсов А.Н. Настольные игры в образовательном процессе начальной школы. Современные педагогические технологии, 2022.
4. González C. Gamification in Education: Theoretical Approaches and Practical Applications. Computers & Education, 2021.
5. Ушакова К.Е. Подходы использования игрофикации для формирования цифровой грамотности учеников начальной школы. ТОГУ, Хабаровск, 2025.
6. Ушакова К.Е. Интеграция игрофикации в образовательный процесс путем создания настольных игр с помощью аддитивных технологий для обучения математике в начальной школе. ТОГУ, Хабаровск, 2025.

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДИЧЕСКИХ ИДЕЙ В.А. ГУСЕВА ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ НА СТУПЕНИ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

NEW OPPORTUNITIES FOR IMPLEMENTING
V.A. GUSEV'S METHODOLOGICAL IDEAS
IN GEOMETRY TEACHING
AT THE STAGE OF BASIC GENERAL EDUCATION

М.В. Шабанова, Л.Н. Удовенко

M.V. Shabanova, L.N. Udovenko

Методика обучения геометрии, основное общее образование, GeoGebra, фузионизм, дополненная реальность, цепочка задач, динамический лист, компьютерный эксперимент.

В статье представлены методические идеи В.А. Гусева, реализованные в линии его экспериментальных учебников, подготовленных в рамках образовательного проекта «Экология и диалектика» в период с 1994 по 1998 г. Доказана возможность актуализации и развития данных идей в условиях цифровизации системы математического образования. Приведены примеры использования возможностей GeoGebra для создания цифровых образовательных ресурсов к учебникам и включения обучающихся в экспериментально-теоретическую деятельность по решению учебных задач.

Methodics of teaching geometry, middle school, GeoGebra, fusionism, augmented reality, tasks chain, dynamic worksheet, computer experiment.

The paper presents the methodical ideas of V.A.Gusev, implemented in the line of his experimental textbooks prepared within the framework of the educational project “Ecology and Dialectics” in the period from 1994 to 1998. The possibility of actualization and development of these ideas in the context of digitalization of the mathematical education system is proved. Examples of using GeoGebra’s capabilities to create digital educational resources for textbooks, as well as to include students in experimental and theoretical activities to solve textbook problems, are given.

Валерий Александрович Гусев (18.11.1942 – 07.03.2018) – один из наиболее выдающихся отечественных ученых в области теории и методики обучения и воспитания (математике), был активным участником трех последних этапов реформирования системы отечественного математического образования в ушедшем столетии: «колмогоровской» реформы, «контрреформы» и тех перманентных «демократических» реформ, начавшихся после 1985 г., которые не прекращаются и по сей день. В этой связи важно оценить уникальные возможности последнего этапа для реализации методических идей В.А. Гусева, именно об этом периоде научного творчества Валерия Александровича пойдет речь.

Период перестройки в России ознаменовался появлением, активным развитием и внедрением в систему работы общеобразовательных школ авторских педагогических образовательных моделей. Одной из них является «Экология и диалектика», автор которой Лев Васильевич Тарасов – физик, известный популяризатор

науки и педагог. Его модель основана на единстве экологического императива «человек – часть природы» и диалектики развивающего обучения, составив образовательную систему. В ее основу были положены принципы интеграции учебного материала, гуманитаризации обучения, нелинейности в освоении учебных предметов, разведения уровней представления и воспроизведения учебного материала, что повлияло на изменение подхода к оцениванию каждого учащегося. Каждый учебный предмет этой системы рассматривался как «окно в мир», традиционный перечень учебных предметов был дополнен новыми предметами: «Закономерности окружающего мира (вероятности)», «Информатика и моделирование процессов» и др. Учебники и учебные программы выстроены с учетом психолого-педагогических, возрастных закономерностей развития и обучающихся. Для демонстрации своего видения способов реализации этих идей в структуре и содержании учебников Л.В. Тарасов подготовил первый в линейке учебник геометрии для учащихся 5 классов [13], остальные учебники по геометрии было предложено написать В.А. Гусеву. К сожалению, эти учебники не оцифрованы, однако их можно найти по каталогу РГБ [1–10]. Для подготовки учителей математики к преподаванию по новым учебникам В.А. Гусевым были созданы два методических пособия, которые оцифрованы и размещены на сайте Mathedu.ru [11; 12]. Именно благодаря этим пособиям мы имеем возможность разобраться в сути предложенных В.А. Гусевым методических инноваций. Представим их цитатами [11, с. 5–6]:

1. «Материал курса “Геометрия 6–9”» развивает знания учащихся, полученные ими в курсе “Геометрия окружающего мира” в 5-м классе, и на этой базе позволяет совместно с курсами “Окружающий мир” и “Закономерности окружающего мира” продолжить познание окружающего мира».

2. «Курс должен преподаваться так, чтобы никому не пришло в голову ограничиваться уровнем “минимальной планируемой подготовки учащихся”, чтобы учебный материал стимулировал учебную деятельность учащихся, способствовал мотивации обучения».

3. «Курс “Геометрия 6–9” ставит своей целью целенаправленное формирование умственного развития учащихся через отработку конкретных приемов умственной деятельности: прежде всего синтеза и анализа, затем абстрагирования, сравнения, обобщения и аналогии. Все сказанное должно приводить к формированию дедуктивного мышления (в его индивидуальных проявлениях), без которого невозможно формирование полноценной человеческой личности».

4. «Логика выступает как средство подтверждения наглядности и практической значимости, а не наоборот. Вместе с тем логика составляет основу рассуждений и практических действий».

Для реализации первой идеи автор отказывается от разведения курса геометрии на две относительно самостоятельные части (планиметрию и стереометрию): «плоские фигуры и их свойства чаще всего изучаются не сами по себе, а как части пространственных геометрических фигур» [11, с. 8]. Кроме того, развитие основного содержания курса предваряется разделом «Абстрактный характер изучения фигур и их свойств в геометрии. Фигуры на плоскости и в пространстве».

Мы считаем, что эффективность этого раздела повысится, если изучение содержания данного раздела сопроводить не иллюстрациями, а заданиями на оперирование динамическими 3D-моделями, выведенными в дополненную реальность.



А



Б

Рис. 1. Здание и его 3D-модель в дополненной реальности

Задание 1. Ученик, глядя на здание, изображенное на рисунке 1А, построил геометрическую фигуру как на рисунке 1Б.

1.1. Можно ли данную геометрическую фигуру назвать геометрической моделью здания?

1.2. Что между зданием и геометрической фигурой общего и чем они отличаются?

1.3. Дайте геометрическое описание архитектуре здания.



Рис. 2. Выбор объектов, геометрической моделью которых является призма

Задание 2. Выберите объекты (рис. 2), геометрической моделью которых является правильная призма. Совместите модель с реальным объектом, чтобы проверить свои выводы. Для этого меняйте параметры модели, используя ползунки.

Основу реализации предложенной В.А. Гусевым идеи умственного развития учащихся составляет особое построение последовательности задач учебника. Задачи каждой темы объединены в «цепочку задач», обеспечивающую постепенное усложнение умственных действий. Автор пишет: «Очень важное значение имеет расположенный в начале книги раздел “Как пользоваться учебником?”» [11, с. 27]. Вопросы, задания и задачи сгруппированы по 6 видам:

⇓ – учимся делать выводы;

⇑ – устанавливаем причину явления;

С – задачи на уровне стандартов образования;

У – учебные задачи;

Т – творческие задачи;

И – исследовательские задания» [Там же, с. 27].

Приведем пример реализации одной из цепочек задач учебника средствами GeoGebra, он представлен на рисунке 3. Это задачи по теме «Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве».

Привлечение к решению задач GeoGebra позволяет не только компенсировать недостаток развития пространственного мышления учащихся, облегчая переходы от планиметрического восприятия изображения к пространственному, но и обеспечивает возможность использования в ходе решения задач метода эксперимента.

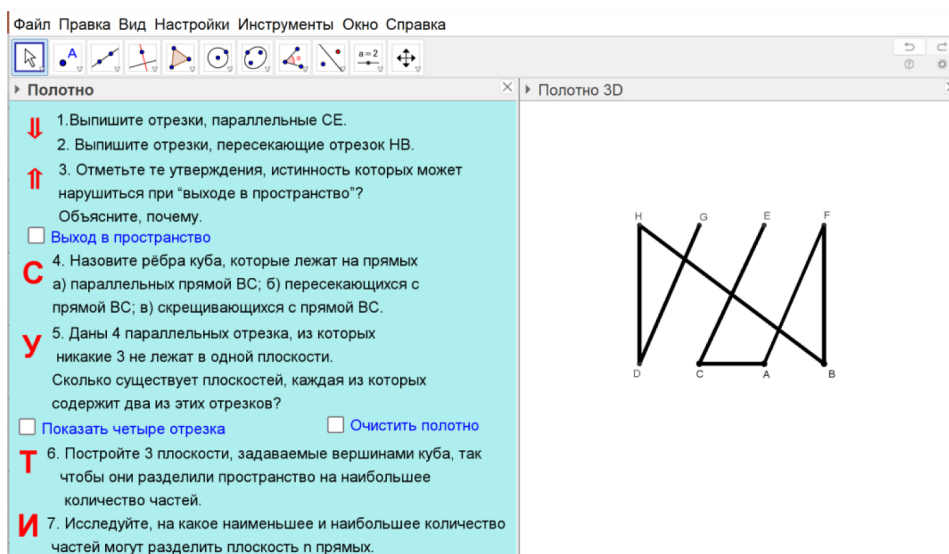
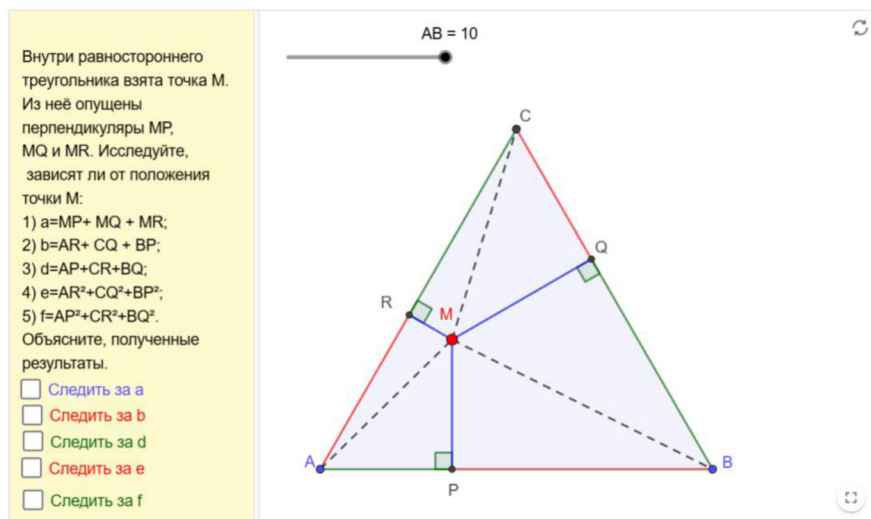


Рис. 3. Цепочка задач, созданная в программе GeoGebra, и QR-код для доступа к динамическому листу <https://www.geogebra.org/m/trdhegwy>

В новой редакции ФГОС ООО и Федеральных рабочих программах по учебному предмету «Математика» к метапредметным результатам обучения предъявляется новое требование «проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой» [14, с. 9]. Ранее достижение этого результата обеспечивалось только предметами естественно-научного цикла. Теперь постановка задачи формирования экспериментальных умений у учащихся требует включения в систему средств обучения

математике экспериментальных и экспериментально-теоретических задач, которые могут быть получены путем модификации имеющихся. Приведем для примера модификацию (рис. 4) задачи № 76 из учебника В.А. Гусева [3, с. 70]: «Возьмите точку M внутри равностороннего треугольника и опустите перпендикуляры MP , MQ и MR соответственно к его сторонам AB , BC и AC . Оказывается, что сумма этих отрезков не зависит от выбора точки M и равняется высоте треугольника. Докажите, что $AP + BQ + CR = BP + CQ + CR$, а их квадраты тоже равны $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = BP^2 + CQ^2 + CR^2$ ».



Запишите свои гипотезы

Type your answer here...

Рис. 4. Модификация задачи № 76 и QR-код для доступа к динамическому листу <https://www.geogebra.org/m/frgentgq#material/dczwdwdm>

Аналогичным образом могут быть модифицированы и творческие задачи учебников В.А. Гусева. Например, задача № 68 из учебника для 7 класса [7, с. 201]: «Как можно воспользоваться шарнирным механизмом со звеньями равной длины для построения: а) биссектрисы данного угла; б) середины данного отрезка; в) центра данной окружности», может быть предложена для решения специально созданным компьютерным инструментом в среде GeoGebra (рис. 5).

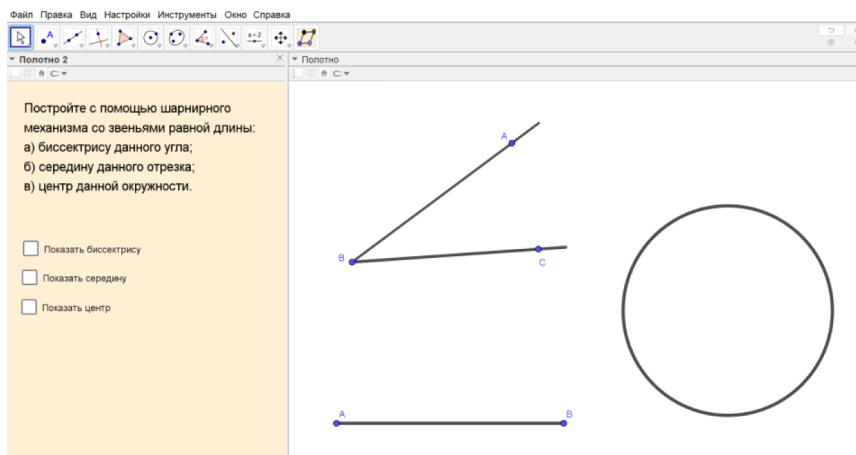


Рис. 5. Модификация задачи № 68 и QR-код для доступа к динамическому листу <https://www.geogebra.org/m/wdnvezxx>

В заключение хотелось бы отметить, что современные условия и задачи математического образования вовсе не перечеркивают традиций и методических идей прошлого, а лишь раскрывают новые возможности для их развития и применения.

Библиографический список

1. Гусев В.А. Геометрия – 6: Экспериментальный учебник. Часть 1. М.: Авангард, 1995. 124 с.
2. Гусев В.А. Геометрия – 6: Экспериментальный учебник. Часть 2. М.: Авангард, 1995. 148 с.
3. Гусев В.А. Геометрия – 7: Экспериментальный учебник. Часть 3. М.: Авангард, 1996. 96 с.
4. Гусев В.А. Геометрия – 7: Экспериментальный учебник. Часть 4. М.: Авангард, 1996. 128 с.
5. Гусев В.А. Геометрия – 8: Экспериментальный учебник. Часть 5. М.: Авангард, 1997. 136 с.
6. Гусев В.А. Геометрия – 8: Экспериментальный учебник. Часть 6. М.: Авангард, 1997. 138 с.
7. Гусев В.А. Геометрия. 7 класс. М.: Русское слово – РС, 2003. 240 с.
8. Гусев В.А. Геометрия: [6–9]: Экспериментальный учебник. Часть 7. М.: Авангард, 1998. 171 с.
9. Гусев В.А. Геометрия: [6–9]: Экспериментальный учебник. Часть 8. М.: Авангард, 1999. 149 с.
10. Гусев В.А. Геометрия: [6–9]: Экспериментальный учебник. Часть 9. М.: Авангард, 1999. 174 с.
11. Гусев В.А. Методика преподавания курса «Геометрия 6–9». Ч. 1. 1995. URL: https://www.mathedu.ru/text/gusev_metodika_prepodavaniya_kursa_geometriya_6-9_ch1_1995/p0/ (дата обращения: 25.09.2025).
12. Гусев В.А. Методика преподавания курса «Геометрия 6–9». Ч. 2. 1996. URL: https://www.mathedu.ru/text/gusev_metodika_prepodavaniya_kursa_geometriya_6-9_ch2_1996/p108/ (дата обращения: 25.09.2025).
13. Тарасов Л.В. Геометрия окружающего мира: экспериментальный учебник развивающего типа для 5-го кл. Часть 1. М.: Авангард, 1998. 210 с.
14. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика. Базовый уровень (5–9 классы общеобразовательных организаций). URL: <https://static.edsoo.ru/projects/fop/index.html?ysclid=mcrp92s3v8603637879> (дата обращения: 25.09.2025).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНИСЬКИН Владимир Николаевич – кандидат педагогических наук, доцент, декан факультета физики, математики и информатики, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: vnaniskin@gmail.com

АНТИПОВА Ирина Августовна – доктор физико-математических наук, заведующая кафедрой прикладной математики и анализа данных, профессор кафедры теории функций, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: iantipova@sfu-kras.ru

АШИХМИН Артём Сергеевич – студент, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова; e-mail: ashikhmin.art@gmail.com

БАБУРСКИЙ Юрий Кириллович – студент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана; e-mail: baburskiy435@gmail.com

БАРАНОВА Марина Юрьевна – преподаватель математики, Красноярский педагогический колледж № 1 им. М. Горького; e-mail: marinochkabaranova@mail.ru

БЕЗУМОВА Ольга Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: o.bezumova@narfu.ru

БЕЛОВ МАКСИМ СЕРГЕЕВИЧ – аспирант института математики, естественных и компьютерных наук, Вологодский государственный университет; e-mail: below.m2014@yandex.ru

БЛИНОВА Татьяна Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике, Уральский государственный педагогический университет; e-mail: t.l.blinova@mail.ru

БОГОСЛОВСКИЙ Владимир Игоревич – доктор педагогических наук, профессор кафедры цифрового образования, Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург; e-mail: vib0705@mail.ru

БОРЗЕНКОВА Ольга Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры начального образования, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: borzol1389@mail.ru

БОРОНЕНКО Татьяна Алексеевна – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информатики и информационных систем, Ленинградский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Санкт-Петербург, г. Пушкин; e-mail: kafivm@lengu.ru

БОЦМАН София Романовна – студент, институт естественных наук и математики, Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова; e-mail: sofiaBocman150@gmail.com

БОГДАНОВИЧ Екатерина Геннадьевна – студент, Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина, Республика Беларусь; e-mail: Bogdanovichkate038@gmail.com

БОЧКАРЁВА Даниэла Владимировна – преподаватель, Новосибирский колледж легкой промышленности и сервиса; e-mail: danaloro1993@yandex.ru

БУКРЕЕВА Алина Евгеньевна – студент магистратуры, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена; учитель математики, Муринская СОШ № 8, г. Санкт-Петербург; e-mail: buuuukreeva@yandex.ru

БУКУШЕВА Алия Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского; e-mail: bukushevaav@sgu.ru

БУРМИСТРОВА Наталия Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и системного моделирования сложных процессов, Санкт-Петербургский университет государственной противопожарной службы МЧС России им. Героя Российской Федерации генерала армии Е.Н. Зиничева; e-mail: bur_na_a@mail.ru

ВАСИЛЕВСКИЙ Константин Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем, Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь; e-mail: VasilevskyK@bsu.by

ВАСИЛЬЕВА Марина Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент, заведующая лабораторией развития содержания образования Центра развития образования, Российская академия образования, г. Москва; e-mail: ipk1@yandex.ru

ВЕРБИЧЕВА Елена Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий, Кубанский государственный университет, г. Краснодар; e-mail: verbichevaea@mail.ru

ВЕРГИЛЮШ Станислав Сергеевич – студент, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, г. Архангельск; e-mail: stixort@yandex.ru

ВЕСЕЛОВСКИЙ Владимир Александрович – сотрудник отдела технического сопровождения и обеспечения инфраструктуры информационных технологий Центра координации, Военно-медицинская академия имени С.М. Кирова, г. Санкт-Петербург; e-mail: vovan021096@yandex.ru

ВОЛК Анатолий Матвеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный технологический университет, Республика Беларусь, г. Минск; e-mail: anatoliyvolk@mail.ru

ВОЛОШИН Василий Дмитриевич – обучающийся средней школы № 94, г. Красноярск; e-mail: hoten13@mail.ru

ГАМОВА Яна Николаевна – студент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, г. Архангельск; e-mail: gamova.y@edu.narfu.ru

ГАНЖА Александра Александровна – аспирант, Донецкий государственный университет; e-mail: alexa.ganja@yandex.ru

ГИМАТДИНОВА Галия Нурулловна – кандидат педагогических наук, учитель математики, ЧОУ «ПАСКАЛЬ ЛИЦЕЙ», г. Санкт-Петербург; e-mail: frenchwomen_2014@mail.ru

ГОРОХОВА Валерия Сергеевна – студент, Красноярский педагогический колледж № 1 им. М. Горького; e-mail: gorohovalerra@yandex.ru

ГУМБАТОВА Севиндж Физули-кызы – преподаватель, Кубанский государственный университет, г. Краснодар; e-mail: gumbatova25s@gmail.com

ДАВЫДОВСКАЯ Валентина Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина, Республика Беларусь; e-mail: valentina_dav@list.ru

ДЕЙКУН Денис Геннадьевич – кандидат педагогических наук, доцент 103 кафедры математики (и информатики), Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков имени Героя Советского Союза А.К. Серова; e-mail: d.g.deykun@mail.ru

ДОБУДЬКО Татьяна Валерьяновна – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информатики, прикладной математики и методики их преподавания, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: tdobudko@mail.ru

ДУНИЧЕВ Кирилл Павлович – аспирант, Хабаровский Федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук; e-mail: kr.dunichev@mail.ru

ДЮКИНА Наталья Геннадиевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В.Г. Короленко; e-mail: dyukinang@mail.ru

ЕГОРОВ Виктор Александрович – аспирант, Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук; email: callenrain14@mail.ru

ЕРМАКОВ Олег Владиславович – магистрант, Кубанский государственный университет, г. Краснодар; e-mail: inverted12man@gmail.com

ЕФИМКИНА Анна Ионовна – магистрант, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, учитель биологии МБОУ СОШ № 3 г. Бородино; e-mail: annaefimkina@yandex.ru

ЖАРТОВСКИЙ Владимир Юрьевич – студент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана; e-mail: vova.zhartovskiy.98@mail.ru

ЖУРАВЛЕВА Наталья Александровна – доцент кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: zhuravlevanataly@mail.ru

ЖУЧКОВ Игорь Александрович – кандидат технических наук, доцент 103 кафедры математики (и информатики), Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков имени Героя Советского Союза А.К. Серова; e-mail: zhuchkovi.53@mail.ru

ЗАРЫВНЫХ Наталья Федоровна – студент магистратуры, Уральский государственный педагогический университет; учитель математики, Лицей № 88, г. Екатеринбург; e-mail: nata.zaryvnykh.00@mail.ru

ЗОЛОТЫХ Светлана Григорьевна – студент, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: svetik.zgv@gmail.com

ИБРАГИМОВА Малика Султановна – кандидат педагогических наук, доцент, старший преподаватель кафедры информационных технологий, Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный; e-mail: akilamkcsn@mail.ru

ИГНАТУШИНА Инесса Васильевна – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета, Оренбургский государственный педагогический университет; e-mail: streleec@yandex.ru

ИКОННИКОВА Татьяна Константиновна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры элементарной математики и теории чисел, Московский педагогический государственный университет; e-mail: tk.ikonnikova@mpgu.su

КЕЙВ Мария Анатольевна – доцент кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: mkejv@yandex.ru

КИРИЛЛОВА Надежда Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и информационных технологий, Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова, г. Абакан; e-mail: nadyakirillova@mail.ru

КИРКИНА Екатерина Геннадьевна – студент магистратуры, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: kirkina.e@edu.narfu.ru

КНЯЗЕВА Надежда Константиновна – аспирант, Сибирский федеральный университет; учитель начальных классов МАОУ СШ № 137, г. Красноярск; e-mail: nadusha8@yandex.ru

КОЗЛОВСКАЯ Инесса Станиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем, Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь; e-mail: kozlovskaja@bsu.by

КРУПИЦЫН Евгений Станиславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры элементарной математики и теории чисел, Московский педагогический государственный университет; e-mail: krupitsin@gmail.com

КСЕНЗОВА Наталья Ильинична – магистрант, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: nata.shusterova@mail.ru

КУРАШОВА Елизавета Викторовна – студент, Кубанский государственный университет; e-mail: kurashovaelizaveta2004@mail.ru

КУРГАНОВА Ирина Александровна – учитель математики, средняя общеобразовательная школа № 25, г. Абакан, Республика Хакасия; e-mail: irina_dudkina90@mail.ru

ЛАПШИНА Екатерина Максимовна – студент магистратуры, Самарский государственный социально-педагогический университет; учитель математики и физики, школа № 1 им. Виктора Носова, г. Тольятти; e-mail: caterina.lapshina2017@yandex.ru

Леонов Александр Владимирович – аспирант, Смоленский государственный университет; e-mail: alexsandr.leo@yandex.ru

ЛОГИНОВСКАЯ Тамара Николаевна – доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнёва, г. Красноярск; e-mail: loginovskaya46@mail.ru

ЛОЗОВАЯ Наталья Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнёва, г. Красноярск; e-mail: lozovayanat@mail.ru

ЛЫСОГОРОВА Людмила Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры начального образования, заведующая кафедрой начального образования, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: lysogorova@pgsga.ru

МАЙЕР Валерий Робертович – доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: mavr49@mail.ru

МАКЕЕВА Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова; e-mail: mov_ulspu@mail.ru

МАТЮШКИН Дмитрий Романович – студент магистратуры, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; учитель математики, лицей № 3, г. Красноярск; e-mail: dima.matyushkin2002@mail.ru

МИХАЛКИНА Елена Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и информационных технологий; Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова, г. Абакан; e-mail: mikhailenko_e@mail.ru

МОГИЛЕВА Анна Михайловна – учитель математики, средняя общеобразовательная школа № 87 Петроградского района Санкт-Петербурга; e-mail: mogileva906@gmail.com

НЕКРАСОВА Дарья Михайловна – студент магистратуры, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В.Г. Короленко; учитель математики и информатики, гимназия № 6, г. Глазов; e-mail: nekrasovadaryaforever@mail.ru

НОСКОВ Михаил Валерианович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и анализа данных, Сибирский федеральный университет, Красноярск; e-mail: mvnoskov@yandex.ru

ПАВЛОВА Мария Александровна – доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: m.pavlova@narfu.ru

ПЕРМИНОВА Варвара Сергеевна – обучающаяся средней школы № 94, г. Красноярск; e-mail: rabota942025@mai.ru

ПЕТРОВ Александр Андреевич – студент, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: petrov.aleksandr@sgspu.ru

ПОЛИЧКА Анатолий Егорович – доктор педагогических наук, профессор высшей школы естественных наук, математики и информационных технологий, Тихоокеанский государственный университет, профессор кафедры высшей математики, Дальневосточный университет путей сообщения, г. Хабаровск; e-mail: kso_koknmv2010@mail.ru

ПОПКОВ Роман Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт-Петербург; e-mail: rpopkov@itmo.ru

ПОТЫЛИЦЫН Дмитрий Андреевич – студент магистратуры, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; учитель математики, школа-интернат основного общего образования, с. Халясавэй Пуровского района ЯНАО; e-mail: d19rus@gmail.com

ПРОЯЕВА Ирина Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики, Оренбургский государственный педагогический университет имени В.П. Чкалова (Оренбургский филиал); e-mail: docentirina@mail.ru

ПУГАЧ Ольга Исааковна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики, прикладной математики и методики их преподавания, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: o.pugach@pgsga.ru

ПУТИНЦЕВА Ирина Викторовна – преподаватель математики и информатики, Красноярский техникум железнодорожного транспорта; e-mail: putinceva_iv@krsk.irgups.ru

РАКИТИНА Анастасия Вадимовна – студент, Оренбургский государственный педагогический университет; e-mail: rak.pach@yandex.ru

РОЖКОВ Александр Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, Кубанский государственный университет, г. Краснодар; e-mail: great.ros.marine2@gmail.com

СОЛДАЕВА Мария Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры методики обучения математике и информатике, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург; e-mail: soldaevamv@gmail.com

ТАБИНОВА Ольга Александровна – кандидат педагогических наук; заместитель директора по учебно-воспитательной работе, преподаватель математики и информатики, Дивногорский колледж-интернат олимпийского резерва, г. Дивногорск, Красноярский край; e-mail: tabinovaolga@mail.ru

Тарасюк Евгений Валерьевич – студент, Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина, Республика Беларусь; e-mail: zegi482@gmail.com

ТЕПЛУХИНА Виктория Сергеевна – студент, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, г. Архангельск; e-mail: tplhn13@yandex.ru

ТЕСТОВ Владимир Афанасьевич – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Вологодский государственный университет; e-mail: vladafan@inbox.ru

ТОРОПОВА Светлана Ивановна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет, г. Киров; e-mail: svetori82@mail.ru

ТРОФИМЕЦ Елена Николаевна – кандидат педагогических наук, заведующая кафедрой высшей математики и системного моделирования сложных процессов, Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России; e-mail: ezemifort@inbox.ru

ТРОФИМОВ Игорь Леонидович – аспирант, Хабаровский Федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Хабаровск; e-mail: grimors@mail.ru

ТУРЧИН Владимир Александрович – кандидат педагогических наук, доцент 103 кафедры математики (и информатики), Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков имени Героя Советского Союза А.К. Серова; e-mail: tyrchin@rambler.ru

УДОВЕНКО Лариса Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа имени академика П.С. Новикова, Московский педагогический государственный университет; e-mail: ln.udovenko@mpgu.su

УШАКОВА Кристина Евгеньевна – учитель математики, средняя общеобразовательная школа № 1, с. Князе-Волконское Хабаровского муниципального района Хабаровского края; e-mail: Kristina_ushakova_1994@vk.com

ФЕДОТОВА Вера Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики и информационных систем, Ленинградский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Санкт-Петербург, г. Пушкин; e-mail: vera1983@yandex.ru

ФИРСТОВА Наталья Игоревна – кандидат педагогических наук, профессор, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет, e-mail: steva54@mail.ru

ХИЛЮК Елена Александровна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель департамента математики и физики института цифрового образования, Московский городской педагогический университет; e-mail: KhilyukEA@mgpu.ru

ХОТЕНКО Ирина Валерьевна – учитель математики средней школы № 94, г. Красноярск; e-mail: Angirinas@mail.ru

ЦЕЛУЙКО Анна Владимировна – студент, институт естественных наук и математики, Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова; e-mail: annaceluiko729@gmail.com

ЧИРКОВА Виктория Викторовна – студент, Оренбургский государственный педагогический университет; e-mail: viktoriac_105@mail.ru

ЧУВАШОВ Семён Юрьевич – магистрант 2-го года кафедры теории функций, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: simontahkraa@gmail.com

ШАБАНОВА Мария Валерьевна – доктор педагогических наук, профессор кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

ШАШКИНА Мария Борисовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: m_shashkina@bk.ru

ШВАДКОВА Арина Алексеевна – студент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации; e-mail: shvadkovaa@mail.ru

ШУТРОВА Ирина Владиславовна – кандидат педагогических наук, ассистент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: i.shutrova@narfu.ru.

ЩИПИЦИН Максим Вадимович – студент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана; e-mail: shchipitsin.maksim@gmail.com

ЭКАЖЕВ ДжанБагаудинович – магистрант 2 курса, Кубанский государственный университет, г. Краснодар; e-mail: great.ros.marine2@gmail.com

ЯВОРСКАЯ Анна Михайловна – старший преподаватель кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: a.yavorskaya@narfu.ru

ЯКИМЕНКО Владимир Валерьевич – аспирант, Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук», г. Красноярск; e-mail: vv.yakimenko@yandex.ru

Осенняя научная сессия КГПУ им. В.П. Астафьева
«Система педагогического образования –
ресурс развития общества»

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ

Материалы XIV Всероссийской с международным участием
научно-методической конференции,
посвященной 90-летию физико-математического факультета
КГПУ им. В.П. Астафьева

Красноярск, 13–14 ноября 2025 г.

Электронное издание

Редактор *А.П. Малахова*
Корректор *Ж.В. Козуница*
Верстка *Н.С. Хасанишина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Отдел научных исследований и грантовой деятельности КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 8(391) 217-17-82

Подготовлено к изданию 02.12.25.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 46,0