МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Красноярский государственный педагогический университет

им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики
Кафедра-разработчик: кафедра математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО на заседании кафедры Протокол № от 07 мая 2025 г. Зав.кафедрой М.Б. Шашкина	ОДОБРЕНО на заседании научно-методического совета специальности (направления подготовки) Протокол №8 от 14 мая 2025 г. Председатель Е.А. Аешина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся

Теория функции комплексного переменного
(наименование дисциплины/модуля/вида практики)

44.03.05 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математика и информатика
(направленность (профиль) образовательной программы)

Бакалавр
(квалификация (степень) выпускника)

Составитель: Михалкин Е.Н., профессор кафедры математики и МОМ

Красноярск 2025

1. Назначение фонда оценочных средств.

1.1. **Целью** создания ФОС дисциплины «Теория функции комплексного переменного» является установление соответствия учебных достижений запланированным результатам обучения и требованиям основной профессиональной образовательной программы, рабочей программы дисциплины.

1.2. ФОС по дисциплине «Теории функций комплексного переменного» решает следующие **задачи**:

- оценка уровня сформированности компетенций, характеризующих способность выпускника к выполнению видов профессиональной деятельности по квалификации бакалавр, освоенных в процессе изучения данной дисциплины.

1.3. **ФОС разработан на основании нормативных документов**:

- ФОС разработан на основании нормативных **документов**:

- федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (уровень бакалавриата);

- образовательной программы высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (уровень бакалавриата), направленность (профиль) образовательной программы «Математика и информатика»;

- Положения о формировании фонда оценочных средств для текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой (государственной итоговой) аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре - в КГПУ им. В.П. Астафьева.

2. Перечень компетенций, подлежащих формированию в рамках дисциплины

ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач:

ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).

ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО

3. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости

4.1. Фонды оценочных средств включают: вопросы к коллоквиуму, контрольные работы, тематику рефератов.

4. Оценочные средства (контрольно-измерительные материалы)

4.1. Вопросы к коллоквиуму

1. Функции комплексного переменного. Предел. Непрерывность. Равномерная непрерывность.
2. Последовательности и ряды функций комплексного переменного. Абсолютная, условная, равномерная сходимость.
3. Степенные ряды в комплексной области. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда.
4. Функции $w = e^z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$ и их свойства.
5. Логарифмическая функция и её основные свойства.
6. Понятие производной. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Примеры дифференцируемых и недифференцируемых функций.
7. Условия Коши-Римана.
8. Аналитические функции. Связь аналитических функций с гармоническими. Восстановление аналитической функции по её действительной (мнимой) части.

4.2.*Контрольная работа №1*

Вариант 1

1. Корнем уравнения $\bar{z}(2-3i) = i^5$ является число
   $a) z = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i;$ $\quad б) z = 1-2i;$ $\quad в) z = -\frac{3}{13};$ $\quad г) z = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i.$
2. Тригонометрическая форма числа $z = -1 - i\sqrt{3}$ имеет вид
   $a) cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right);$ $\quad б) 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$
   $в) 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right);$ $\quad г) 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right).$
3. Уравнение линии $\left|z - \frac{4}{9} - \frac{1}{25}i\right| = \frac{3}{15}$ в декартовых координатах имеет вид
   $a) \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3}{15};$ $\quad б) \left(x + \frac{4}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{25}\right)^2 = \frac{9}{225};$
   $в) \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{225};$ $\quad г) \left(x - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{25}\right)^2 = \frac{9}{225}.$
4. Точка $z = -3 + i$ принадлежит множеству, определяемому условием
   $a) |z - 3 + i| < 3;$ $\quad б) |z + 3 - i| < 3;$ $\quad в) |z + 1 + 3i| < 3;$ $\quad г) |z - 3 - 3i| < 3.$
5. Сходящимся является ряд

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-i}{10}\right)^n$; $б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{1+i}\right)^n$; $в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-7+n^2 i}{\sqrt{n}}$; $г)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{1-i}\right)^n$.

6. Функция $w=\frac{\bar{z}}{z}$ принимает чисто мнимые значения

а) на прямых $y = \pm x$; б) на всей комплексной плоскости;
в) на обеих координатных осях; г) на оси ox.

7. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^3}{\bar{z}}$ а) равен 1; б) равен 0; в) не существует;
г) существует, но отличен от 0 и 1.

8. Круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(z+2i)^n$ определяется условием

$a)|z|<e;$ $б)|z|<1;$ $в)|z+2i|<e;$ $г)|z+2i|<1.$

Вариант 2

1. Корнем уравнения $(3x-i)(2+i)+\bar{z}(1+2i)=5+6i$ является число
$a)z=\frac{1}{17};$ $б)z=\frac{20}{17}-\frac{36}{17}i;$ $в)z=\frac{1+i}{17};$ $г)z=0.$

2. Тригонометрическая форма числа $z=-1+i\sqrt{3}$ имеет вид
$a)2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right);$ $б)2\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right);$
$в)2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right);$ $г)2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$

3. Уравнение линии $|z+1-3i|=\frac{10}{11}$ в декартовых координатах имеет вид
$a)(x-1)^2+(y+3)^2=\frac{100}{121};$ $б)(x-1)^2+(y+3)^2=\frac{10}{11};$
$в)(x+1)^2+(y-3)^2=\frac{100}{121};$ $г)(x+1)^2+(y-3)^2=\frac{10}{11}.$

4. Точка $z = 2-3i$ принадлежит множеству, определяемому условием
$a)|z-2-3i|<3;$ $б)|z+2+3i|<3;$ $в)|z+1-5i|<5;$ $г)|z-1+5i|<5.$

5. Сходящимся является ряд
$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2 i}{2n^3};$ $б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-5n^2+\sqrt{n}i}{n};$ $в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{1+i}\right)^n;$ $г)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{16}\right)^n.$

6. Функция $w=\frac{z-2}{2}$ принимает действительные значения

а) на оси oy; б) на оси ox;

в) на всей комплексной плоскости; г) в точках окружности $(x-1)^2+y^2=1$.

7. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$ а) не существует; б) равен 1; в) равен 0;

г) существует, но отличен от 0 и 1.

8. Круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+2ni}{2n-i}\right)^n\cdot(z-i)^n$ определяется условием

а)$|z|<1$; *б*)$|z-i|<2$; *в*)$|z|<2$; *г*)$|z-i|<1$.

4.3. *КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2*

ВАРИАНТ 1

1.Выясните, где является дифференцируемой функция

$$w=(1-i)\overline{z}+5i.$$

2.Докажите, что функция $w=z^2+3iz$ является аналитической на всей комплексной плоскости и вычислите ее производную.

3.Можно ли восстановить аналитическую функцию *f*, мнимая часть которой $V=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, $f(0)=0$? Если да, то найдите ее.

4.Определите: а) в каких точках плоскости отображение $w=\dfrac{i(z-1)}{z-i}$ является конформным,

б) где коэффициент растяжения указанного отображения равен 1.

5.Вычислите $\int\limits_C\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}dz$, *если* C: 1) $|z|=1$; 2)$|z+2i|=1$.

ВАРИАНТ 2

1.Выясните, где является дифференцируемой функция

$$w=1-7i+4i\overline{z}.$$

2.Докажите, что функция $w=z^3+1-i$ является аналитической на всей комплексной плоскости и вычислите ее производную.

3. Можно ли восстановить аналитическую функцию, действительная часть которой $u=y^3-3x^2y+7$? Если да, то найдите ее.

4. Определите: а) в каких точках плоскости отображение $w=\dfrac{z-1}{z}$ является конформным;

б) где коэффициент растяжения указанного отображения равен 2.

5. Вычислите $\int\limits_C\dfrac{z-\sin z}{\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)^2}dz$, *если* C: 1) $|z|=1$; 2)$|z|=3$.

4.4. ТЕМАТИКА РЕФЕРАТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

Тема 1. Различные подходы к определению показательной функции комплексного переменного

Цель: описать различные подходы к определению показательной функции комплексного переменного и провести их сравнительный анализ.

Примерное содержание. Определение показательной функции как суммы степенного ряда, как предела последовательности, как решения дифференциального уравнения, а также введённой с помощью формулы Эйлера. Доказательство свойств показательной функции для каждого из указанных выше подходов к её определению. Доказательство эквивалентности определений. Сравнительный анализ описанных подходов.

Тема 2. Некоторые подходы к определению логарифмической функции в комплексной области

Цель: описать различные подходы к определению логарифмической функции комплексного переменного и провести их сравнительный анализ.

Примерное содержание. Интегральное определение функции $w = \mathrm{Ln}\, z$, доказательство основных свойств функции, исходя из этого определения. Функция $w = \mathrm{Ln}\, z$ для комплексных значений z как аналитическое продолжение функции $y = \ln x$ для действительных значений x. Доказательство эквивалентности указанных определений. Краткое описание других известных вам подходов к определению логарифмической функции. Сравнительный анализ всех приведённых в курсовой работе определений.

Тема 3. Дробно-линейные отображения и модель плоскости Лобачевского

Цель: описать свойства дробно-линейных отображений и на их основе построить модель плоскости Лобачевского.

Примерное содержание. Понятие дробно-линейного отображения, его конформность. Групповое и круговое свойства дробно-линейных отображений. Инвариантность двойного отношения. Построение отображения по образам трёх точек. Отображение круговых областей друг на друга. Сохранение симметрии. Интерпретация планиметрии Лобачевского.

Замечание. Описание теоретических положений должно сопровождаться достаточным числом соответствующих примеров.

Тема 4. Конформные отображения, осуществляемые функцией Жуковского и обратной к ней функцией

Цель: описать свойства функции Жуковского, обратной к ней функции и конформные отображения, осуществляемые ими.

Примерное содержание. Определение функции Жуковского, её аналитичность, однолистность и другие свойства. Образы окружностей и лучей при отображении функцией Жуковского. Примеры конформных отображений, осуществляемых этой функцией. Функция, обратная к функции Жуковского, её аналитичность. Примеры конформных отображений, осуществляемых этой функцией.

Тема 5. Гидромеханическое истолкование аналитической функции и её производной

Цель: показать, какую роль играют аналитические функции при изучении плоскопараллельного движения жидкости, и, исходя из этой роли, дать гидромеханическое истолкование аналитической функции и её производной.

Примерное содержание. Понятие об установившемся плоскопараллельном движении жидкости. Проекции вектора скорости частиц жидкости на координатные оси. Функция тока, потенциал скоростей, характеристическая функция течения, её аналитичность. Гидромеханическое истолкование аналитической функции и её производной. Примеры.

Тема 6. Интегральная теорема Коши и её применение к вычислению интегралов от функций действительного переменного

Цель: описать полное доказательство интегральной теоремы Коши, принадлежащее Э. Гурса, для любой функции, аналитической в односвязной области, и показать её применение к вычислению некоторых несобственных интегралов от функций действительного переменного.

Примерное содержание. Главная идея доказательства теоремы. План доказательства. Полное доказательство теоремы с чётким выделением полученных результатов в каждом пункте осуществляемого плана. 1–3 примера в качестве иллюстрации приложений теоремы Коши к вычислению несобственных интегралов от функций действительного переменного.

Тема 7. Приложения теории вычетов к вычислению интегралов от функций действительного переменного

Цель: описать некоторые приёмы применения теории вычетов к вычислению определённых и несобственных интегралов от функций действительного переменного.

Примерное содержание. Применение теории вычетов к вычислению:

а) определённых интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, где $y = R(\sin x, \cos x)$ – дробно-рациональная функция $\sin x$ и $\cos x$;

б) несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$, где $y = R(x)$ – дробно-рациональная функция (предполагается, что интеграл сходится);

в) несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mxdx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos mxdx$, где $y = R(x)$ – дробно-рациональная функция, $m > 0$.

Замечание. Привести достаточное число примеров для каждого случая.

Тема 8. Принцип аргумента аналитической функции и следствия из него

Цель: с помощью логарифмического вычета доказать теорему, называемую принципом аргумента аналитической функции, описать некоторые следствия из неё и их применение.

Примерное содержание. Понятие логарифмического вычета аналитической функции. Связь логарифмического вычета с нулями и полюсами функции. Доказательство принципа аргумента аналитической функции. Доказательство теоремы Руше как следствия из принципа аргумента. Доказательство основной теоремы алгебры, основанное на применении теоремы Руше.

Замечание. Решить несколько примеров на выяснение числа корней многочленов в заданных областях.

4.5. Вопросы к зачету

1. Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность, равномерная непрерывность.
2. Последовательности и ряды функций комплексного переменного. Абсолютная, условная сходимость. Примеры. Связь между сходящимся и абсолютно сходящимся рядами.
3. Степенные ряды в комплексной области. Теорема Абеля. Радиус и круг сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда.
4. Функции w = e^z, w= sin z, w = cos z и их основные свойства.
5. Логарифмическая функция и ее основные свойства. Отображения посредством логарифмической функции.
6. Понятие производной. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Примеры дифференцируемых и недифференцируемых функций.
7. Условия Коши-Римана.
8. Аналитические функции. Связь аналитических функций с гармоническими.
9. Восстановление аналитической функции по ее действительной части.
10. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении. Примеры конформных отображений.

11. Интеграл от функции комплексного переменного по кусочно-гладкому пути. Формулы для вычисления. Свойства.
12. Интегральная теорема Коши.
13. Интегральная формула Коши.
14. Первообразная функция. Формула Ньютона-Лейбница.
15. Понятие функционального ряда. Равномерная сходимость. Теорема Вейерштрасса.
16. Понятие ряда Лорана. Область сходимости рядов Лорана.
17. Понятие изолированной особой точки. Классификация изолированных особых точек