

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: Математики и методики обучения математике

Латышева Екатерина Николаевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Методические особенности изучения показательных и логарифмических
уравнений и неравенств в контексте подготовки к ЕГЭ по математике**

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой: к.п.н., доцент Шашкина М.Б.

19.05.2025 Шашкина

(дата, подпись)

Руководитель: к.ф.-м.н., доцент каф. МиМОМ,

Ганжа Е.И. Ганжа

(дата, подпись)

Дата защиты 20.06.2025

Обучающийся: Латышева Е.Н.

Латышева
(дата, подпись)

Оценка удовлетворительно
прописью

Красноярск, 2025

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические аспекты изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.....	6
1.1. Роль и место разделов «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» в школьном курсе математики.....	6
1.2. Обязательные результаты обучения по разделам «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».....	13
1.3. Методы решения различных типов показательных и логарифмических уравнений и неравенств.....	18
Глава 2. Методические аспекты изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к единому государственному экзамену.....	27
2.1. Целевой и содержательный компоненты методики.....	27
2.2. Технологический компонент методики и методические рекомендации для учителя.....	32
2.3. Результаты апробации методики в старшей школе.....	39
Заключение.....	46
Список использованной литературы.....	49

Введение

Актуальность темы. В современных условиях изучение математики приобретает особую значимость, так как успешная сдача Единого государственного экзамена (ЕГЭ) определяет дальнейшие образовательные и профессиональные перспективы выпускников. Разделы, посвященные показательным и логарифмическим уравнениям, занимают значительное место в школьном курсе алгебры и анализа, а также являются одними из наиболее сложных тем в содержании экзамена. Их освоение требует глубокого понимания математических закономерностей, а также овладения различными методами решения уравнений и неравенств. В связи с этим разработка эффективных методических материалов для изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к ЕГЭ является актуальной задачей педагогической науки.

Новизна работы. В данной работе предлагается комплексные методические рекомендации для изучения указанных разделов, основанная на анализе требований ЕГЭ и федерального образовательного стандарта (ФОП) углубленного уровня. Разрабатываются новые подходы к организации учебного процесса, включающие использование современных педагогических технологий, направленных на повышение качества подготовки учащихся.

Цель исследования – описать теоретические и методические аспекты изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, ориентированной на подготовку учащихся к успешному прохождению ЕГЭ.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Проанализировать роль и место разделов «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» в школьном курсе математики.
2. Определить обязательные результаты обучения по данным разделам с учетом требований ЕГЭ и ФОП углубленного уровня.

3. Выделить методы решения различных типов показательных и логарифмических уравнений и неравенств.
4. Разработать методические рекомендации преподавания указанных разделов в контексте подготовки к ЕГЭ.
5. Провести апробацию предложенной методики и оценить её эффективность в образовательном процессе.

Объект исследования – процесс обучения математике в старшей школе в рамках подготовки к ЕГЭ. **Предмет исследования** – методические особенности изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к ЕГЭ.

Теоретическая база исследования. Исследование опирается на работы отечественных и зарубежных ученых, занимающихся вопросами преподавания математики и подготовки учащихся к экзаменационным испытаниям. Среди них можно выделить труды А.Г. Мордковича, В.В. Журавлева, С.А. Телякова, Г.М. Фихтенгольца, В.А. Садовниченко и других. Методологическая основа включает принципы системного, деятельностного и компетентностного подходов, а также современные педагогические технологии, направленные на формирование устойчивых математических знаний и навыков.

Гипотеза исследования – комплексная подготовка к решению показательных и логарифмических уравнений и неравенств с использованием дифференцированного подхода, активных методов обучения и цифровых инструментов повышает уровень усвоения материала и приводит к лучшим результатам на контрольных испытаниях.

Выборка: в исследовании приняли участие два 11-х класса (контрольная и экспериментальная группы) по 20 человек в каждой.

Теоретическая значимость исследования заключается в углублении научных представлений о методических аспектах изучения сложных математических тем в старшей школе. Разработанная методика может быть

использована при разработке учебных пособий и программ углубленного изучения математики.

Практическая значимость работы состоит в создании эффективных методических рекомендаций для учителей, способствующих повышению уровня подготовки школьников к ЕГЭ. Внедрение предложенной методики позволит улучшить результаты экзамена и повысить мотивацию учащихся к изучению математики.

Структура работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и приложений. В первой главе рассматриваются теоретические аспекты изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, их роль в школьном курсе математики, обязательные результаты обучения по данным разделам и основные методы решения.

Вторая глава посвящена методике изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к ЕГЭ, включает целевой и содержательный компоненты методики, технологический компонент и методические рекомендации, а также анализ результатов апробации методики.

В заключении формулируются основные выводы по проведенному исследованию.

Глава 1. Теоретические аспекты изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств

1.1. Роль и место разделов «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» в школьном курсе математики

Математика с самых ранних этапов своего становления развивалась как язык, позволяющий человеку распознавать, описывать и предсказывать закономерности окружающего мира. За каждым её понятием — конкретная попытка понять, как устроены явления, какими законами они управляются, и как можно превратить хаос наблюдений в стройную систему. Неудивительно, что со временем математика стала неотъемлемой частью научного мышления — особенно в тех случаях, когда речь заходит о моделировании реальных процессов. Здесь важно не только зафиксировать эмпирические данные, но и выделить существенные переменные, определить зависимости между ними, свести всё это в компактную, но выразительную формулу.

Среди тем, которые формируют фундамент математического образования, логарифмические уравнения и неравенства занимают особое место. Это не просто набор задач — это вход в область, где арифметика уступает место аналитике, а работа с абстракциями требует от ученика более тонкого понимания структуры числовых соотношений. При этом учебный материал, связанный с логарифмами, как правило, воспринимается школьниками как доступный: он нагляден, логичен, опирается на уже известные свойства степеней. И всё же за внешней простотой скрывается богатая внутренняя логика. Задачи на логарифмы дают возможность использовать разные методы — от графического анализа до преобразований выражений — и, что особенно ценно, требуют от учащихся умения рассуждать. Это делает тему исключительно полезной с точки зрения развития логического мышления, памяти и навыков аналитического чтения условий задачи [1; 2; 4].

Неудивительно, что элементы этой темы прочно вошли в школьную программу: они регулярно появляются в заданиях единого государственного

экзамена, используются для построения межпредметных связей и подаются как инструмент для решения реальных задач. Здесь математика выходит за пределы учебника: логарифмы применяются в демографии, акустике, радиоактивном распаде, экономике — везде, где речь идёт о моделировании процессов с экспоненциальной зависимостью.

История возникновения логарифмов тоже весьма показательная. Уже в XVII веке, когда наука вступила в период интенсивного роста, стало ясно: привычные методы счёта больше не справляются с объёмами вычислений. Астрономы, инженеры, навигаторы — все они нуждались в быстром и точном способе производить сложные расчёты. Джон Непер, шотландский математик, работал над этой задачей не как теоретик, а как практик: он стремился устранить чрезмерно затратные и склонные к ошибкам операции умножения, деления и извлечения корней. Его логарифмическая система оказалась решением, которое объединило строгость математической мысли и потребности реальной науки. По сути, логарифм стал мостом между вычислением и упрощением, между задачей и её элегантным решением.

Логарифмы — не просто удобный приём, а принципиально новый способ работы с числами, появление которого в XVII веке стало интеллектуальным прорывом. Они позволили заменить трудоёмкие вычисления — умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня — операциями сложения, вычитания, умножения и деления соответственно. Эта арифметическая переупаковка оказалась столь действенной, что быстро распространилась в инженерной практике, астрономии и навигации. С её помощью можно было резко ускорить расчёты, снизив риск ошибок и увеличив надёжность результатов — особенно в эпоху, когда вся работа велась вручную, а каждая ошибка стоила времени и доверия.

История логарифмов — это, по сути, история интеллектуального сотрудничества. За именем Джона Непера, который первым предложил концепцию логарифмической зависимости, стоят труды Генри Бригса,

уточнившего вычисления и введшего десятичную шкалу; Михаэля Штифеля, предложившего обозначения и комментарии, и Йоста Бюрги, который, независимо от Непера, пришёл к похожим идеям. К ним примыкают Эдмунд Уингейт, Уильям Отред, Джон Спейдел — каждый из них внёс свой вклад в то, как логарифмы стали частью математической практики [6].

Сегодня логарифмические и показательные уравнения — неотъемлемая часть школьного курса, входящая в алгебру и математический анализ. Но их роль выходит за рамки учебной тематики. На этапе средней и старшей школы именно эти разделы позволяют школьнику совершить качественный скачок от арифметического мышления к аналитическому. Здесь возникает необходимость мыслить функциями, видеть, как меняются значения при переходе от одной переменной к другой, как выстраиваются зависимости в сложных системах. Это не просто «темы к ЕГЭ» — это обучающие ситуации, в которых проверяются и формируются ключевые способности: логичность, гибкость, внимание к структуре задачи.

Кроме того, работа с логарифмическими и показательными уравнениями даёт школьнику опыт интеграции знаний. Появляется необходимость оперировать понятиями из разных областей математики — степенями, функциями, уравнениями, графиками. Этот опыт, по сути, и есть функциональная грамотность: умение применять математические средства в разных контекстах. Именно поэтому задания такого рода так часто включаются в итоговую аттестацию и экзамены. Но гораздо важнее другое: они показывают, как математика выходит за рамки учебного класса, становится инструментом для описания и анализа реальных процессов — от демографических моделей до физических законов [5].

Функциональная грамотность включает в себя способность использовать математические знания для решения реальных задач. В современном мире, где большое количество процессов можно описать с помощью математических моделей, понимание показательных и логарифмических зависимостей становится необходимым навыком.

Например, рост численности населения, скорость распространения эпидемий, изменение уровня радиации со временем — все эти явления описываются экспоненциальными функциями [8]. Без знаний о свойствах показательных и логарифмических уравнений учащимся было бы сложно разобраться в таких процессах и интерпретировать их значения.

Показательные и логарифмические уравнения образуют своего рода мост внутри школьного курса математики — между различными темами, которые поначалу кажутся разрозненными. Эти уравнения не существуют в изоляции: напротив, они вплетены в ткань курса, связывая между собой базовые и более продвинутые разделы. Уже на этапе знакомства с логарифмами становится очевидна их связь со степенями и корнями — ведь логарифм по определению опирается на показатель степени. Но гораздо интереснее, как этот раздел раскрывается в динамике: при анализе логарифмических и показательных функций неизбежно возникает разговор о поведении функций, их монотонности, областях определения, экстремумах и асимптотах. Здесь в дело вступают ключевые идеи математического анализа, и школьник начинает осознавать, что функции — это не просто формулы, а объекты, которые можно изучать, сравнивать, исследовать в движении.

Особую роль играют производные и, на более позднем этапе, интегралы. В работе с логарифмическими функциями производная позволяет описывать скорость изменения, находить точки роста и убывания, а также понимать, как ведёт себя функция в окрестностях своих критических точек. Такие задачи встречаются уже в школьной практике, особенно при подготовке к профильному ЕГЭ, и требуют от учащегося не просто механических навыков, а способности видеть математическую ситуацию в целом [7].

Так, углубленное изучение этих тем не только помогает школьникам лучше понять математический анализ, но и подготавливает их к освоению более сложных тем в высшем образовании [8]. Например, в математике и физике широко используются экспоненциальные и логарифмические законы,

а в экономике анализируются темпы роста и убыли, которые также описываются этими функциями.

Работа с показательными и логарифмическими уравнениями требует от школьника гораздо большего, чем механическое следование алгоритму. Здесь вступают в игру разные стратегии решения, каждая из которых активизирует свой пласт математического мышления. В одних случаях приходится прибегать к преобразованию выражений на основе свойств степеней и логарифмов — и это требует чёткого понимания структуры выражения, умения «разложить» его до элементарных компонентов. В других — задача упрощается с помощью подстановок: хорошо подобранная переменная может превратить сложное уравнение в стандартную квадратную форму, к которой легко применить известные методы. Нередко оказывается полезным и графический подход: если аналитическое решение затруднено, построение графиков функций помогает наглядно увидеть точки пересечения и уточнить число корней.

Особое место занимает использование производных, особенно при решении уравнений с параметрами или при исследовании поведения функций. Этот метод позволяет не только найти решение, но и объяснить, почему оно единственно или как оно зависит от заданных условий [9]. Каждый из перечисленных приёмов — это не просто техника, а способ мышления, и регулярная работа с ними формирует у учащихся аналитическое чутьё, внимательность к деталям, умение комбинировать разные способы действия.

Важно и то, что одна и та же задача может быть решена несколькими путями — и здесь у школьника появляется пространство для выбора. Именно такая вариативность решений, когда ученик может сравнивать, рассуждать, выбирать наиболее рациональный ход, воспитывает гибкость математического мышления. В этом смысле изучение логарифмических и показательных уравнений — это не только обучение технике, но и

тренировка стратегического мышления, которое будет востребовано далеко за пределами школьной программы [11].

Помимо теоретического значения, показательные и логарифмические функции играют ключевую роль в различных сферах науки и практики. Их использование выходит далеко за рамки школьного курса математики, находя применение в естественных науках, экономике, инженерии и других областях.

В физике показательные и логарифмические функции описывают множество природных процессов [10]. Так, закон радиоактивного распада, позволяет прогнозировать изменение количества радиоактивного вещества с течением времени. Закон Кулона, описывающий взаимодействие электрически заряженных частиц, также включает в себя обратную зависимость, связанную с логарифмическими выражениями. Интенсивность звука, закон охлаждения Ньютона и многие другие явления подчиняются экспоненциальным или логарифмическим закономерностям, что делает понимание этих функций необходимым для будущих специалистов в области физики и инженерии [15].

В экономике показательные функции применяются для моделирования сложных финансовых процессов. Логарифмические функции используются для прогнозирования экономического роста, анализа инфляции и оценки эффективности банковских вкладов. Эти модели помогают аналитикам и инвесторам принимать взвешенные решения на основе математических расчетов.

В биологии показательные и логарифмические зависимости находят применение в моделировании популяционной динамики, распространения инфекционных заболеваний и ферментативных реакций [14]. Например, рост численности бактерий в благоприятных условиях описывается экспоненциальной функцией, тогда как модели эпидемий нередко включают логарифмические функции для прогнозирования скорости распространения заболеваний. Без понимания этих математических зависимостей невозможно

эффективно исследовать процессы в живой природе, что делает их изучение актуальным не только для математиков, но и для биологов, врачей и экологов.

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства занимают особое место в школьной программе, так как являются важной частью математического образования, формируя базовые навыки работы с функциями и развивая аналитическое мышление учащихся. Эти темы изучаются в рамках Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) и примерной основной образовательной программы (ФОП) в соответствии с уровнями подготовки учеников.

В 10 классе знакомство с показательными и логарифмическими функциями начинается с азов: школьники осваивают определения, изучают свойства и учатся читать графики. На этом этапе важны прочные фундаментальные представления — что такое логарифм, как он связан со степенью, почему логарифмические выражения подчиняются определённым законам преобразования [18]. Уравнения и неравенства, предлагаемые на базовом уровне, ещё относительно просты: их решение сводится к приведению к общему основанию или прямому использованию определений. Здесь школьник учится распознавать знакомые формы и применять их на практике — шаг, необходимый для дальнейшего углубления.

С переходом в 11 класс курс по-настоящему раскрывается. Теперь внимание сосредоточено не только на технике решения, но и на стратегии: логарифмирование оказывается действенным способом упростить сложное уравнение, введение новой переменной позволяет превратить непрозрачную конструкцию в вполне управляемое квадратное уравнение. Всё чаще приходится опираться на свойства функций — уметь понять, где функция возрастает или убывает, каково число решений и при каких условиях они вообще возможны. В арсенал входит и графический метод: построение графиков помогает не только найти корни, но и проверить корректность аналитического решения [13].

Особое место занимает подготовка к ЕГЭ. Показательные и логарифмические уравнения входят в задания повышенной сложности, и от школьника требуется уверенное владение не только базовыми техниками, но и приёмами математического анализа. Использование производных становится частью практики: так, можно исследовать поведение функции, обосновать единственность корня или найти область определения решения. Это особенно актуально для тех, кто ориентируется на технические и экономические вузы: умение видеть структуру задачи, выбирать эффективный способ решения и точно его реализовать — залог успешного экзамена и серьёзной математической подготовки [16].

Таким образом, показательные и логарифмические уравнения и неравенства представляют собой важную часть школьного курса математики, способствующую развитию математического мышления и прикладных навыков. Их изучение необходимо не только для успешной сдачи ЕГЭ, но и для дальнейшего освоения естественно-научных дисциплин, технических специальностей и экономики.

1.2. Обязательные результаты обучения по разделам «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства»

Показательные и логарифмические уравнения занимают устойчивое место в школьной программе, поскольку напрямую связаны с образовательными результатами, закреплёнными в Федеральном государственном образовательном стандарте (ФГОС) и примерной основной образовательной программе (ФОП) на углублённом уровне. Эти темы включены и в структуру профильного Единого государственного экзамена, где регулярно встречаются в заданиях повышенной сложности.

Их изучение формирует у учащихся целостное представление о функциональной зависимости, методах преобразования выражений, приёмах анализа и моделирования. Это позволяет не просто справляться с задачами

внутри учебного курса, но и понимать, как математические конструкции применяются при описании реальных процессов, таких как закон естественного роста, при определении течения процессов, скорости которых пропорциональны наличному значению изменяющейся величины, например, химические мономолекулярные реакции, рост колоний бактерий, рост производительности и его влияние на ВВП и другие.

На базовом уровне школьники осваивают основные понятия: определение показательной и логарифмической функции, их свойства, графики, приёмы решения простейших уравнений и неравенств. Этот этап закладывает необходимый фундамент. Уже в 11 классе, на углублённом уровне, внимание смещается в сторону комбинированных задач, методов математического анализа и подготовке к решению заданий экзаменационного формата.

Одним из содержательных результатов обучения математике в средней школе становится глубокое понимание свойств показательной и логарифмической функций – не как набора формул, а как ключевых моделей, описывающих широкий спектр процессов в природе и технике, например вычисление количества бактерий в определенной среде за определенное время, изучение изменения атмосферного давления от изменения высоты над уровнем моря, анализ изменения экономических показателей и другие. Ученики осваивают такие характеристики, как область определения и область значений, монотонность, асимптотическое поведение графиков.

Знание взаимосвязей между этими функциями позволяет школьникам воспринимать их не как абстрактные алгебраические конструкции, а как рабочие инструменты – с понятной логикой, наглядной графикой и предсказуемыми свойствами. Такие представления особенно важны при решении практико-ориентированных задач в физике, экономике, биологии, где закономерности роста или убывания описываются именно этими моделями [21; 22; 39].

Обязательным результатом обучения раздела «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» является овладение обучающимися умений решать простейшие показательные и логарифмические уравнения. Одной из базовых техник становится приведение выражений к общему основанию – метод, оттачивающий навык алгебраического преобразования и формирующий математическую гибкость, столь необходимую при переходе к более сложным задачам.

Например, уравнение вида:

$$5^x = 25$$

Решается путём представления 25 в виде степени числа 5, что приводит к уравнению:

$$5^x = 5^2$$

Откуда, непосредственно следует $x = 2$. Аналогично, логарифмические уравнения решаются с помощью определения логарифма, например:

$$\log_3 x = 2,$$

$$x = 3^2,$$

$$x = 9.$$

Ключевой компетенцией становится умение использовать логарифмы для упрощения сложных выражений и решения задач, непосредственно связанных с реальными процессами [12]. Ученики сталкиваются с примерами такими, как моделирование роста населения, распад радиоактивных веществ, расчёт сложных процентов и другими. Эти задачи не только развивают математические навыки, но и демонстрируют, как абстрактные формулы превращаются в инструменты прогнозирования, позволяющие анализировать динамику процессов в природе и финансовой сфере [3].

Наконец, учащиеся осваивают графические методы решения уравнений и неравенств. Это особенно важно, так как визуальное представление функций помогает лучше понять их поведение [23]. Графический метод решения уравнений основан на построении графиков функций и нахождении точек их пересечения. Например, чтобы решить уравнение: $2^x = x + 4$,

обучающимся необходимо построить графики функций $y = 2^x$ и $y = x + 4$ в одной системе координат. После чего они определяют абсциссу точки их пересечения. Этот метод позволяет не только находить решения, но и анализировать их количество и поведение при изменении параметров уравнения.

Изучение показательных и логарифмических уравнений на базовом уровне вооружает учащихся прочным алгебраическим инструментарием и закладывает основы аналитического мышления. Эти знания выходят за рамки школьной программы — они становятся ключом к пониманию реальных процессов и находят отражение в задачах из науки и практики, что подтверждают исследования последних лет [17].

Переход к углубленному изучению предъявляет куда более строгие требования. Здесь недостаточно просто знать формулы и алгоритмы — нужно уметь видеть тонкие взаимосвязи между свойствами функций, применять разнообразные методы решения и нестандартные приёмы для сложных задач. Именно такое сочетание знаний и навыков фиксируется в Федеральном образовательном стандарте для профильного уровня и требованиях ЕГЭ [19; 20]. Ученики учатся не только вычислять, но и анализировать, синтезировать разные подходы и выстраивать логичную аргументацию, что отражает современные представления о математическом образовании, ориентированном на развитие критического мышления.

Одним из ключевых умений, которым должны овладеть учащиеся, является решение сложных показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Здесь применяются методы замены переменной, логарифмирования, а также свойства функций. Например, уравнение вида: $4^x + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$ можно решить, введя замену $2^x = t$, после чего оно превращается в квадратное уравнение относительно t . Освоение подобных методов позволяет решать широкий класс задач, в том числе те, которые встречаются в экзаменационных вариантах профильного уровня ЕГЭ.

Исследование свойств показательных и логарифмических функций включает построение графиков и глубокий анализ их поведения. Учащимся предстоит понять, на каких промежутках функции возрастают, на каких промежутках убывают, найти точки экстремума, проследить, как функции ведут себя на разных отрезках. Производная здесь становится незаменимым инструментом – именно она помогает выявить ключевые особенности, необходимые для решения неравенств и анализа сложных выражений [31; 32].

Графический метод при этом сохраняет важное значение. Он дает наглядное представление о количестве решений, помогает заметить точки пересечения кривых и сделать первые выводы о расположении корней. Это превращает абстрактные уравнения в конкретные визуальные образы, что значительно облегчает разбор систем показательных и логарифмических уравнений [36]. Например, уравнение:

$$\log_2(x + 1) = 3 - x$$

Можно решить, построив графики функций $y = \log_2(x + 1)$ и $y = 3 - x$ определив координаты их точки пересечения. Такой метод особенно полезен в задачах с параметрами, когда необходимо исследовать количество решений в зависимости от значения параметра.

На углубленном уровне особое внимание уделяется решению задач, где переплетаются разные методы — это могут быть уравнения и неравенства, в которых соседствуют логарифмы, показатели степени и тригонометрические функции. Такие задания встречаются в экзаменационных вариантах и требуют от учащихся не только прочных знаний, но и гибкости мышления, умения видеть скрытые связи между разными разделами математики.

Параметрические уравнения и неравенства выделяются среди наиболее сложных тем профильного экзамена [33]. Здесь важно не просто найти корни, а понять, как именно меняется их число и расположение при варьировании параметра. Это предполагает развитие аналитических навыков и владение

графическими методами, чтобы выстраивать чёткие и убедительные аргументы по каждому случаю. Например, уравнение:

$$\log_a(x^2 - 4x + 3) = 2$$

При параметре a требует исследования зависимости числа решений от значения a и анализа допустимых значений параметра.

В данном случае изучение показательных и логарифмических уравнений и неравенств на углубленном уровне обеспечивает учащихся не только инструментами для решения сложных задач, но и формирует у них аналитическое мышление, умение применять различные методы и стратегии решения [24; 25]. Эти навыки являются важнейшей составляющей успешной подготовки к профильному ЕГЭ по математике и дальнейшего изучения математики в вузе.

Таким образом, показательные и логарифмические уравнения и неравенства пронизывают множество областей науки и техники, становясь фундаментом для глубокого понимания и успешного освоения технических, экономических и инженерных дисциплин в вузе. Изучение этих разделов — не просто этап подготовки к ЕГЭ, а формирование чёткого аналитического мышления и умения выстраивать логические рассуждения, которые пригодятся в профессиональной деятельности. Владение методами решения таких уравнений открывает доступ к решению сложных, порой нестандартных задач, лежащих в основе современных научных и инженерных практик.

1.3. Методы решения различных типов показательных и логарифмических уравнений и неравенств

Изучение показательных и логарифмических уравнений и неравенств занимает в школьном курсе алгебры и математического анализа центральное место, поскольку эти темы пронизывают широкий спектр научных и технических дисциплин — от физики и химии до экономики и информатики [26; 27; 28].

Работа с показательными – логарифмическими выражениями предъявляет к учащимся высокие требования: структура таких уравнений часто варьируется от простых преобразований до многоступенчатых задач, где задействуются свойства степенных и логарифмических функций, подстановки, логарифмирование и графический анализ. Иногда для раскрытия глубины задачи необходимы методы математического анализа, включая дифференцирование, что расширяет возможности исследования функций и их поведения [30; 42].

На практике такие задачи регулярно встречаются в экзаменационных испытаниях – ОГЭ, ЕГЭ и даже на математических олимпиадах. Навык уверенного решения позволяет ученикам не только успешно преодолевать стресс при сдаче экзамена, но и формирует базу для дальнейших академических и профессиональных достижений. Рассмотрим их более подробно.

Приведение к общему основанию – это один из наиболее распространенных методов решения показательных уравнений [29]. Он основан на использовании свойства степенных функций: если $a^x = a^y$, то $x=y$, при условии, что $a>0$, $a\neq 1$, $a > 0$.

Метод приведения к общему основанию опирается на следующем свойстве степеней: если две степени с одинаковым положительным основанием, отличным от единицы, равны, то равны и их показатели. Этот принцип лежит в основе алгоритма решения, который можно разбить на несколько логичных шагов.

Первый и самый важный – преобразование обеих частей уравнения так, чтобы они представлялись в виде степеней с одним и тем же основанием. На этом этапе проводится тщательный разбор числовых и алгебраических выражений, которые сводятся к степеням одного базового числа. Обычно это требует разложения чисел на простые множители и применения фундаментальных свойств степеней.

Только после того, как обе части уравнения приведены к одному основанию, становится возможным перейти к следующему этапу – равенству показателей, что значительно упрощает решение. Именно здесь проявляется вся сила метода: сложное, на первый взгляд, уравнение сводится к простой, но глубокой закономерности степенных функций [41].

После того как уравнение записано в виде:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

где, a – общее основание;

$f(x)$ и $g(x)$ – функции от переменной x , можно воспользоваться основным свойством степеней: если $a^m = a^n$, то $m = n$ при условии, что $a > 0$ и $a \neq 1$. Этот шаг позволяет перейти от показательного уравнения к алгебраическому уравнению.

Заключительный этап сводится к решению алгебраического уравнения, выведенного на предыдущем шаге. Чаще всего это линейное или многочленное уравнение по переменной, для которого используются привычные приемы – перенос членов, раскрытие скобок, группировка, факторизация и прочие стандартные методы. Найденные корни служат решением исходного показательного уравнения.

Рассмотрим задание из ЕГЭ 2024 г.

Найдите корень уравнения: $0,25^{2x-1} = 8^{x+3}$.

Решение.

1) Приведём обе части уравнения к основанию 2.

Получим, $2^{-2(2x-1)} = 2^{3(x+3)}$.

2) Воспользуемся основным свойством степеней: если $a^m = a^n$,

то $m = n$ при условии, что $a > 0$ и $a \neq 1$.

Получим, $-2(2x-1) = 3(x+3)$.

3) Решив полученное уравнение с помощью простейших приёмов, получаем, что корнем уравнения является $x = -1$.

Метод приведения к общему основанию выстроен в чёткую и логичную последовательность, которая превращает сложное показательное

уравнение в более простую форму, доступную для классического алгебраического анализа. Этот подход давно закрепился в школьной практике как базовый инструмент для освоения показательных функций и понимания их поведения. Более того, он находит применение и при решении логарифмических уравнений, где посредством формул перехода удаётся свести логарифмы к одному основанию, что значительно облегчает дальнейшие преобразования [35].

Метод логарифмирования служит универсальным ключом к решению показательных уравнений, особенно когда привести обе части к одному основанию невозможно или слишком сложно [41]. Его суть — применение логарифма к обеим сторонам уравнения, что открывает доступ к мощным свойствам логарифмической функции и переводит задачу в плоскость линейных или алгебраических уравнений.

Сначала берут логарифм от обеих частей исходного уравнения, строго контролируя, чтобы аргументы оставались положительными — ведь логарифм определён только на этой области. Чаще всего используют натуральный ($\ln$) или десятичный ($\lg$) логарифм, выбирая в зависимости от удобства вычислений и контекста задачи. Логарифм сохраняет равенство, так как эта функция строго возрастает на положительной области.

Дальше на основе базовых свойств логарифмов — преобразования произведений в суммы, степеней в множители — сложные показательные выражения превращаются в понятные алгебраические формы, которые уже поддаются традиционному решению.

Рассмотрим задание из ЕГЭ 2024 г.

Найдите корень уравнения: $8^{x-2} = 9$.

Решение.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 8.

$$\log_8 8^{x-2} = \log_8 9,$$

$$x - 2 = \log_8 9,$$

$$x = 2 + \log_8 9.$$

Ответ: $2 + \log_8 9$.

Такой приём значительно расширяет арсенал при работе с показательными уравнениями и демонстрирует глубину взаимосвязей между степенными и логарифмическими функциями.

Ключевые свойства включают:

$\log_a(b^c) = c * \log_a b$ – позволяет вынести показатель степени за знак логарифма.

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ – применяется для преобразования произведения в сумму.

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ – используется для разложения отношения на разность логарифмов [34].

Эти свойства логарифмов помогают упростить выражение, сводя уравнение к форме, в которой переменная оказывается линейно или полиномиально выраженной.

На завершающем этапе уравнение, преобразованное с помощью логарифмов и их свойств, принимает форму, которую можно решить классическими алгебраическими методами [35]. Иногда это линейное уравнение – переменная встречается в первой степени, но порой задача требует работы с более сложными выражениями, где применяются перенос членов, раскрытие скобок, факторизация и другие проверенные приёмы. Найденные корни нельзя воспринимать автоматически – важно сверить их с областью определения исходного уравнения, ведь логарифмы требуют строго положительных аргументов. Эта проверка предотвращает появление ложных решений и сохраняет корректность всего решения.

Итак, метод демонстрирует, как использование основных свойств логарифмов позволяет преобразовывать сложные логарифмические уравнения в более простые алгебраические, которые затем решаются стандартными методами.

Метод введения новой переменной приводит сложное показательное уравнение к более простому виду через введение новой переменной. Это позволяет превратить исходное уравнение в алгебраическое, часто — квадратное, которое решается привычными методами. После получения корней для новой переменной следует обратная подстановка, чтобы найти значения исходной переменной [37; 38].

Алгоритм метода:

Введение новой переменной. Выбирается подстановка, которая упрощает структуру уравнения. Обычно, если в уравнении встречается a^x и a^{2x} . (или более сложные комбинации показательных выражений), вводят замену $t = a^x$. При этом важно отметить, что $a^{2x} = (a^x)^2 = t^2$, что существенно упрощает уравнение.

Преобразование исходного уравнения. После введения новой переменной переписывается уравнение в виде, где все выражения, содержащие неизвестное, заменены на соответствующие степени новой переменной t . Таким образом, сложное показательное уравнение преобразуется в алгебраическое, часто квадратное.

Решение полученного алгебраического уравнения. Полученное уравнение решается стандартными методами алгебры (например, разложением на множители, использованием квадратного корня или формулой корней квадратного уравнения).

Обратная подстановка и нахождение решений исходного уравнения. После того как найдены значения новой переменной t , выполняется обратная подстановка $t = a^x$ для нахождения x . Обычно это делается с использованием логарифмов или посредством распознавания степенной формы уравнения [40].

Рассмотрим задание из ЕГЭ 2024 г. Найдите корень уравнения:

$$3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2.$$

Решение.

Перепишем уравнение иначе: $\frac{3 \cdot (5^x)^2}{5} - 2 \cdot \frac{5^x}{5} = 0,2$.

Обозначим $5^x = t > 0$, тогда $\frac{3}{5} \cdot t^2 - \frac{2}{5} \cdot t = \frac{1}{5}$, т.е. $3t^2 - 2t - 1 = 0$, отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.

Итак, $5^x = 1$, $5^x = 5^0$, $x = 0$.

Ответ: 0.

Метод введения новой переменной зарекомендовал себя как один из самых элегантных при решении уравнений с показательной составляющей. По сути, он сводит сложное показательное уравнение к одному алгебраическому уравнению, часто квадратному, что резко упрощает дальнейшие вычисления и открывает доступ к стандартному арсеналу методов [52]. В школьной практике этот приём давно стал незаменимым — он не просто облегчает задачу, а помогает ученикам перейти от абстрактного мира показательных функций к более привычным и понятным алгебраическим конструкциям.

Графический метод, в свою очередь, предлагает интуитивно понятный и наглядный способ разобраться с уравнением. Построение графиков функций, участвующих в уравнении, позволяет сразу увидеть количество пересечений — а значит, и корни.

Рассмотрим задание из ЕГЭ 2024 г.

Решите графически уравнение: $2^x = 4 - 2x$.

Решение уравнения начинается с рассмотрения и построения двух функций: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4 - 2x$.

Графиком функции $f(x) = 2^x$ является кривая, которая располагается в верхней полуплоскости, графиком функции $g(x) = 4 - 2x$ является прямая. В одной системе координат строятся два графика и находятся их точки пересечения, как показано на рисунке 1.

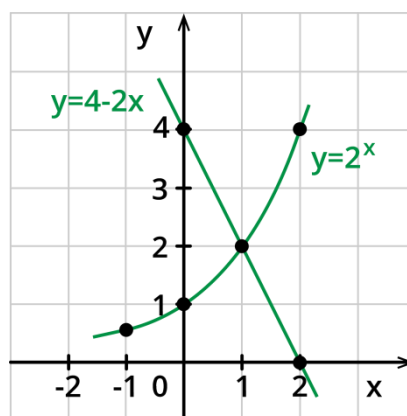


Рис. 1 – Графическое решение

Из графика видно, что у кривой и прямой существуют две точки пересечения. В соответствии с графиком находятся абсциссы этих точек $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня.

Основной недостаток графического метода решения показательных уравнений: заключается в том, что некоторые корни могут быть найдены только с определенной погрешностью, то есть приближенно.

Такой визуальный анализ особенно ценен, когда речь идёт о приближённых решениях или необходимости быстро оценить поведение функций на заданных интервалах. Практика показывает, что именно графический подход часто становится отправной точкой для дальнейшего глубокого исследования.

Инструменты математического анализа, в частности дифференцирование, выводят исследование на новый уровень, позволяя изучать монотонность, выявлять экстремумы и критические точки. Эти сведения оказываются ключевыми при работе с логарифмическими неравенствами сложного вида — они дают понимание, где функция возрастает или убывает, и тем самым существенно сужают поле поиска решений. В истории математического образования данный подход прочно вошёл в практику ещё в начале XXI века и продолжает играть важную роль в подготовке старшеклассников к профильным экзаменам.

Нельзя рассматривать эти методы как конкурирующие — скорее, они дополняют друг друга, позволяя адаптировать решение к конкретной задаче. Освоение показательных и логарифмических функций выходит за рамки простого запоминания формул. Гораздо важнее научиться владеть этими инструментами в комплексе, применяя их в разных ситуациях и развивая при этом математическое мышление. Именно такая практика превращает абстрактные знания в живой и продуктивный навык.

Таким образом, разнообразие методов решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств требует гибкости мышления и умения применять подходящий метод в зависимости от структуры выражения. Овладение этими методами позволяет успешно решать задания различного уровня сложности, включая профильный уровень ЕГЭ и олимпиадные задачи.

Глава 2. Методические аспекты изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к единому государственному экзамену

2.1. Целевой и содержательный компоненты методики

В данной главе изложена разработанная методика, призванная не просто облегчить, а существенно повысить эффективность освоения темы «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» в рамках подготовки к Единому государственному экзамену. Она объединяет в себе целевые установки, содержательные компоненты, технологические решения и методические рекомендации для педагогов, а также опирается на результаты апробации, проведённой в условиях старшей школы.

Методика направлена на формирование у учащихся не просто разрозненных знаний, а целостного и глубокого понимания основных понятий, свойств и алгоритмов решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Особое внимание уделено развитию аналитического мышления — способности к логическому осмыслению и анализу, без которой успешное выполнение профильных заданий ЕГЭ остаётся затруднительным. В процессе изучения данной темы методика предусматривает:

- Формирование теоретических знаний;
- Овладение методами решения уравнений и неравенств;
- Интеграция теории и практики;
- Развитие критического мышления и самостоятельной работы.

Учащиеся должны освоить базовые понятия показательной и логарифмической функций, разобраться в их свойствах, научиться анализировать графики и понимать взаимосвязь между показательной и логарифмической зависимостями. Теоретическая база строится на изучении определения функций, области определения, области значений, монотонности, экстремальных точек и асимптот.

Методика охватывает широкий спектр стратегий решения — от классических приёмов приведения к общему основанию и логарифмирования до более сложных техник, таких как введение новой переменной, использование графического анализа и применение производных для изучения монотонности функций. Особое внимание уделяется именно практическому освоению этих методов на примере типичных задач ЕГЭ, что позволяет сделать процесс обучения максимально приближённым к реальным экзаменационным ситуациям.

Программа не ограничивается формальным усвоением теории: она ставит целью развитие умения переносить полученные знания на анализ и решение прикладных задач, моделирующих реальные процессы — будь то задачи, связанные с динамикой роста населения, радиоактивным распадом или расчётом сложных процентов. Такой акцент не только повышает эффективность подготовки к экзамену, но и закладывает фундамент практических навыков, которые окажутся востребованными в дальнейшей профессиональной деятельности.

Методика ориентирована на развитие самостоятельного аналитического подхода к решению нестандартных задач. Ученикам предлагаются задания, требующие комбинированного применения нескольких методов, что способствует углубленному пониманию материала и повышению уровня математической подготовки.

Ниже представлена таблица с 15 тематическими блоками, отражающая содержательную структуру программы методической работы по изучению показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к ЕГЭ (Таб.1).

Таблица 1 – Содержательная структура программы методической работы по изучению показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к ЕГЭ

№	Тематический блок	Основное содержание	Количество часов
1	Введение в тему и мотивация	Обзор актуальности темы, цели изучения, связь с реальными процессами и требованиями ЕГЭ.	2

2	Понятие и свойства показательной функции	Определение показательной функции, область определения, область значений, монотонность, асимптоты.	2
3	Построение графиков показательных функций	Методы построения графиков, анализ влияния параметров на форму графика, интерпретация изменений.	2
4	Методы решения показательных уравнений: приведение к общему основанию	Принцип приведения чисел к общему основанию, анализ экспоненциальных выражений, применение свойства степеней для упрощения уравнения.	2
5	Методы решения показательных уравнений: логарифмирование	Применение логарифмов для преобразования показательных уравнений, использование свойств логарифмов для упрощения выражений.	2
6	Методы решения показательных уравнений: введение новой переменной	Применение подстановки $t = ax$, $t = a^x$ для сведения уравнения к квадратному или другому алгебраическому виду, анализ и обратная подстановка.	2
7	Графический метод решения показательных уравнений и неравенств	Построение графиков функций, анализ точек пересечения, визуальное определение количества решений, метод интервалов для неравенств.	2
8	Понятие и свойства логарифмической функции	Определение логарифмической функции, взаимосвязь с показательной функцией, области определения, свойства монотонности, графики.	2
9	Построение графиков логарифмических функций	Техники построения графиков логарифмических функций, анализ поведения при изменении основания, интерпретация асимптот.	2
10	Методы решения логарифмических уравнений: использование свойств логарифмов	Применение свойств произведения, частного, степени и обратного свойства для преобразования логарифмических уравнений к алгебраическому виду.	2
11	Решение сложных логарифмических уравнений и неравенств	Комплексное применение методов преобразования, логарифмирования и графического анализа для решения уравнений повышенной сложности и систем неравенств.	2
12	Практическое применение: моделирование реальных процессов	Применение знаний для решения задач из физики, экономики и биологии (демографический рост, радиоактивный распад, сложные проценты), моделирование ситуаций.	2
13	Подготовка к ЕГЭ: анализ типовых заданий и экзаменационных вариантов	Разбор экзаменационных заданий по теме, анализ критериев оценивания, методика выполнения заданий профильного уровня сложности.	2

14	Использование компьютерных программ и онлайн-платформ	Применение образовательных платформ, программ для построения графиков, интерактивных тестов и онлайн-курсов для самостоятельной подготовки.	2
15	Итоговая проверка знаний: пробный экзамен и разбор ошибок	Проведение комплексного пробного тестирования, анализ результатов, разбор типичных ошибок и корректировка методики на основе обратной связи.	1

Данная программа охватывает полный спектр тем, начиная от базовых понятий и заканчивая подготовкой к экзаменационным вариантам, позволяя систематизировать обучение и обеспечить комплексный подход к подготовке учащихся к ЕГЭ.

Изучение показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к ЕГЭ опиралось на комплексный педагогический подход, где наряду с отработкой навыков решения акцентировалось внимание на глубоком понимании математических закономерностей и адаптации к экзаменационным требованиям. В начале курса преподавание строилось на объяснительно-иллюстративном методе: учащимся последовательно вводились теоретические основы, ключевые понятия и базовые алгоритмы, подкреплённые наглядными примерами, схемами и графиками. Такой визуальный и структурированный подход способствовал не просто механическому запоминанию, а формированию интуитивного понимания материала.

Вторая фаза обучения переходила к проблемному методу, когда школьники переставали быть пассивными слушателями и становились активными исследователями. Вместо готовых решений они вырабатывали собственные гипотезы, анализировали условия задач и искали наиболее рациональные стратегии, что укрепляло логическое мышление и формировало навык самостоятельного анализа. Эта практика не просто расширяла кругозор, но и делала процесс усвоения знаний осознанным и целенаправленным.

Особое значение в работе уделялось графическим методам. Понимание поведения показательных и логарифмических функций невозможно без визуализации, поэтому школьники работали с традиционными рисунками и современными цифровыми инструментами — Desmos и GeoGebra. Эти программы открывали новые возможности для восприятия взаимосвязей и динамики функций, помогали увидеть, как меняется график при различных параметрах, и тем самым углубляли осмысление сложных математических понятий.

Чтобы придать занятиям живой смысл и повысить мотивацию, методика включала задачи из реальных областей науки и жизни. Знакомство с моделями радиоактивного распада, расчетами сложных процентов в экономике, экспоненциальным ростом популяций в биологии — всё это позволяло ученикам увидеть, как абстрактные формулы превращаются в мощный инструмент анализа и прогнозирования, востребованный за пределами школьной аудитории.

Нельзя обойти стороной и роль цифровых технологий, которые всё глубже проникают в образовательный процесс. Платформы вроде Фоксфорд, ЯКласс и Российская электронная школа предоставляли возможность учиться в удобном темпе, закреплять материал через онлайн-тесты и получать мгновенную обратную связь. Совместно с программами для построения графиков и моделирования это создавало уникальную среду, где учащиеся не просто осваивали теорию, но и могли сразу применять её на практике, экспериментируя с уравнениями и анализируя результаты. Такой синтез традиционных и современных методов делает подготовку к ЕГЭ не только эффективной, но и живой, динамичной, близкой к реальным жизненным задачам и вызовам.

Так как уровень подготовки школьников различается, особое внимание уделялось дифференцированному подходу. Для сильных учеников предлагались задания повышенной сложности, требующие творческого подхода и глубокого анализа, а для учащихся, испытывающих трудности,

проводились детализированные разборы решений с акцентом на выявление и устранение пробелов в знаниях.

Работа над ошибками и обратная связь стали краеугольным камнем образовательного процесса. Анализ пробных экзаменов выходил далеко за рамки простой фиксации допущенных промахов — выявлялись типичные ошибки, разрабатывались целенаправленные стратегии их устранения. Благодаря этому учащиеся переставали просто исправлять неверные решения и начинали осознавать причины своих затруднений. Именно такой подход заметно повышал уровень математической грамотности и укреплял знания.

Особое внимание уделялось формированию глубокого понимания математических понятий и их взаимосвязей. Навыки решения задач вырабатывались системно, с опорой на разнообразные методы. Обучение шло в русле требований экзаменационной практики: оно не ограничивалось механическим усвоением формул, а стремилось развить вычислительную культуру, внимание к деталям и логическое мышление. Учащиеся учились видеть структуру и смысл за формулами, что обеспечивало прочную базу для самостоятельного анализа и выбора оптимальных решений.

Таким образом, сочетание традиционных педагогических приемов, проблемных методик, цифровых инструментов и индивидуальной поддержки создало живую и продуктивную образовательную среду. Этот комплексный подход не только улучшил подготовку к экзамену, но и укрепил уверенность учеников в своих силах — более того, он сформировал устойчивую мотивацию и готовность к интеллектуальным вызовам, которые неизбежно сопровождают изучение математики.

2.2. Технологический компонент методики и методические рекомендации для учителя

Технологический компонент методики направлен на создание динамичного, интерактивного и адаптивного образовательного пространства, которое позволяет учитывать индивидуальные особенности каждого ученика.

Применение современных информационных и коммуникационных технологий способствует не только улучшению усвоения материала, но и развитию самостоятельного мышления, что особенно важно в подготовке к экзаменам, таким как ЕГЭ.

В современном образовании цифровые технологии стали неотъемлемой частью учебного процесса, и подготовка к ЕГЭ — не исключение. Здесь уже недостаточно просто знать теорию — важно быстро ориентироваться в заданиях разной сложности и принимать правильные решения в ограниченное время. Разработанная в рамках этого исследования методика изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств учитывает именно эту необходимость. Внедрение информационно-коммуникационных технологий делает обучение более живым, интерактивным, а главное — гибким, подстраивающимся под индивидуальные особенности каждого ученика.

Мультимедийные и интерактивные средства оказывают заметное влияние на мотивацию и вовлечённость школьников. Традиционные способы, где урок ограничивался доской и мелом, постепенно уходят в прошлое. Им на смену приходят презентации в PowerPoint, Canva, Prezi, которые не просто структурируют материал, но и превращают сложные алгоритмы решения в понятные и запоминающиеся образы. Такие визуальные опоры позволяют ученикам легче схватывать теоретические тонкости показательных и логарифмических уравнений, помогая глубже понять суть, а не просто заучивать формулы.

Помимо статичных презентаций, огромную пользу приносят анимационные схемы, созданные с помощью GeoGebra, Desmos и Wolfram Alpha. Они позволяют в реальном времени наблюдать за изменением графиков функций, анализировать их поведение при различных значениях параметров, а также проводить эксперименты с математическими моделями. Такой подход не только облегчает понимание материала, но и делает процесс обучения более увлекательным.

Не менее значимую роль в подготовке к ЕГЭ играют специализированные онлайн-ресурсы, такие как «Решу ЕГЭ», ФИПИ, Яндекс.Учебник. Эти платформы предоставляют доступ к базе заданий, соответствующих требованиям экзамена, и позволяют учащимся проверять уровень своей подготовки. Одним из главных преимуществ таких ресурсов является возможность мгновенной обратной связи: после решения теста ученик сразу видит правильные и неправильные ответы, получает пояснения и может проанализировать свои ошибки.

Онлайн-платформы сегодня выступают не просто средством организации дистанционного обучения, а становятся эффективным инструментом, обеспечивающим динамичное и адаптивное построение образовательного процесса. Особенно это важно в условиях нестабильности, когда традиционные формы взаимодействия затруднены. Роль учителя в таких условиях трансформируется — он уже не просто задаёт задания, а выступает наставником, который оперативно анализирует результаты, корректирует учебные маршруты и поддерживает мотивацию каждого ученика. Благодаря цифровым технологиям обучение превращается в диалог, учитывающий индивидуальные потребности учащихся.

В основе методики лежит дифференцированный подход, реализованный через разделение заданий на уровни сложности: базовый, повышенный и высокий. Это не механическое распределение, а осознанная стратегия, позволяющая ученикам развиваться в собственном темпе, избегая как излишней лёгкости, так и чрезмерной сложности. Такой баланс помогает сохранить интерес к предмету и минимизирует риски потери мотивации.

Цифровые технологии выступают в роли активных помощников, обеспечивая разработку персонализированных учебных траекторий. Возможность в режиме реального времени анализировать достижения позволяет своевременно подбирать упражнения, которые максимально соответствуют уровню подготовки каждого ученика.

Одним из ключевых элементов методики является анализ ошибок. Современные цифровые инструменты позволяют автоматизированно отслеживать типичные затруднения учеников и предлагать им дополнительные разъяснения. Например, если ученик несколько раз неправильно решает логарифмическое уравнение, система может предложить ему видеолекцию или интерактивное объяснение, которое поможет устранить пробелы в знаниях.

Преподавание математики в старших классах давно вышло за рамки простой передачи знаний — это сложный и многогранный процесс, требующий от педагога гибкости, умения подстраиваться под разные уровни подготовки и использовать разнообразные методические приемы. Особенно ощутима эта необходимость при подготовке к ЕГЭ, где в одном классе сосуществуют ученики с радикально различающимися способностями, методами усвоения материала и мотивационными ресурсами.

В одной аудитории соседствуют ребята, которые без труда решают задачи с параметрами, и те, для кого базовые логарифмы становятся серьезным барьером. Скрывать или игнорировать эту пропасть нельзя — последствия для учебного процесса ощутимы и двунаправленны: у слабых учеников падает уверенность в собственных силах, что подтачивает мотивацию, в то время как более подготовленные теряют интерес к предмету из-за отсутствия вызова и развития. Именно поэтому дифференцированный подход в обучении не просто желателен, а становится единственным способом обеспечить каждому учащемуся возможность работать на своем уровне, постепенно повышая планку и не теряя связи с материалом.

Разделение учеников на группы по уровню знаний позволяет каждому двигаться в комфортном темпе. Тем, кому нужна дополнительная практика, можно предложить базовые алгоритмы, в то время как более подготовленные ученики смогут разбирать сложные задачи, требующие логического анализа.

Разноуровневые задания помогают учителю учитывать индивидуальные особенности учеников. Одна и та же тема может быть

подана через несколько вариантов: простые упражнения для закрепления теории и задачи с нестандартными условиями – для развития глубинного понимания.

Важно также давать учащимся свободу выбора метода решения. Одни ученики быстрее осваивают материал через логарифмирование, другие – через свойства степенных выражений. Разрешая использовать разные стратегии, учитель не только упрощает понимание, но и развивает гибкость математического мышления.

Таким образом, дифференцированный подход позволяет каждому ученику чувствовать себя уверенно, получать посильные задачи и постепенно продвигаться к более сложному уровню, что не только способствует лучшему усвоению материала, но и формирует у учащихся самостоятельность и интерес к изучению математики.

Одной из главных трудностей в изучении математики для школьников является ее абстрактность. Часто можно услышать вопрос: «А где это пригодится в жизни?» Если ученик не видит смысла в изучаемом материале, мотивация снижается, а вместе с ней – и успехи в учебе. Поэтому задача учителя – показать, что логарифмы и показатели степени не просто существуют в учебниках, а активно используются в самых разных сферах. Когда учащиеся видят, что математические формулы объясняют процессы в окружающем мире, их отношение к предмету меняется. Абстрактные уравнения превращаются в мощные инструменты, которые помогают прогнозировать, анализировать и находить решения для реальных задач. Такой подход не только повышает интерес к математике, но и делает обучение более осмысленным и полезным.

Традиционное преподавание математики часто сводится к объяснению теории и механическому решению задач. Однако запомненные алгоритмы быстро забываются, если ученик не понимает их смысла. Современный подход к обучению должен включать не только передачу знаний, но и активное взаимодействие, исследование и обсуждение.

Групповые проекты позволяют учащимся применять математику на практике. Например, можно предложить им проанализировать изменения курса валют, используя показатели роста и логарифмы. Такие задания развивают не только математическое, но и аналитическое мышление, а также навыки презентации, ведь ученики должны не только выполнить расчет, но и представить свои выводы перед классом.

Дискуссии и дебаты в классе оказываются гораздо больше, чем просто способом проверить знания — они превращают изучение математики в живой процесс поиска и сопоставления идей. Представьте ситуацию, когда перед учениками ставится одна и та же задача, но с несколькими различными способами решения. В ходе обсуждений ребята не просто выбирают «лучший» метод, они учатся оценивать эффективность, удобство и универсальность каждого из них. Такой обмен мнениями не только расширяет их представления о математике, но и формирует навыки чёткой аргументации — умения, которые выходят далеко за пределы школьного курса.

Исследовательские задачи открывают перед школьниками простор для самостоятельного открытия закономерностей. Например, когда учащимся предлагают неизвестное уравнение и предлагают самостоятельно вывести алгоритм его решения, они перестают быть пассивными слушателями и превращаются в настоящих исследователей. Этот опыт стимулирует развитие логического мышления, пробуждает любознательность и формирует способность работать независимо. Именно в таких моментах математика перестаёт быть просто отвлеченной наукой — она становится живой, увлекательной и глубоко личной для каждого ученика.

Активные формы обучения не только делают занятия интереснее, но и способствуют глубокому пониманию материала. Когда ученики вовлечены в процесс, они не просто запоминают формулы, а начинают осознавать, как и зачем их применять. Математика перестает быть скучной наукой и превращается в инструмент для исследования окружающего мира.

Как понять, что ученик действительно разобрался в теме, а не просто запомнил алгоритм решения? Обычные контрольные работы не всегда дают объективную картину: волнение, стресс или банальная невнимательность могут исказить результаты. Поэтому оценка знаний должна быть комплексной, сочетая разные методы.

Мини–тесты на платформах вроде «Решу ЕГЭ» выполняют роль мгновенного индикатора пробелов в знаниях. В отличие от громоздких экзаменационных процедур, короткие онлайн-задания проходят в более непринуждённой атмосфере — без излишнего напряжения, что даёт возможность ученикам спокойно проверить себя. Автоматизированные системы, мгновенно выдавая результаты и комментарии, значительно ускоряют цикл обучения, превращая процесс в диалог с обратной связью.

Однако тесты — это лишь часть работы. Гораздо важнее внимательный разбор ошибок. Не стоит ограничиваться простой фиксацией неправильных ответов. Нужно копнуть глубже: что именно подвело ученика — пробел в понимании, рассеянность или техническая неточность? В совместном анализе ошибок учитель не просто указывает на слабые места, а помогает выстроить индивидуальную стратегию исправления, превращая каждый промах в ступеньку к более зрелому и осознанному владению материалом.

Индивидуальные консультации особенно важны для тех, кто стесняется задавать вопросы в классе. Иногда ученики не просят объяснить сложный момент, опасаясь выглядеть глупо перед одноклассниками. Возможность задать вопрос лично, без лишних свидетелей, создает комфортные условия для обучения и повышает уверенность ученика в своих силах.

Преподавание математики, особенно в контексте подготовки к ЕГЭ, требует комплексного подхода. Современные технологии, практическое применение, активные формы обучения и грамотная система контроля позволяют сделать процесс эффективным и интересным. Главное — помнить, что каждый ученик уникален, и цель учителя — не просто передать знания, а научить думать, анализировать и применять математику в реальной жизни.

Внедрение данной методики в образовательный процесс позволило не только повысить уровень усвоения материала, но и развить у учащихся навыки самостоятельного анализа и критического мышления. Использование цифровых технологий сделало процесс обучения более интерактивным и увлекательным, что способствовало увеличению мотивации школьников.

Внедрение современных онлайн-инструментов открыло возможности для создания гибкой системы подготовки к экзамену, где каждый ученик мог двигаться в собственном ритме, получая при этом своевременную и адресную поддержку. Этот подход позволил не только заметно улучшить показатели на пробных тестах, но и укрепить уверенность учащихся в своих силах, особенно при работе со сложными математическими задачами.

В эпоху бурного технологического прогресса и цифровизации образовательного процесса именно такие адаптивные модели обучения демонстрируют наибольшую результативность, отвечая вызовам времени и разнообразию учебных потребностей.

2.3. Результаты апробации методики в старшей школе

В ходе работы нами был проведен эксперимент с целью проверки эффективности комплексного подхода к подготовке учащихся 11-х классов к решению показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к Единому государственному экзамену (ЕГЭ).

Гипотеза исследования: комплексная подготовка к решению показательных и логарифмических уравнений и неравенств с использованием дифференцированного подхода, активных методов обучения и цифровых инструментов повышает уровень усвоения материала и приводит к лучшим результатам на контрольных испытаниях.

В исследовании приняли участие два 11-х класса (контрольная и экспериментальная группы) по 20 человек в каждой.

Эксперимент проводился в три этапа:

- Диагностический этап – выявление исходного уровня знаний.
- Обучающий этап – реализация методики.
- Контрольный этап – повторное тестирование и анализ изменений.

На первом этапе было проведено исследование в форме тестирования. Тест состоял из пяти заданий различной сложности, проверяющих умение решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства (Таб.2).

Таблица 2 – Задания для проверки

№	Задание	Баллы за правильный ответ
1	Решить уравнение: $2^x = 16$	5
2	Найти область определения функции: $y = \log_3(5 - x)$	5
3	Решить неравенство: $3^{x+1} > 27$	5
4	Найти значение выражения: $\log_5 125$	5
5	Решить уравнение: $\log_2(x - 1) = 3$	5

Тестирование проводилось с целью выявления уровня знаний учащихся перед внедрением методики. Максимально возможный балл за тест – 25 баллов.

Средний балл по группам представлен на рисунке 1.

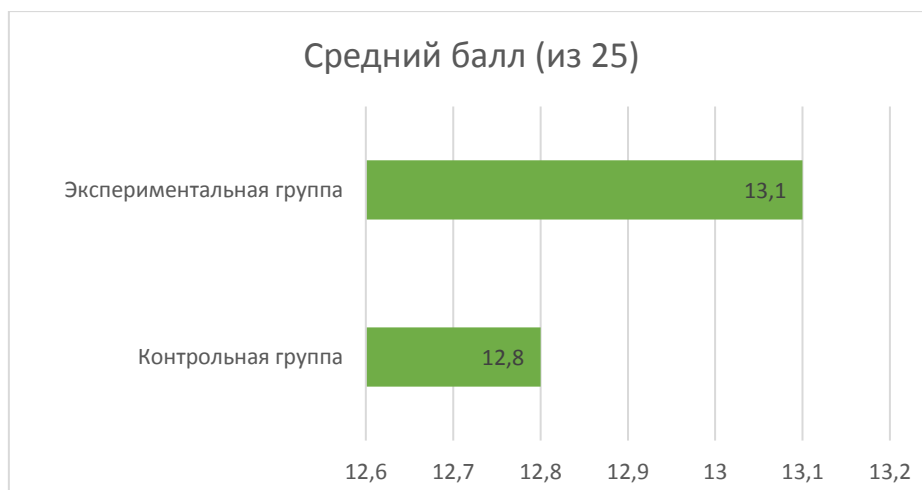


Рисунок 1 – Средний балл в двух группах на начало эксперимента

Средние баллы двух групп оказались близкими, что говорит об изначально схожем уровне подготовки учащихся. Частотное распределение баллов представлено в таблице 3.

Таблица 3 – Частное распределение баллов на начальном этапе

Баллы	Количество учащихся (Контрольная группа)	Количество учащихся (Экспериментальная группа)
0-5	3	2
6-10	6	5
11-15	7	8
16-20	3	4
21-25	1	1

Большинство учеников в обеих группах набрали от 6 до 15 баллов, что указывает на недостаточное владение темой.

По результатам проверки тестов был составлен список наиболее частых ошибок, допущенных учащимися обеих групп (Рис.2).



Рисунок 2 – Список наиболее частых ошибок

Таким образом, на начальном этапе, учащиеся испытывают наибольшие затруднения с переходом к одинаковым основаниям показательных выражений (43% ошибок). Проблемы с определением области допустимых значений логарифмических функций встречаются почти у 38% учеников. Значительная часть учеников неправильно применяет свойства

логарифмов (35% ошибок). Почти треть учеников (29%) не понимает, как применять метод логарифмирования обеих частей уравнения. Ошибки в преобразованиях при решении логарифмических неравенств встречаются у 31% испытуемых.

Полученные данные подтвердили необходимость внедрения методики комплексной подготовки, направленной на устранение выявленных проблем.

В течение трех месяцев с учащимися экспериментальной группы проводилась работа по разработанной методике, включающей:

- ✓ Использование презентаций (PowerPoint, Canva, Prezi) для структурирования материала.
- ✓ Применение анимационных схем (GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha) для визуализации функций.
- ✓ Решение заданий в онлайн-платформах («Решу ЕГЭ», ФИПИ, Яндекс.Учебник).
- ✓ Разноуровневые задания и индивидуальные траектории обучения.
- ✓ Разбор ошибок и автоматизированные разъяснения сложных тем.

Контрольная группа обучалась по традиционной методике.

После завершения обучающего этапа обе группы прошли повторное тестирование с аналогичными заданиями. Максимально возможный балл за тест – 25 баллов.

Результаты по разработанной методике, продемонстрировала значительное улучшение по сравнению с контрольной группой (Рис.3).



Рисунок 3 - Средний балл по группам после внедрения программы

Частотное распределение баллов (повторное тестирование) представлено в таблице 4 и на рисунке 4.

Таблица 4 – Частотное распределение баллов (повторное тестирование)

Баллы	Количество учащихся (Контрольная группа)	Количество учащихся (Экспериментальная группа)
0-5	1	0
6-10	4	1
11-15	7	3
16-20	6	8
21-25	2	8

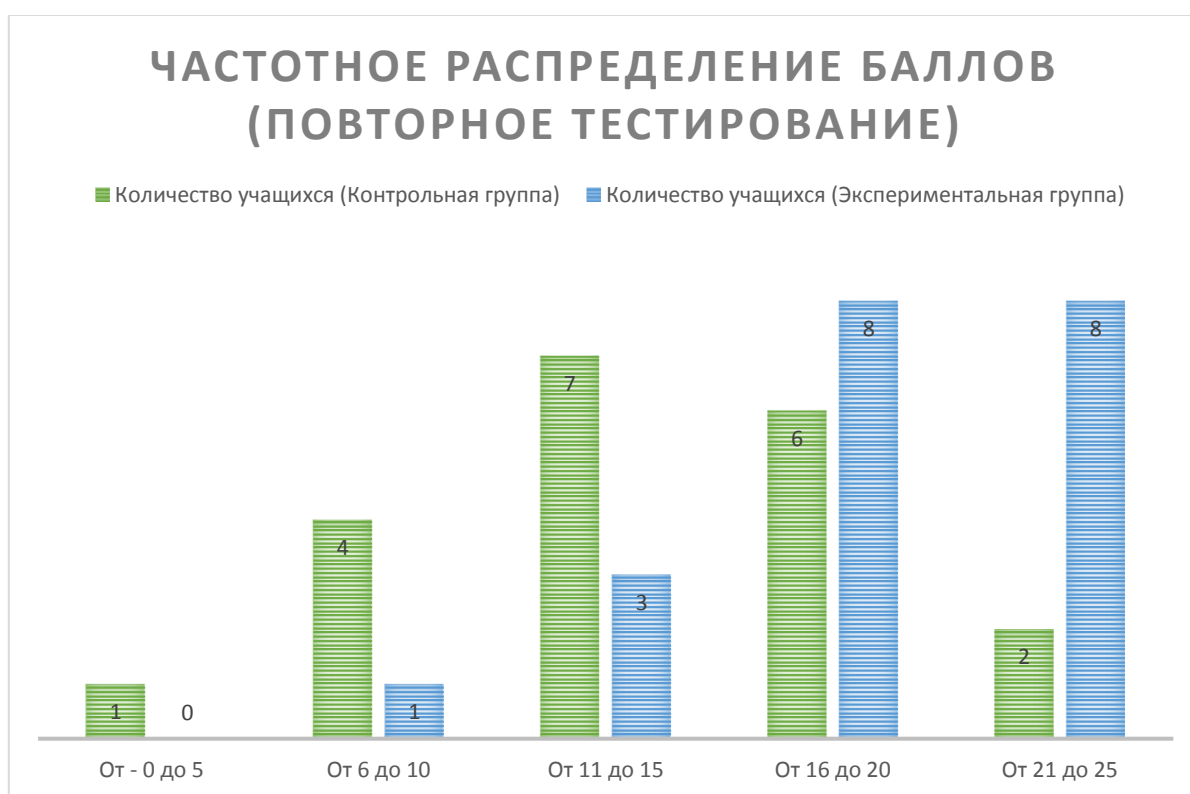


Рисунок 4 – Частотное распределение баллов (повторное тестирование)

В экспериментальной группе 80% учащихся (16 человек) набрали более 16 баллов, тогда как в контрольной группе такой результат показали только 8 человек (40%).

В экспериментальной группе наблюдается значительное снижение количества ошибок по всем ключевым проблемным областям, тогда как в контрольной группе улучшения менее выражены (Таб.5).

Таблица 5 – Сравнительный анализ ошибок после внедрения авторской программы

№	Тип ошибки	Ошибки в контрольной группе (%)	Ошибки в экспериментальной группе (%)
1	Ошибки при переходе к одинаковым основаниям показательных выражений	35%	18%
2	Неверное определение области допустимых значений логарифмических функций	31%	14%
3	Ошибки в использовании свойств логарифмов при решении уравнений	28%	12%
4	Непонимание метода логарифмирования обеих частей уравнения	24%	9%
5	Ошибки в преобразованиях при решении логарифмических неравенств	27%	11%

Экспериментальная группа показала значительный прирост среднего балла (+6,5 против +2,5 в контрольной группе), что подтверждает эффективность методики. Количество учащихся с высокими баллами (16 и выше) увеличилось в экспериментальной группе в 2 раза по сравнению с контрольной группой. Снижение частых ошибок составило в среднем 15-17%, что говорит о лучшем понимании материала после обучения по новой методике.

Результаты эксперимента подтвердили нашу гипотезу: комплексная подготовка с использованием современных методик, цифровых инструментов и дифференцированного подхода способствует более глубокому усвоению материала и повышает успешность решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

После внедрения методики результаты тестирования по показателям и логарифмам заметно улучшились. Ученики стали решать задачи — от базовых до более сложных — быстрее и точнее, что напрямую отразилось на росте баллов в пробных вариантах ЕГЭ.

Использование интерактивных приемов, компьютерных программ и живых практических примеров пробудило у школьников искренний интерес

к математике. Они стали более вовлечёнными в урок, активно задавали вопросы и охотно предлагали собственные решения — явный признак того, что тема перестала быть абстрактной и обрела эмоциональную окраску.

Совмещение разных стратегий решения задач вместе с упором на практическое применение теории помогло не просто усвоить материал, а развить умение самостоятельно разбирать сложные проблемы. В итоге ученики не только лучше понимали математический аппарат, но и научились критически оценивать свои действия, что существенно повышает качество подготовки к экзамену.

Учителя отмечают, что методика позволила структурировать учебный процесс, сделать его более систематичным и целенаправленным. Методические рекомендации для учителя помогли оптимизировать подготовку уроков и использование интерактивных средств, что в целом повысило качество преподавания.

Анализ результатов апробации показал, что разработанная методика является эффективным инструментом для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике, способствует не только улучшению знаний, но и развитию навыков самостоятельного решения сложных задач. Полученные результаты позволяют рекомендовать широкое внедрение данной методики в образовательный процесс старших классов.

Заключение

В ходе выполнения данной выпускной квалификационной работы была разработана и апробирована методика изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств в контексте подготовки к Единому государственному экзамену. Исследование подтвердило гипотезу о том, что комплексная подготовка учащихся по данной теме позволяет значительно повысить их успеваемость и снизить количество типичных ошибок.

Первая глава сосредоточена на теоретических основах изучения показательных и логарифмических уравнений и неравенств. В ней проведён детальный анализ места этой темы в школьной программе, выделены ключевые результаты обучения и рассмотрены основные методы решения разнообразных типов уравнений и неравенств. Из этого анализа ясно следует, что успешное овладение материалом невозможно свести к простому запоминанию формул: требуется глубокое понимание математических закономерностей, умение уверенно преобразовывать выражения и выстраивать логические цепочки рассуждений.

Вторая глава предлагает разработанную методику обучения, объединяющую целевой, содержательный и технологический компоненты. В ней сформулированы методические рекомендации для преподавателей, призванные систематизировать процесс освоения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, помочь устранить типичные ошибки, а главное — выстроить прочный фундамент знаний и навыков, который позволит школьникам успешно справиться с экзаменационными заданиями.

Апробация разработанной методики проводилась на базе двух одиннадцатых классов, каждый из которых включал по двадцать учеников: одна группа выступала в роли контрольной, другая — экспериментальной. На первоначальном этапе тестирование выявило сравнительно близкие результаты: средний балл контрольной группы составил 12,8, а экспериментальной — 13,1. Анализ ошибок показал устойчивые трудности,

характерные для освоения темы: проблемы с приведением показательных выражений к одинаковым основаниям, ошибки в определении области допустимых значений логарифмических функций, неправильное применение свойств логарифмов, непонимание логарифмирования обеих частей уравнения и ошибки в преобразованиях логарифмических неравенств.

В течение трёх месяцев экспериментальная группа работала по предложенной методике, которая включала целенаправленное устранение выявленных пробелов и развитие критического мышления. Итоговое тестирование показало существенный рост показателей: средний балл контрольной группы вырос до 15,3 (+2,5 балла), тогда как у экспериментальной — до 19,6 (+6,5 балла). Такие результаты свидетельствуют не просто о прогрессе, но о качественном скачке в уровне подготовки.

Из этого эксперимента вытекают несколько важных наблюдений. Во-первых, прирост среднего балла в экспериментальной группе значительно превысил аналогичный показатель в контрольной, что говорит о высокой эффективности предложенной методики. Во-вторых, число учащихся, совершающих типичные ошибки, снизилось примерно на 15–17%, особенно заметны успехи в применении свойств логарифмов и правильном определении области допустимых значений. Кроме того, внедрение элементов исследовательской и проектной деятельности оказало положительное влияние на мотивацию учеников, превратив процесс обучения в более осмысленное и увлекательное занятие. Наконец, приобретённые навыки решения задач повышенной сложности позволили участникам экспериментальной группы значительно лучше подготовиться к сложным заданиям ЕГЭ, что подтверждает практическую значимость методики.

Таким образом, поставленная в начале исследования гипотеза о том, что комплексная подготовка к решению показательных и логарифмических

уравнений и неравенств в контексте подготовки к ЕГЭ приносит лучшие результаты, была подтверждена экспериментально.

Результаты работы могут быть использованы учителями математики для повышения эффективности подготовки учащихся к Единому государственному экзамену, а также для разработки методических пособий и учебных материалов по данной теме. В перспективе возможна дальнейшая доработка методики с учётом индивидуальных образовательных траекторий учащихся и внедрение цифровых технологий для углублённого изучения темы.

Список использованной литературы

1. Амучиева Т. С. О решении некоторых нестандартных уравнений в школьном курсе математики //Мир науки, культуры, образования. – 2019. – №. 1 (74). – С. 184-187.
2. Ахмадиева А. Н., Курбанова Л. К., Федорова Н. А. Реализация Требований ФГОС В Процессе Преподавания Учебного Предмета «Алгебра» По УМК А.Г. Мордковича //Естественно-научное образование в XXI веке. – 2021. – С. 21-26.
3. Батаева Я. Д. Методика решения показательных уравнений //Проблемы современного педагогического образования. – 2022. – №. 77-2. – С. 47-49.
4. Варжавин А. А. Особенности проведения занятий по теме «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» в профильных классах //Шаг в науку. – 2020. – С. 83-84.
5. Власенко Ю. Н. Методика развития алгоритмического мышления учащихся при изучении линии уравнений и неравенств в старшей школе //Инновационное Развитие Науки И Образования. – 2021. – С. 180-183.
6. Глушков А. И., Агеева А. В., Котова И. А. Методические приёмы решения уравнений с помощью производной и с помощью функции ламберта //Информационные технологии в строительных, социальных и экономических системах. – 2019. – №. 2. – С. 121-125.
7. Глушковская Я. Г. Неравенства разных видов в итоговом повторении при подготовке к ЕГЭ //Проблема процесса саморазвития и самоорганизации в психологии и педагогике. – 2019. – С. 9-13.
8. Давыскиба О. В., Филипенко Н. И. Некоторые методы решения показательных и логарифмических уравнений с параметрами //ББК 22.1 я43+ 22.1 р. я43+ 32.81 я43 А43 Рецензенты. – 2020. – С. 53.
9. Еремеева В. Д., Степанова В. Е. Система подготовки к егэ по математике //Педагогическое призвание. – 2020. – С. 244-247.

10. Ерилова Е. Н. Как восполнить пробелы в математике? //MODERN SCIENCE. – С. 249-253.
11. Жовтан Л. В. Основные противоречия при изучении показательной функции в курсе математики //Математика И Математическое Образование. – 2019. – С. 222-227.
12. Иващенко Е. В., Ткаченко Д. В. К вопросу изучения содержательной линии «Уравнения и неравенства» в старших классах средней школы //Методический поиск: проблемы и решения. – 2021. – №. 1. – С. 4-7.
13. Калачева Н. Ф. Формирование обобщенного приема решения логарифмических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа //Теория и практика современной науки. – 2024. – №. 6 (108). – С. 201-203.
14. Квашко Л. П. Сравнительный анализ содержания математической подготовки абитуриентов России и Китая при поступлении в вуз //Концепт. – 2022. – №. 6. – С. 91-106.
15. Кирсанова Л. В. Методические особенности решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств в едином государственном экзамене по математике профильного уровня //Фундаментальные и прикладные научные исследования. – 2021. – С. 56-64.
16. Клейна Ф., Колягина Ю. М. Задачи с параметрами в курсе математики средней школы //ББК 72+ 74я43 А43. – 2023. – С. 123.
17. Коротаева К. Н. Систематизация методов решения логарифмических неравенств //Проблемы школьного и дошкольного образования. – 2021. – С. 258-262.
18. Куляпина Е. С. Формирование умений у учащихся решать показательные уравнения //Педагог-профессионал в школе будущего. – 2019. – С. 59-64.
19. Кислицын А. С. Задачи с параметрами в курсе математики средней школы //Актуальные проблемы и инновации в науке и образовании: исследования молодых. – 2023. – С. 123-125.

20. Лазарева Д. В. Методика изучения темы «Логарифмические уравнения и неравенства» в курсе математики средней школы : дис. – Сибирский федеральный университет; Лесосибирский педагогический институт— филиал СФУ, 2022.
21. Ларина О. А., Фрундин В. Н. Методические аспекты изучения личностно-ориентированного курса по выбору «уравнения и неравенства повышенной сложности» в условиях подготовки к егэ //Актуальные проблемы теории и практики обучения математике, информатике и физике в современном образовательном пространстве. – 2019. – С. 148-152.
22. Ларина О. А., Фрундин В. Н. Сравнительный анализ уравнений и неравенств повышенной сложности, включаемых в егэ по математике //Актуальные проблемы теории и практики обучения физико-математическим и техническим дисциплинам в современном образовательном пространстве. – 2020. – С. 104-111.
23. Лахикова З. Г., Магомедгаджиева А. М., Пайзулаева Р. К. Методические аспекты изучения показательно-степенных уравнений и неравенств в школьном курсе алгебры и начал анализа 10-11 классов //Инновационные технологии в образовании. – 2019. – №. 2. – С. 165-172.
24. Льянова Х. М. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства в школьном курсе математики //Тезисы Докладов V Студенческой Научной Конференции, Посвященной Памяти Валерия Абдурахмановича Елеева. – 2021. – С. 25-26.
25. Людкевич Д. А. Конструирование заданий на поиск ошибок при решении логарифмических уравнений и неравенств //Теоретические и прикладные аспекты естественнонаучного образования в. – 2023. – С. 69.
26. Макаrenchенко М. Г. и др. Методические особенности обучения учащихся решению логарифмических и показательных уравнений и неравенств

- при подготовке к итоговой аттестации //Научные исследования современных учёных: сборник материалов L-ой международной очно-заочной научно-практической конференции, в 2 т., том 1, 20 мая, 2024–Москва: Издательство НИЦ «Империя», 2024.–193с. – 2024. – С. 9.
27. Мерзляк А.Г. и др. Математика. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень: 10 класс: учебник -3-е изд., стереотип. М.: Вентана-Граф, 2020. 480 с.: ил. (Российский учебник).
 28. Мерзляк А.Г. и др. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Углубленный уровень: 10 класс: самостоятельные и контрольные работы. М.: Вентана-Граф, 2020. 125 с.: ил. (Российский учебник).
 29. Мунтян А. С., Гончарова А. А. Значение и место изучения показательной и логарифмической функций в средней школе //Международный научный журнал инновационная наука. – 2024. – С. 9.
 30. Мурзалиева З. З., Шабаетова А. Ф. Методические особенности обучения решению показательных и логарифмических неравенств в средней школе //Kazakhstan Science Journal. – 2020. – Т. 3. – №. 6. – С. 36-43.
 31. Назарова Г. М., Назарова Е. А., Шашков Р. Л. Нетривиальная математика //Редакционная коллегия. – 2022. – С. 39.
 32. Останов К., Актамова В. У. Некоторые аспекты изучения неравенств и их свойств в средней школе //Проблемы современной науки и образования. – 2024. – №. 1 (188). – С. 26-31.
 33. Осьминина Н. А. Отработка часто встречающихся ошибок в решениях логарифмических уравнений и неравенств //Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы. – С. 133.
 34. Павлова Л. В. Методика преподавания элементарной математики при подготовке учителя математики в вузе //Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – №. 1 (42). – С. 74-89.

35. Пермякова М. Ю., Худорожков Н. С. О некоторых методах решения задач с параметрами //Проблемы управления качеством образования. – 2020. – С. 72-76.
36. Пестрикова А. А., Сухтаева А. М. Обучение учащихся решению логарифмических уравнений и Семенова И. Н. и др. К вопросу о предметном сопровождении развития умений обучающихся самостоятельно искать решение задачи по теме «уравнения» //Современная наука. XXI век: научный, культурный, ИТ контекст. – 2021. – С. 213-224. неравенств с параметрами при подготовке к единому государственному экзамену //Информационно-компьютерные технологии в экономике, образовании и социальной сфере. – 2021. – №. 2. – С. 49-56.
37. Подуфалов Н. Д., Дураков Б. К. О формировании перечня, содержания и требований к уровню знаний выпускников средней школы в области математики //Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе. – 2019. – С. 25-39.
38. Садовников Е. Ю. Реализация внедрения теоретико-множественного подхода в школьный курс алгебры советской школы в период 1970-х годов //Дидактика математики: проблемы и исследования. – 2024. – №. 63. – С. 87-95.
39. Самуйлова А. М. Нестандартные методы решения показательных, логарифмических, иррациональных неравенств в школьном курсе математики //Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе. – 2019. – С. 396-398.
40. Саралапова С. А., Бакашева А. Б. Трансцендетные уравнения и неравенства в заданиях ЕГЭ //Актуальные вопросы физико-математического образования. – 2021. – С. 132-135.
41. Сейтов А. Ж., Абдумавлонова Ф. Х. Применение математического пакета mathcad для проведения урока на тему «дифференциальные

- модели» в 11-классе //Academic research in educational sciences. – 2021. – Т. 2. – №. 8. – С. 153-160.
42. Семенова М. Д. Изучение систем уравнений и неравенств в школьном курсе математики //StudNet. – 2022. – Т. 5. – №. 5. – С. 4049-4057.
 43. Семенова И. Н. и др. К вопросу о предметном сопровождении развития умений обучающихся самостоятельно искать решение задачи по теме «уравнения» //Современная наука. XXI век: научный, культурный, ИТ контекст. – 2021. – С. 213-224.
 44. Соломахо Т. Б. Элективный курс" Различные методы решения уравнений и неравенств" для учащихся 11 класса //Державинский форум. – 2019. – Т. 3. – №. 10. – С. 111-116.
 45. Таллерова А. В. Анализ и разбор типичных ошибок заданий единого государственного экзамена по теме:" логарифмические уравнения" //Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. – 2019. – №. 3. – С. 80-83.
 46. Титоренко С. А., Шахмаева А. С. О некоторых особенностях изучения логарифмов в школьном курсе математики //Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. – 2020. – №. 10. – С. 174-176.
 47. Токарева Л. И. Установление взаимосвязей теоретических знаний и алгебраических задач на этапе поиска решения //Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2019. – №. 21. – С. 304-314.
 48. Томилова А. Е. О типичных ошибках участников профильного ЕГЭ по математике //Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе. – 2020. – С. 188-192.
 49. Туманов В. И., Бутко Е. Ю. Уравнения с параметрами в школьном курсе математики и на вступительных испытаниях //XXI Всероссийская студенческая научно-практическая конференция

Нижевартовского государственного университета. – 2019. – С. 311-313.

50. Учелькина Е. А. Анализ учебной литературы по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» //Педагогический опыт: от теории к практике. – 2022. – С. 110-112.
51. Хомушку А. Б. Педагогическое проектирование элективного курса «методы решения иррациональных уравнений и неравенств» //Энигма. – 2021. – №. 29-2. – С. 54-61.
52. Шабашова О. В. Основы формирования системных знаний обучаемых в процессе преподавания математики //Современная психология и педагогика: проблемы и решения. – 2021. – С. 44-48.
53. Шахмаева А. С. Изучение темы «логарифмические уравнения и неравенства» на профильном уровне //Студенческий форум. – 2020. – С. 11.
54. Шилова О. В., Осипова Л. А. Электронный образовательный ресурс в изучении показательной и логарифмической функций //Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. – 2019. – №. 4. – С. 94-96.