

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра математики и методики обучения математике

Королева Евгения Геннадьевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема: «Изучение темы ”Четырёхугольники” в 8 классе с использованием систем динамической математики»

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой, к.п.н., доцент Шашкина М.Б.

(дата, подпись)

Руководитель: д-р п.н., профессор Майер В.Р.

Дата защиты _____ «20» 06. 2025 _____

Обучающийся: Королева Е.Г..

Оценка _____
(прописью)

Красноярск 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
<i><u>ГЛАВА 1. Методические и цифровые аспекты изучения</u></i> <i><u>четырёхугольников в курсе геометрии 8 класса</u></i>	<i><u>5</u></i>
<u>1.1 Сравнительный анализ представленности основных свойств и признаков специальных типов четырёхугольников в базовых школьных учебниках, краткий обзор традиционных методик обучения этим свойствам и признакам.....</u>	<u>5</u>
<u>1.2 Системы динамической математики Живая математика и Математический конструктор как средства создания динамических чертежей для поддержки курса геометрии в 8 классе.....</u>	<u>13</u>
<i><u>ГЛАВА 2.Применение динамических чертежей при изучении темы «Четырёхугольники» в 8 классе.....</u></i>	<i><u>17</u></i>
<u>2.1 Теоремы и задачи о параллелограммах и трапециях.....</u>	<u>17</u>
<u>2.2 Теоремы и задачи о прямоугольниках, ромбах и квадратах.....</u>	<u>33</u>
<u>2.3 Результаты педагогического эксперимента</u>	<u>48</u>
<u>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</u>	<u>53</u>
<u>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</u>	<u>55</u>
<u>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</u>	<u>56</u>

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования: Всё чаще и чаще на уроках геометрии ученики средней школы сталкиваются с непониманием. Ученики часто не понимают и не знают как решить задачу, предлагаемую преподавателем. Всё начинается с самого начала — с того, что ребята не понимают с чего начать строить рисунок. Конкретно для этой проблемы были изобретены среда Живая математика и Математический конструктор. С помощью данных программ ученикам предоставляется возможностью изучать геометрию самостоятельно, а также самостоятельно выводить свойства геометрических фигур, в частности четырёхугольников.

Объект исследования: процесс обучения математике учащихся 8 класса с помощью систем динамической математики.

Предмет исследования: приёмы и способы применения систем динамической математики в курсе геометрии 8 класса при изучении четырёхугольников.

Цель исследования: разработка приёмов и способов применения авторского комплекта задач по теме «Четырёхугольники» в 8 классе, решаемых с использованием систем динамической математики.

Задачи исследования:

- 1) Изучить особенности традиционной методики обучения теме «Четырёхугольники» и возможность интеграции этой методики с анимационным подходом к обучению геометрии;
- 2) Проанализировать возможность использования динамических чертежей авторского комплекта задач при изучении четырехугольников в курсе геометрии 8 класса;
- 3) Разработать электронную версию методического учебного пособия с динамическими чертежами по теме «Четырёхугольники»;
- 4) Провести апробацию разработанного пособия в условиях учебной

практики;

Методический продукт:

Комплекс уроков геометрии в 8 классе, проводимых с использованием среды Живая математика.

ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ И ЦИФРОВЫЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

1.1. Сравнительный анализ представленности основных свойств и признаков специальных типов четырёхугольников в базовых школьных учебниках, краткий обзор традиционных методик обучения этим свойствам и признакам.

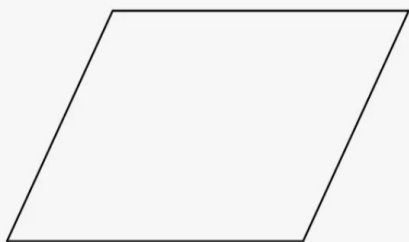
В начале главы разберём основные виды четырёхугольников, их свойства и признаки, а также площади. [Программа 7-9 класс. Геометрия 2024-2025 г.]

Четырёхугольник — это геометрическая фигура, состоящая из четырёх точек, последовательно соединённых отрезками. Точки пересечения смежных сторон четырёхугольника называют его вершинами, стороны — рёбрами. Отрезки, соединяющие противоположащие вершины четырёхугольника называют диагоналями. Сумма всех углов четырёхугольника равна 360 градусов.

Четырёхугольники могут быть выпуклыми и невыпуклыми. Выпуклый четырёхугольник — это четырёхугольник, каждый угол которого выпуклый, то есть имеет градусную меру от 0 до 180 градусов.

Разберём некоторые виды четырёхугольников. Самые популярные это — параллелограмм, ромб, трапеция, прямоугольник и квадрат.

Параллелограмм



Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого все стороны попарно параллельны и равны.

Свойства параллелограмма:

- 1) Противоположащие углы параллелограмма равны.
- 2) Диагонали в точке пересечения делятся пополам и образуют четыре равновеликих

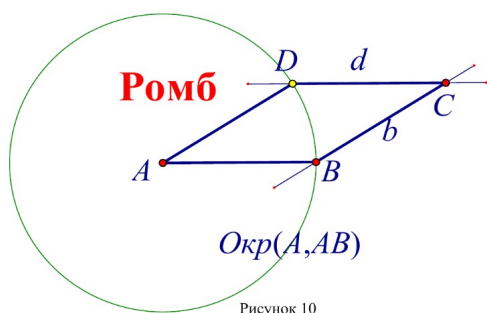
треугольника (их площади равны).

3) Сумма углов, прилежащих к одной прямой, равна 180 градусов.

4) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его смежных сторон.

Формулы площадей параллелограмма:

- 1) Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, опущенную на данную сторону.
- 2) Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.
- 3) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.
- 4) Площадь параллелограмма равна произведению его полупериметра на радиус его вписанной окружности.

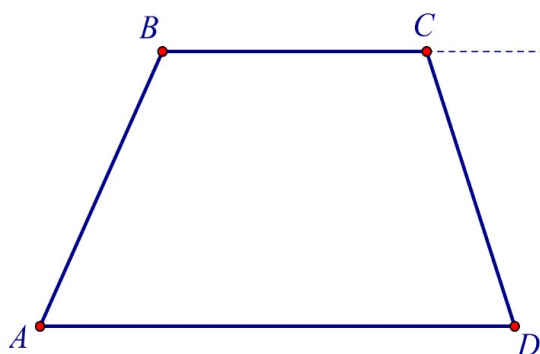


Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Это значит, что ромб обладает всеми теми свойствами, которыми обладает параллелограмм. Также все формулы

площадей параллелограмма мы можем использовать для нахождения площади ромба.

Главное свойство, которое отличает ромб от параллелограмма — это то, что его диагонали перпендикулярны. Это значит что для того, чтобы найти площадь ромба надо перемножить его диагонали и разделить на два.



Трапеция — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две — нет.

Трапеции бывают трёх видов:

прямоугольная, произвольная и равнобедренная.

Прямоугольная трапеция — трапеция, у которой два угла прямые.

Равнобедренная трапеция — трапеция, у которой боковые стороны равны.

Углы при основаниях равнобедренной трапеции тоже равны.

Свойства трапеции:

- 1) Диагонали точкой пересечения делят трапецию на четыре треугольника — два из которых, которые прилежат основаниям, подобны, а два другие — с одинаковыми площадями.
- 2) Сумма двух углов, прилежащих одной стороне, равны 180 градусам.
- 3) Если трапеция вписана в окружность, то эта трапеция равнобедренная.
- 4) В трапеции есть средняя линия — отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. Средняя линия параллельна основаниям. Средняя линия равна полусумме оснований.
- 5) Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус ее равен половине высоты трапеции.

Площадь трапеции:

- 1) Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.
- 2) Площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту.
- 3) Площадь трапеции равна половине произведения её диагоналей на синус угла между ними.
- 4) Площадь трапеции равна произведению трапеции на радиус вписанной в неё окружности.

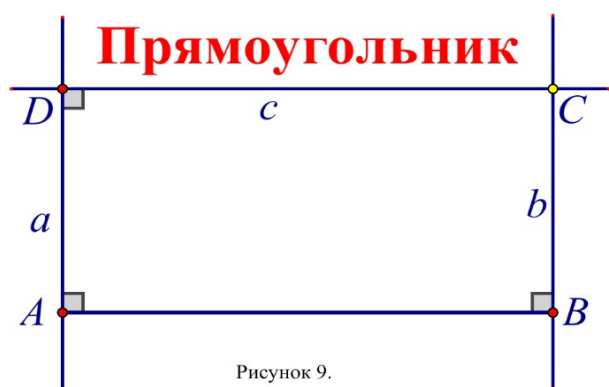


Рисунок 9.

Прямоугольник — четырёхугольник, у которого все углы прямые, а противоположные стороны его параллельны и равны.

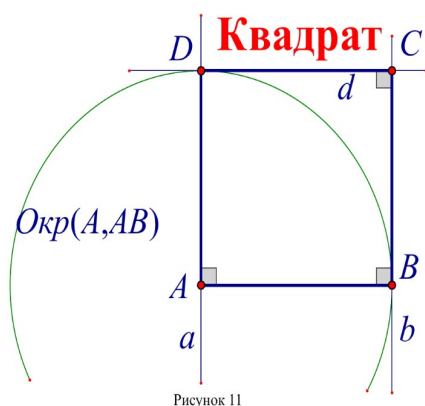
Иными словами можно сказать, что прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойства прямоугольника:

- 1) Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам на четыре одинаковых отрезка.
- 2) Диагонали прямоугольника точкой пересечения делят прямоугольник на четыре равновеликие треугольника и на две пары одинаковых треугольников.

Площадь прямоугольника:

- 1) Чтобы найти площадь прямоугольника нужно перемножить две его смежные стороны.
- 2) Площадь прямоугольника — это половина произведения его диагоналей на синус угла между ними.



Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны.

Все свойства прямоугольника присутствуют в свойствах квадрата. Также все формулы площадей прямоугольника применимы для нахождения площадей квадрата.

Отличительной особенностью квадрата является то, что диагонали его образуют угол в 90 градусов. Это значит, что для того, чтобы найти площадь квадрата необходимо произведение его диагоналей поделить на два. Ещё одна из формул нахождения площади квадрата — это произведение его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

Четырёхугольники и вписанные и описанные окружности.

Не каждый четырёхугольник можно вписать в окружность или описать

около неё.

Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180 градусам. Так получается, что окружность можно описать вокруг любых квадрата или прямоугольника, а также около равнобедренной трапеции.

Четырёхугольник можно описать около окружности тогда и только тогда когда суммы длин его противоположных сторон равны. Получается, что в любой ромб или квадрат можно вписать окружность. [Погорелов А.В. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.], [Кытманов, А.М. Математика. Адаптационный курс [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4866>. — Последнее обновление 27.05.2018.]

Учебные пособия по геометрии авторов Л.С. Атанасяна, И.М. Смирновой и В.А. Гусева являются одними из самых известных и широко используемых в 8 классах. Данные учебники содержат огромную базу геометрических теорем и задач по теме четырёхугольники. Задания в данных учебниках расположены так, чтобы находились они от самых простых к сложным. Задачи затрагивают такие темы как площади четырёхугольников, решение четырёхугольников, нахождение углов и сторон четырёхугольника.

Сравнительный анализ этих учебников позволяет выделить ключевые особенности авторов.

1. Левон Сергеевич Атанасян внёс огромный вклад в математическое образование СССР и России. Еще недавно восемьдесят процентов школ придерживались только учебников Атанасяна, которые написаны лёгким и доступным языком. Последовательность тем в данных учебниках логична — всё идёт друг за другом. Учебник "Геометрия. 7-9 классы. Базовый уровень" под

авторством Атанасяна Л. С. является одним из наиболее популярных и востребованных учебных пособий для школьников, изучающих основы геометрии. Он создан в соответствии с новыми федеральными государственными образовательными стандартами (ФГОС) и адаптирован для базового уровня обучения, что делает его подходящим для большинства учеников. Этот учебник один из немногих, по которому дети могут заниматься сами, без помощи взрослых.

Учебник Атанасяна идеально подходит для тех, кто стремится к глубокому и интенсивному изучению геометрии, ведь этот учебник определяется своими чёткостью, строгостью, последовательностью.

Тема «Четырёхугольники» изучается в 8 классе. На изучение темы отводится отдельная глава. В 1-ом параграфе этой главы рассматриваются многоугольники. Сначала в пункте 39 приводится определение понятия многоугольника; определения понятий его вершин и сторон; даётся определение понятия n -угольника. В учебнике рассматриваются определения понятий соседних вершин многоугольника и его диагоналей. В конце пункта 39 говорится о том, что «любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая – внешней областью многоугольника» (3, с.98) [Атанасян Л. С. Геометрия [Текст]: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян. и др. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.]

В пункте 40 описываются выпуклые многоугольники, приводятся примеры нахождения суммы углов выпуклого n -угольника. Пункт 41 посвящен четырехугольнику, но Атанасян Л.С. не приводит четкого определения понятия четырехугольника, лишь отмечает, что ««каждый четырехугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали»[3, с.99]

Далее приводится утверждение: сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° (3, с 100). 2-ой параграф посвящен трапеции и параллелограмму. В пункте 42 приводится определение понятия

параллелограмма, доказываются его свойства. 41-й пункт посвящен трём признакам параллелограмма. В 44 пункте даётся определения трапеции, равнобедренной трапеции и прямоугольной. Так же в этом учебнике присутствует для изучения теорема Фалеса. [Александров А.Д. Геометрия. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 176 с.]

3-ий параграф посвящен ромбу, прямоугольнику и квадрату. Определения ромба и прямоугольника даются на основе понятия параллелограмма. В пункте 47 рассказывается об осевой и центральных симметриях. [Атанасян Л.С. Изучение геометрии в 7-9 классах. Пособие для учителей / Л.С. Атанасян. и др. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.]

2. Смирнова Ирина Михайловна — автор учебника по геометрии, который определяется своим подходом к развитию у учеников пространственного мышления. В этих учебниках очень много теорем, задач и рисунков к ним по теме — Четырёхугольники. Уровень повышения сложности задач протекает практически незаметно — что не может не радовать учителей и школьников. Теоремы и задачи о четырёхугольниках представлены таким образом, чтобы ребёнок максимально смог их понять, усвоить и запомнить. [Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник/ В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М.: Проспект, 2012. - 400 с.]

Авторы рекомендуют изучать тему «Четырёхугольники» в 8 классе, располагая её в главе «Параллельности». Сначала даётся определение параллельных прямых и секущей. Затем вводятся понятия соответствующих, внутренних односторонних и внутренних накрест лежащих углов. Приводится доказательство признака параллельности двух прямых, а так же рассматриваются три следствия, вытекающие из этой теоремы.

Второй параграф посвящен теме суммы углов многоугольника. Сначала приводится доказательство того, что сумма углов треугольника равна 180° , а затем рассматривается доказательство общего случая для многоугольников.

Следующий параграф посвящен параллелограмму. Дается его определение и три основных свойства, приводится пример решения задачи, иллюстрирующий применение одного из этих свойств.

В пятом параграфе рассматриваются прямоугольник, ромб и квадрат. Понятия ромба и прямоугольника вводятся через понятие параллелограмма. Понятие квадрата определяется через понятие прямоугольника. И.М. Смирнова и В.А. Смирнов отмечают, что квадрат так же является ромбом, у которого все углы прямые, и, как следствие, обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника.

После этого определяется понятие трапеции: «Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны». Далее приводится определение средней линии трапеции и её видов, рассматриваются доказательства теоремы о средней линии трапеции и следствие из нее.

3. Рассмотрим также автора Александров А.Д. Александров А. Д. начинает изучение четырехугольников с его свойств. Учебник оформлен доступно и понятно для учеников. После каждого свойства следует доказательство. [Александров А.Д. Геометрия. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 176 с.] Например, так описывает автор признаки параллелограмма вместе с доказательствами: «**ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК** параллелограмма. Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны, является параллелограммом. Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $AD = BC$ (рис. 113, а). Проведем его диагональ AC (рис. 113, б). Получим два равных треугольника ABC и CDA (они равны, поскольку соответственно равны их стороны). В этих треугольниках равны углы, лежащие против равных сторон. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, а потому стороны AD и BC параллельны (по равенству накрест лежащих углов). Аналогично $\angle 2 = \angle 4$ и $AB \parallel CD$. **ВТОРОЙ ПРИЗНАК** параллелограмма. Четырехугольник, противоположные углы которого попарно равны, является параллелограммом.

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $A = C$ и $B = D$ (рис. 114). Так как $A + B + C + D = 360^\circ$, то $A + B + A + B = 360^\circ$. Поэтому $A + B = 180^\circ$ и $AD \parallel BC$ (по первому признаку параллельности прямых). ТРЕТИЙ ПРИЗНАК параллелограмма. Четырёхугольник, в котором диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, является параллелограммом. Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и выполняются равенства $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 115). Ясно, что $\angle AOB = \angle COD$ и $\angle BOC = \angle DOA$ (по первому признаку равенства треугольников). Поэтому $AB = CD$ и $BC = AD$ и четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (по первому признаку)."

[Александров А.Д. Геометрия: учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М: Просвещение, 2002. – 240 с.]

1.2 Системы динамической математики Живая математика и Математический конструктор как средства создания динамических чертежей для поддержки курса геометрии в 8 классе.

Перед тем, как приступить к практическим занятиям, необходимо ознакомиться с интерфейсом программы Живая математика. Важно начать с основных инструментов, которые понадобятся при любом построении четырехугольника, а именно: стрелка, точка, линейка, циркуль, и текстовый редактор. Для того чтобы использовать среду Живая математика на своих уроках, учитель сам должен освоить элементарные построения четырехугольников. [Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://fgosreestr.ru/registry/primernaya-osnovnayaobrazovatel'naya-programmaosnovnogo-obshhego-obrazovaniya-3/>. -

Последнее обновление 01.06.2018.] Разберем их на примере следующих задач:

1.Создание четырехугольника, у которого противоположные стороны параллельны друг другу.

2. Построение четырехугольника с параллельными противоположными сторонами и равными углами.

3. Построение параллелограмма, все стороны которого равны.

4. Построение прямоугольника, у которого все стороны равны.

Программа Живая математика предлагает автоматизированные инструменты для упрощения некоторых задач: построение параллельных прямых, перпендикуляров к прямой, нахождение середины отрезка. Именно эти функции лежат в основе построения четырехугольников. Построение параллелограмма начинается с создания двух смежных сторон, а затем, с использованием инструмента параллельной прямой, достраиваются остальные стороны. Принцип построения прямоугольника основан на создании прямых углов и параллельных сторон (частично используется подход, применяемый при построении параллелограмма). Построение квадрата включает в себя нахождение середины отрезка, возведение перпендикуляра к нему (диагонали квадрата перпендикулярны), построение окружности с центром в точке пересечения перпендикуляра и отрезка в завершении фигуры. [Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов

(составители: Аджемян Г.А., Дубровский В.Н. и др.). – М.: ИНТ, 2013 – 205с]

Построение параллелограмма: Пошаговая инструкция

- Нарисуйте два отрезка, соединив их под произвольным углом (инструмент линейка)
- Выделите конечную точку одного из отрезков и другой отрезок. Используйте панель «построение» и выберите функцию «параллельная прямая».
- Выделите конечную точку полученной параллельной прямой и отрезок, пересекающий ее. Снова используйте панель «построение» и функцию «параллельная прямая».
- Отметьте точку пересечения двух прямых (инструмент точка).
- Скройте построенные прямые, используя панель «вид».

- Соедините концы исходных отрезков с новой точкой (инструмент «линейка»).

Построение прямоугольника: Пошаговая инструкция

- Начните с построения отрезка.
 - Выберите произвольную точку вне отрезка.
 - Постройте перпендикуляр к отрезку через выбранную точку.
 - Проведите параллельную прямую через эту же точку.
 - Выберите произвольную точку на проведенной прямой.
 - Проведите через нее прямую, параллельную перпендикуляру.
 - Выделите точки пересечения всех построенных прямых.
- Скройте все прямые.
- Соедините последовательно все выделенные точки.
 - В результате получится четырехугольник с параллельными противоположными сторонами.

Построение квадрата: Пошаговая инструкция

- Постройте произвольный отрезок.
- Найдите середину отрезка и используйте ее в качестве центра окружности. Постройте окружность, чтобы концы отрезка лежали на ней.
- Выделите центр окружности и отрезок.
- На вкладке «построение» выберите операцию «построение перпендикуляра»
- Выделите точку на окружности и перпендикуляр.
- Постройте прямую, используя вкладку «построение» и операцию «построение прямой».
- Постройте еще две параллельные прямые и найдите их точку пересечения.
- Соедините последовательно все полученные точки.

Среда Живая математика позволяет не только строить различные фигуры —

что позволяет ученикам легче понимать геометрию, но и создавать анимационные рисунки. Анимационные рисунки хороши тем, что они создают «ожившую математику», что является намного интереснее обычной. Анимация — ожившие чертежи — заинтересуют учеников и тем самым разовьют их интерес к математике. [Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: Монография. – Красноярск: РИО КГПУ, 2001 – 368 с.]

Существует целая серия геометрических задач, при решении которых может оказаться полезным возможность систем динамической математики строить так называемые следы точек. Чтобы активировать эту опцию достаточно подсветить ту точку, след которой нас интересует, затем выбрать команду «Оставлять след», зайдя во вкладку «Вид» горизонтального меню команд (ГМК). После этого, используя компьютерную мышь, начинаем перемещать ту точку, от которой зависит положение исследуемой точки. [Майер, В.Р. /Компьютерная анимация в среде Живая математика на уроках геометрии / В.Р. Майер, Т.В. Апакина, Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2015]

Кроме этого в среде Живая математика есть более эффективное средство, а именно команда «Геометрическое место» (горизонтальное меню команд «Построения»), позволяющее изображать след точки в виде линии. Для ее активации достаточно подсветить точку-моторчик, заставляющую перемещаться подопытную точку, след которой мы исследуем, затем – саму подопытную точку. После этого воспользоваться командой «Геометрическое место». На рабочем поле появится линия, которую в отличие от следа точки можно перемещать, помещать на нее точки, находить общие точки с другими линиями. [Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. Ин-тов / Е. И. Лященко. и др. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.]

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ» В 8 КЛАССЕ

2.1. Теоремы и задачи о параллелограммах и трапециях

Создадим собственные инструменты построения динамических чертежей параллелограмма и трапеции. Применение этих инструментов мы продемонстрируем в задачах следующего параграфа.

Трапеция. Данная геометрическая фигура является главным действующим лицом в достаточно большом количестве планиметрических задач, но в 8 классе обучающиеся ещё не достаточно подготовлены к этому. По этой причине соответствующий пункт учебного пособия не содержит ни одного свойства трапеции и ни одного признака. Однако не смотря на это мы поместим в методическую копилку анимационный чертёж для одной из двух задач на построение, которые помещены среди задач пункта 44 ([3]). Однако перед этим рассмотрим построение собственного инструмента пользователя для изображения трапеции, верхнее основание которой меньше нижнего.

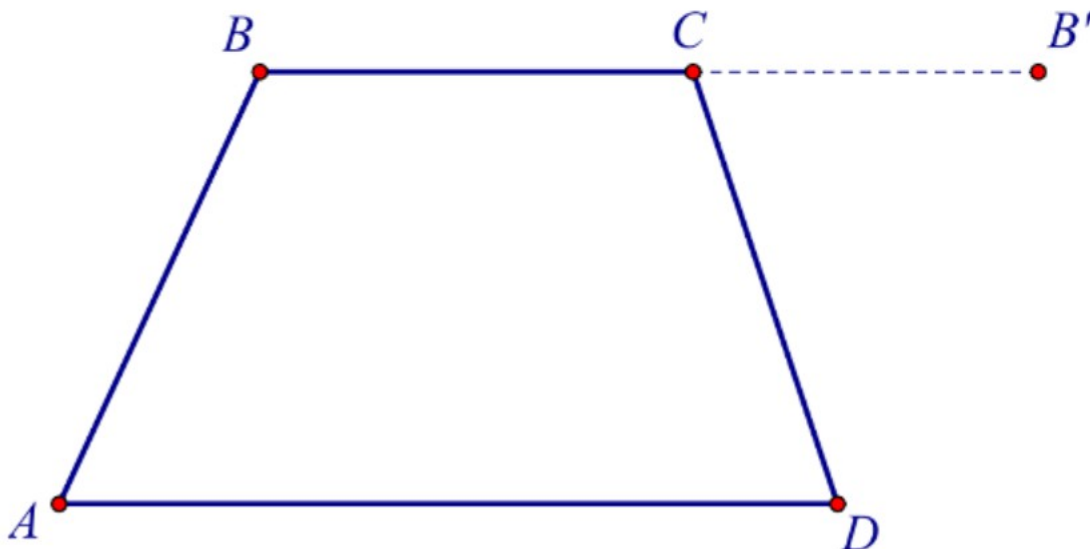
Создание собственного инструмента пользователя "Трапеция".

Последовательно строим (рис. 6):

1. Отрезок AD (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
2. Точку B, не лежащую на прямой AD (2-ая кнопка сверху на ВПИ).
3. Отрезок AB (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
4. Точку B' - образ точки B при переносе на вектор AD (задать вектор переноса парой точек A и D, команда "Отметить вектор" во вкладке "Преобразования" ГМК, затем подсветить B, активизировать команду "Перенести").
5. Отрезок BB' (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
6. Строим точку C на отрезке BB' (команда "Построить точку на объекте" во вкладке "Построения" ГМК).
7. Скрываем точку B' и внутренние точки отрезка BB' (команда "Скрыть объекты" во вкладке "Вид" ГМК)

8. Строим отрезки BC и CD (4-ая кнопка сверху на ВПИ).

9. Создаём инструмент "Трапеция" (скрываем имена точек и прямых, подсвечиваем все точки и отрезки, обращаемся к 9-ой кнопке сверху на ВПИ).



Параллелограмм. После того как учителем будет дано определение параллелограмма и на доске и в школьных тетрадях будет построена эта фигура с использованием классических инструментов линейки и циркуля, желательно с помощью проектора вывести на большой экран рабочий лист среды Живая математика. Учителю надо ещё раз выполнить построение параллелограмма, но уже с помощью виртуальных циркуля и линейки. После этого можно перейти к созданию собственного инструмента пользователя, позволяющего строить параллелограмм ABCD по его вершинам A, B и C.

Создание собственного инструмента «Параллелограмм». Для этого последовательно строим:

- 1) отрезок AB (4-ая кнопка на вертикальной панели инструментов, для краткости последние 3 слова будем обозначать аббревиатурой ВПИ);
- 2) точку C, не лежащую на прямой AB (2-ая кнопка сверху на ВПИ);
- 3) отрезок BC (4-ая кнопка сверху на ВПИ);
- 4) прямую a, содержащую A и параллельную BC (команда

"Параллельная прямая" во вкладке "Построения" горизонтального меню команд, аббревиатура ГМК);

5. Прямую s , содержащую C и параллельную AB (команда "Параллельная прямая" во вкладке "Построения" ГМК).

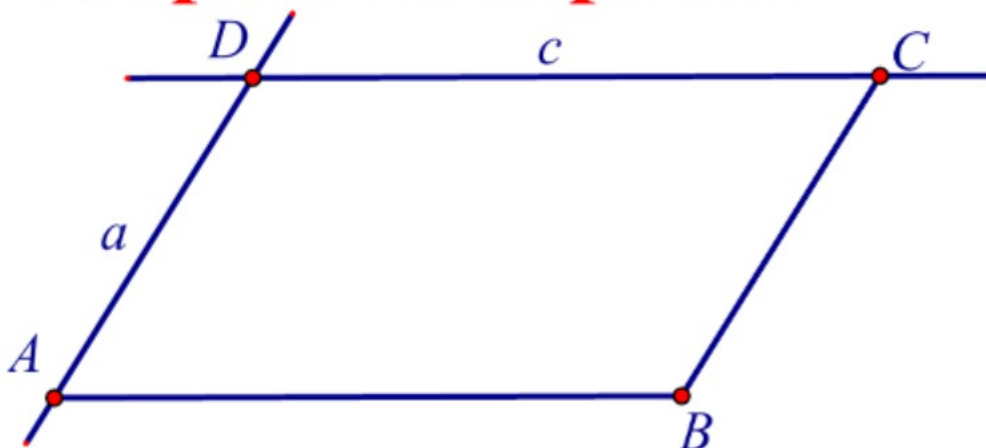
6. Строим точку D пересечения прямых a и s (команда "Пересечение" во вкладке "Построения" ГМК), на экране появится изображение, представленное на рисунке 1;

7. скрываем прямые a и s (команда "Скрыть объекты" во вкладке "Вид" ГМК);

8. строим отрезки AD и CD (4-ая кнопка сверху на ВПИ);

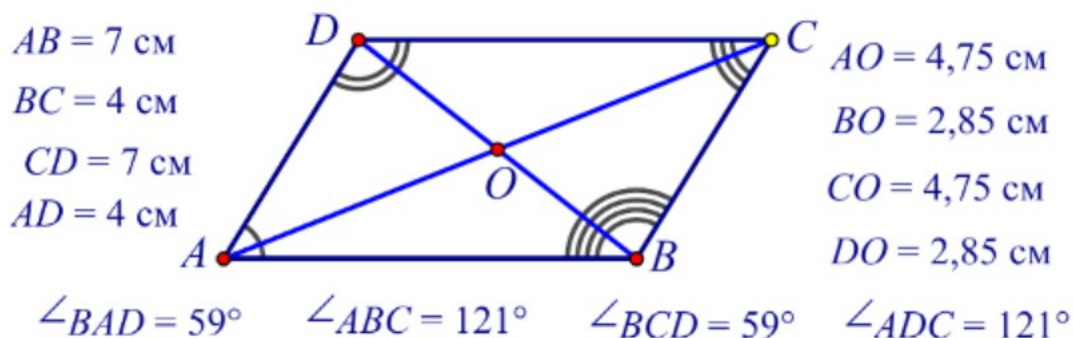
9. создаём инструмент "Параллелограмм" (скрываем имена точек и прямых, подсвечиваем все точки и отрезки, обращаемся к 9 кнопке на ВПИ, в появившемся окне вносим название инструмента «Параллелограмм»).

Параллелограмм



После этого ученикам можно предложить самостоятельно обнаружить и сформулировать некоторые свойства параллелограмма. Этот этап можно назвать как *«Проведение компьютерного эксперимента на выявление свойств параллелограмма»* Для этого предлагается использовать только что созданный инструмент «Параллелограмм». После выбора этого инструмента (нижняя

кнопка на ВПИ) на экране появляется требуемая фигура, обозначим ее ABCD (рис. 2). Учитель предлагает перед проведением компьютерного эксперимента изобразить диагонали, найти их общую точку O и, используя графический калькулятор, найти длины всех сторон параллелограмма и величины углов при всех его вершинах.



AB	BC	CD	AD	$\angle BAD$	$\angle ABC$	$\angle BCD$	$\angle ADC$	AO	BO	CO	DO
7 см	4 см	7 см	4 см	59°	121°	59°	121°	4,83 см	2,88 см	4,83 см	2,88 см
5 см	7 см	5 см	7 см	62°	118°	62°	118°	5,23 см	3,15 см	5,23 см	3,15 см
14 см	7 см	14 см	7 см	78°	102°	78°	102°	8,20 см	6,95 см	8,20 см	6,95 см
9 см	9 см	9 см	9 см	47°	133°	47°	133°	7,98 см	3,46 см	7,98 см	3,46 см
9 см	6 см	9 см	6 см	90°	90°	90°	90°	5,41 см	5,40 см	5,41 см	5,40 см
6 см	5 см	6 см	5 см	50°	130°	50°	130°	4,88 см	2,32 см	4,88 см	2,32 см
6 см	3 см	6 см	3 см	48°	132°	48°	132°	4,01 см	2,20 см	4,01 см	2,20 см
7 см	1 см	7 см	1 см	76°	104°	76°	104°	3,54 см	3,23 см	3,54 см	3,23 см
7 см	8 см	7 см	8 см	152°	28°	152°	28°	1,90 см	7,11 см	1,90 см	7,11 см
7 см	5 см	7 см	5 см	81°	99°	81°	99°	4,53 см	3,91 см	4,53 см	3,91 см
7 см	4 см	7 см	4 см	59°	121°	59°	121°	4,75 см	2,85 см	4,75 см	2,85 см

Для этого используем команды «Расстояние» во вкладке «Измерения» на ГМК, чтобы найти расстояние между A и B подсвечиваются эти точки, затем активизируется команда «Расстояние» и на рабочем поле появляется текстовый объект $AB = 7,13 \text{ см}$. Для удобства можно округлить это число до целых. Для этого следует навести курсор на текстовый объект, нажать правую клавишу, зайти в свойства, выбрать «Величины», в них указать «Целые». Аналогичную процедуру выполнить с измерением углов (рис. 2).

А вот измерение от вершин параллелограмма до точки O пересечения его

диагоналей округлять до единиц не рекомендуется (по умолчанию Живая математика округляет расстояния и величины углов до сотых). Чтобы результаты эксперимента можно было фиксировать, создадим таблицу. Для этого подсветим последовательно измеренные величины, причём в том порядке, в котором мы желаем, чтобы располагались столбцы таблицы, после этого зайдём во вкладку «Вычисления» на ГМК, выберем команду «Заполнять таблицу». После этого на экране появится таблица с двумя строками и 12 столбцами.

Как заполняется таблица? Каждое экспериментальное испытание начинается с изменением формы параллелограмма. Вершины В и С помещаются мышью в некоторое новое положение, после этого надо щёлкнуть мышью по таблице, в ней появится новая строка с теми данными, которые будут соответствовать новому положению параллелограмма. На рисунке 2 приведена таблица, в которой зафиксированы результаты 11 испытаний.

Анализируя таблицу с результатами экспериментальных испытаний, ожидается, что обучающиеся сформулируют следующие предположения (гипотезы):

Предположение о возможном свойстве №1 параллелограмма. В параллелограмме ABCD: $AB = CD$, $AD = BC$, т.е. противоположные стороны в параллелограмме равны. В параллелограмме ABCD: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, т.е. противоположные углы в параллелограмме равны.

Предположение о возможном свойстве №2 параллелограмма. В параллелограмме ABCD: $AO = CO$, $DO = BO$, т.е. противоположные стороны в параллелограмме равны.

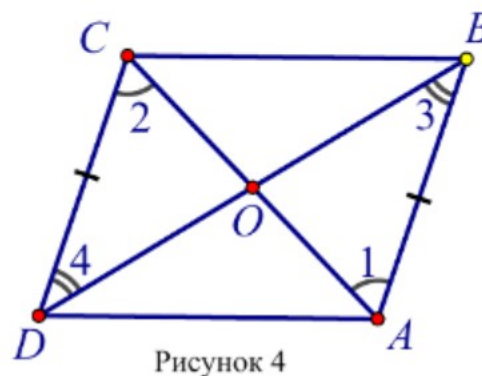
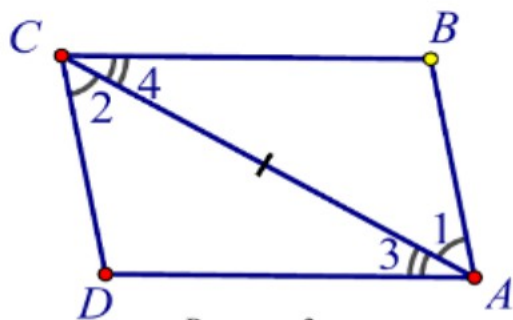
Завершающий этап можно назвать «Обоснование предположений о возможных свойствах параллелограмма». Несмотря на то, что обучающиеся после проведения 11 экспериментальных испытаний не сомневаются в справедливости сформулированных ими предположений о свойствах параллелограмма, учитель должен разъяснить, что пока у нас нет полной

уверенности в том, что противоположные стороны и противоположные углы в параллелограмме всегда равны. Ведь мы проверили всего 11 видов параллелограммов, а всего их бесконечное множество. Всех их мы проверить никогда не сможем.

Чтобы убедиться в справедливости обоих свойств необходимо провести доказательство, в котором можем использовать лишь аксиомы и ранее доказанные теоремы или другие утверждения. В связи с этим для методической копилки нами подготовлены несколько иные анимационные чертёжи. Сначала рассматривается первое свойство параллелограмма:

С в о й с т в о №1. *В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.*

Опять, используя готовый собственный инструмент, строится параллелограмм $ABCD$ (рис. 3), в котором выполняется дополнительное построение, изображается диагональ AC , маркером изображаются накрест лежащие углы при секущей AC . В этом случае свойство следует из второго признака равенства треугольников.



С в о й с т в о 2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся.

Для обоснования второго свойства параллелограмма, используя готовый собственный инструмент, строится параллелограмм $ABCD$, в котором выполняется дополнительное построение, изображаются обе диагонали AC и

BD , находится их общая точка O , маркером изображаются накрест лежащие углы (рис. 4).

Перед тем как перейти к трапеции рассмотрим анимационный чертёж, подготовленный нами к задаче 381 с практическим контекстом на применение свойств параллелограмма из учебника под редакцией Л.С. Атанасяна [3].

Сразу отметим, среда Живая математика позволяет без особых проблем окрашивать внутреннюю область любого многоугольника. Для этого используется команда «Окрасить многоугольник» (на ВПИ выбирается шестая кнопка сверху). Сложнее обстоит дело с окраской круглых невыпуклых тел. Приходится идти на разные ухищрения, применения которых существенно снижают скорость выполнения анимации. В связи с тем, что чертёж выполняется в среде Живая математика, мы были вынуждены внести незначительные коррективы в условие задачи.

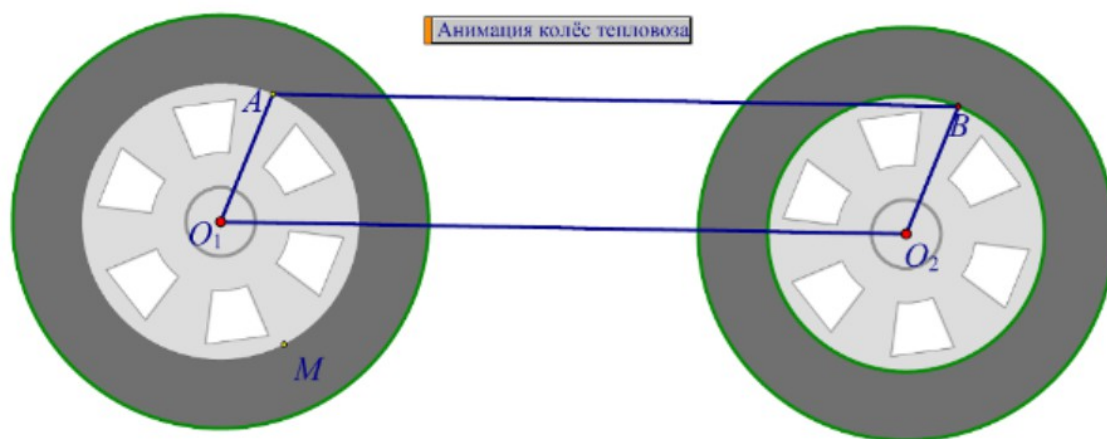


Рисунок 5

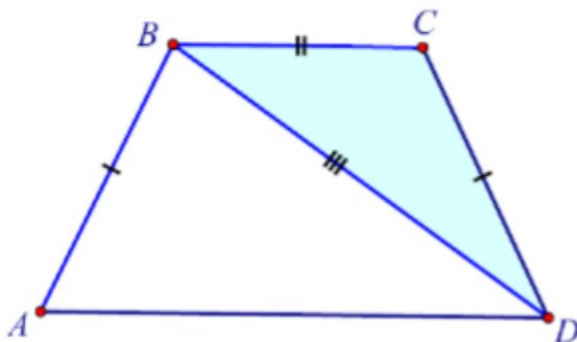
З а д а ч а 1. Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$ по основанию BC , боковой стороне AB и диагонали BD .

А н а л и з.

Предположим, что задача решена и искомая трапеция $ABCD$ построена (рис. 7). Выделим на чертеже ярко синим цветом данные отрезки: основание

BC, боковую сторону AB и диагональ BD.

1. По условию задачи боковые стороны равны, то есть $AB = CD$ (поставим маркером равные метки).
2. Замечаем, что треугольник BCD можно построить по трём сторонам.
3. После этого проведём через D прямую а, параллельную BC.
4. Построим окружность $\text{Окр}(B, CD)/$



5. Из двух точек пересечения обозначим через А такую, что АВ - не параллельна CD. Найденные четыре точки А, В, С и D - и будут являться искомыми.

Итак, по результатам проведённого анализа становится понятно, что эта задача вполне по силам ученикам 8 класса. Они уже умеют строить треугольник по трём его сторонам. Через любую точку они с помощью циркуля и линейки могут провести прямую, параллельную данной прямой. Кстати, далеко не все ученики знают наиболее простой приём проведения через точку А прямую, параллельную ВС (при этом используется один из признаков параллелограмма): необходимо найти середину О отрезка АС, после этого удвоить отрезок ВО, т.е. построить D такую, что О середина BD.

Итак, переходим к следующему этапу решения задачи, а именно к построению.

П о с т р о е н и е.

Последовательно строим:

1) треугольник BCD по 3-м сторонам: $BC=b$, $CD=a$, $BD=d$ (для этого строим: точку B, $\text{Окр}(B,b)$, точку C на $\text{Окр}(b,B)$, $\text{Окр}(C,a)$, $\text{Окр}(b,d)$, точку D пересечения $\text{Окр}(C,a)$ и $\text{Окр}(b,d)$, соединяем точки B, C и D - отрезками);

2) прямую m - проходящую через D и параллельную BC;

3) окружность $\text{Окр}(B,a)$;

4) точки A и A_2 пересечения $\text{Окр}(B,a)$ и m , A_2 лежит между A и D.

5) ABCD - искомая трапеция.

Доказательство.

Докажем, что построенный на предыдущем этапе четырёхугольник ABCD является искомой трапецией.

1. $BC=b$, $CD=a$, $BD=d$ в соответствии с построением 1.

2. BC параллельна AD в соответствии с построениями 2 и 4.

3. $AB=a$ в связи с построениями 3 и 4.

4. AB не параллельна CD в связи с выбором точки после выполнения построения 4.

5. $AB = CD = a$.

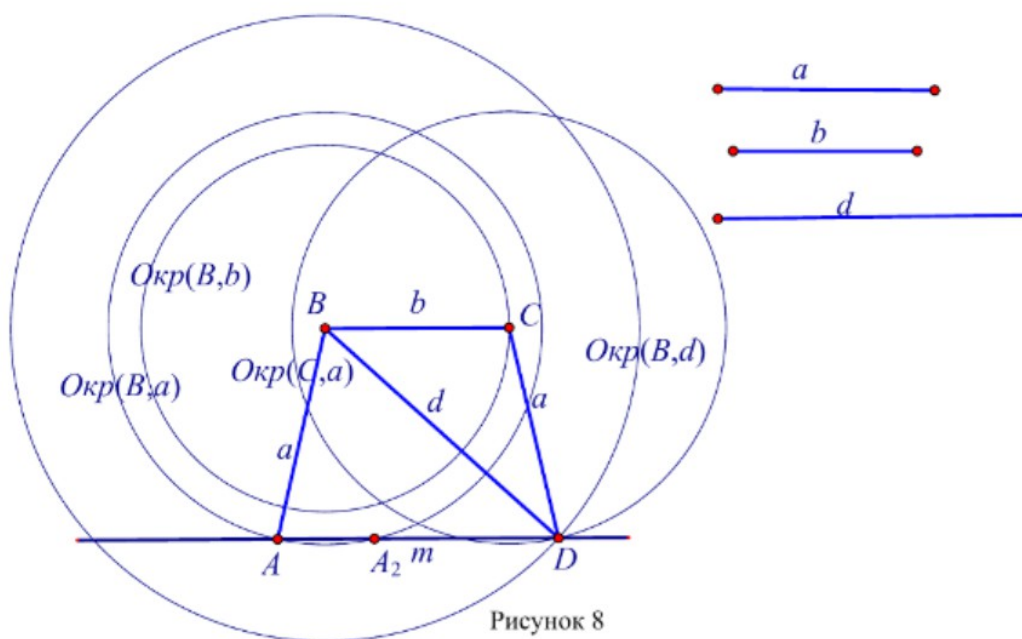


Рисунок 8

И с с л е д о в а н и е.

В соответствии с этапом Построение пункт, который может не выполняться - это первый пункт. В пункте 1 выполняется построение треугольника по 3 сторонам. Реализовать его можно лишь при условии, если $|a - b| < d < a + b$.

И ещё, не должно выполняться условие, при котором точки A и A_2 из пункта 4 этапа построения не будут совпадать. Это может произойти, если основание BC окажется перпендикулярным CD . В связи с этим ещё одно ограничение: $d^2 \neq a^2 + b^2$.

Знакомство с динамическими чертежами на уроках геометрии целесообразно начинать с доказательства некоторых свойств четырехугольников. Практическим путем можно доказать что ромб – это параллелограмм с перпендикулярными диагоналями. Начать построение можно с определения понятия параллелограмм, используя свойство его диагоналей, которые пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Построив отрезок AC с серединой в точке O , отметим точки B и D которые образуются при пересечении окружности заданного радиуса с перпендикулярной прямой проведенной к AC через точку O . Изменяя длину сторон увеличивая их или уменьшая, учащиеся на практике убедятся в том что данное утверждение верно.

Следующий чертеж наглядно изображает признак квадрата, который гласит что «если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, то он квадрат». В окружности с центром в точке O и радиусом R проведем диаметр AC , и к этому диаметру построим серединный перпендикуляр, который пересечет данную окружность в двух точках. Последовательно соединив точки $ABCD$ мы получим искомый квадрат.

Следующим нашим построением будет параллелограмм – четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны. На отрезке AB строим окружности W_1 и W_2 с центром в точке A и окружности W_3 и W_4 с центром в точке C .

Точка В – точка пересечения W_2 и W_3 , а точка D – точка пересечения W_1 и W_4 . ABCD – искомый параллелограмм. [Майер, В.Р. /Системы динамической математики как эффективное средство цифровизации общего математического образования [Электронный ресурс] <https://kmc.sfu-kras.ru/documents/podufalov-doklad2-mayer.pdf>]

Следующее определение параллелограмма – четырехугольник противоположные стороны которого попарно равны и параллельны.

Даны две параллельные прямые L и K, через произвольную точку В отмеченную на прямой L проведем окружность с центром в точке В и радиусом r. Пересечение данной окружности с прямой L отметим точкой С. На прямой K через произвольную точку D проводим еще одну окружность с радиусом r, точка А – точка пересечения окружности W_2 прямой K. ABCD – искомый параллелограмм. [Петрушко, И.М. Сборник задач по алгебре, геометрии и началам анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И.М. Петрушко, В.И. Прохоренко, В.Ф. Сафонов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2007. — 576 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/311>. — Последнее обновление 27.05.2018.]

Рассмотрим следующий вариант построения параллелограмма. Определение: если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм. На плоскости произвольно берем точку О и строим две разные окружности с этим центром. Две прямые проходящие через центр данных окружностей и пересекающие их в точках ABCD образуют параллелограмм.

Задача 3. Найти площадь трапеции, основания которой равны 16 и 44, а боковые ребра -17 и 25.

Для решения данной задачи нам сначала необходимо провести анализ, поэтому создаём динамический чертёж трапеции ABCD:

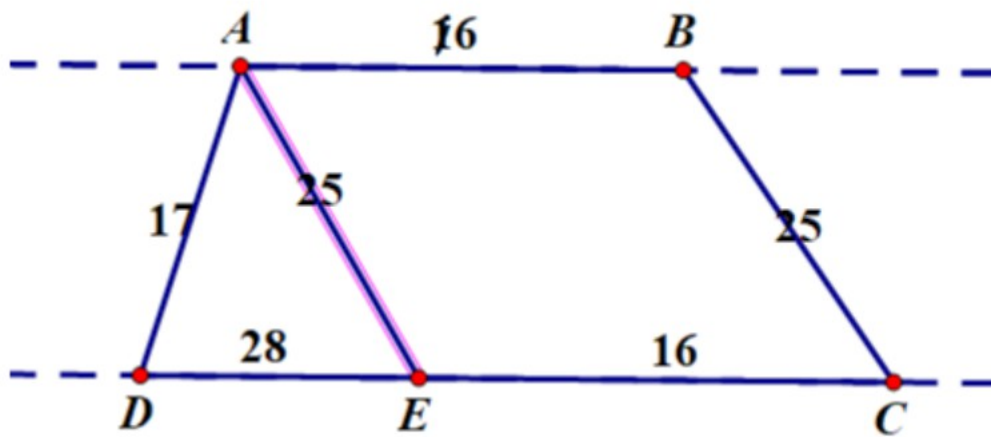


Рисунок 9

- 1) Изображаем отрезок АВ и точку С, не принадлежащую отрезку АВ.
- 2) С помощью инструмента «Стрелка растяжения» наводим область на наши отрезок и точку.
- 3) На верхней панели управления нажимаем кнопку «Построения» и выбираем нужную команду — параллельные прямые.
- 4) На параллельной прямой выбираем точку D и по очереди соединяем ее с точками С и А.

Полученный рисунок ABCD — трапеция, с которой мы будем работать. Для удобства обозначим параллельные прямые пунктирными линиями. Для этого выбираем область, с которой мы будем работать. Нажимаем на кнопку «Вид», далее - «Стиль линии» - «пунктирная».

$AB \cdot K = 14.00$ см. После этого мы изображаем треугольник ADE по трём сторонам: сначала строим точку D, затем переносим ее на расстояние $DE = CD \cdot K - AB \cdot K = 14.00$ см вправо (т.е. На 0°). далее строим две окружности с центром в D и радиуса $AD \cdot K = 8.50$ см и с центром в E и радиуса $BC \cdot K = 12.50$ см, находим их общую точку A, строим три отрезка DE, AD и AE. Далее, переносим точку A на расстояние $AB \cdot K = 8.00$ см, получаем точку B. После этого достраиваем отрезки EA и AB до параллелограмма EABC. В итоге, получим чудесную трапецию ABCD, у которой все стороны будут вполне соответствовать тем значениям, которые представлены в условии задачи.

Теперь учитель имеет в своём распоряжении целый набор задач, похожих по формулировке на задачу 1. но в качестве длин сторон трапеции можно использовать большое количество чисел. Меняя значения параметров AB, BC, CD и AD (для этого параметры по-очереди следует посвечивать, после этого нажимать на клавиши "+" или "-"). Размерами чертежа можно управлять с помощью коэффициента подобия K.

На экране, используя формулу Герона для площади треугольника ADE и другие формулы будут автоматически пересчитываться все требуемые величины, включая периметр треугольника ADE, равный 35.00 см. площадь треугольника ADE, равная 210.00 см, высота треугольника ADE, равная $AN = h = 15.00$ см, площадь данной трапеции $ABCD = 450.00$ см. Площадь трапеции — это произведение полусуммы оснований на высоту трапеции. AB и CD — основания трапеции. Тогда $(AB + CD)/2 = (16 + 44)/2 = 30$. Главная аксиома геометрии — всё ищи в треугольнике.

1) Из точки A проведем отрезок AE, параллельный BC. Получается, что ABCE — параллелограмм. Это значит, что противоположные стороны его будут равны: $AE = BC = 25$, $AB = EC = 16$.

2) Рассмотрим треугольник ADE: $AE = 25$, $AD = 17$, $DE = 44 - 16 = 28$. Высота треугольника ADE — это и есть высота нашей трапеции. Искать мы ее будем

через площади треугольника. Мы знаем, что площадь треугольника — это половина произведения основания на высоту.

Еще одна формула площади треугольника — формула Герона. Для этого мы должны узнать полупериметр треугольника: $p=(17+25+28)/2=70:2=35$

Тогда площадь треугольника в квадрате равна: $35(35-17)(35-25)(35-28)=44100$.

Тогда площадь треугольника равна корень из 44100, равна 210.

Подставим полученное число в первую формулу. Получается $210=(28*h)/2$, откуда $h=15$.

Теперь мы можем найти площадь трапеции. Площадь трапеции равна: $S=30*15=450$.

Ответ: 450.

Задача 2. ABCD – параллелограмм. AB=10см, угол B=120, BE -высота, опущенная на DC, BE=2 см. Найти площадь параллелограмма, найти BC.

Для начала мы построим динамический чертёж параллелограмма.

- 1) отрезок АВ (4-ая кнопка на вертикальной панели инструментов, для краткости последние 3 слова будем обозначать аббревиатурой ВПИ);
- 2) точку С, не лежащую на прямой АВ (2-ая кнопка сверху на ВПИ);
- 3) отрезок ВС (4-ая кнопка сверху на ВПИ);
- 4) прямую а, содержащую А и параллельную ВС (команда "Параллельная прямая" во вкладке "Построения" горизонтального меню команд, аббревиатура ГМК);
- 3) Прямую с, содержащую С и параллельную АВ (команда "Параллельная прямая" во вкладке "Построения" ГМК).
- 6) строим точку D пересечения прямых а и с (команда "Пересечение" во вкладке "Построения" ГМК), на экране появится изображение, представленное на рисунке 1;

7) скрываем прямые a и c (команда "Скрыть объекты" во вкладке "Вид" ГМК);

8) строим отрезки AD и CD (4-ая кнопка сверху на ВПИ); создаём инструмент "Параллелограмм" (скрываем имена точек и прямых, подсвечиваем все точки и отрезки, обращаемся к 9 кнопке на ВПИ, в появившемся окне вносим название инструмента «Параллелограмм»).

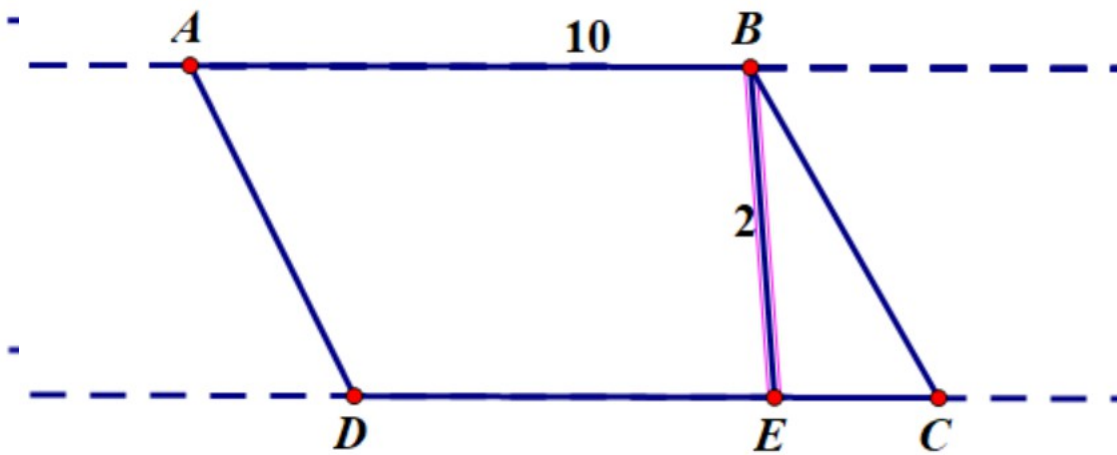


Рисунок 11.

Решение:

1) Главная аксиома геометрии — всё ищи в треугольнике.

Рассмотрим

треугольник BCE. Угол B равен $180-120=60$. Тогда угол C равен (по свойству суммы углов прямоугольного треугольника) $180-90-60=30$.

2) Если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 30 градусов, то

катет напротив равен половине гипотенузы. BC — гипотенуза, значит $BE=2*2=4$.

3) Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту

опущенную на эту сторону. $S=(2*10):2=10$.

Ответ: 10; 4.

2.2 Теоремы и задачи о прямоугольниках, ромбах и квадратах

Создадим собственные инструменты построения динамических чертежей прямоугольника, ромба и квадрата. Применение этих инструментов мы продемонстрируем в задачах следующего параграфа.

Прямоугольник.

Создание собственного инструмента "Прямоугольник"

Последовательно строим:

1. Отрезок АВ (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
2. Прямую а, содержащую точку А и перпендикулярную АВ (команда "Перпендикуляр" во вкладке "Построения" на ГМК).
3. Прямую b, содержащую точку В и перпендикулярную АВ (команда "Перпендикуляр" во вкладке "Построения" ГМК).
4. Точку С, принадлежащую прямой b (2-ая кнопка сверху на ВПИ).
5. Отрзок ВС (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
6. Прямую с, содержащую точку С и перпендикулярную а (команда "Перпендикуляр" во вкладке "Построения" ГМК).
7. Строим точку D пересечения прямых а и с (команда "Пересечение" во вкладке "Построения" ГМК).
8. Скрываем прямые а, b и с (команда "Скрыть объекты" во вкладке "Вид" ГМК)
9. Строим отрезки AD и CD (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
10. Создаём инструмент "Прямоугольник" (скрываем имена точек и прямых, подсвечиваем все точки и отрезки, обращаемся к 9-ой кнопке сверху на ВПИ).

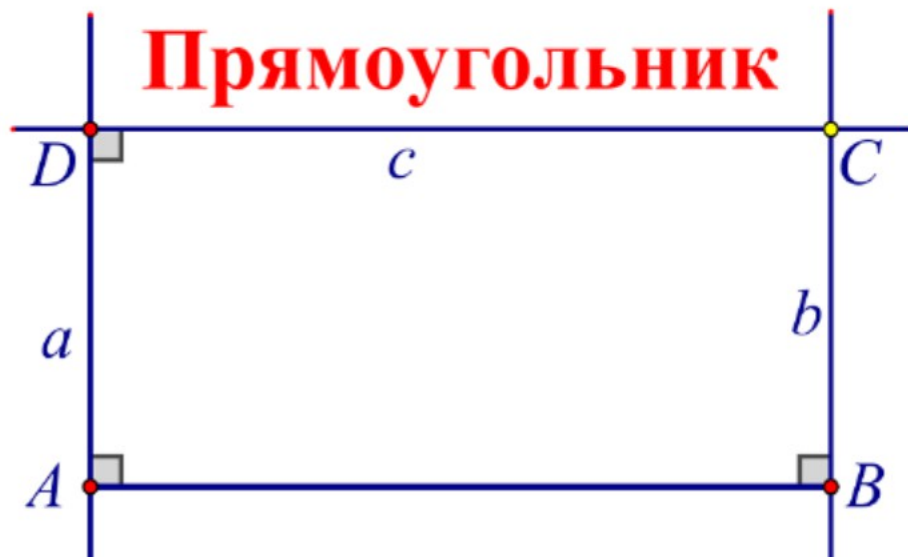


Рисунок 12.

Ромб.

Создание собственного инструмента "Ромб"

Последовательно строим (рис. 10):

1. Отрезок AB (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
2. Окружность $\text{Окр}(A, AB)$ (3-я кнопка сверху на ВПИ)
3. Точку D , принадлежащую окружности $\text{Окр}(A, AB)$ (2-ая кнопка сверху на ВПИ).
4. Отрезок AD (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
5. Прямую b , содержащую точку B и параллельную AD (команда "Параллельная прямая" во вкладке "Построения" ГМК).
6. Прямую d , содержащую точку D и параллельную AB (команда "Параллельная прямая" во вкладке "Построения" ГМК).
7. Строим точку C пересечения прямых b и d (команда "Пересечение" во вкладке "Построения" ГМК).
8. Скрываем окружность $\text{Окр}(A, AB)$ и прямые b и d (команда "Скрыть объекты" во вкладке "Вид" ГМК)
9. Строим отрезки CD и BC (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
10. Создаём инструмент "Ромб" (скрываем имена точек и прямых,

подсвечиваем все точки и отрезки, обращаемся к 9-ой кнопке сверху на ВПИ).

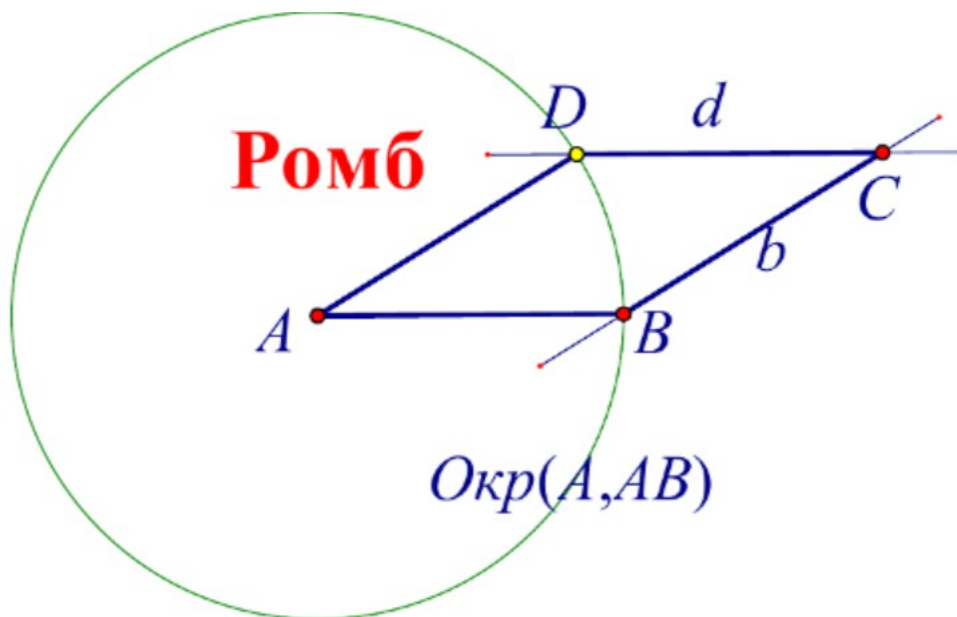


Рисунок 13

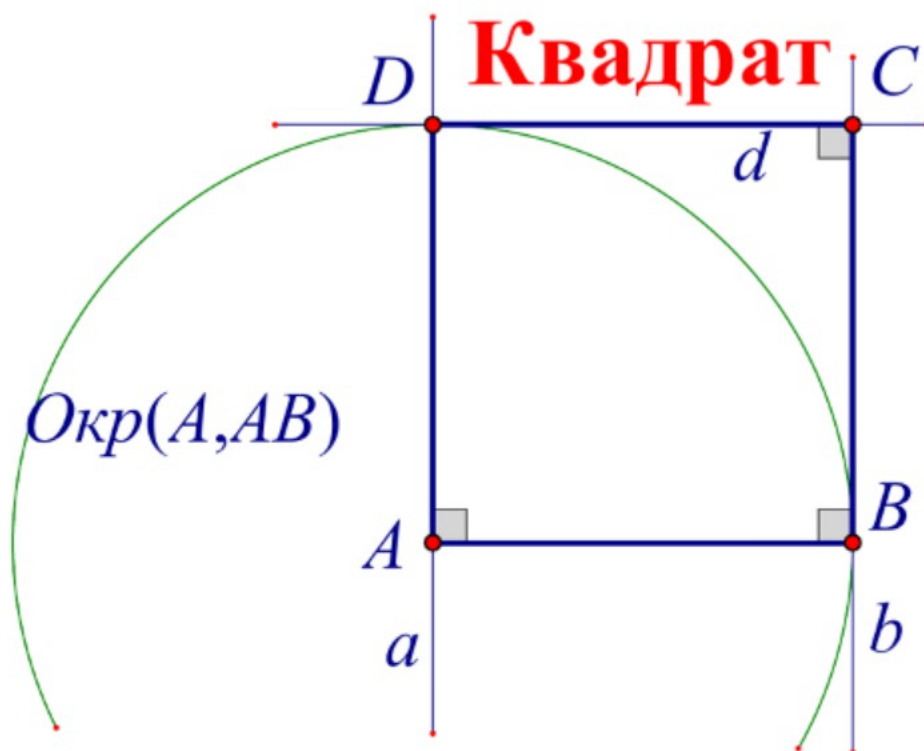
Квадрат.

Создание собственного инструмента "Квадрат"

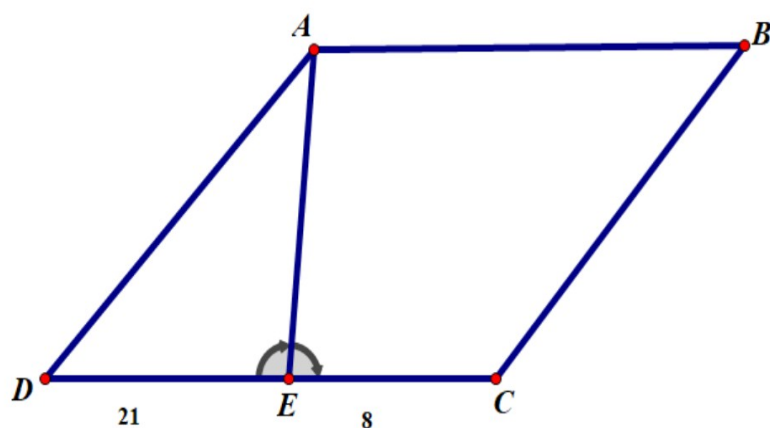
Последовательно строим :

1. Отрезок АВ (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
2. Прямую a , содержащую точку A и перпендикулярную AB (команда "Перпендикуляр" во вкладке "Построения" на ГМК).
3. Прямую b , содержащую точку B и перпендикулярную AB (команда "Перпендикуляр" во вкладке "Построения" ГМК).
4. Окружность $Окр(A, AB)$ (3-я кнопка сверху на ВПИ)
4. Точку D , принадлежащую пересечению прямой a и окружности $Окр(A, AB)$ (2-ая кнопка сверху на ВПИ).
5. Отрезок AD (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
6. Прямую d , содержащую точку D и перпендикулярную b (команда "Перпендикуляр" во вкладке "Построения" ГМК).
7. Строим точку C пересечения прямых b и d (команда "Пересечение" во вкладке "Построения" ГМК).

8. Скрываем окружность $\text{Окр}(A, AB)$ и прямые a , b и d (команда "Скрыть объекты" во вкладке "Вид" ГМК)
9. Строим отрезки CD и BC (4-ая кнопка сверху на ВПИ).
10. Создаём инструмент "Квадрат" (скрываем имена точек и прямых, подсвечиваем все точки и отрезки, обращаемся к 9-ой кнопке сверху на ВПИ)



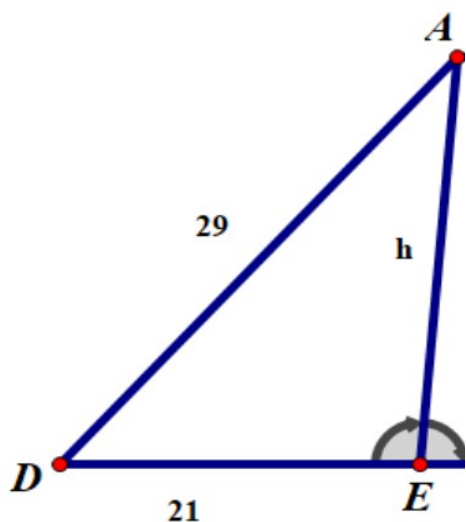
Задача 1: Высота AE ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DE = 21$ и $CE = 8$. Найдите высоту ромба.



С помощью среды «Живая математика» строим параллелограмм по ранее созданном нам шаблону. Так как ромб — это

параллелограмм, у которого все стороны равны, то вычисляем, что $DC=29$, тогда $AD=AB=CB=DC=29$. Рассмотрим треугольник ADE — он прямоугольный с прямым углом E .

AE — это высота ромба и ее можно найти через треугольник.



Теорема Пифагора гласит: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Из этого следует: $AE^2 = AD^2 - DE^2 = 29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400$.

Отсюда $AE=20$.

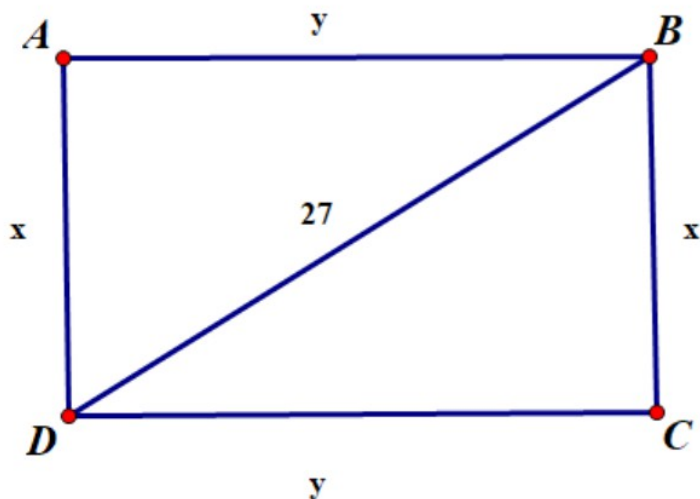
AE — это и есть высота ромба.

Ответ: 20.

Данная задача пригодится ученикам не только в восьмом классе, но и в девятом

классе. Так как эта задача будет предложена ребятам на ОГЭ во второй части.

Задача 2: Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 27. Найдите площадь этого прямоугольника.



$ABCD$ — прямоугольник, тогда по свойству $AD=BC$, назовем их длины x . $AB=CD$, назовем их длины y .

Периметр — это сумма всех сторон, тогда

$$AB+BC+CD+DA=56.$$

Подставим наши значения:

$$x+y+x+y=56$$

$2x+2y=56$. Разделим каждую часть этого уравнения на 2:

$$x+y=28.$$

Выразим x из этого уравнения: $x=28-y$.

Треугольник DCB — прямоугольный с прямым углом C. По Теореме Пифагора

$$DB^2 = DC^2 + BC^2$$

$$27^2 = x^2 + y^2$$

$$729 = y^2 + (28-y)^2$$

$$729 = y^2 + 28^2 - 56y + y^2$$

$$2y^2 - 56y + 784 - 729 = 0$$

$$2y^2 - 56y + 55 = 0$$

Это квадратное уравнение.

$$a=2 \quad b=-56 \quad c=55$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-56)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 55 = 3136 - 440 = 2696$$

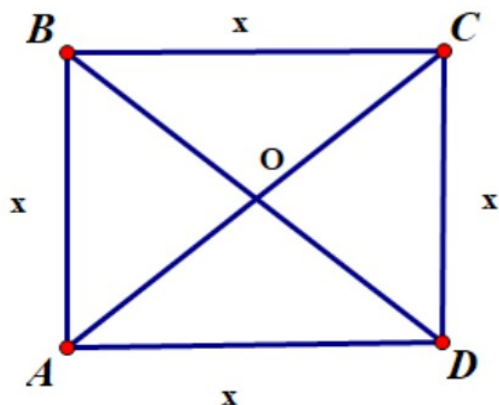
$$y = \frac{56 - \sqrt{2696}}{4}, \text{ тогда } x = 28 - \frac{56 - \sqrt{2696}}{4} = \frac{56 + \sqrt{2696}}{4}$$

Площадь прямоугольника — ширина, умноженная на длину.

$$S = x \cdot y = \frac{56 - \sqrt{2696}}{4} \cdot \frac{56 + \sqrt{2696}}{4} = \frac{56^2 - \sqrt{2696}^2}{16} = \frac{3136 - 2696}{16} = 27,5$$

Ответ: 27,5.

Задача 3: Сумма диагоналей квадрата равна 4. Найдите площадь этого квадрата.



Данная задача имеет два способа решений.

Первый способ самый простой — нужно вспомнить свойство квадрата — диагонали квадрата пересекаются под прямым углом.

Значит нам достаточно перемножить диагонали и разделить их произведение на два. Так как диагонали квадрата равны, то каждая диагональ равна 2.

Тогда $S = (2 \cdot 2) : 2 = 2$.

Второй способ сложнее. Рассмотрим треугольник ACD — он прямоугольный.

По теореме Пифагора $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$$2^2 = x^2 + x^2$$

$$4 = 2x^2$$

$$x^2 = 2$$

Площадь квадрата равна квадрату стороны, а это как раз x^2 .

Ответ: 2.

Задача 4. На стороне AD квадрата ABCD как на диаметре построена полуокружность внутрь квадрата. К полуокружности проведена касательная BM, где M принадлежит стороне CD квадрата. Найдите сторону квадрата, если радиус окружности, вписанной в треугольник BCM, равен 3.

Построим динамический чертёж, иллюстрирующий решение этой задачи. Используя готовый инструмент «Квадрат», построим на рабочем поле среды Живая математика изображение квадрата ABCD, разделим его сторону AD точкой O пополам (инструмент «Середина» во вкладке Построения на ГПК) построим полуокружность с центром в O и радиуса OD (инструмент «Дуга на окружности» во вкладке Построения на ГПК). Проведём к полуокружности касательную BM, в треугольник BCM впишем окружность, изобразим ее радиус, обозначим его 3 — длина радиуса по условию задачи (рис. 12, левый слайд). [Майер, В.Р. /Системы динамической математики как эффективное средство цифровизации общего математического образования [Электронный ресурс] <https://kmc.sfu-kras.ru/documents/podufalov-doklad2-mayer.pdf>]

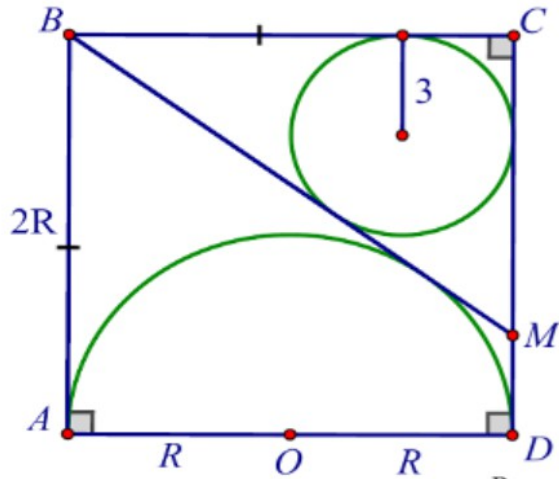
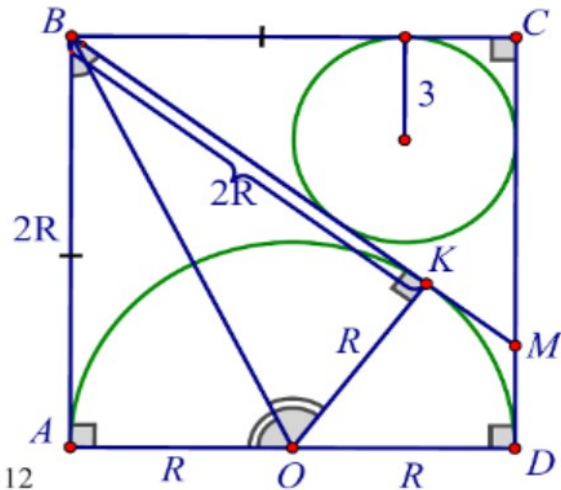


Рисунок 12



Р е ш е н и е.

1. Итак, пусть O - середина AD , $AO = R$, K - точка касания BM и полуокружности.

Выполним дополнительные построения: проведём отрезок BO , построим радиус OK (рис. 12, правый слайд)

2. $\triangle ABO = \triangle KBO \Rightarrow \angle AOB = \angle KOB$ и $\angle ABO = \angle KBO$.

Выполним ещё одно дополнительное построение: проведём отрезок MO , построим радиус OK (рис. 13).

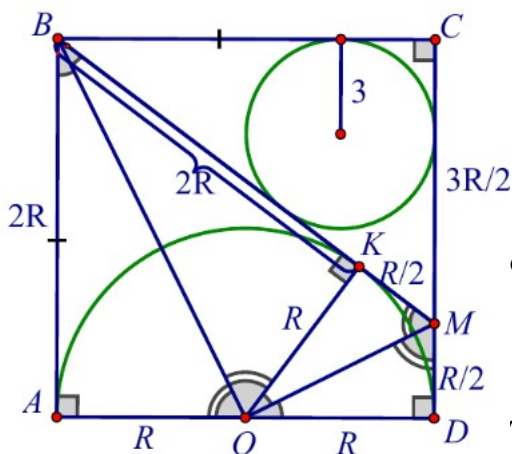


Рисунок 13

3. $\triangle KMO = \triangle DMO$ отсюда следует $\angle KOM = \angle DOM$ и $\angle KMO = \angle DMO$.

4. Из 2 и 3 получаем, что $\angle BOM = 90^\circ$, отсюда, $\triangle ABO \sim \triangle KOM \Rightarrow KM = R/2 = DM$.

5. Достроим квадрат $ABCD$ до прямоугольника A_1BCD_1 , полуокружность до окружности. Пусть M_1 - пересечение лучей BM и AD .

и AD .

6. $\triangle A_1BM_1 \sim \triangle CMB$ (по 3 углам), найдём коэффициент подобия.

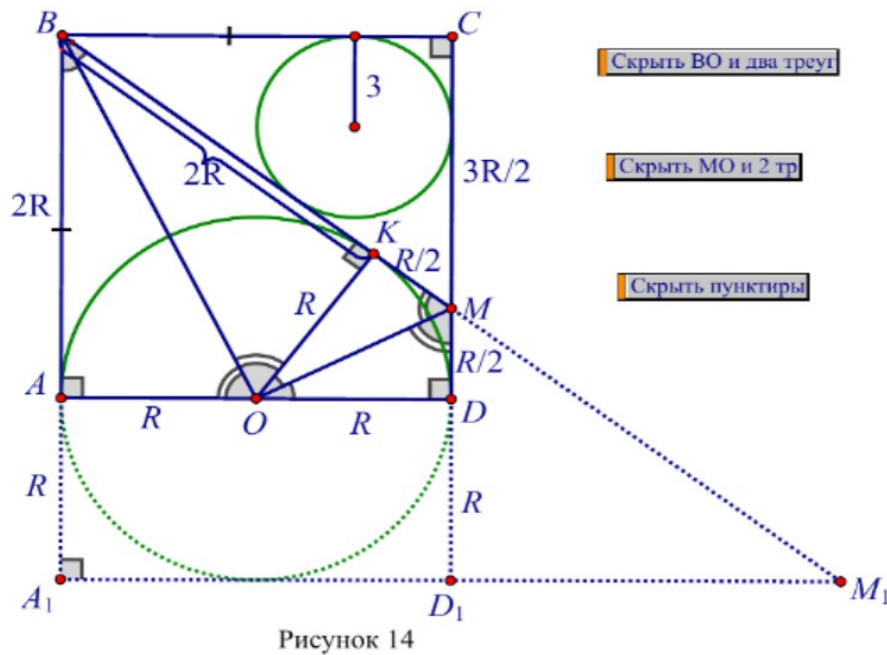


Рисунок 14

7. Так как $CM = 2R - R/2 = 3R/2 = R + R/2 = MD_1$, то M - середина CD_1 , отсюда $BA_1:MC = 2:1$.

8. Итак, коэффициент подобия равен 2, отсюда, $R = 3 \cdot 2 = 6$ и $AB = 12$.

О т в е т: 12

Задача 5. Внутри квадрата $ABCD$ находится точка E такая, что $AE = 2$, $BE = 1$ и $CE = \sqrt{2}$. Найдите площадь квадрата.

Решим эту задачу с помощью поворота треугольника ABE вокруг точки B на угол 90° . Использование такого движения редко применяется в школьном курсе планиметрии, поэтому его полезно рассмотреть на дополнительных занятиях по подготовке обучающихся к решению задач повышенного уровня сложности. Разработчики среды Живая математика предусмотрели соответствующие инструменты для создания анимационного эффекта,

демонстрирующего поворот на любой угол. Возможен поворот как с помощью мыши, так и с помощью кнопки поворота.

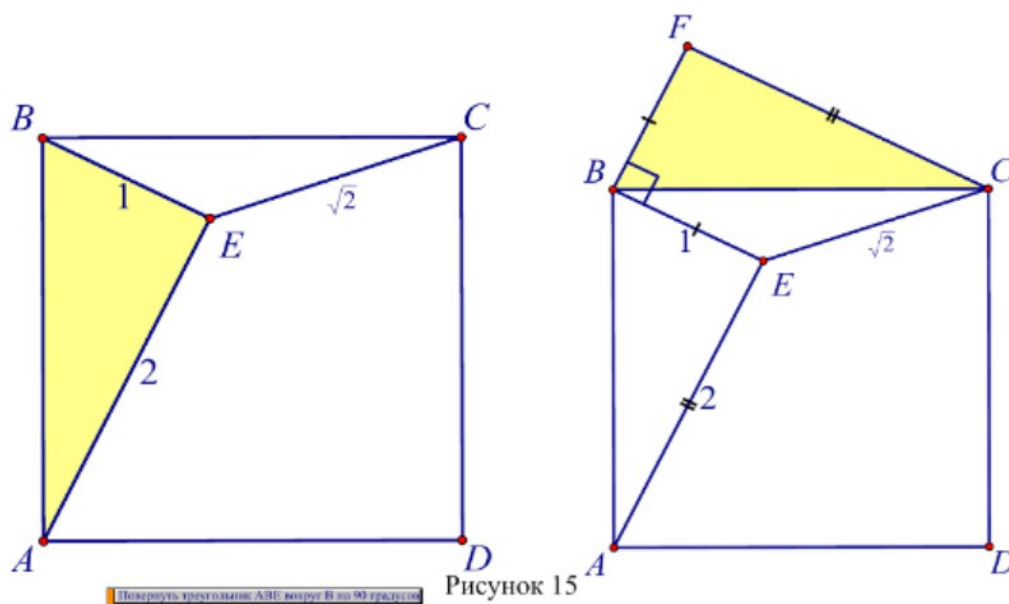
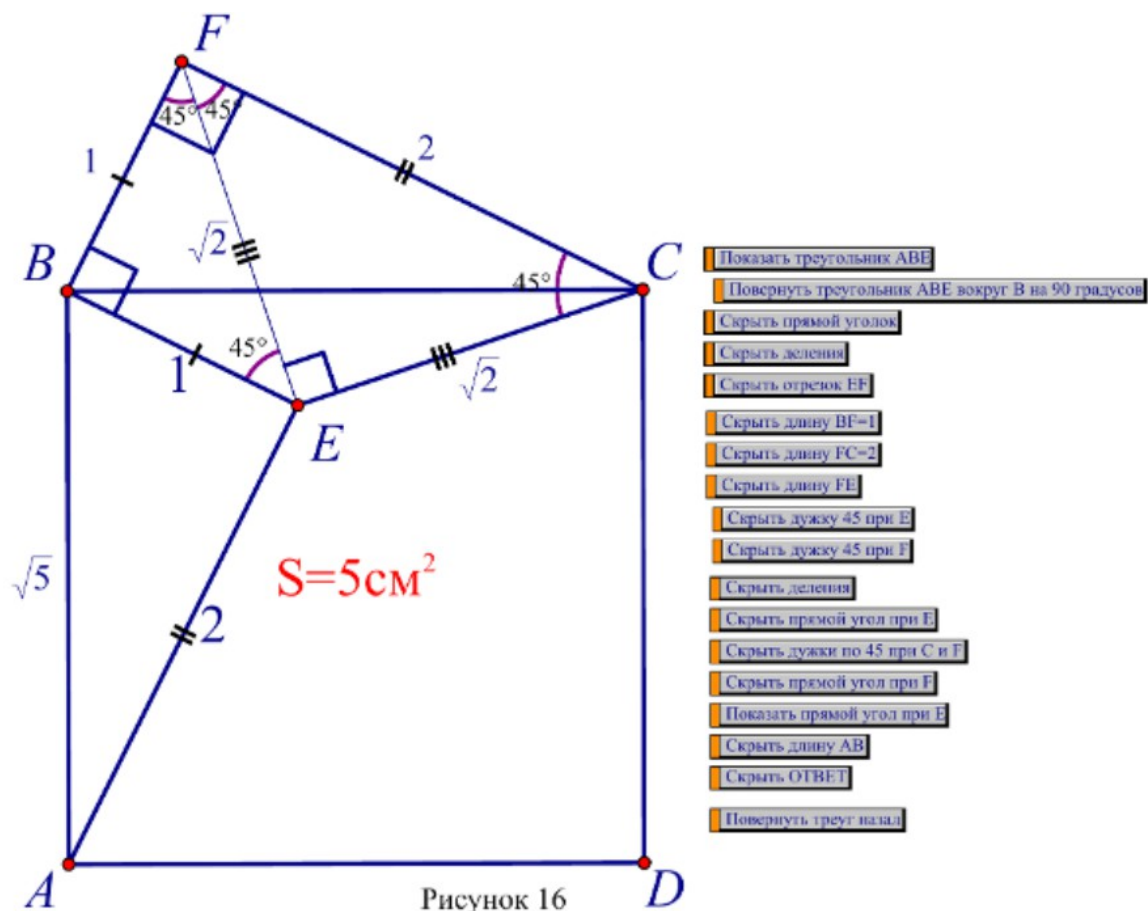


Рисунок 15

На рисунке 15 (левый слайд) треугольник ABE окрашен жёлтым, на правом слайде представлен результат поворота треугольника ABE на 90° . Отрезок BE отобразился на отрезок BF (на чертеже изображён знак прямого угла), отрезок AE отобразится на отрезок CF, т.к. вершина A квадрата ABCD при повороте вокруг точки B на 90° отображается на точку C. Ясно, что сторона AB отобразится на сторону BC.

Поскольку при повороте сохраняются длины отрезков, то длина отрезка BF будет равна длине отрезка BE, т.е. 1, и $CF = AE = 2$. Соединим точки E и F отрезком EF. Получим прямоугольный равнобедренный треугольник BEF (рис. 16). Используя теорему Пифагора, мы можем по катетам этого треугольника найти его гипотенузу, т.е. $EF = \sqrt{2}$. Ясно также, что углы при основании треугольника BEF равны по 45° , т.е. $\angle BEF = \angle BFE = 45^\circ$.



Рассмотрим теперь треугольник CEF. В этом треугольнике нам известны все стороны: $CE = EF = \sqrt{2}$, $CF = 2$. Но тогда $CE^2 + EF^2 = 2 + 2 = 4 = FC^2$. По теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник CEF – прямоугольный. Изобразим маркером прямой угол при E. Поскольку этот треугольник также является равнобедренным, то оба его угла при основании – равны по 45° . Следовательно, угол $\angle BFC = \angle BFE + \angle CFE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$.

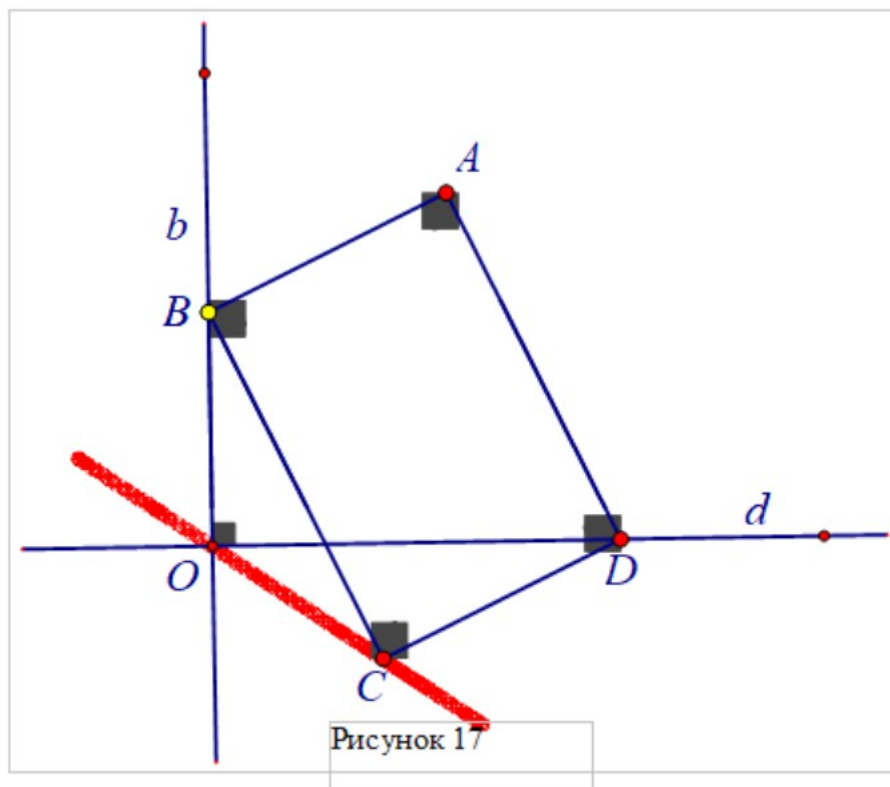
Итак, треугольник BFC – прямоугольный, его катеты равны 1 и 2. По теореме Пифагора гипотенуза BC равна $\sqrt{5}$. Так как BC является стороной квадрата, то искомая площадь равна 5.

Задача 3. Даны две взаимно перпендикулярные прямые b и d и фиксированная точка A , не принадлежащая им. Рассмотрим прямоугольники

ABCD такие, что вершина B принадлежит прямой b, а вершина D - прямой d. Если вершину B перемещать по прямой b, то по какой линии будет перемещаться точка C?

Чтобы воспользоваться указанными выше возможностями среды Живая математика, построим в этой среде динамический чертёж. Для этого изобразим две взаимно перпендикулярные прямые a и b , построим их точку пересечения, обозначим эту точку буквой O . Изобразим на рабочем поле произвольную точку A так, чтобы она не принадлежала построенным прямым. Поместим на прямую b произвольную точку B , окрасим ее жёлтым цветом, что по умолчанию означает возможность ее перемещения всеми возможными средствами, например, с помощью мыши или используя кнопку «Анимация». По точкам A и B необходимо построить прямоугольник, который будет удовлетворять всем условиям задачи. Здесь нам уже не поможет подготовленный заранее собственный инструмент «Прямоугольник по стороне».

Выполним дальнейшие построения, привязав их не только к построенной стороне AB будущего прямоугольника, но и к уже построенной ранее прямой d. Для этого построим перпендикуляр к отрезку AB, проходящий через точку A, его точку пересечения с прямой d обозначим через D. По трём построенным вершинам A, B и D несложно построить оставшуюся четвёртую C. Можно, например, провести второй перпендикуляр к AB, но уже проходящий через B, после этого построить к этому перпендикуляру ещё один перпендикуляр, содержащий вершину D. Точка пересечения этих перпендикуляров и будет четвёртой вершиной C (рис. 17).



Проведём эксперимент. Заставим точку C оставлять след и начнём перемещать точку-моторчик B по прямой b . Точка C начнёт вычерчивать след, который представлен на рисунке 17. Можно предположить с достаточно большой степенью вероятности, что точка C перемещается по прямой линии.

Попробуем заменить этот след на геометрическое место точек C . Воспользуемся сначала командой «Стереть следы» (ГМК «Вид»). После этого отменим требование к точке C оставлять следы, для этого снимем «галочку» в команде «Оставлять след» (опять ГМК «Вид»).

Подсветим теперь точку B , затем точку C , обратимся далее к команде «Геометрическое место» (ГМК «Построения»). На рисунке 18 (левый слайд) представлен результат выполнения этой команды. На правом слайде этого же рисунка изменено положение точки A , траектория точки C изменилась, но она, по-прежнему осталась прямой, проходящей через точку O . [Майер, В.Р. /Компьютерная анимация в среде Живая математика

на уроках геометрии / В.Р. Майер, Т.В. Апакина, Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2015]

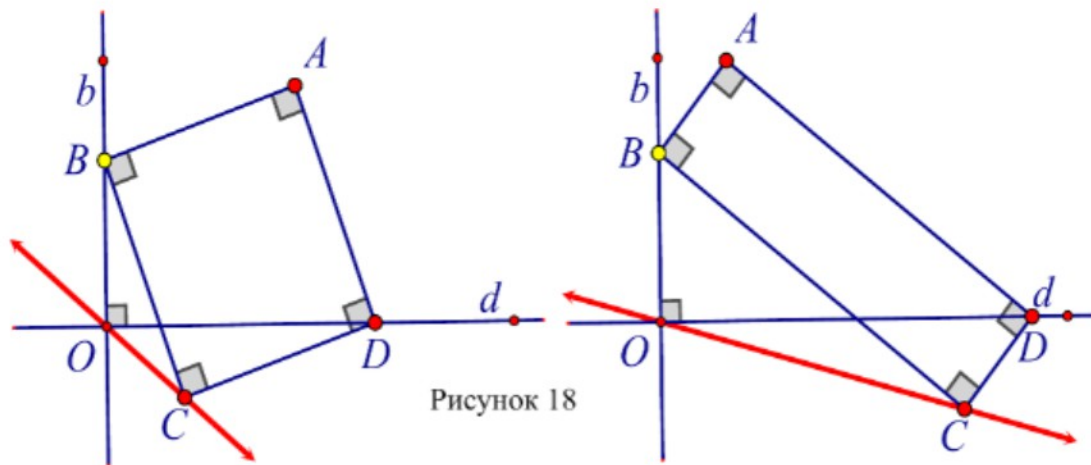
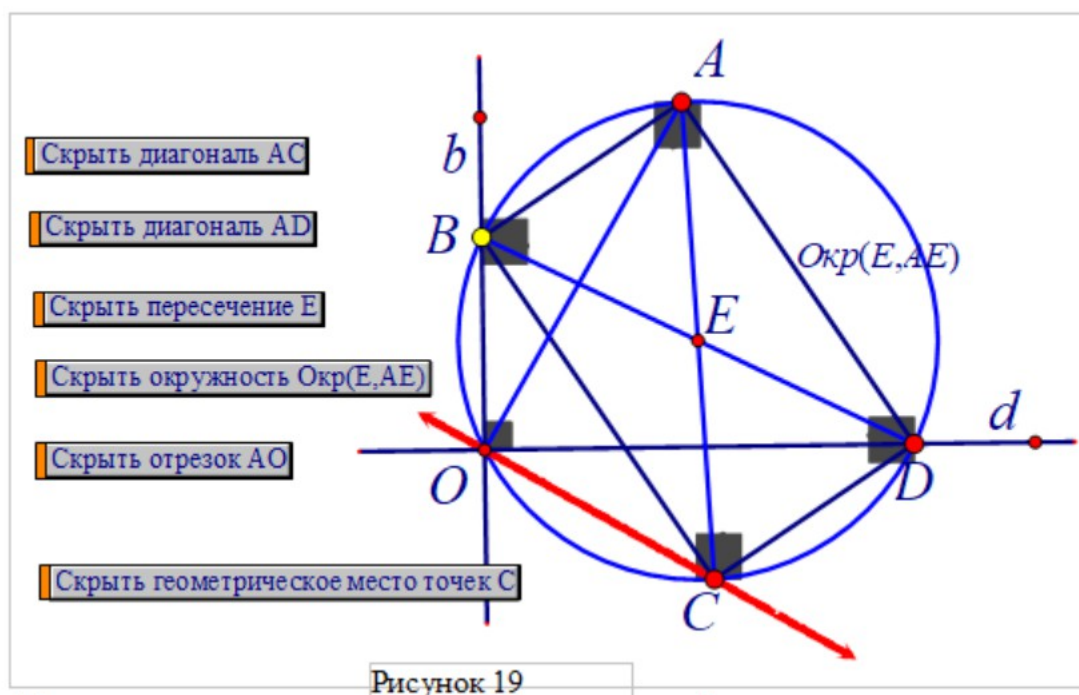


Рисунок 18

Мы можем продолжать менять положение точки A , но сколько бы мы этого не делали, мы не имеем права утверждать, что линия, по которой перемещается точка C всегда будет прямой. Мы можем только высказать правдоподобную гипотезу, а вот присвоить этой гипотезе почётный статус теоремы можем только в том случае, если нам удастся вывести это утверждение из ранее доказанных теорем и аксиом (об этом учитель должен постоянно напоминать обучающимся).

Существует несколько способов доказательства того, что следом точки C является прямая, проходящая через точку O и для каждого фиксированного положения точки A эта прямая будет перпендикулярна прямой OA . Один из этих способов универсальный, его называют аналитический. Перпендикулярные прямые принимаются за оси координат на плоскости, вершины прямоугольника будут иметь координаты $A(a_1, a_2)$, $B(0, b_2)$, $D(d_1, 0)$,

$C(x, y)$. После этого, учитывая, что сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равна $\overrightarrow{AC}$, а их скалярное произведение равно нулю, получаем, что $y = -c_1x/c_2$. Отсюда следует, что точки C всегда лежат на прямой, $y = kx$, где $k = -c_1/c_2$. Поскольку точка A лежит на прямой $y = c_2x/c_1$, то «след» точки C перпендикулярен прямой



ОА. Поскольку метод координат изучается в 9 классе, то для доказательства лучше воспользоваться синтетической (евклидово) геометрией.

Выполним следующие очевидные дополнительные построения. Опишем около прямоугольника окружность, предварительно построим диагонали прямоугольника, обозначим через E их общую точку, а саму окружность – через $\text{Окр}(E, AE)$. Так как $\angle BOD = 90^\circ$ и BD – диаметр окружности, то точка O лежит на окружности. Построим хорду AO . Поскольку вписанный в окружность угол AOC опирается на второй диаметр AC , то $\angle AOC = 90^\circ$. Таким образом, точки C перемещаются по прямой, проходящей через O и перпендикулярной прямой OA .

2.3 Результаты педагогического эксперимента.

Эксперимент был проведён в средней школе №32 города Красноярска с участием 8а и 8б классов. Эксперимент был проведен Королевой Евгенией Геннадьевной. Работа проводилась в период с 13 января 2025 года по 30 апреля 2025 года. В 8а проходят обучение 20 человек, в 8б проходят обучение 20 человек. Сначала ученикам двух классов была предложена одна и та же контрольная работа с целью проконтролировать уровень знаний школьников по теме «Четырёхугольники».

Контрольная работа № 1. Четырёхугольники	Вариант 2
Вариант 1 1. Периметр параллелограмма 50 см. Одна из его сторон на 5 см больше другой. Найдите стороны параллелограмма. 2. Найдите меньший угол между диагоналями прямоугольника, если каждая из них делит угол прямоугольника в отношении 4 : 5. 3. Найдите углы параллелограмма, если одна из его диагоналей является высотой и равна одной из сторон. 4. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB, углы ADB и BDC равны 30°. Найдите длину AD, если периметр трапеции равен 60 см. 5*. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M. На прямых AB и CD взяты точки K и P так, что $A-B-K$, $D-C-P$. Биссектрисы углов KBC и BCP пересекаются в точке N, $MN = 8$ см. Найдите длину AD.	1. Периметр параллелограмма 60 см. Одна из его сторон на 6 см меньше другой. Найдите стороны параллелограмма. 2. Угол между диагоналями прямоугольника равен 80°. Найдите угол между диагональю и меньшей стороной прямоугольника. 3. Найдите углы параллелограмма, если одна из его диагоналей является высотой и равна половине неперпендикулярной к ней стороны параллелограмма. 4. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла A. Найдите длину AB, если периметр трапеции равен 35 см, а угол D равен 60°. 5*. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 6$ см. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M. На прямых AB и CD взяты точки K и P так, что $A-B-K$, $D-C-P$. Биссектрисы углов KBC и BCP пересекаются в точке N. Найдите длину MN.

Стоимость каждого задания 1 балл. С учётом того, что ученики два раза в неделю посещали уроки геометрии, результаты контрольной работы были весьма плачевными.

В итоге мы решили провести эксперимент — ученики 8а продолжали обучение согласно общеобразовательной программе. К программе обучения геометрии 8б класса мы подключили среду Живая математика.

В ходе каждого урока геометрии 8б класса учащиеся принимали непосредственное участие в освоении программы с помощью среды Живая математика. С помощью преподавателя ученики выводили свойства четырёхугольников. Свойство параллелограмма: в параллелограмме

противолежащие углы равны. Учитель брал указателем за вершину и видоизменял параллелограмм. Главное оставалось неизменным — параллелограмм оставался параллелограммом.

23 апреля 2025 года в школе №32 был проведен ВПР, где учащиеся 8б класса показали результаты лучше, чем учащиеся 8а класса. В ВПР были следующие задания по геометрии: тип 9 — элементы и свойства многоугольников, тип 10 — задачи на квадратных решетках, площади фигур, тип 12 — анализ геометрических высказываний, тип 18 — геометрическая задача на вычисление, 19 — геометрическая задача на вычисление. Кроме того в качестве контроля успеваемости по истечению эксперимента ученикам восьмых классов была дана контрольная работа по теме «Четырёхугольники». Данные представлены в таблице ниже:

Контрольная работа № 1 по теме: «Четырёхугольники». 8 кл	Вариант 2
---	------------------

1. Найдите угол правильного пятиугольника.
 2. Один из углов параллелограмма равен 113° . Найдите другие его углы.
 3. Диагонали ромба ABCD пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника AOB, если между диагоналями, если $\angle BCD = 75^\circ$.
 4. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45° . Меньшая боковая сторона и меньшее основание равны по 10 см. Найдите большее основание.
 5. Найдите меньшую боковую сторону прямоугольной трапеции, основания которой равны 10 см и 6 см, а один из углов равен 45° .
-
6. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его противоположную сторону в отношении 3:2, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 80 см.
 7. На диагонали NK прямоугольника MNPК отложены равные отрезки NA и KE. Докажите: а) что треугольники ANP и EKM равны; б) что четырёхугольник APEM параллелограмм.
 8. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам. Определите углы ромба.

Оценка	«3»	«4»	«5»
Обязательная часть	4 задания	4-5 задания	5 задания
Дополнительная часть	—	1 задание	2 задания

Контрольная работа № 1 по теме: «Четырёхугольники». 8кл**Вариант 1**

1. Найдите угол правильного двенадцатиугольника.
 2. Сумма диагоналей прямоугольника равна 17 см. Найдите диагонали прямоугольника.
 3. Найдите стороны параллелограмма, если две его стороны относятся как 4:5, а периметр равен 72 см.
 4. В ромбе одна из диагоналей равна его стороне. Найдите углы ромба.
 5. Диагонали прямоугольника CDEF пересекаются в точке O. Найдите угол между диагоналями, если $\angle CDO = 40^\circ$.
-
6. Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, основания которой равны 12 см и 6 см, а один из углов равен 60° .
 7. Периметр ромба равен 16 см, высота равна 2 см. Определите углы ромба.
 8. На продолжении диагонали AC прямоугольника ABCD отложены равные отрезки AM и CN. Докажите: а) что треугольники MAD и NCB равны; б) что четырехугольник MBND параллелограмм.

Оценка	«3»	«4»	«5»
Обязательная часть	4 задания	4-5 задания	5 задания
Дополнительная часть	–	1 задание	2 задания

Фамилия Отчество	Имя	К/Р №1					ВПР					К/Р №2							
		1	2	3	4	5	9	10	12	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8
8а																			
Аскарова А.А.	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	
Белянин И.Д.	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	
Болсуновский Р.Т.	-	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	
Власова В.О.	+	-	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	-	
Гаджиев Р.А.	-	-	-	+	-	+	-	-	+	+	-	+	+	-	+	+	+	-	
Голендяева А.П.	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	

Денисов Ф.К.	-	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	-
Зеленин М.А.	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-
Игнатова С.Н.	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+	-
Капустин Т.В.	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-
Кремлев В.В.	-	-	-	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	-
Ламаков А.А.	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-
Миронова М.Е.	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	-
Невзорова З.К.	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	+		-	-	+	-	+	-
Никифорова А.Т.	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	+	+	-	-
Оскальд Т.М.	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-
Поросятникова О.М.	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	-	+	+	+	+	-
Рахманов Е.Т.	-	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	+	+	-	-
Рощина Г.В.	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-
Темерова Т.Л.	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	-	-	+	-	+	-
86																		
Аксенова К.К.	-	-	-	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	+	-
Бурматов М.В.	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-
Власов К.Т.	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-
Веремеев В.В.	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+
Гайдук Е.Т.	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+
Гоненко Э.Л.	+	-	-	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-
Дмитриев Т.Р.	+	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+
Игнатенко В.У.	-	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	+	+	+	-	+	-	-
Каханова О.А.	+	-	-	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Круглов А.К.	+	-	-	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	-	+	+
Лавров К.Н.	+	-	-	+	-	-	+	+	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+
Михайлова Д.М.	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-
Мысливец И.А.	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-
Никишина М.Д.	+	-	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-
Остроумов И.Б.	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-
Павлов Т.Л.	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Павлова Т.Л.	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Разумовский С.К.	+	-	-	-	-	+	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-	-

Сташков И.С.	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-
Федорова Д.И.	+	+	-	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	-

Благодаря таблице мы видим, что учащиеся 8б класса, которые использовали в обучении среду Живая математика получили лучшие результаты, нежели обучающиеся 8а класса, которые обучающую среду не использовали. Благодаря данным мы видим, что на ВПР задания 18 и 19 учащиеся из 8а правильно решили единицы, тогда как из 8б более 80% учеников справились с этими задачами. В задании №12 предлагается анализ геометрических высказываний. Благодаря таблице мы видим, что обучающиеся 8б класса блестяще справились с этой задачей, чего нельзя сказать про учеников 8а класса.

Анализируя данные контрольной работы №2, мы видим, что в 8а задания из второй части не решил практически никто, тогда как в 8б есть и те ребята, которые решили всю вторую часть контрольной работы правильно. Из этого делаем вывод, что среда Живая математика и Математический конструктор — это очень хорошее подспорье как для студентов, так и для преподавателя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое исследование показало, что динамические чертежи очень помогают ученикам в освоении четырёхугольников на уроках геометрии. Среда Живая математика — удобный и понятный математический конструктор, помогающий в рассмотрении и создании на плоскости геометрических фигур.

Первая задача - Изучить особенности классической методики преподавания темы «Четырёхугольники» (на основе учебников Л.С. Атанасяна, И.М. Смирновой и др.) и возможность интеграции этой методики с динамическим подходом к обучению геометрии — была выполнена полностью. Были основательно изучены учебники данных авторов. Ознакомление прошло успешно.

Вторая задача - Проанализировать возможность использования динамических чертежей авторской методической копилки при изучении четырёхугольников в курсе геометрии основной школы — выполнена полностью. Были основательно изучены среда Живая математика и Математический конструктор. Сначала было ознакомление с теоретической частью этих программ, потом — с практической.

Третья задача - Разработать электронную версию методического учебного пособия с динамическими чертежами по теме «Четырёхугольники» - выполнена полностью. Во второй главе в параграфах 2.1 и 2.2 проведена разработка динамических чертежей. В начале каждой из пунктов глав подробно рассказан ход построения таких фигур как прямоугольник, квадрат, ромб, параллелограмм и трапеция в среде Живая математика. Подробно разобраны свойства и теоремы четырёхугольников. Рассмотрены и решены задачи с помощью среды Живая математика. Задачи рассмотрены как самые простые, так и задачи повышенной сложности.

Четвертая задача - Провести апробацию разработанного пособия в

условиях учебной практики и зафиксировать полученные результаты — выполнена полностью. Подробности эксперимента зафиксированы во второй главе в части 2.3. Для анализа итогов работы приведена таблица, в которой указано, что эффективность проведения уроков с помощью среды Живая математика себя оправдала. Показатели у 8б стали намного лучше, чем были изначально.

Подводя итог, отметим, что все поставленные задачи дипломного исследования решены, цель исследования достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1) Александров А.Д. Геометрия. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 176 с.
- 2) Александров А.Д. Геометрия: учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 2002. – 240 с.
- 3) Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя/под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2019 – 159 с.
- 4) Атанасян Л. С. Геометрия [Текст]: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян. и др. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.
- 5) Атанасян Л.С. Изучение геометрии в 7-9 классах. Пособие для учителей / Л.С. Атанасян. и др. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.
- 6) Бурмистрова Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ составитель Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2014. – 95 с.
- 7) Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Прасолов В. В. Геометрия. 8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. (МГУ – школе) – М., 2011, 175 стр. 2. – 624 с. 11. Егидес А.П., Егидес Е.М. Классификационные схемы: технология и способы построения [Электронный ресурс]/ Егидес А.П., Егидес Е.М. // Школьные технологии. – 2012. №3. – С. 71-85. -Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17743335>. – Последнее обновление 28.05.2018.
- 8) Глейзер Г.Д. Геометрия: Учебник для 8 класса / Г.Д. Глейзер. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. - 118 с.

- 9) Гусев В.А. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений [Текст] / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчишина и др.; под ред. В.А. Гусева. – М.: Издат. центр «Академия», 2004. – 368 с.
- 10) Дорофеев С.Н., Наземнова Н.В. Деятельностный подход к обучению старшеклассников распознаванию геометрических образов [Электронный ресурс] / Дорофеев С.Н., Наземнова Н.В. // Азимут научных исследований: Педагогика и психология. – 2017. №2(19). – С. 52-55. -Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29655596>. – Последнее обновление 28.05.2018.
- 11) Дубровский, В.Н. 1С: Математический конструктор – новая программа динамической геометрии / В.Н. Дубровский, Н.А. Лебедева, О.А. Белайчук // Компьютерные инструменты в образовании. – 2015 - №1
- 12) Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. Сборник задач по математики с решениями. 8-11 класс / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. 47 Кордемский и др.; Под ред. М.И. Скинави. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство Астрель», 2012. – 624 с.
- 13) Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов (составители: Аджемян Г.А., Дубровский В.Н. и др.). – М.: ИНТ, 2013 – 205с
- 14) Киселев А. П., Глаголев Н. А. Геометрия: Учебник / А.П. Киселев; Под ред. Н.А. Глаголева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 328 с.- Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=439017>. – Последнее обновление 27.05.2018.
- 15) Кытманов, А.М. Математика. Адаптационный курс [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4866>. — Последнее обновление

[27.05.2018.](#)

- 16) Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. Ин-тов / Е. И. Лященко. и др. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.
- 17) Майсеня, Л.И. Справочник по математике: основные понятия и формулы [Электронный ресурс] / Л.И. Майсеня. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2012. – 399 с. - Режим доступа: <http://znaniyum.com/bookread2.php?book=508021>. – Последнее обновление 27.05.2018.
- 18) Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: Монография. – Красноярск: РИО КГПУ, 2001 – 368 с.
- 19) Майер, В.Р. /Компьютерная анимация в среде Живая математика на уроках геометрии / В.Р. Майер, Т.В. Апакина, Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2015
- 20) Майер, В.Р. /Системы динамической математики как эффективное средство цифровизации общего математического образования [Электронный ресурс]
<https://kmc.sfu-kras.ru/documents/podufalov-doklad2-mayer.pdf>
- 21) Малых А.Е. Опорные планиметрические задачи. Треугольники и многоугольники: учеб. пособие/ А.Е. Малых; Перм. Гос. Пед. Ун-т. -Пермь, 2010.- С. 104 - Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=18996790>. – Последнее обновление 28.05.2018.
- 22) Мерзляк А.Г. Геометрия: 8 класс; учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. 26 Якир. — М. : Вентана-Граф, 2013. — 208 с. : ил
- 23) Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.

М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2016.- 174,[2] с.

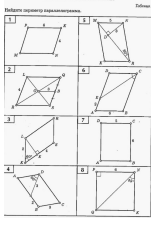
- 24) Петрушко, И.М. Сборник задач по алгебре, геометрии и началам анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И.М. Петрушко, В.И. Прохоренко, В.Ф. Сафонов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2007. — 576 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/311>. — Последнее обновление 27.05.2018.
- 25) Погорелов А.В. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.
- 26) Программа 7-9 класс. Геометрия 2024-2025.
- 27) Филимонов Д.Н. Замечательные точки и линии треугольника в курсе математики / Д.Н. Филимонов, Р. А. Мельников // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. - 2023. - № 12-5(87). - С.15
- 28) Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник/ В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М.: Проспект, 2012. - 400 с.
- 29) Чураков, Б.П. Начертательная геометрия / Б.П. Чураков, Д.Б. Чураков. - СПб.: Лань КПТ, 2016. - 256 с
- 30) Швец, М.И. Начертательная геометрия в тестовых задачах (для бакалавров) / М.И. Швец, В.Н. Тимофеев, А.П. Пакулин. - М.: КноРус, 2019. - 128 с.

Приложение

Составитель	Королева Евгения Геннадьевна	
Предмет	Геометрия	
Класс	8	
Мебель и оборудование	Персональный компьютер, проектор.	
Ресурсы и материалы	Среда Живая математика, доска, мел.	
Тема	Свойства параллелограмма.	
Тип	Обобщения и систематизации знаний	
Цель	Создать условия для формирования учащимися свойств параллелограмма.	
Задачи:		
Образовательные	Умение самостоятельно формулировать свойства фигур	
Воспитательные	формирование речевой культуры, воспитание интереса к избранной специальности, добросовестного отношения к учебе, порученному делу, дисциплинированности.	
Развивающие	развитие познавательных и мыслительных способностей, творческого и логического мышления студентов, умений ставить цели деятельности и их достигать, умений работать индивидуально при решении задач практической деятельности, умение сравнивать, обобщать, анализировать результаты;	
Планируемые результаты		
Предметные	Личностные	Метапредметные
Умение работать с параллелограммом. Умение самостоятельно формулировать свойства параллелограмма.	Развитие логического мышления; выделять главное планировать работу, вести поисковую деятельность; оценивать свои результаты	Регулятивные: умения соотносить свои действия с полученными результатами. Коммуникативные: умение работать в паре. Умение высказывать свое мнение.

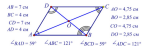
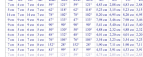
Характеристика этапов занятия

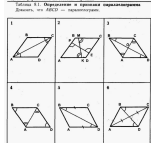
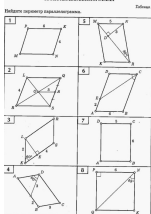
Этап	Время	форма	Решаемые задачи, методы, приемы	УУД	Оборудование	Деятельность	
						Педагога	Учащихся
Мотивация	2мин	Фронт.	Создать условия для включения в работу.	<u>Личностные</u> : мобилизация внимания, уважение к окружающим	Презентация	- Доброе утро, дети! Прошу обратить внимание	Здороваются с учителем. Настраиваются на работу.

				м.		на проектор. Слайд 1  Что это за фигура? -Дайте определение фигуре параллелограмма.	Отвечают на вопрос: Параллелограмм. Учащиеся дают определение параллелограмму.
Выявление места и причины затруднения	3мин	Фронт.	Создание проблемной ситуации для целеполагания и постановки задач	<u>Регулятивные</u>: целеполагание; планирование. <u>Познавательные</u>: логические – решение проблемы, построение логической цепи рассуждений, доказательство, выдвижение гипотез и их обоснование; <u>Предметные</u>: обозначить тему и цель занятия; выявить свойства параллелограмма.	ПК презентация	Организуется деятельность по целеполаганию и постановке учебных задач. – Обратите внимание на проектор. Давайте вместе решим задания со слайда 2. Слайд 2. 	Смотрят на проектор, отвечают на вопросы учителя. Затрудняются с ответом.
Актуализация	4	Фронт.	Выявить	<u>Личностные</u>		- Давайте	Отвечают на

ция	ми н		уровень знаний и систематизировать их.	осознание своих возможностей. <u>Регулятивные:</u> умение регулировать свои действия. <u>Коммуникативные:</u> планирование учебного сотрудничества с преподавателем и одноклассниками. <u>Познавательные:</u> логические – анализ объектов с целью выделения признаков. <u>Предметные:</u> определение параллелограмма. Выделение свойств параллелограмма.		вспомним что такое параллелограмм? - Давайте вместе попытаемся сформулировать свойства параллелограмма, исходя из его определения.	вопросы учителя.
Построение проекта выхода из затруднения и его реализация	17мин	Фронт.	Анализ проблемной ситуации и возможные пути ее решения с помощью среды Живая математика.	<u>Познавательные:</u> извлекать необходимую информацию из прослушанного, структурировать знания. <u>Коммуникативные:</u> вступать в диалог, с		Педагог предлагает детям сесть за компьютеры и открыть среду Живая математика. - Сейчас мы с вами научимся строить	Учащиеся садятся за компьютер, открывают среду Живая математика. Учащиеся

				достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли. <u>Регулятивные</u>: целеполагание; планирование.	параллелограмм. Для этого выполняем действия, которые предложены на слайде. Слайд 3 Параллелограмма ABCD построим • Проведём до точки A отрезок AA' параллельно BC (инструменты) • Находим пересечение отрезка AA' с прямой CD другой прямой. Назначим точку пересечения буквой B' • Находим пересечение отрезков AB' и AC (инструменты) - точка D' • Строим отрезки AD' и BD' (инструменты) • Соединим точки A, B, C, D, получив четырёхугольник ABCD - Сейчас мы с вами проведём эксперимент, на выявление некоторых свойств параллелограмма. Работать будем только что созданным параллелограммом. Назовём наш параллелограмм ABCD. Проведём диагонали и обозначим точку пересечения точкой O. С помощью графического калькулятора	выполняют в среде Живая математика рекомендации, представленные на слайде. Учащиеся самостоятельно заполняют таблицу с измерениями.
--	--	--	--	--	---	---

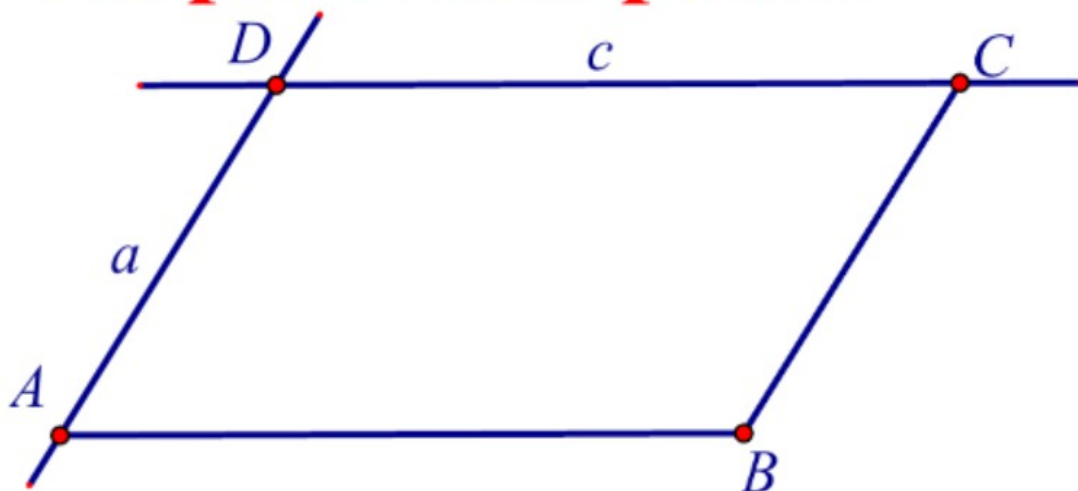
						найдем длину всех сторон и величины всех углов при его вершинах. Слайд 4  Теперь мы будем видоизменять наш параллелограмм и все изменения фиксировать в таблицу. Слайд 5.  - Какой вывод мы можем сделать? Какие закономерности мы можем увидеть? Какие свойства о параллелограмме мы зафиксируем в тетрадь?	Предположение о возможном свойстве №1 параллелограмма. В параллелограмме ABCD: $AB = CD$, $AD = BC$, т.е. противоположные стороны в параллелограмме равны. В параллелограмме ABCD: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, т.е. противоположные углы в параллелограмме равны. Предположение о возможном свойстве №2 параллелограмма. В параллелограмме ABCD: $AO = CO$, $DO = BO$, т.е. противоположные стороны в параллелограмме равны.
Включены в систему знаний	12 мин	Фронт, групповой	Включение нового знания в систему уже имеющихся знаний	<u>Регулятивные</u> : контроль, оценка, коррекция. <u>Познаватель</u>	ПК презентация	- Сейчас мы с вами разделимся на пары и	Учащиеся садятся за парты.

				<u>ные:</u> общеучебны е – умение распознавать параллелограмм по его свойствам и признакам. <u>Коммуникативные:</u> организовывать учебное взаимодействие в паре. <u>Предметные</u> : формируется умение решать задачи на нахождение сторон и углов параллелограмма.		выполним задания. Сначала работаем устно. Нам нужно доказать, что перед нами параллелограмм. Слайд 6.  -Теперь работаем в парах. Решаем задачи со следующего слайда, обсуждая решения друг с другом. Слайд 7.  Проверяем результаты.	Учащиеся устно отвечают по вопросам слайда. Ученики работают вместе, потом проверяют результаты.
Рефлексия	2мин	Фронт.	Саморефлексия собственной учебной деятельности.			- Вы все ольшие молодцы! Всё ли вам понятно было на уроке? - Какие	Учащиеся говорят, что все понятно. Противоположные стороны в

						свойства параллелограмма мы вывели на уроке? - Всем спасибо за урок. Домашнее задание будет выставлено сегодня в электронный журнал.	параллелограммы равны. Противоположные стороны в параллелограмме равны.
--	--	--	--	--	--	--	--

Слайд 1.

Параллелограмм

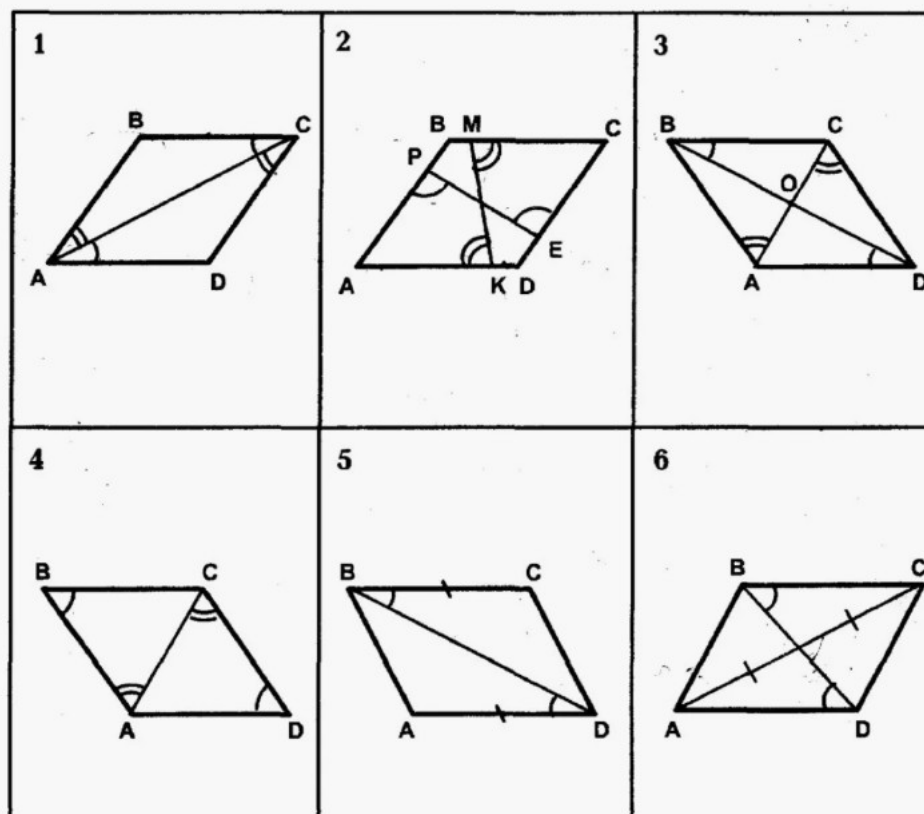


Слайд 2.

Задачи и упражнения на готовых чертежах

Таблица 8.1. Определение и признаки параллелограмма

Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

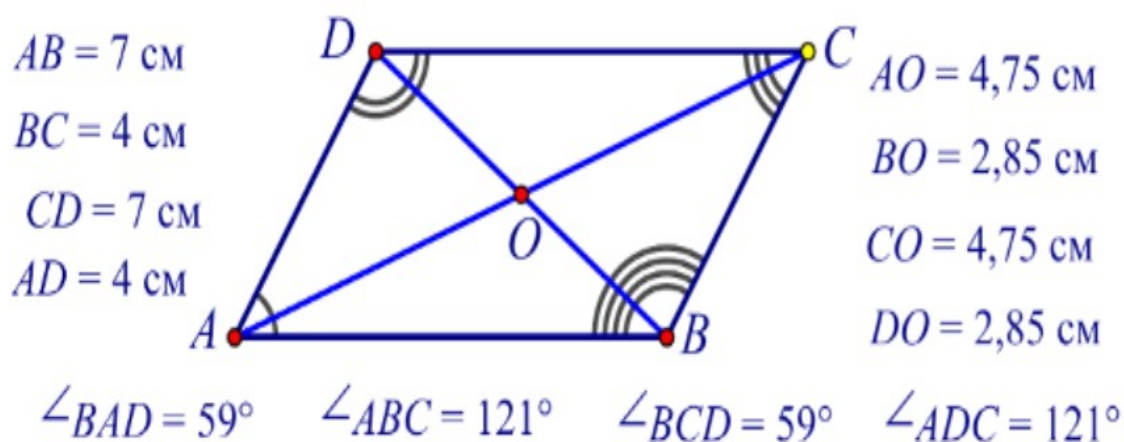


Слайд 3.

Построение параллелограмма: Пошаговая инструкция

- Нарисуйте два отрезка, соединив их под произвольным углом (инструмент линейка)
- Выделите конечную точку одного из отрезков и другой отрезок. Используйте панель «построение» и выберите функцию «параллельная прямая».
- Выделите конечную точку полученной параллельной прямой и отрезок, пересекающий ее. Снова используйте панель «построение» и функцию «параллельная прямая».
- Отметьте точку пересечения двух прямых (инструмент точка).
- Скройте построенные прямые, используя панель «вид».
- Соедините концы исходных отрезков с новой точкой (инструмент «линейка»).

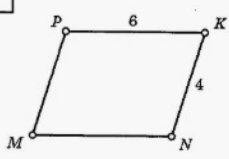
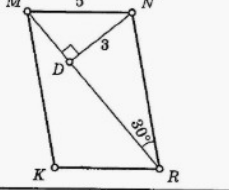
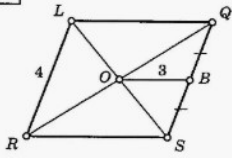
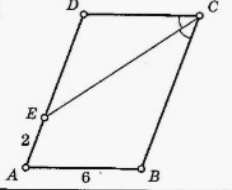
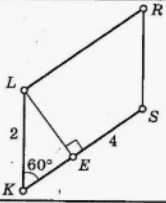
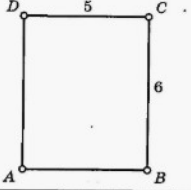
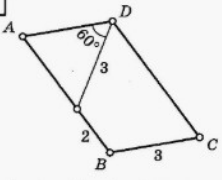
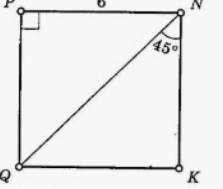
Слайд 4.



Слайд 5.

AB	BC	CD	AD	$\angle BAD$	$\angle ABC$	$\angle BCD$	$\angle ADC$	AO	BO	CO	DO
7 см	4 см	7 см	4 см	59°	121°	59°	121°	4,83 см	2,88 см	4,83 см	2,88 см
5 см	7 см	5 см	7 см	62°	118°	62°	118°	5,23 см	3,15 см	5,23 см	3,15 см
14 см	7 см	14 см	7 см	78°	102°	78°	102°	8,20 см	6,95 см	8,20 см	6,95 см
9 см	9 см	9 см	9 см	47°	133°	47°	133°	7,98 см	3,46 см	7,98 см	3,46 см
9 см	6 см	9 см	6 см	90°	90°	90°	90°	5,41 см	5,40 см	5,41 см	5,40 см
6 см	5 см	6 см	5 см	50°	130°	50°	130°	4,88 см	2,32 см	4,88 см	2,32 см
6 см	3 см	6 см	3 см	48°	132°	48°	132°	4,01 см	2,20 см	4,01 см	2,20 см
7 см	1 см	7 см	1 см	76°	104°	76°	104°	3,54 см	3,23 см	3,54 см	3,23 см
7 см	8 см	7 см	8 см	152°	28°	152°	28°	1,90 см	7,11 см	1,90 см	7,11 см
7 см	5 см	7 см	5 см	81°	99°	81°	99°	4,53 см	3,91 см	4,53 см	3,91 см
7 см	4 см	7 см	4 см	59°	121°	59°	121°	4,75 см	2,85 см	4,75 см	2,85 см

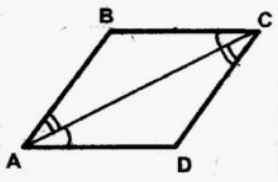
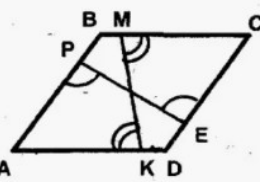
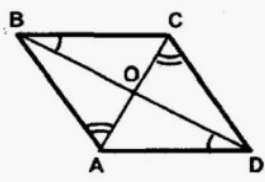
Слайд 6.

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА	
Найдите периметр параллелограмма.	
1	5
	
2	6
	
3	7
	
4	8
	

Слайд 7.

Задачи и упражнения на готовых чертежах

Таблица 8.1. **Определение и признаки параллелограмма**
Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

1	2	3
		
4	5	6
