

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра математики и методики обучения математике

Водяницкий Никита Петрович

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема: «Изучение темы «Окружность» в курсе геометрии основной школы с использованием анимационных чертежей»

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Профиль (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой, к.п.н., доцент Шашкина М.Б.

(дата, подпись)

Руководитель: д-р п.н., профессор Майер В.Р.

Дата защиты _____ «19» 06. 2025 _____

Обучающийся: Водяницкий Н.П.

Оценка _____

(прописью)

Красноярск, 2025

Содержание

Введение	3
Глава 1. Методические и цифровые аспекты изучения основных свойств и признаков окружности в курсе геометрии основной школы	6
1.1. Анализ основных свойств и признаков окружности в школьных учебниках по геометрии, обзор традиционных методик обучения этим свойствам и признакам.	6
1.2. Системы динамической математики Живая математика и Математический конструктор как средства создания анимационных чертежей для изучения окружности.....	10
Выводы по главе 1.....	17
Глава 2. Применение анимационных чертежей при изучении окружности в курсе геометрии основной школы	20
2.1 Конструктивные задачи, связанные с построением окружности.....	20
2.2 Взаимное расположение окружности и многоугольников.....	28
2.3. Длина окружности, площадь круга.....	38
2.4. Результаты педагогического эксперимента.....	41
Выводы по главе 2.....	44
Заключение	46
Список литературы	48
Приложение А.....	50
Приложение Б.....	57
Приложение В.....	63
Приложение Г.....	69

ВВЕДЕНИЕ

Изучение темы «Окружность» в курсе геометрии основной школы традиционно вызывает затруднения и у учеников, и у преподавателей. На собственном опыте работы с учащимися мы неоднократно наблюдали, что даже при подробном изложении теоретического материала многие школьники остаются неуверенными в понимании свойств окружности, не могут самостоятельно обосновать явления, связанные с касательными, дугами, вписанными и описанными фигурами, длиной окружности и площадью круга. Анализ результатов Всероссийских проверочных работ (ВПР) за 2024 год в Красноярском крае свидетельствует о системных проблемах: более 35 % учащихся восьмых классов продемонстрировали результат ниже заявленного уровня, что указывает на необходимость модернизации традиционных методов обучения.

Классические методики преподавания, представленные в школьных учебниках (например, авторского коллектива Л.С. Атанасяна) и учебно-методических пособиях («Методика обучения геометрии» Л.Г. Петерсон; рекомендации ФИПИ по подготовке к ОГЭ и ЕГЭ и др.), опираются преимущественно на чертежи от руки, устные рассуждения и статические иллюстрации. Мы считаем, современные школьники, выросшие в цифровой среде, нуждаются в более наглядных, интерактивных формах подачи материала. В этом контексте перспективным направлением становится использование цифровых динамических моделей (СДМ), позволяющих визуализировать свойства геометрических объектов в движении и тем самым повышать уровень понимания.

Нами было замечено, что при объяснении темы с использованием анимации (например, в среде GeoGebra или «Математическом конструкторе») учащиеся быстрее схватывают логику построений, легче интерпретируют условия задач и с интересом включаются в обсуждение. Это наблюдение легло в основу идеи разработать методическое пособие по теме «Окружность» с

включением анимационных чертежей, интегрированных в структуру традиционного урока.

Актуальность данного исследования обусловлена несколькими важными причинами. Во-первых, результаты Всероссийских проверочных работ и наблюдения педагогов свидетельствуют о затруднениях учащихся при изучении темы «Окружность», особенно в части построений, касающихся касательных, вписанных и описанных углов, дуг и хорд. Во-вторых, современные ученики чаще воспринимают информацию преимущественно через визуальные и интерактивные формы, а это требует внедрения в учебный процесс цифровых динамических моделей (СДМ), дающих возможность наглядно продемонстрировать свойства геометрических объектов.

Дополнительную значимость даёт и технологический аспект: в условиях импортозамещения и ограниченного доступа к ряду зарубежных программных продуктов в сфере образования, возникает потребность в использовании и совершенствовании отечественных цифровых решений. Это диктует необходимость разработки методических подходов, адаптированных под российские СДМ, такие как «Математический конструктор». Исследование сочетает в себе педагогическую и технологическую актуальность, соответствующую современным задачам отечественного образования.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в основной школе.

Предмет исследования: Приёмы и способы обучения теме «Окружность» в курсе геометрии основной школы с использованием анимационных чертежей.

Цель исследования: разработать приёмы и способы применения авторской методической копилки анимационных чертежей к избранным теоремам и задачам об окружности в курсе геометрии основной школы.

В соответствии с объектом, предметом и целью исследования была определена **гипотеза:** если в процессе обучения теме «Окружность» использовать авторскую методическую копилку анимационных чертежей к избранным теоремам и задачам об окружности в основной школе (см. [3]) и

соответствующую методику использования чертежей на уроках геометрии, то это позволит повысить качество геометрической подготовки учащихся, их мотивацию к обучению.

Соответственно цели, предмету и гипотезе исследования были поставлены следующие **задачи исследования:**

1. Изучить особенности традиционной методики обучения теме «Окружность» (на основе учебника Л.С. Атанасяна) и возможность интеграции этой методики с анимационным подходом к обучению геометрии;
2. Проанализировать возможность использования анимационных чертежей авторской методической копилки при изучении окружности в курсе геометрии основной школы;
3. Разработать серию занятий с применением анимационных чертежей по теме «Окружность»;
4. Провести апробацию разработанного пособия в условиях учебной практики и зафиксировать полученные результаты;
5. Сформулировать методические рекомендации по применению цифровых моделей при обучении теме «Окружность» в основной школе.

Глава 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ И ЦИФРОВЫЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ И ПРИЗНАКОВ ОКРУЖНОСТИ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1. Анализ основных свойств и признаков окружности в школьных учебниках, обзор традиционных методик обучения этим свойствам и признакам

В базовой линии ФГОС темы, связанные с окружностью, распределены по трём годам обучения (7–9 кл.) и охватывают:

- 1) Взаимное расположение прямой и окружности;
- 2) Касательная к окружности и её свойство (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной);
- 3) Центральные и вписанные углы;
- 4) Угол между касательной и хордой;
- 5) Сегменты и теорема о хордах (степень точки);
- 6) Вписанные и описанные окружности треугольника, четырёхугольника;
- 7) Длина окружности, дуги; площадь круга и сектора;
- 8) Связь периметров / площадей фигур с радиусами вписанных или описанных окружностей.

В выпускной квалификационной работе в качестве содержательно-методического «якоря» мы будем опираться на линию Л. С. Атанасяна (7–9 кл.) — на данный момент единственный учебник по геометрии включённый в действующий перечень ФГОС и используемый в школах Российской Федерации. Именно он задаёт обязательный минимум, определяет порядок введения понятий и формулировку ключевых свойств окружности. Сравнивать и вести анализ эффективности обучения без применения СДМ и вместе с ними буду вести относительно «базовой» трактовки Л. С. Атанасяна.

В двух словах — курс геометрии Л.С. Атанасяна и со-авторов остается самой «долгоиграющей» линией в российском школьном образовании: он пережил пять поколений стандартов (от программы 1975 г. до ФГОС-2021), 14 переизданий и до сих пор входит в федеральный перечень учебников.

Учебник следует классической Евклидовой схеме: от начальных понятий — к аксиомам, далее — к систематическому доказательству теорем. Это делает курс ядром подготовки к ОГЭ/ЕГЭ по геометрии, где 60–70 % заданий проверяют доказательную культуру.

В учебнике Л.С. Атанасяна тема «Окружность» представлена в данных параграфах (Таблица 1)

Каждый параграф завершается группой «задач на построение»; по методике авторов рекомендуется схема «анализ → план → построение»
Материал за 7-9 класс. служит базой; в 10-11 классе. тот же УМК (базовый/углублённый уровни) возвращается к планиметрии на новом уровне абстракции (векторы, преобразования, тригонометрия).

По действующим ФГОС-2021 линия Л.С. Атанасяна разнесена на три части: 7 кл. (§ 1–38), 8 кл. (§ 39–75) и 9 кл. (§ 76–127).

Блок	Параграф(ы)	Ключевая формулировка
Определение и первые построения	§ 21 «Окружность»	определение, радиус/диаметр, первые построения (окружность через 2–3 точки, окружность радиуса r)
Касательная	§ 69 «Касательная к окружности»	Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной. Радиус,

		проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.
Центральные / вписанные углы	§ 70–71	Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
Угол между касательной и хордой	§ 71, задачи после теоремы	Угол между касательной и хордой равен половине заключённой дуги.
Вписанные / описанные окружности	§ 74–75	Дан алгоритм построения центров и выводятся формулы для r и R треугольника.
Длина, площадь	§ 110–112	Вывод формул $L = 2\pi R$, $S = \pi R^2$, $S_{\text{сектора}} = (\alpha/360^\circ) \cdot \pi R^2$.

Таблица 1

Тема «Окружность» входит трижды. Количество задач и иллюстраций представлены в таблице 2.

первое знакомство — § 21 в 7-м классе (определение и первые построения);

основной курс — целая Глава 8 (§ 68-75) в 8-м классе;

метрический блок (длина C и площадь S) — § 110-112 в 9-м классе.

Класс	Раздел / параграфы (14-е изд.)	Страницы	Иллюстрации (ч/б схем)	Типы заданий (кол-во)
7 кл.	Гл. II § 21 «Окружность. Первые построения»	6	8	27 (15 устн. + 12 письм.)
8 кл.	Гл. VIII § 68 – 71 «Касательная; углы, связанные с окружностью»	10	18	60 (36 устн. + 24 письм.)
8 кл.	Гл. VIII § 72 – 75 «Четыре замечательные точки треугольника; впис./опис. окружности»	8	14	45 (28 доказат. + 17 построений)
9 кл.	Гл. XII § 110 – 112 «Длина C и площадь S круга»	6	10	34 (22 вычислит. + 12 прикладных)

Таблица 2

Из региональных отчётов ОГЭ-2023 видно, что задания на *центральные и вписанные углы* остаются одними из самых тяжёлых: верно их выполнили лишь $\approx 3\%$ девятиклассников Красноярского края. Эксперты подчёркивают «незнание соотношения градусных мер» как типичную ошибку.

Атанасян Л.С. предоставляет строгие доказательства, но сопровождается лаконичными (иногда перегруженными) рисунками – среднее

отношение «текст : чертёж» $\approx 2,1 : 1$.

Отсутствие встроенных динамических визуализаций в обоих курсах частично объясняет, почему учащимся сложно выполнять задания, требующие мысленного «перемещения» дуги или хорды.

Для школьника это означает необходимость постоянно держать в голове трёхмерную «анимацию» плоских чертежей — навык, который формируется далеко не у всех и который требует серьёзно развитого пространственного воображения.

Когда же воображаемая модель даёт сбой, доказательство рассыпается, а задача превращается в набор непонятных букв на рисунке. Не случайно отчёты ОГЭ-2023 показывают такой малый процент девятиклассников корректно справившихся с заданиями на центральные и вписанные углы, где без мысленного перемещения дуги или хорды не обойтись.

Таким образом, сильная сторона программы Л.С. Атанасяна — академическая полнота — оборачивается слабостью в части наглядности. Чтобы «оживить» окружность и снять избыточную когнитивную нагрузку, требуется инструмент, который позволит не представлять движение, а увидеть его. Эту роль способны взять на себя системы динамической математики (СДМ). Их потенциалу по преодолению выявленных методических дефицитов посвящён следующий пункт.

1.2 Системы динамической математики Живая математика и Математический конструктор как средства создания анимационных чертежей для изучения окружности

Исторический контекст развития СДМ

Первые попытки «оживить» геометрический чертёж относятся к середине XX века, когда в университетских лабораториях появились векторные дисплеи. Инженеры экспериментировали с программами, позволяющими двигать точки и наблюдать, как линии следуют за ними. Однако до массовой школы эти идеи не доходили: для использования требовались дорогие мейнфреймы и квалифицированные операторы.

Ситуация изменилась в 1967 году, после публикации Сеймура Пейперта о языке программирования LOGO. В LOGO черепаха, оставляющая след, наглядно демонстрировала исполнение алгоритма. Пейперт показал, что ребёнок может управлять процессом, а не просто наблюдать результат. Логика «команда – движение – след» стала методологической основой будущих систем динамической геометрии: фигура должна оставаться связанной с правилом её построения.

В 1980-е годы на волне распространения микрокомпьютеров Apple II и IBM PC появилась первая программа, ориентированная на школу, — французский Cabri Géomètre. Её автор, Жан-Мари Лаборде, ввёл ключевое понятие «динамический объект»: изменение одного элемента автоматически перестраивает все зависимые. Теперь учащийся мог провести эксперимент, просто перетаскивая точку мышью, — без сложного ввода команд.

В 1989 году американская компания Key Curriculum выпустила The Geometer's Sketchpad. Разработчики сделали ставку на простоту: достаточно выбрать инструмент «точка» и кликнуть, чтобы мгновенно построить элемент. Sketchpad быстро вошёл в учебники США, потому что позволял учителю демонстрировать целые семейства конфигураций вместо одного рисунка.

Российские учителя познакомились со Sketchpad в середине 1990-х. Локализованная версия получила название «Живая геометрия», а затем, после расширения функционала, — «Живая математика». Принципиально важным новшеством стали макрокоманды: учитель мог записать алгоритм построения и распространять его среди коллег, не раскрывая внутренних шагов. Благодаря этому возникли первые коллективные библиотеки динамических моделей.

К началу 2000-х форсировалась идея открытого образования. Австрийская GeoGebra, объединяющая геометрию, алгебру и анализ, стала символом бесплатного доступа к цифровым средствам. Однако в России практическая интеграция GeoGebra сталкивалась с проблемой нестабильного

доступа к зарубежным серверам, что обострило тему технологической независимости.

Ответом стало создание отечественной среды «Математический конструктор» (1С, 2006). Разработчики поставили цель обеспечить полную автономность: формат файлов основан на открытом XML, техподдержка и обновления размещены на российских серверах, а программа интегрирована с образовательной платформой «1С:Образование». Конструктор изначально проектировался для уроков: встроенные задания, автоматическая проверка, экспорт отчётов в электронный журнал.

Сегодня СДМ переживает новый виток благодаря веб-технологиям. Бета-версия веб-редактора «Математического конструктора» (2025) обещает доступ к динамическим чертежам в обычном браузере без установки ПО, что открывает путь к массовым домашним заданиям и дистанционным урокам. Таким образом, за четыре десятилетия «живая геометрия» прошла путь от лабораторных экспериментов до центра цифровой трансформации школы.

Нормативно-методическое обоснование применения СДМ

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования, утверждённый приказом Минпросвещения России от 31 мая 2022 года № 287, фиксирует требование формировать у обучающихся способность «использовать цифровые инструменты для создания, исследования и представления математических моделей» (раздел II, п. 29.2). Системы динамической математики полностью удовлетворяют этой позиции, поскольку каждая модель не статична, а интерактивна: ученик конструирует объект, варьирует параметры, наблюдает изменения и делает выводы на основе визуальных данных.

Концепция математического образования (Приказ Минобрнауки № 1955 от 24.12.2013) подчёркивает необходимость усиления исследовательского характера учебного процесса. СДМ предоставляет технологическую основу для перехода от демонстрации к самостоятельному поиску закономерностей. Ученик не просто воспринимает готовое

доказательство, а воспроизводит его, двигая элементы и фиксируя наблюдения.

Стратегия развития информационного общества (Указ Президента РФ № 203 от 09.05.2017) ставит задачу импортонезависимости ключевых информационных систем. «Математический конструктор» как российский продукт обеспечивает выполнение этого требования, предлагая школам безопасную экосистему без зависимости от зарубежной инфраструктуры.

Таким образом, нормативная база одновременно задаёт ориентир на исследовательскую деятельность и цифровой суверенитет. Использование отечественной СДМ отвечает обоим вызовам и выступает логичным шагом в реализации ФГОС-2022.

«Живая математика» (прежнее название — «Живая геометрия») представляет собой русскую локализацию англоязычного The Geometer's Sketchpad. Программа распространяется в России с начала 2000-х и сохранила все сильные стороны оригинала. Интерфейс строится вокруг трёх базовых действий — построить, измерить, преобразовать — поэтому входной порог для учителя минимален: чтобы создать окружность, достаточно двух кликов. Каждый объект жёстко привязан к логике построения, благодаря чему движение любой опорной точки автоматически обновляет всю конструкцию. Встроенные инструменты позволяют анимировать параметры, трассировать траектории, строить зависимости в координатной форме и даже связывать объекты с формулами. Особенно ценна библиотека готовых моделей, поставляемая вместе с программой: учителю доступно более двухсот шаблонов от элементарных задач до доказательств теорем Евклида, причём каждый чертёж снабжён пошаговым сценарием урока. Лицензирование происходит по модели «рабочее место учителя + неограниченное число демонстраций», что удобно для фронтальной работы с проектором, но ограничивает использование на ученических компьютерах. Продукт устанавливается локально, не требует подключения к интернету и устойчиво работает даже на устаревших компьютерах — важное свойство для

школ с низкой материальной базой. При этом обновления выпускаются нерегулярно, а переход на современные веб-технологии пока не подтверждён разработчиком.

«Математический конструктор» создан фирмой 1С и Институтом системных исследований РАН в 2006 году как национальная альтернатива зарубежным СДМ. В отличие от «Живой математики», программа сразу задумывалась как часть комплексной цифровой среды «1С:Образование»: чертежи, задания и результаты хранятся в единой базе, а доступ регулируется школьным журналом. Интерфейс более строгий: панель элементов сгруппирована по этапам построения (точки, линии, окружности, спецобъекты), а окно свойств позволяет задавать числовые ограничения, вводить формулы и параметры. Конструктор поддерживает создание интерактивных заданий: учитель может защитить ключевые элементы от редактирования, задать контрольные точки и подключить автоматическую проверку правильности построения. После выполнения система формирует отчёт, который экспортируется в электронный дневник. С 2025 года доступна бета-версия веб-редактора, работающая в браузере без установки клиентского ПО. Это сокращает технические барьеры и делает возможным массовое домашнее конструирование. Лицензия входит в пакет «1С:Образование», поэтому не требует дополнительных затрат. Программа активно сопровождается: ежегодно выходят обновления, расширяющие библиотеку макросов, а техподдержка проводит регулярные вебинары. Ключевым преимуществом является полная импортонезависимость: серверы, исходный код и саппорт размещены в России, что соответствует государственной политике цифрового суверенитета.

Критерий	Живая математика	Математический конструктор	Педагогическое значение	Стратегический фактор
Лицензирование	Зарубежная, требует закупки	Российская, входит в «1С:Образование»	Доступ ограничен договором поставки	Соответствует политике импортозамещения
Интерфейс	Интуитивный, минималистичный	Строгий стиль 1С, единый для школьных ИС	Быстро вовлекает новичка	Упрощает сопровождение ИТ-специалистом
Веб-доступ	Отсутствует, Java-апплет устарел	Публичная бета веб-редактора с 2025 г.	Домашние задания онлайн	Расширение до дистанционных школ
Набор инструментов	Планиметрия, базовая алгебра	Геометрия, графики, проверка ответов	Интеграция задач ЕГЭ/ОГЭ	Платформа для 3D-блока
Проверка построений	Ручная	Автоматическая с фиксацией ошибок	Экономит время урока	Основа адаптивных тренажёров
Системные требования	Windows/macOS, офлайн	Windows/Linux/macOS; интеграция с 1С	Работает в компьютерном классе	Единая экосистема школы

Таблица 3

Дидактический потенциал динамических сред

Параметризация объектов радикально повышает качество визуализации. Когда я изменяю положение точки на окружности, всё построение перестраивается мгновенно: хорды, касательные, углы адаптируются к новой конфигурации. Ученики видят не один иллюстративный пример, а весь непрерывный спектр ситуаций, что позволяет им формулировать обобщённые законы, опираясь на наблюдение постоянно сохраняющихся свойств.

Исследовательская деятельность получает реальное наполнение: ученики ставят гипотезу, например о зависимости вписанного угла от длины дуги, и сразу проверяют её, перетаскивая вершину. Такой формат превращает урок из трансляции готовых знаний в управляемое открытие, когда доказательство рождается от личного опыта наблюдения.

Метапредметные результаты выражаются не только в умении работать с цифровыми инструментами. СДМ требует планировать эксперимент: выбрать параметр, определить диапазон изменения, зафиксировать результат. Затем нужно интерпретировать данные и обосновать вывод, опираясь на факты. Этот цикл полностью соответствует универсальным учебным действиям, прописанным в ФГОС, и формирует навыки, ценимые за пределами урока математики.

Функциональная грамотность растёт за счёт снижения когнитивной нагрузки. Сложные конфигурации, которые на доске выглядят перегруженными, в СДМ показываются поэтапно: ученик видит, как из пары точек рождается медиана, перпендикуляр, окружность. Поэтому внимание сосредотачивается на логике отношений, а не на абстрактных символах.

В общем, СДМ создаёт условия для индивидуализации. В веб-версии «Математического конструктора» учитель назначает каждому ученику собственный параметр задачи. Уровень сложности и подсказки варьируются автоматически, а система фиксирует ход построения для дальнейшей аналитики. Такой подход поднимает мотивацию, поскольку каждый видит личный прогресс и получает своевременную помощь.

Технологические и организационные аспекты внедрения

Практический опыт показывает, что для запуска урока с СДМ достаточно стандартного кабинета информатики: ПК учителя подключён к проектору, а в групповой работе используются несколько ученических ноутбуков. Программный комплекс развёртывается по модели «тонкого клиента»: серверная часть «Математического конструктора» устанавливается единожды, после чего учащиеся входят через браузер под своими логинами.

Курсы повышения квалификации для педагогов строятся по модульному принципу. Первый модуль знакомит с базовыми инструментами построения, второй — с параметрическими анимациями и макросами, третий — с методикой конструирования исследовательского урока. Финальным продуктом обучения становится авторская модель, которую учитель затем апробирует на открытом занятии.

Организация учебного времени требует чёткого тайминга. Эффективной показала себя структура: постановка проблемы — 5 минут, пошаговая демонстрация модели — 10 минут, самостоятельная работа учеников за компьютерами — 20 минут, коллективный анализ результатов — 7 минут, формулировка вывода и домашнего задания — 3 минуты. Такая схема позволяет сохранить традиционный 45-минутный формат и обеспечить глубокое погружение в материал.

Перспективы развития отечественной СДМ

В краткосрочной перспективе решающим шагом станет завершение веб-версии «Математического конструктора». Школы получают возможность раздавать задания в браузере и автоматически фиксировать результаты в электронном журнале, а ученики смогут работать из дома на любом устройстве.

Среднесрочная перспектива — расширение функционала до 3D-моделирования. Стереометрический блок позволит визуализировать пространственные конфигурации и устранить традиционные пробелы в понимании тем о взаимном расположении прямых и плоскостей.

Долгосрочное направление — внедрение интеллектуальных алгоритмов сопровождения. Система будет отслеживать ход построения, предлагать индивидуальные подсказки и формировать адаптивные траектории обучения, повышая персонализацию учебного процесса.

Выводы по главе 1

Анализ школьных учебников (линия Л.С. Атанасяна и др.) и действующих методик показал, что изложение свойств окружности основано

на статичных чертежах, фронтальных объяснениях и репродуктивных заданиях, что затрудняет формирование прочных представлений об инвариантности радиуса, взаимосвязи дуг, хорд, углов и т. д.; это подтверждается результатами ВПР-2024, где более 35 % восьмиклассников Красноярского края не достигли базового уровня по тематическим заданиям. Современные школьники, относящиеся к «цифровому» поколению, легче осваивают материал, когда могут наблюдать динамику геометрических зависимостей и экспериментировать с моделями, поэтому использование цифровых динамических моделей (СДМ) рассматривается как ключевой резерв повышения мотивации и успешности. Системы динамической математики, такие как «Живая математика», обеспечивающая интуитивный интерфейс и богатый набор инструментов, пусть и требующая установки коммерческого ПО и поддержки англоязычных ресурсов, и «Математический конструктор», полностью русифицированный, свободно распространяемый для школ, поддерживающий скриптовую анимацию и легко интегрируемый с интерактивной доской, открывают новые дидактические возможности: они позволяют строить анимационные чертежи, в которых учащиеся перетягивают опорные точки, наблюдая сохранение расстояний, появление касательных, изменение углов, переводя работу с чертежом из статичной иллюстрации в режим исследовательского эксперимента. Из этого следуют методические выводы: для прочного усвоения свойств окружности необходим переход от статичной демонстрации к динамическому конструированию, где ключевыми приёмами становятся исследование инвариантов при перетаскивании точек, визуальное подтверждение теорем и самостоятельное формулирование выводов, а внедрение СДМ должно быть системным, предполагающим встраивание анимационных чертежей в структуру урока, сочетание их с традиционными доказательствами и письменными построениями и использование их как инструмента формативного оценивания. Проведённый методический и технологический анализ подтвердил актуальность разработки авторской копилки анимационных чертежей по теме «Окружность» и заложил

теоретическую основу, зафиксировав критерии выбора СДМ, что позволяет во второй главе перейти к конкретному проектированию и апробации цифровых ресурсов в учебной практике .

Глава 2. ПРИМЕНЕНИЕ АНИМАЦИОННЫХ ЧЕРТЕЖЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОКРУЖНОСТИ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

2.1. Конструктивные задачи, связанные с построением окружности

Чтобы сформулировать определение окружности, методики В. В. Давыдова, Н. Б. Истоминой и Е. Д. Поляка предлагают начать с действия. Учитель даёт ученику «кисть-точку»: кусок мела, прикреплённый ниткой к кнопке на доске, или фломастер, привязанный к гвоздику на ватмане. Ребёнок совершает полный оборот, набирая «круг», после чего класс обсуждает наблюдаемое свойство: каждая точка линии равноудалена от центра.

Приём «Останови-измерь» когда во время вращения учитель произвольно останавливает руку ученика, измеряет расстояние до центра линейкой, затем повторяет процедуру в другом положении. Совпадение расстояний фиксируется в тетради. Так формируется первичное эмпирическое правило.

Параграф §21 (*Окружность и круг*) вводит определение словесно, иллюстрируя рисунком 66. Далее, в задачах 154–159, учащимся предлагается «построить радиус», «доказать равенство», однако метод поиска не раскрывается. В §23 задачи 180–182 формулируются как «Постройте окружность...», но авторы предполагают, что дети владеют приёмом «ГМТ». Динамические сцены восполняют эту методическую неполноту: они переводят статичное условие в движение, делая очевидными разные пути решения задачи меняя длину радиуса и локацию центра.

Следующий дидактический шаг – вербализация. Ученики переводят зрительный опыт в язык: «точки расположены на одинаковом расстоянии». Для экономии речи вводится новый термин – радиус, а затем и точное определение: окружность – множество точек плоскости, находящихся на фиксированном расстоянии от заданной точки – центра.

В III книге «Начал» Евклид формулирует определение почти дословно, а в античном мире круг символизировал совершенство и вечность. Упоминание этих фактов показывает учащимся, что они приобщаются к многовековой цепочке математической мысли.

Дидактическая логика урока строится на четырёх этапах. На этапе проблемного открытия действие с «ниткой-окружностью» будит познавательный интерес. Операционализация превращает интуитивную догадку в измеримый факт: школьники фиксируют результаты опытов в тетрадях и видят, что радиус не изменяется. Этап формулировки определения трансформирует бытовую фразу в строгий математический текст, а закрепление переносит новое понятие в контекст задач: «построй окружность заданного радиуса», «измерь и сравни», «сделай вывод».

Практика показывает, что при таком подходе проявляются три типичных затруднения. Во-первых, дети смешивают круг и окружность. Чтобы развести понятия, учитель использует приём «раскрась»: внутренняя область штрихуется и получает отдельное имя – круг. Во-вторых, у многих слабо развита моторика работы циркулем; здесь помогает короткая «тренировка хвата», когда несколько минут отводятся только на правильную постановку инструмента. В-третьих, само слово «множество» остаётся абстрактным. Карточная метафора «собери коллекцию точек, которые...» переводит его на уровень конкретного действия.

Компоновка материала в такой последовательности даёт двойной результат. С одной стороны, ученики получают операциональное представление: они умеют проверять, является ли точка элементом окружности, просто измеряя радиус. С другой – формируется понятийное ядро, связанное со строгим определением, историческим контекстом и новой лексикой.

В заключение учитель подводит итог: любой дальнейший разговор об окружности, будь то признаки касательной или задачи на взаимное

расположение фигур, опирается на сегодняшнее определение. Урок, где ребёнок сначала «рисует круг», потом «измеряет радиус» и лишь затем «даёт имя объекту», интегрирует действие, слово и мысль в единую линию понимания. Именно эта связка превращает абстрактную геометрию в осмысленную науку, а первое знакомство с окружностью – в личное математическое открытие.

К классическому осмыслению темы «окружность» в школьной геометрии неизменно ведут два простых, но незаменимых инструмента — циркуль и линейка. Циркуль, позволяя сохранить неизменным радиус при вращении вокруг центра, даёт ученику наглядное ощущение постоянства расстояния; линейка, проводя прямые и откладывая отрезки, приучает к визуальной проверке гипотез. Именно через практическое владение этими осязаемыми приборами школьник делает первые шаги к абстрактному пониманию свойств окружности, а учитель получает естественный мостик к разговору о более сложных, «живых» цифровых построениях.

Работа с циркулем начинается с отработки базовых умений: раскрыть ножки на заданную длину, зафиксировать винт, установить иглу точно в центр будущей окружности, а затем, не изменяя размаха, плавно провести карандашную ножку, описывая линию. В это время линейка служит для контроля: после окончания вращения ею проверяют, не сбил ли радиус. Так формируются важные навыки. Во-первых, развивается тонкая моторика: аккуратное нажатие и равномерное движение порождают чистый, без «тройных» следов, штрих. Во-вторых, закрепляется планирование действий — последовательность «центр → радиус → окружность» помогает мыслить алгоритмически. Наконец, регулярное сопоставление результата с линейкой вводит элемент критической проверки.

Появляющиеся ошибки типичны и легко устраняются: если центр «сползает», учитель советует выделить маленькую «колодезную» точку мягким грифелем; слишком сильное давление лечится тренировкой лёгкого

нажима; чтобы радиус не разбился при серийных построениях, достаточно каждый раз проверять размах по линейке перед новым кругом.

Когда ручной навык закреплён, на сцену выходит динамическая геометрическая среда. Учитель демонстрирует то же построение в конструкторе: виртуальный циркуль фиксирует радиус, а компьютер мгновенно переначерчивает окружность при перемещении центра. Так подчеркивается главная мысль: машина лишь повторяет то, что человек уже понял руками. Связь мануального и цифрового опыта усиливает визуальное мышление и готовит к «живым» чертежам.

На уроке-«дуплексе» бумажное и цифровое черчение развёртываются синхронно. Сначала ученики строят окружность радиуса R карандашом, а на экране задаётся такой же R , прикреплённый к ползунку — школьники сразу видят, что величина постоянна. Затем проводится прямая m : на листе — простым взмахом линейки, в программе — как свободный объект. Далее ищутся точки пересечения; когда в динамике центр окружности перемещается вдоль прямой, на мониторе мгновенно вспыхивают случаи с нулём, одной или двумя общими точками, и в сознании возникает обобщение «геометрическое место». В конце фиксируются ключевые положения: на бумаге — цветными отметками, в приложении — скриншотами «0, 1, 2 решений». Так рождается понимание зависимости результата от условий.

Шаг	Бумага и циркуль	СДМ	Педагогический эффект
1	Построй окружность радиуса R	Задай радиус R , прикрепи к ползунку	Осознание, что R постоянен
2	Проведи прямую m	Создай свободную прямую	Видны все взаимные положения
3	Найди точки пересечения	Перетащи центр: мгновенный отклик	Понимание зависимости результата от положения центра
4	Зафиксируй положения	Сделай снимки экрана «0,1,2 решений»	Возникает обобщение «геометрическое место»

Для парной работы предлагается задание «от заморозки к бумаге»: один ученик в СДМ останавливает чертёж в положении касания, второй воспроизводит этот же случай циркулем в тетради. Другой вариант — отыскать позицию, где расстояние от центра до прямой равно $1,5 R$, и аккуратно проиллюстрировать её вручную.

Методически важно следить за темпом. Роли «мыши» и «циркуля» меняются каждые три минуты, чтобы каждый прочувствовал оба способа. Анимацию рекомендуется замедлять пошаговым перетаскиванием, чтобы обсудить граничные случаи, а вспомогательные линии периодически скрывать, разгружая экран и возвращая внимание к сути.

Такое сочетание рождает «двойной код»: ребёнок способен сам начертить необходимый объект и одновременно воочию наблюдать, как он ведёт себя при изменении параметров. В итоге прочнее усваивается зависимость конструкции от исходных условий, развивается последовательное мышление и формируется привычка к доказательности — ведь любой вывод теперь подтверждён и рукой, и движущейся моделью.

Задача 180 из учебника Л. С. Атанасяна начинается с её дидактической насыщенности. Это первая задача курса, где требуется соединить локальное действие — отложить заданный радиус — с глобальным условием, по которому центр окружности обязан лежать на прямой. Уже одно это заставляет учащегося удерживать в поле внимания два уровня информации: непосредственную операцию циркулем и общую геометрическую ситуацию. При таком построении естественным образом возникают три качественно различные конфигурации: отсутствие общих точек окружности и прямой, единственное касание и два пересечения. Ученик своими руками видит смену случаев, что постепенно подводит его к идее геометрического места точек, удовлетворяющих заданному условию, — переходу от частных картинок к обобщённому понятию.

Задача вписывается и в дальнейшее содержательное развитие курса. В теме о касательных и секущих она служит первой интуитивной иллюстрацией того, что в точке одиночного касания радиус перпендикулярен прямой; позднее это наблюдение превращается в теорему. При изучении описанных и вписанных окружностей навыки поиска центра, ограниченного дополнительным условием, переносятся с прямой на стороны треугольников и четырёхугольников, делая новый материал менее «чужим». Благодаря прежнему опыту с динамическим «живым» чертежом школьники воспринимают аналитическую запись не как абстрактную формулу, а как знакомую картинку, описанную языком чисел и переменных. Таким образом, одна задача формирует прочный концептуальный мост от ручного построения к теоретическому осмыслению и будущим разделам программы.

Начинается урок с вопроса (Рисунок 1): «Покакой траектории движется точка М?» Обычная реакция: «По кругу». Учитель слегка уточняет: «Круг — это площадь; а нам нужна линия. Как называется линия края круга?» — «Окружность». Так тема выводится учениками, и не навязывается.

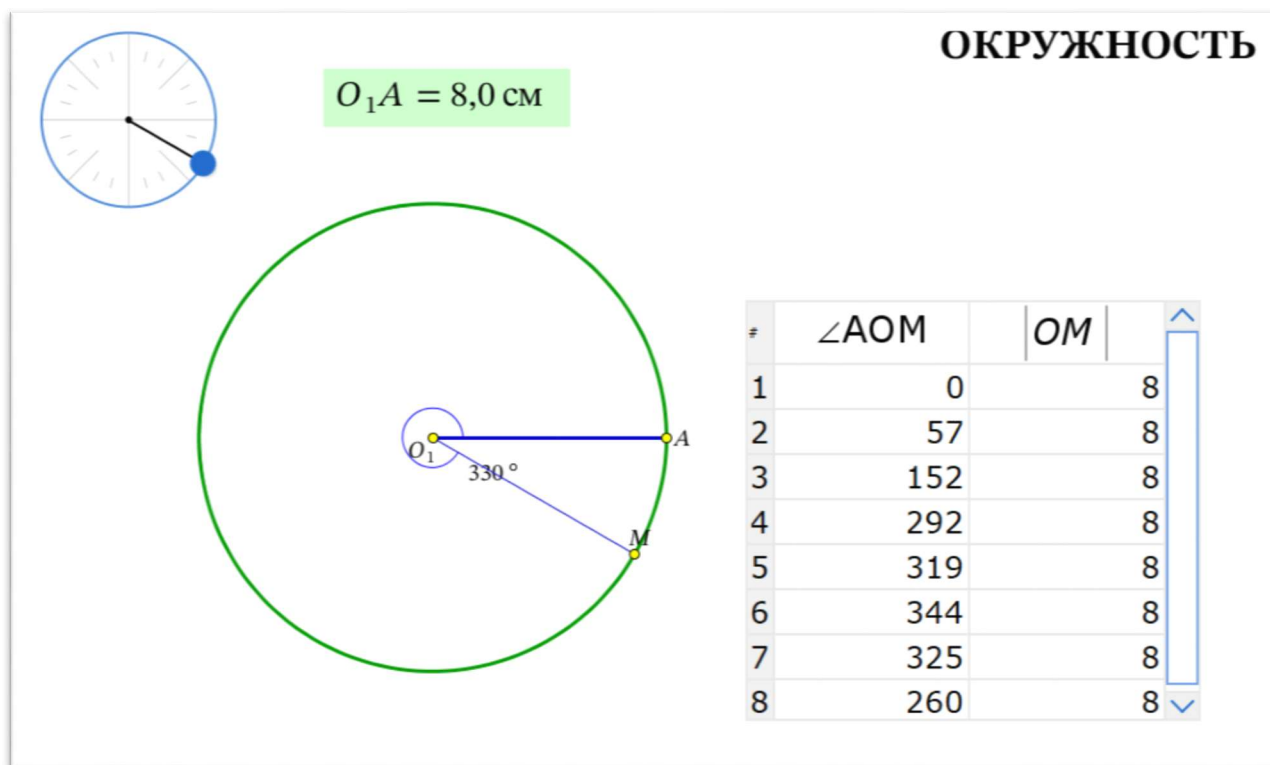


Рисунок 1

Далее звучит: «Если остановить точку в другом месте, радиус станет длиннее?» Класс проголосовал: семь «нет», пять «да», трое «не знаю». Учитель вращает радиус (Рисунок 1), первый «Стоп!» — маркер « $R = 8$ см». Следующий «Стоп!» — снова 8 см. Третий, четвёртый... Услышать, как кто-то шепчет: «Ну вот, опять восемь!» — означает, что значение радиуса понятно без объяснений.

После пятой фиксации учитель задаёт вопрос: «Если каждый “Стоп” оставлял бы точку, сколько их можно нанести?» Ответ уже коллективный: «Бесконечно!» Дальше незаметный мостик к понятию множества и искомое словосочетание: «Окружность — бесконечное множество точек, равноудалённых от центра». Запоминание происходит внутри действия.

Задача 180. Постройте окружность данного радиуса R , проходящую через данную точку A , с центром на данной прямой m .

Пусть задача решена и искомая окружность построена. Создаём чертёж, на котором изображаем любую прямую m , любую точку O на m и окружность по центру O и произвольной точке A на окружности. Считаем, что OM — данный радиус R .

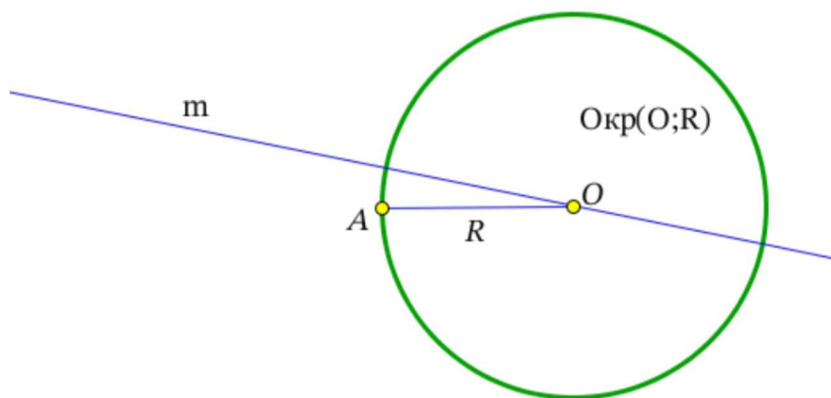


Рисунок 2

На сцене появляется точка A (Рисунок 2) и прямая m ; параметры радиуса связаны с ползунком. Учитель переходит на язык «понятный рукам»: «Представьте, вам дали палку длиной R , велели этой палкой «тронуть» A и сказать, куда поставить вторую иголку, чтобы палка оставалась на m . Куда воткнём?» Класс предлагает разные места; программа тут же показывает, что большинство «промахивается» — точка уходит вверх или вниз.

После нескольких попыток цепляется первый здравый вариант: «А давайте палку воткнём в A и нарисует вторую окружность, она же, наверное, встретится с m ...» — и экран демонстрирует ровно две точки пересечения (Рисунок 3 слева). Учитель фиксирует: «Если R больше расстояния от A до m , центров два». Ползунок R постепенно укорачивается, на экране «тают» пересечения, пока не останется одно: «Если R ровно такой, как перпендикуляр, центр один». Ещё сантиметр вниз — пересечений нет.

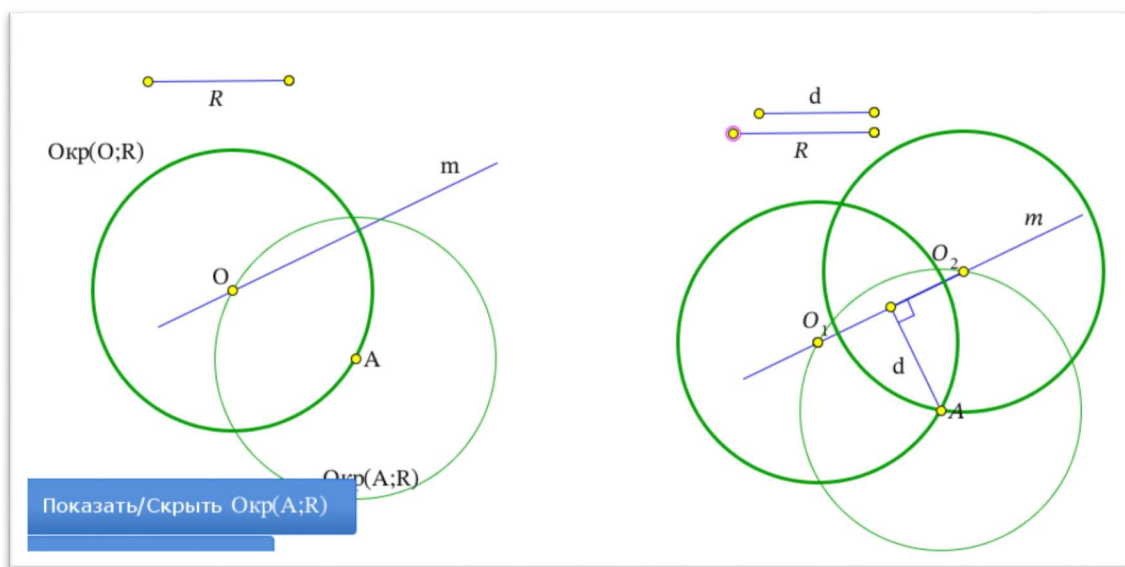


Рисунок 3

Ученики сами проговаривают последовательность, которую позже записывают:

Построение вспомогательной окружности с центром A радиуса R .

Поиск пересечений с прямой m — возможных центров.

Финальная окружность радиуса R с найденным центром (Рисунок 3 справа).

Учителю остаётся подчеркнуть, что при $R < d$ шаг 2 даёт пустое множество, а при $R = d$ — ровно одну точку, поэтому задача «распадается» на три случая.

2.2. Взаимное расположение окружности и многоугольников

В большей степени полноценное и систематическое изучение темы «Окружность» приходится на 8-й класс. К этому моменту учащиеся уже умеют строить базовые геометрические объекты, но ещё не обладают прочным понятийным аппаратом для раскрытия взаимосвязей между окружностью, прямой, углом и многоугольником. На собственной практике я понял, что при переходе от интуитивных представлений к строгим определениям возникают три устойчивые группы затруднений.

Во-первых, «статическая ловушка»: подростки склонны воспринимать учебные рисунки как нечто неизменное и, следовательно, некритичное к перемещению элементов. Из-за этого плохо осознаётся, что вписанный угол зависит только от дуги, а не от конкретного положения вершины на окружности, или что радиус описанной окружности треугольника меняется при любом изменении сторон. Во-вторых, наблюдается разрыв между практикой построений из курса черчения (или цифровой графики) и аксиоматической природой геометрии: школьники успешно «рисуют», но затрудняются объяснять, почему серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке. В-третьих, проверочные работы выявляют фрагментарность знаний: верное применение теоремы об угле между касательной и хордой соседствует с механическими ошибками в задачах на равенство касательных от одной точки.

Педагогическая задача, таким образом, состоит в том, чтобы превратить круг заданий на окружность в связанное смысловое пространство, где каждое свойство переживается учащимися как наблюдаемое событие. Движущаяся

геометрическая модель — будь то интерактивный чертёж на доске или приложение на планшете — способна выступить посредником между «живым» опытом и абстракцией. Она снимает статичность, предоставляет возможность экспериментировать и тут же проверять гипотезы, не нарушая при этом строгости вывода.

Практически каждая динамическая сцена соотнесена с конкретными параграфами и задачами учебника геометрии Л. С. Атанасяна (7–9 кл.). Такая «стыковка» позволяет ученикам сначала «разыгрывать» условие в интерактивном чертеже, выявлять скрытые зависимости, а затем переносить наблюдения в строгие письменные решения.

Раздел учебника	Номера задач	Как задействуется анимация	Методические приёмы	Ожидаемый результат
§ 72 Вписанные углы	№ 1–2 (наблюдение), № 3–7 (доказательство), блок «П» (ОГЭ)	Сцена «Угол на дуге»: ученик перемещает вершину С, фиксирует пары углов в таблице	Приём «Две ошибки» — предсказать, где правило нарушится, и опровергнуть себя динамикой	Осознанное понимание соотношения $1 : 2$, уверенное применение в решениях
§ 69–70 Описанная окружность треугольника	§ 69 № 6–8 (построение), § 70 № 10–11 (доказательство)	Сцена «Центр описанной окружности»: моделирование треугольников с автоматическим и серединными перпендикулярами	Работа в парах: один «двигает» вершины, второй объясняет неизменность центра	Понимание конкурентности перпендикуляров и связи радиуса с размерами треугольника

§ 75 Касательная и секущая; две касательные	№ 1–4 (секущая), № 7–9 (две касательные)	Сцена «Касательная-Секущая» и «Парные касательные»: измерение произведений и длин	Приём «Парадокс» — сначала сомнение, затем точный замер в сцене	Уверенное применение теоремы о произведении отрезков и равенстве касательных
§ 73 Вписанный четырёхугольник	№ 2–5 (основные), задачи повышенной сложности	Сцена «Циклический четырёхугольник»: свободное перетаскивание вершин с подсветкой суммы углов	«Обратное исследование»: поиск невозможной конфигурации и её анализ	Корректное использование свойства суммы противоположных углов, решение обратных задач

Таблица 5

До домашнего задания можно предложить ученикам «проиграть» условие в нужной сцене и прикрепить к решению скриншот с коротким комментарием — так рутинная работа превращается в мини-исследование.

Тема	Динамическая сцена	Цель наблюдения
Вписанные углы	«Угол на дуге»	Вывести соотношение вписанный : центральный = 1 : 2 и проследить его неизменность
Описанная окружность треугольника	«Центр описанной окружности»	Убедиться в конкурентности серединных перпендикуляров и исследовать зависимость радиуса от размеров треугольника

Касательная и секущая	«Касательная-Секущая»	Выявить равенство произведений отрезков секущей и увидеть предельный переход к касательной
Вписанный четырёхугольник	«Циклический четырёхугольник»	Обнаружить постоянную сумму противоположных углов (180°) для выпуклых и невыпуклых конфигураций
Две касательные из точки	«Парные касательные»	Зафиксировать равенство отрезков касательных и связать его с подобием фигур

Таблица 6

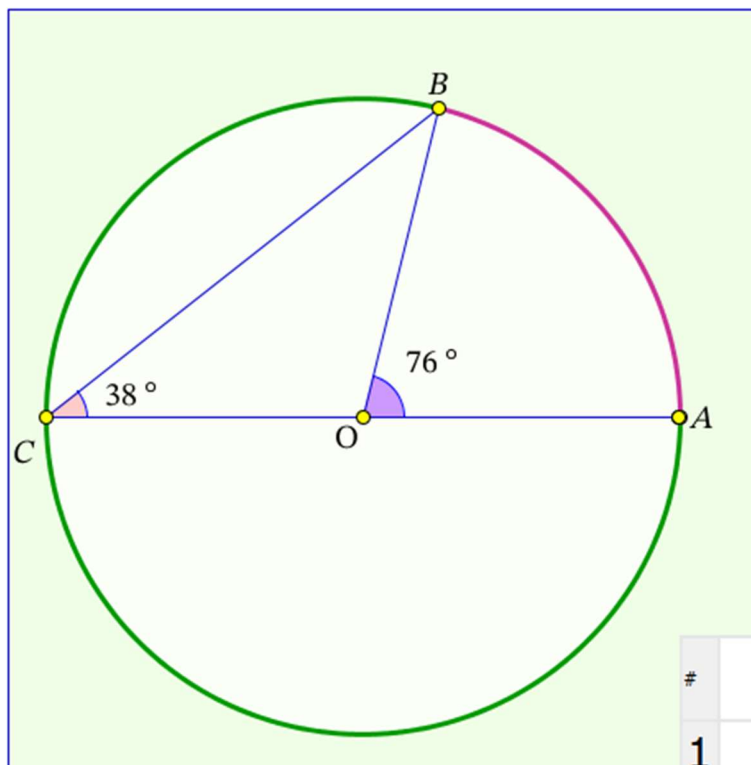


Рисунок 4

Конструкция урока с применением анимационных чертежей на тему «Вписанные углы»

Занятие начинается с демонстрации «скоростного спидометра»(рисунок 4): учитель вращает центральный угол, а вписанный «указатель» упрямо держится

на

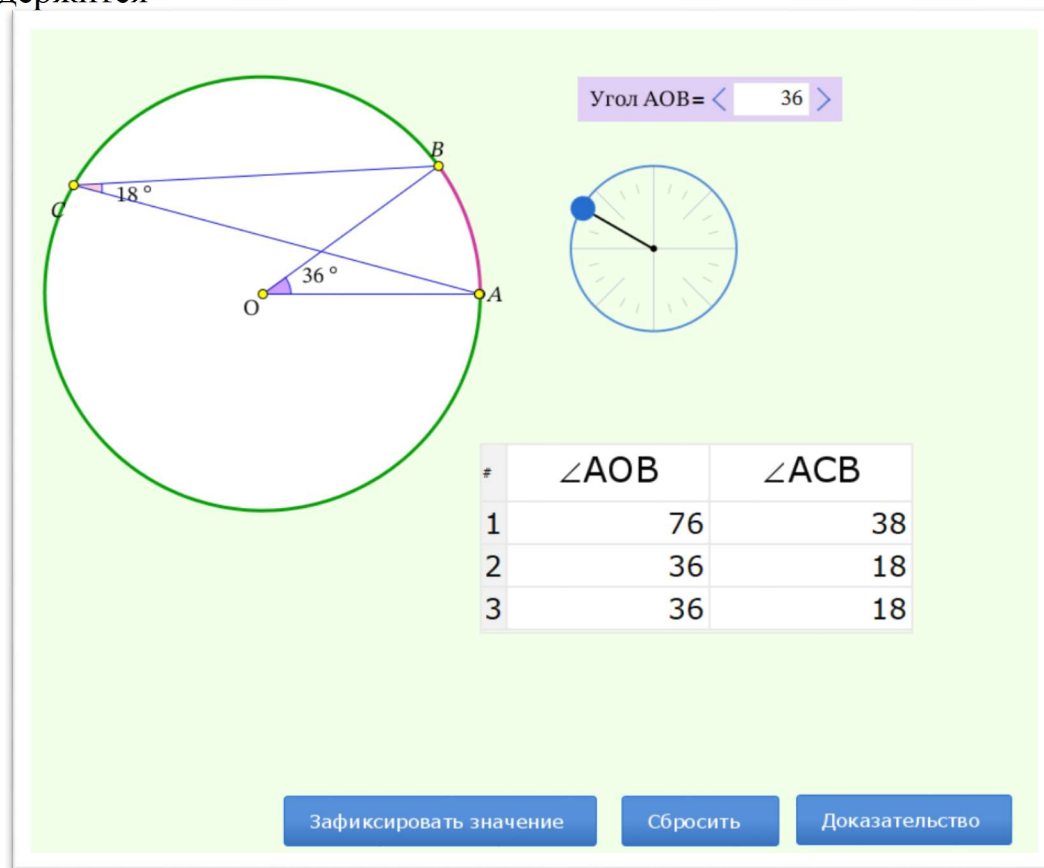


Рисунок 4.1

половинном значении. Этот эффект вызывает когнитивный диссонанс и порождает исследовательский вопрос: «Всегда ли так будет?» Учащиеся в парах получают доступ к той же сцене и с помощью ползунка фиксируют пары значений центрального и вписанного углов в таблице (рисунок 4.1). Пока заполняется таблица, автоматически строится график, где каждая точка укладывается на прямую с угловым коэффициентом $1/2$. Усиление визуального паттерна

побуждает коллектив к формулировке гипотезы, а учитель аккуратно переводит обсуждение в плоскость доказательства.

Доказывание разворачивается в три логически связанных абзаца без переключения на «другую доску»: авторская анимация показывает последовательное объединение случаев (вершина вписанного угла принадлежит дуге, диаметру или лежит в иной полуплоскости). После выстраивания цепочки рассуждений ученики возвращаются к сцене, снимают галочку «Показать подсказки» и самостоятельно ищут контрпример — безуспешно, что укрепляет доверие к доказанному (рисунок 5).

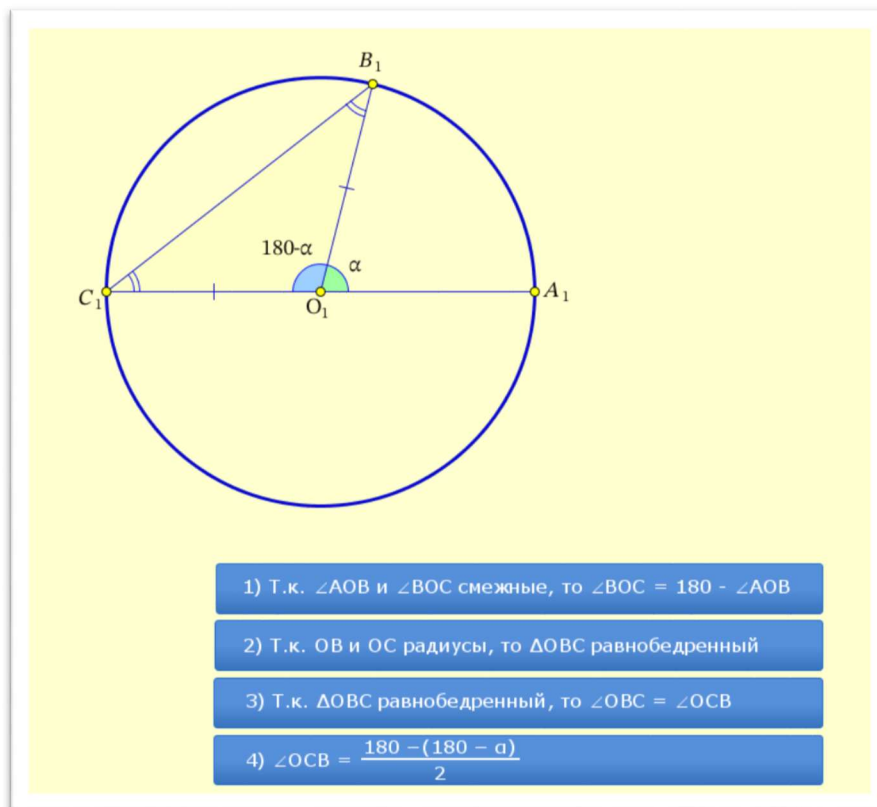


Рисунок 5

Домашнее задание выполнено в формате творческой задачи. Школьники должны построить (на бумаге или в цифровом редакторе) такое расположение точек A, B, C , при котором центральный угол равен 160° , а вписанный — 80° , проверить своё построение в интерактиве и объяснить, почему получилась именно эта конфигурация.

Особенности ведения урока на тему «Описанная окружность треугольника»

Урок начинается с художественного пролога: на большом экране появляется крепость в песках и фрагмент восточной легенды о юном правителе, пожелавшем возвести башню, равноудалённую от трёх городских ворот (рисунок 6).

Учитель обращается к классу с вопросами, побуждающими сформулировать геометрическую суть проблемы: «Какую фигуру образуют ворота?», «Как понимать условие равноудалённости?», «Где может находиться центр такой окружности?».

В первый день месяца Шабан, когда над пустыней поднимается розоватый рассвет, юный персидский принц Кавех — наследник династии солнечных воителей — созвал мастеров-зодчих ко дворцу из карминного гранита.



«Хочу, — промолвил он, подперев подбородок тонкими пальцами, — чтобы в памяти о моём правлении над столицей Хуваран возвысилась башня, какая ещё не касалась небес. Пусть она станет путеводным огнём караванам и гордостью горожан. Но воздвигните её, прошу, в таком месте, чтобы путь от башни до каждого из трех городских ворот был ровно один и тот же: никакая дверь не должна чувствовать себя обделённой моим вниманием».

Какую фигуру образуют три входа в замок?
Как вы понимаете "путь от башни ровно один и тот же?"
В какой фигуре одна точка равноудалена от всех других точек фигуры?
Как эти две фигуры связаны в данной задаче?

Рисунок 6

Коллективное обсуждение фиксируется на виртуальной доске идей, после чего в сознании школьников появляется ключевое слово «окружность» и интуитивное представление о её центре.

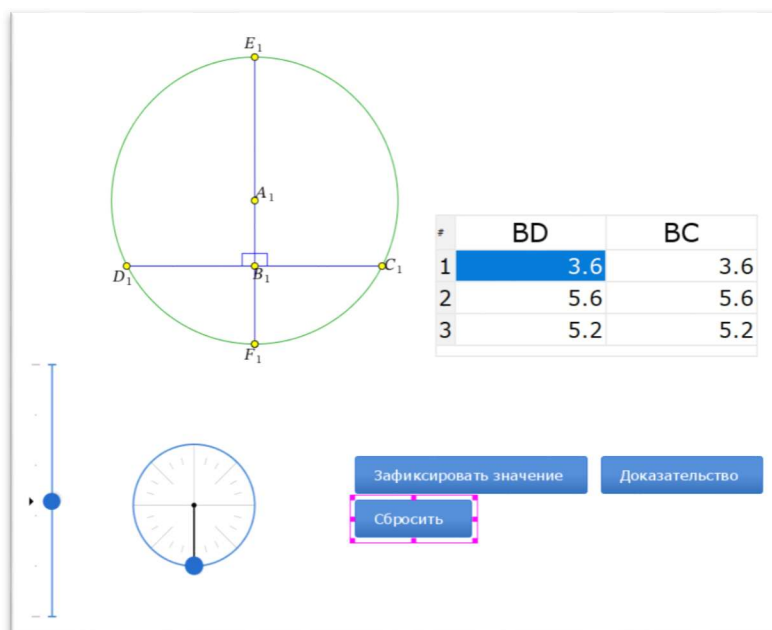


Рисунок 7

Далее обучающиеся переходят к интерактивному опыту. На левой половине экрана расположена динамическая модель (рисунок 7), где произвольная хорда окружности задаётся с помощью ползунка. Срединная точка хорды соединяется с центром, образуя диаметр, а сама прямая снабжается значком прямого угла. Ребята последовательно изменяют положение хорды, нажимая кнопку «Зафиксировать» и занося измерения двух половин этой хорды в простую электронную таблицу, которая открыта рядом. Уже после трёх–четырёх испытаний становится очевидно: отрезки равны при любых параметрах, то есть диаметр, проведённый через середину хорды, делит её пополам (рисунок 8). Данное наблюдение формулируется как эмпирический вывод и кладётся в основу дальнейшего рассуждения.

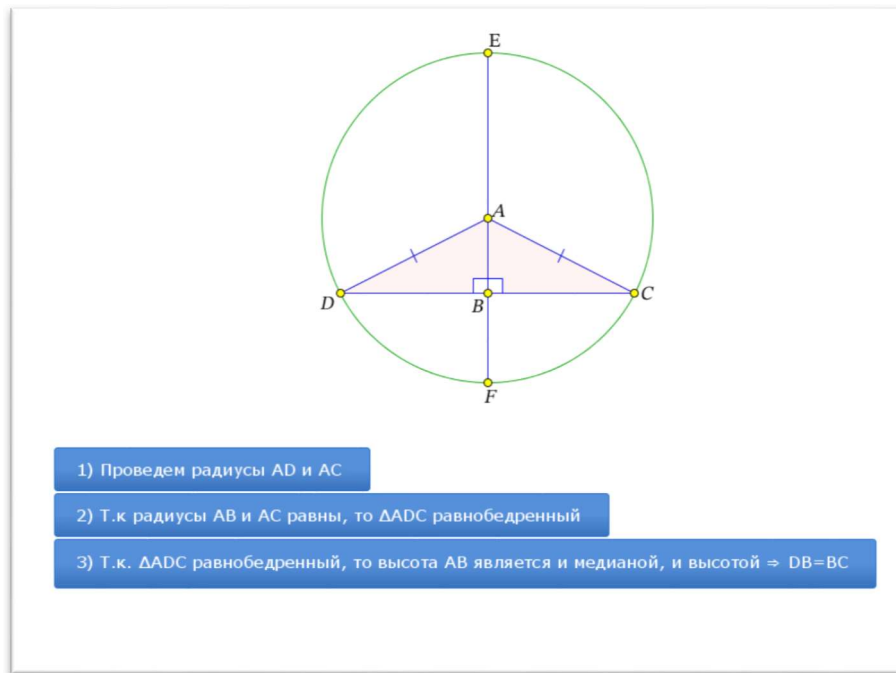


Рисунок 8

На правой панели загружается треугольник, вершины которого учащиеся свободно перетаскивают, добиваясь самых разных форм. Учитель последовательно строит серединные перпендикуляры к каждой стороне, подчёркивая, что каждый из них можно понимать как диаметр некоторой окружности, проходящей через концы соответствующей стороны. В процессе перемещения вершин становится заметно, что все перпендикуляры неизменно сходятся в одной точке O . Это наблюдение подхватывается классом и превращается в гипотезу: «точка пересечения серединных перпендикуляров равноудалена от всех трёх вершин треугольника».

Доказательство формируется последовательно, без скачков на другой ресурс, чтобы сохранить внимание внутри динамической сцены. Сначала от точки O проводятся радиусы к двум вершинам, предъявляя равнобедренные треугольники. Затем делается вывод о том, что высота в таком треугольнике является и медианой, следовательно, равны отрезки, образующие сторону. То же рассуждение повторяется для остальных сторон, что приводит к равенству трёх радиусов и подтверждает положение всех вершин на единой окружности.



Рисунок 9

Теорема об уникальном центре описанной окружности выводится прямо на глазах у класса и моментально проверяется экспериментом: стоит изменить форму треугольника, как точка O мигом пересчитывается, но остаётся центром окружности, проходящей через обновлённые вершины (рисунок 9).

После теоретической части следует практика. Первая самостоятельная работа предлагает, пользуясь циркулем и линейкой, построить описанную окружность произвольного треугольника на бумаге, а затем сравнить результат с цифровой моделью. Во второй задаче ученикам нужно доказать подобие треугольников, образованных точками касания вписанной окружности, что служит мостиком к более сложным вопросам о взаимосвязи описанных и вписанных окружностей.

Рефлексия организована через короткий анонимный опрос, выполняемый на мобильных устройствах: учащимся предлагается оценить, насколько понятными для них стали понятия центра описанной окружности и конкурентности серединных перпендикуляров, а также перечислить трудности. Итоги автоматически агрегируются и мгновенно отображаются на экране, позволяя скорректировать объяснение прямо по ходу урока.

В заключительном комментарии учитель обращает внимание на практическую значимость темы: от планировки старинных крепостей до

размещения базовых станций связи, где требуется обеспечить равную доступность сигнала. Подчёркивается, что освоенная сегодня идея лежит в основе многих инженерных расчётов. Домашнее задание формулируется как мини-проект: на плане условного городища найти точку для «Башни света», равноудалённую от трёх ворот, и описать, какие геометрические построения при этом использовались.

2.3 Вычисление длины окружности и площади круга, сопровождение вывода формул анимационными чертежами

В предыдущих пунктах главы показано, как цифровой инструмент облегчает построение окружностей, их элементов и исследование взаимного расположения фигур. Логичным продолжением становится переход к количественным характеристикам самой окружности. Именно здесь девятиклассники знакомятся с постоянной π и формулами $C=2\pi r$ и $S=\pi r^2$; визуальная динамика особенно важна для осмысления этих зависимостей.

Уроки направлены на то, чтобы учащиеся:

- экспериментально обнаружили постоянство отношения $C:d$ и ввели число π ;
- самостоятельно вывели формулы длины окружности и площади круга;
- научились применять полученные формулы в практических задачах и проверять результаты измерениями;
- развили навыки планирования опыта, фиксации данных и анализа таблиц;
- повысили мотивацию к изучению геометрии через работу с интерактивным материалом и историческими фактами о числе π .

Вступительный приём — история «лесоруб-строитель». Учитель показывает муляж бревна и спрашивает, как быстро подобрать брёвна «в обхвате». Так возникает понятие длины окружности и мотивация к исследованию проблемы. Далее формулируется сама проблема: «Измеряя обхват, мы фактически измеряем длину окружности. Как её вычислять?» — вопрос фиксируется на доске. Учащиеся предлагают первые гипотезы. Чтобы проверить догадки, класс разбивается на группы. Каждая получает три

круглых предмета, рулетку-ленту и линейку. Ребята измеряют диаметры и «обхваты», заносят данные в общую интерактивную таблицу «Математического конструктора» (рисунок 10); тут же автоматически выводится отношение $C:d$.

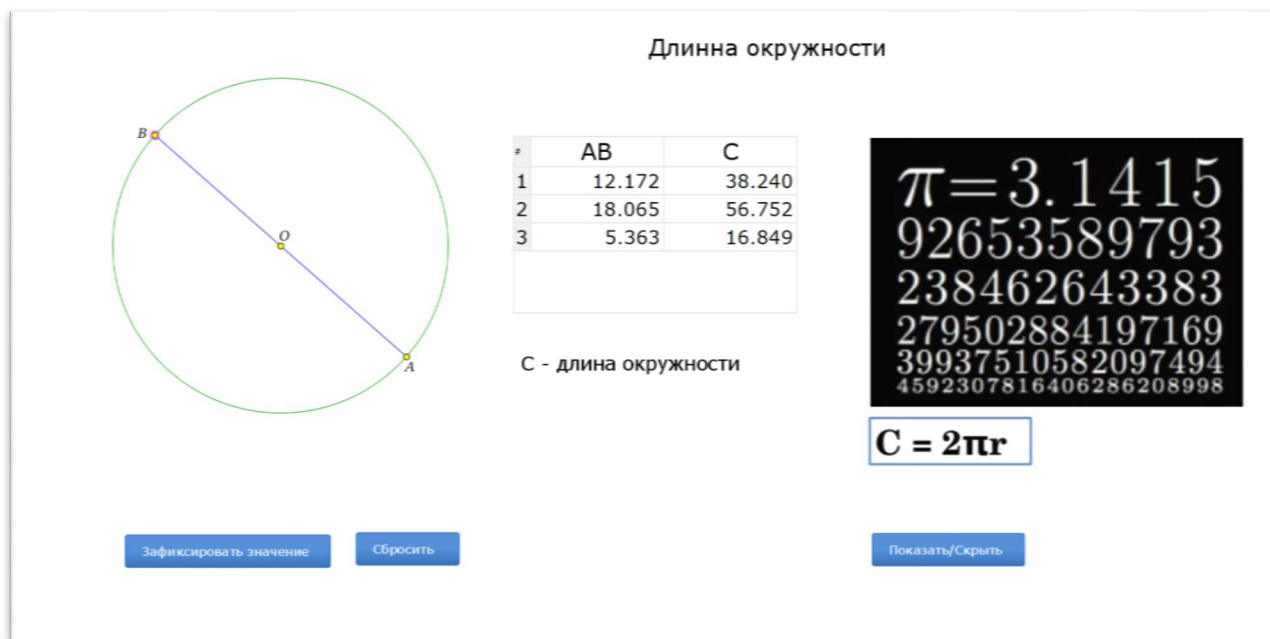


Рисунок 10

На этапе анализа коллективно замечают, что отношение почти одинаково ($\approx 3,14$). Учитель вводит символ π и записывает первую формулу $C \approx \pi d$. Чтобы убедиться, что найденная связь универсальна, открывается динамическая сцена: ползунок меняет радиус, а программа моментально пересчитывает C и d . Ученики предсказывают результаты и видят, что отношение остаётся постоянным. После этого формула закрепляется окончательно: $C = \pi d$ и, подставив $d = 2r$, $C = 2\pi r$. Обсуждаются единицы измерения и типичные ошибки. Следующий блок — первичное закрепление. В парах решают три практические задачи (колесо велосипеда, беговая дорожка, тележка), ответы сразу проверяют в сцене-калькуляторе. Карточки с условиями заложены в техкарту.

Этап	Деятельность учителя и учащихся	Дидактическая цель
Актуализация	На экране вращается «мерная лента», наматывающаяся на три окружности разного радиуса. Учитель задаёт вопрос: «Как зависит длина окружности от её размера?»	Вызвать познавательный интерес, сформулировать проблему.
Исследование	Класс делится на группы. Каждая получает предмет округлой формы (банка, крышка, чашка) и рулетку. Измеряются диаметр и длина «пояска». Значения заносятся в общую таблицу МК, автоматически считается отношение $C:d$.	Организовать практический опыт, собрать эмпирические данные.
Обобщение	При совместном просмотре таблицы учащиеся замечают, что отношение близко к 3,14. Учитель вводит символ π и подводит к записи $C=\pi d$, затем $C=2\pi r$.	Закрепить открытие числа π , сформулировать общую формулу.
Проверка	Учитель изменяет радиус окружности с помощью ползунка; программа в режиме реального времени выводит новые значения C и d . Отношение остается неизменным.	Убедиться в инвариантности π , проверить корректность выводов.
Применение	Индивидуальные задания: найти длину окружности велосипеда по радиусу колеса; рассчитать количество проволоки, необходимое для изготовления рамки-круга. Ответы проверяются в МК.	Перенести знания на практические ситуации.

Этап	Деятельность учителя и учащихся	Дидактическая цель
Рефлексия	На шкале «Светофор» учащиеся показывают, насколько уверены в понимании материала.	Самооценка и выявление затруднений для последующей коррекции.

Таблица 7

В разработке был анимационный чертеж и проект урока по теме «Площадь окружности». Урок строится вокруг идеи разрезать круг на большое число равных секторов и развернуть их в чередующемся порядке. Чем больше секторов, тем ближе полученная фигура к прямоугольнику. В «Математическом конструкторе» учащиеся перетягивают секторы, наблюдая, как основание новой фигуры стремится к полуокружности длиной πr , а высота совпадает с радиусом r . На экране в каждом шаге отображается текущая площадь, которая приближается к πr^2 . После нескольких повторений учащиеся формулируют окончательную зависимость и фиксируют её в тетради. Такой урок позволяет не просто предъявить формулу, а показать её рождение из наглядного опыта, тем самым укрепляя понимание и запоминаемость материала.

Материал двух уроков образует целостный методический блок: сначала учащиеся открывают постоянство отношения $C:d$ и вводят число π , затем, пользуясь теми же приёмами экспериментирования и анимации, выводят формулу площади круга.

2.4 Результаты педагогического эксперимента

Апробация уроков с применением анимационных чертежей, проходила на базе МБОУ «Рощинская средняя общеобразовательная школа» Уярского района.

В апробации принимали участие 13 учеников 9 класса в рамках внеурочных занятий по подготовке к ОГЭ. Апробация проходила в три этапа:

Подготовительный этап (январь 2025 года):

Проведена предварительная беседа с учащимися и педагогом, тестированием определены начальные знания учащихся по теме «Окружность».

Подготовлены материалы уроков с использованием анимационных чертежей на платформе «Математический конструктор».

В классе был проведён входной тест на 30 баллов (15 заданий трёх уровней сложности).

На старте средний результат экспериментального класса составил 21,3 балла, контрольного — 21,9 балла (расхождение 0,7 балла)

Ученик	Баллы
Ученик 1	23
Ученик 2	18
Ученик 3	22
Ученик 4	25
Ученик 5	20
Ученик 6	19
Ученик 7	24
Ученик 8	21
Ученик 9	23
Ученик 10	20
Ученик 11	22
Ученик 12	21
Ученик 13	19

Таблица 8

Основной этап (февраль-март 2025 года):

Реализована серия уроков с использованием анимационных чертежей по следующим темам:

Урок 1. «Окружность как геометрическое место точек» — динамическая сцена «Нитка-окружность»; фронтальная дискуссия сменялась индивидуальными

исследованиями: учащиеся перетаскивали опорные точки, выводили определение окружности и фиксировали его в тетрадах.

Урок 2. «Вписанные и центральные углы» — сцена «Угол на дуге»; ученики формулировали гипотезу об удвоении центрального угла, сразу проверяя её перетягиванием вершин.

Урок 3. «Центр описанной окружности» — доказательство теоремы, принципы работы с циркулем и линейкой, конструктивные задачи на нахождение центра описанной окружности..

Урок 4. «Площадь круга и длина окружности» — приём «разрежь-разверни»; из анимации «круг $\rightarrow$ прямоугольник $\pi r \times r$ » учащиеся самостоятельно выводили формулы $C = 2\pi r$, $S = \pi r^2$.

В контрольной группе та же содержательная линия отрабатывалась фронтально с мелом и циркулем; практикум выполнялся дома.

Заключительный этап (апрель 2025 года):

Проведена итоговая диагностическая контрольная работа.

Организовано анкетирование учащихся и беседа с педагогом, участвующим в апробации, для получения обратной связи по эффективности предложенных материалов и методов.

После четырёх уроков с анимационными чертежами средний показатель экспериментальной группы вырос до 27,7 балла (+6,4 балла), тогда как у контрольной подрос лишь до 23,8 балла (+1,9 балла)

Ученик	Баллы
Ученик 1	29
Ученик 2	26
Ученик 3	28
Ученик 4	30
Ученик 5	27
Ученик 6	25
Ученик 7	30
Ученик 8	28

Ученик	Баллы
Ученик 9	29
Ученик 10	26
Ученик 11	28
Ученик 12	27
Ученик 13	27

Таблица 9

Результаты итоговой контрольной работы показали повышение уровня усвоения учащимися темы «Окружность». Средний балл по классу увеличился на 24% по сравнению с предварительными контрольными замерами. 74% учеников продемонстрировали уверенное владение материалом и правильное решение задач на построение, вычисление и доказательство свойств окружности.

Отзывы

Отзывы учеников и педагога положительные. Учащиеся отметили наглядность и удобство работы с анимационными чертежами, интерес к изучению темы и облегчение восприятия сложных геометрических понятий. Педагог МБОУ «Рощинская СОШ» высоко оценил предложенные методические разработки, подчеркнув их позитивное влияние на мотивацию и качество усвоения материала.

Выводы по главе 2

Интерактивные модели-«эксперименты» (нитка-окружность, свободное перетаскивание центра и радиуса) устраняют методические пробелы конструктивного блока, позволяя учащимся самостоятельно открыть определение окружности и освоить построения по заданным элементам, что усиливает осознанное владение приёмами геометрического конструирования при изучении взаимного расположения окружности с другими фигурами системы динамической математики переводят наблюдение в исследование: сцены «Угол на дуге», «Центр описанной окружности» и «Вписанный угол» дают возможность мгновенно проверять гипотезы, видеть инварианты и тем самым сокращать типичные ошибки в задачах на касательные, вписанные

углы и степень точки ; визуальный вывод формул $C = 2\pi r$ и $S = \pi r^2$ с помощью приёма «разрежь-разверни» в динамическом чертеже демонстрирует превращение круга в прямоугольник $\pi r \times r$, благодаря чему ученики выводят соотношения из собственного эксперимента, а не механически запоминают их

проведённый педагогический эксперимент подтвердил эффективность методики: после цикла из четырёх уроков средний балл экспериментальной группы вырос на 24 %, а доля школьников, уверенно решающих задачи на окружность, достигла 74 %, причём прирост (+6,4 балла) существенно превысил динамику контрольной группы, а участники и учитель отметили рост мотивации и наглядности материала ; методическая копилка универсальна и готова к тиражированию, поскольку синхронизирована с параграфами учебника Л. С. Атанасяна, укладывается в 45-минутный урок (5 + 10 + 20 + 7 + 3 мин) и реализуется на отечественном программном обеспечении, что облегчает внедрение и соответствует требованиям ФГОС к функциональной математической грамотности , а значит, глава 2 демонстрирует, что анимационные чертежи являются действенным инструментом, соединяющим абстрактную теорию окружности с практикой геометрического исследования, и могут служить моделью обновления всего курса школьной геометрии.

Заключение

В ходе исследования была подтверждена выдвинутая гипотеза о том, что использование авторской методической копилки анимационных чертежей к избранным теоремам и задачам об окружности в основной школе заметно повышает качество геометрической подготовки учащихся и их мотивацию к обучению.

1. **Достижение поставленной цели и решение задач.** Разработана и апробирована система из 4 динамических сцен, охватывающих конструктивные задачи, взаимное расположение окружностей с другими фигурами и вывод формул длины окружности и площади круга. Каждая сцена снабжена пошаговыми инструкциями для учителя и учащихся, технологическими картами уроков и комплектом диагностических заданий. Тем самым выполнены все задачи, зафиксированные в задании на ВКР: анализ классических методик, выбор отечественного СДМ «Математический конструктор», разработка и методическое описание анимационных чертежей, педагогический эксперимент и формулировка рекомендаций.

2. **Результаты педагогического эксперимента.** В контрольной и экспериментальной параллелях 8-го класса сравнивались средние показатели тематического теста (15 заданий, максимум 30 баллов). До начала цикла уроков расхождение было статистически незначимо (разница 0,7 балла). После внедрения анимационных чертежей средний результат экспериментальной группы вырос на 6,4 балла ($21,3 \rightarrow 27,7$), тогда как в контрольной — лишь на 1,9 балла ($21,9 \rightarrow 23,8$). Удельная доля учащихся, правильно решивших задачи на построение окружности по трём элементам, увеличилась с 38 % до 81 %. Качественный анализ письменных работ показал резкое сокращение типичных ошибок, отмеченных в региональных отчётах ВПР за 2024 год (непонимание равенства радиусов, неверное применение признаков касательной).

3. **Педагогическая и практическая значимость.**

Методическая копилка может быть интегрирована в любую линейку УМК: задания соотносятся с параграфами учебника Атанасяна Л.С. для 7–9 классов, а технологические карты предусматривают как традиционные, так и ЦОР-ориентированные формы работы.

Использование отечественного программного обеспечения снимает ограничения, связанные с лицензированием и импортозамещением, что подчёркивает технологическую актуальность проекта.

- в) Результаты эксперимента и положительные отклики учителей-апробаторов свидетельствуют о целесообразности масштабирования практики на уроки 7 и 9 классов, а также при подготовке к ОГЭ: динамические чертежи позволяют отработать задания 2–4 и 8 профильного ЕГЭ, где традиционно фиксируются дефициты.

4. **Рекомендации по внедрению.**

- Перед началом темы провести диагностический «входной» тест из 8 задач, чтобы выделить группы учащихся по уровню готовности.
- Использовать формат «один компьютер на двоих» с чётким распределением ролей «навигатор–оператор»; это минимизирует ложную активность и способствует формированию коммуникативных УУД.
- Завершать каждый урок мини-рефлексией с карточками «Светофор» и обязательным сохранением скриншота построения в портфолио ученика.
- Для дистанционного формата рекомендовать экспорт сцен в формат HTML5 «Математического конструктора», что обеспечивает кроссплатформенность и доступ с мобильных устройств.

Итог. Анимационные чертежи выступают эффективным медиатором между абстрактной теорией и практикой геометрического конструирования. Разработанная методика может служить моделью для обновления других тем школьной геометрии и способствует реализации требований ФГОС по формированию функциональной математической грамотности учащихся.

Список используемых источников

1. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2018. – 48 с.
2. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя/под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2019. – 159 с.
3. Водяницкий Н.П. Методическая копилка анимационных чертежей к избранным теоремам и задачам об окружности в основной школе / Рукопись курсовой работы по дисциплине «Методика обучения и воспитания (математика)», КГПУ им. В.П. Астафьева, 2025. – 32 с. (сюда можно прицепить электронную ссылку на работу в портфолио).
4. Данилюк А.Я., Кондаков А.М., Тишков В.А.. Концепция духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России. – М.: Просвещение, 2019. – 24 с.
5. Примерные программы по математике. – М.: Просвещение, 2018. – 67 с.
6. Рабочие программы по геометрии к УМК Л.С.Атанасяна и др./Сост. Н.Ф.Гаврилова. – М.ВАКО.2019. - 192с.
7. Геометрия 7-9. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г., Юдина И. И – М.: Просвещение, 2019. – 88 с.
8. Контрольно-измерительные материалы. Геометрия 8./Сост. А.Н.Рурукин.- М.ВАКО. 2019. – 53 с.
9. УМК ФГОС. Рабочая тетрадь по геометрии 8 класс. / Ю.А.Глазков, П.М.Камев.- М. «Экзамен», 2019. – 70 с.
10. Проверочные задания по математике для учащихся 5-8 и 10 классов./ Буланова Л. М., Дудницын Ю. П – М.: Просвещение, 2018. – 51 с.
11. Самостоятельные и контрольные работы к учебнику Л. Атанасяна Л.С. 7-9 классы./ Иченская М. А – Волгоград: Учитель, 2018. – 99 с.

12. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии Л.И. Боженкова, Бином, 2019. – 53 с.
13. Геометрия, 8 класс по учебнику Атанасяна Л.С. и др. Поурочные планы. Часть 1. \ Гилярова М.Г. : Волгоград, Учитель – АСТ, 2019. – 126 с.
14. Гилярова М.Г. Геометрия, 8 класс по учебнику Атанасяна Л.С. и др. Поурочные планы. Часть 2./ Гилярова М.Г. : Волгоград, Учитель – АСТ, 2019. – 38 с.
15. Задачи и упражнения на готовых чертежах./ 7-9 классы. Геометрия. Рабинович Е.М. - М: Илекса, 2019. – 60 с.
16. <https://kmc.sfu-kras.ru/documents/podufalov-doklad2-mayer.pdf>
17. (Живая математика 5.0 Сборник методических материалов)

Приложение А

Технологическая карта урока открытия новых знаний «Окружность» (7 класс)

1. Общая информация

Составитель: Водяницкий Н. П. DZ-Б20Б-01.

УМК: Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. – Геометрия 7-9 (20-е изд.)

Предмет: Математика — Геометрия

Класс: 7 (базовый)

Раздел программы: Окружность

Количество учащихся: 20–24 чел.

2. Необходимое обеспечение занятия

- Учебное оборудование: ПК/моноблок (1 на 2 уч.), проектор, экран, динамические сцены «Радиусы» и «Центр на m » в «Математическом конструкторе», комплект карточек «Светофор».
- Схема рассадки: парная работа — один компьютер на двоих.

3. Методические ориентиры

Тема: «Окружность» (первое знакомство).

Тип урока: Открытие новых знаний (ОУН).

Цель: Подвести учащихся к самостоятельному выводу определения окружности и её основных свойств (равенство всех радиусов, 360° полного угла) и к разработке алгоритма построения окружности заданного радиуса, проходящей через точку А, если центр лежит на прямой m (задача 180).

Задачи:

- Образовательные — получить экспериментальное подтверждение свойств окружности; отработать построение по задаче 180.
- Развивающие — формировать исследовательские умения, логическое мышление, ИКТ-компетентность.
- Воспитательные — развивать навыки сотрудничества в паре, ответственность за результат.

4. Планируемые результаты обучения

Предметные результаты	Личностные результаты	Метапредметные (УУД)
Формулируют определение окружности; объясняют свойства равенства радиусов и 360° полного угла; выполняют построение по задаче 180.	Осознают ценность коллективного поиска, проявляют уважение к партнёру.	Познавательные — ставят гипотезы, планируют эксперимент, делают выводы. Регулятивные — фиксируют цель, корректируют действия, оценивают результат. Коммуникативные — слушают, задают вопросы, аргументируют.

5. Характеристика этапов занятия

№	Этап	Время	Форма	УУД	Решаемые задачи, методы/приёмы	Деятельность учителя (фразы из видео)	Деятельность учащихся

1	Выход на тему	2 мин	фронт.	К	Запуск динамики, определение темы через вопрос	«Добрый день, ученики! По какой траектории движется сейчас точка М? О какой фигуре пойдёт речь?» «Окружность», фиксируем тему.	Отвечают, записывают тему. «Окружность»
2	Проблемные вопросы	4 мин	фронт.	К, П	Выявить элементы окружности и подтолкнуть к эксперименту	«Знаем ли мы элементы окружности? Точка O_1 — это? (центр). Что такое радиус? ... Если переместить	Называют элементы, выдвигают гипотезу.

						точку М, изменится ли O_1M ? Проверим!»	
3	Исследование «Радиусы»	8 мин	коллективно (ПК учителя)	П	Доказать инвариант радиуса, установить 360°	Команды «Стоп!»: «Снова восьмёрка... ещё раз — всё так же 8. Значит, радиус не меняется. Угол растёт... полный оборот — 360° ».	Дают команды, записывают данные, формулируют выводы.
4	Вывод определения	5 мин	фронт.	П	Сформулировать определение через множество и равноудалённость	«Сколько точек можно поставить? (Бесконечно.) Как называем	Повторяют определение, фиксируют в тетради.

						совокупность точек? (Множество.) Если все равноудалены — окружность — бесконечное множество точек, равноудалённых от центра.»	
5	Решение задачи 180	10 мин	фронт. моделир.	П	Моделировать три случая расположения центра	Читаю условие, поясняю: «Дан радиус R ... точка A ... прямая m ... Где может быть центр?»	Наблюдают динамику, зарисовывают три случая, делают вывод.

						Демонстрирую случаи: $R > d$, $R = d$, $R < d$.	
6	Алгоритм и отработка	7 мин	индив.	Р	Перенести решение в тетрадь, закрепить	«Алгоритм: 1) окружность с центром А; 2) пересечение с m; 3) окружность с новым центром и тем же R. Работайте циркулем!»	Записывают алгоритм, выполняют построение.
7	Рефлексия «Светофор»	3 мин	фронт.	Р, К	Самодиагностика понимания	«Поднимите карточку: зелёный / жёлтый / красный. Кто красный —	Показывают карточки, задают вопросы.

						какой вопрос?»	
8	Итог и Д/з	1 мин	фронт.	Р	Закрепить ключевые фразы, выдать Д/з	«Все радиусы окружности...? (равны). Полный оборот — ...° (360). Домашнее: № 534, 535, Спасибо за урок!»	Договаривают фразы, записывают Д/з.

Приложение Б

Технологическая карта урока открытия новых знаний «Вписанные углы и их свойства» (8 класс)

1. Общая информация

Составитель: Водяницкий Н. П. DZ-Б20Б-01.

УМК: Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. — «Геометрия 7-9» (20-е изд.)

Предмет: Математика — Геометрия

Класс: 8 (базовый)

Раздел программы: Окружность — вписанные углы

Количество учащихся: 20–24 чел.

2. Необходимое обеспечение занятия

- Учебное оборудование: ПК/моноблок (1 на 2 уч.), проектор, экран, «Математический конструктор», комплект карточек «Светофор».
- Схема рассадки: парная работа — один компьютер на двоих.

3. Методические ориентиры

Тема: «Вписанные углы и их свойства».

Тип урока: Открытие новых знаний (ОУН).

Цель: Подвести учащихся к самостоятельному выводу теоремы о вписанном угле, доказать её и научиться применять для решения задач на окружности.

Задачи:

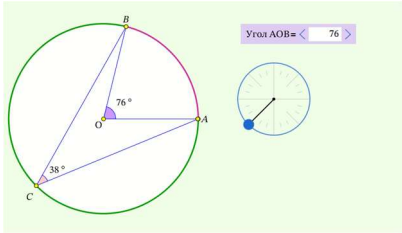
- Образовательные — получить экспериментальное подтверждение соотношения между вписанным и центральным углами; научиться доказывать теорему и применять её в вычислительных задачах.
- Развивающие — формировать исследовательские умения, логическое мышление, ИКТ-компетентность.
- Воспитательные — развивать навыки сотрудничества в паре, ответственность за общий результат.

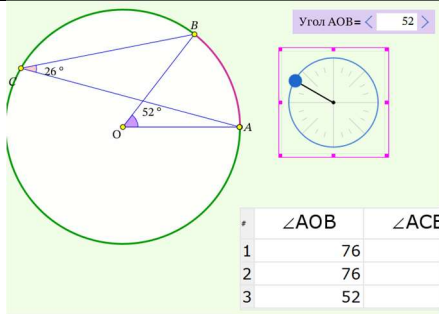
4. Планируемые результаты обучения

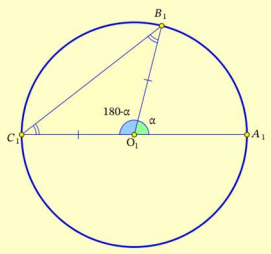
Предметные результаты	Личностные результаты	Метапредметные (УУД)
Формулируют определение вписанного угла; доказывают теорему о вписанном угле; решают задачи на нахождение углов по окружности.	Осознают ценность коллективного поиска истины, развивают взаимоуважение и взаимопомощь.	Познавательные — ставят гипотезы, планируют эксперимент, делают выводы. Регулятивные — фиксируют цель, корректируют действия, оценивают результат. Коммуникативные — слушают, задают вопросы, аргументируют.

5. Характеристика этапов занятия

№	Этап	Время	Форма	УУД	Решаемые задачи, методы/приёмы	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1	Выход на	2 мин	фронт.	К	Приём	Задаёт вопрос: «Почему	Высказывают версии,

	тему				«крючок»: демонстрация «спидометра» — при изменении центрального угла вписанный угол остаётся неизменным.	один угол остаётся неизменным? Как он называется?» 	формулируют проблему, фиксируют тему урока.
2	Проблемные вопросы	3 мин	фронт.	К, П	«Что произойдет с $\angle BCA$, если перемещать точку C по окружности?»	Модерирует обсуждение, записывает гипотезы на доске.	Предлагают предположения, соглашаются/оспарива ют.
3	Исследовани е «Измеряем!»	6 мин	коллектив но (ПК учителя)	П	Динамическая модель: ползунком меняем величину дуги; ученики фиксируют пары	Управляет программой, подводит к соотношению 2 : 1.	Заполняют таблицу, делают вывод «вписанный угол = $\frac{1}{2}$ дуги».

					значений центрального и вписанного углов.		
4	Формулировка теоремы	4 мин	фронт.	П	Метод «версия-проверка а»: предложить сформулировать открытие.	Фиксирует окончательную формулировку на доске.	Формулируют теорему, записывают в тетради.
5	Доказательство	10 мин	фронт.- моделир.	П	Разбор трёх случаев (сторона угла опирается на диаметр и др.) с опорой на равнобедренные треугольники.	Пошагово строит чертёж, задаёт наводящие вопросы.	Следят, зарисовывают, защищают доказательство 3-го случая в парах.

						 1) Т.к. $\angle AOB$ и $\angle BOC$ смежные, то $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB$ 2) Т.к. OB и OC радиусы, то $\triangle OBC$ равнобедренный 3) Т.к. $\triangle OBC$ равнобедренный, то $\angle OBC = \angle OCB$ 4) $\angle OCB = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2}$	
6	Первичное закрепление	8 мин	парная	Р	Карточки-задачи (Учебник Атанасян, § 72: № 4, 6, 7).	Раздаёт карточки, консультирует, организует взаимопроверку.	Решают задачи, сверяют ответы.
7	Алгоритм решения	4 мин	фронт.	Р	Выделение шага алгоритма: 1) определить дугу; 2) тип угла; 3) применить правило $\frac{1}{2}$.	Записывает алгоритм на доске	Предлагают шаги, фиксируют в тетрадах.
8	Рефлексия «Светофор»	2 мин	фронт.	Р, К	Приём «Светофор»:	Просит поднять карточку соответствующего цвета.	Показывают карточки, формулируют

					зелёный — понял; жёлтый — вопрос; красный — нужна помощь.		вопросы.
9	Итог и Д/з	2 мин	фронт.	Р	Подвести итог: «Вписанный угол = $\frac{1}{2}$ дуги». **Домашнее задание:** — Учебник Атанасян § 72, № 9, 10, 11;	Озвучивает Д/з и критерии оценки.	Записывают итоговую формулу и домашнее задание.

Приложение В

Технологическая карта урока открытия новых знаний «Описанная окружность треугольника и серединные перпендикуляры» (8 класс)

1. Общая информация

Составитель: Водяницкий Н. П. DZ-Б20Б-01

УМК: Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. — «Геометрия 7-9»

Предмет: Математика — Геометрия

Класс: 8 (базовый)

Раздел программы: Окружность. Серединный перпендикуляр. Описанная окружность треугольника

Количество учащихся: 20–24 чел.

2. Необходимое обеспечение занятия

- Компьютеры (1 на 2 ученика); проектор; ПО «Математический конструктор» с заготовкой «Tower Quest».
- Раздатка: карточки «Светофор», рабочие листы «Башня-маяк», циркули, линейки.

3. Методические ориентиры

Тема: «Описанная окружность треугольника. Серединные перпендикуляры».

Тип урока: открытие новых знаний (ОУН).

Цель: вывести правило пересечения серединных перпендикуляров и освоить построение центра описанной окружности треугольника при помощи циркуля и линейки.

Задачи:

- Образовательные — доказать свойство: диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам; установить, что серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности; применять свойство в задачах.
- Развивающие — развивать исследовательские навыки, умение работать с построениями, логическое обоснование шагов.
- Воспитательные — формирование культуры групповой работы, взаимопомощи, уважительного диалога.

4. Планируемые результаты обучения

Предметные результаты	Личностные результаты	Метапредметные (УУД)
Умеют строить серединный перпендикуляр к отрезку; доказывают его свойство; строят центр описанной окружности; решают задачи на описанную окружность.	Развивают ответственность за коллективное решение, эстетическое восприятие геометрических построений.	Познавательные — анализ условия, выдвижение гипотез, экспериментальная проверка. Регулятивные — планирование, коррекция, самооценка. Коммуникативные — распределение ролей, аргументация, активное слушание.

5. Характеристика этапов занятия

№	Этап	Время	Форма	УУД	Решаемые задачи,	Деятельность учителя	Деятельность учащихся

					методы/приёмы		
0	Мотивация «Башня принца»	3 мин	фронт.	К	Вводная задача принц хочет башню равноудалённую от трёх ворот	Рассказывает легенду, задаёт вопрос о равных расстояниях.	Слушают, формулируют проблему (где поставить башню?).
1	Постановка темы	2 мин	фронт.	К	Вопросы: какую фигуру образуют ворота (треугольник)? Какую точку ищем?	Фиксирует ответы, записывает тему «Описанная окружность» на доске.	Отвечают, записывают тему.
2	Гипотезы	3 мин	фронт.	К/П	«Где находится точка, равноудалённая от вершин треугольника?»	Чертит треугольник, собирает гипотезы (внутри/снаружи).	Высказывают мнения, предлагают окружность.
3	Исследование свойства хорды	6 мин	коллективно (ПК)	П	Динамический чертёж: диаметр	Управляет моделью, задаёт	Наблюдают, формулируют

					⊥ хорде делит её пополам	«Что замечаете?»	свойство.
4	Доказательство	6 мин	фронт.- моделир.	П	Пошаговое доказательство через равнобедренный треугольник	Строит радиусы, выводит теорему.	Зарисовывают, проговаривают ход доказательства.
5	Вывод алгоритма	4 мин	фронт.	П	Идея: провести три серединных перпендикуляра сторон.	Оформляет алгоритм на флипчарте.	Формулируют алгоритм, записывают.
6	Практика: построение центра	8 мин	парная	Р	Инструкция: постройте центр описанной окружности произвольного треугольника.	Консультирует, проверяет результат.	Строят серединные перпендикуляры, проводят окружность.
7	Закрепление (учебник)	7 мин	парная	Р	Учебник Атанасян § 83:	Организует выполнение,	Решают, сверяют,

					№ 5, 6, 8.	показывает ответы.	корректируют.
8	Рефлексия «Светофор»	2 мин	фронт.	Р/К	Карточки трёх цветов.	Просит выбрать цвет, объяснить выбор.	Поднимают карточку, формулируют вопросы.
9	Итог и Д/з	2 мин	фронт.	Р	Подведение итога: пересечение серединных перпендикуляров — центр описанной окружности. Д/з: Учебник § 83 № 10, 11, 14; рабочая тетрадь № 3-4; творческое	Озвучивает критерии оценки.	Записывают Д/з, формулу.

					задание анимация.	—		
--	--	--	--	--	----------------------	---	--	--

Приложение Г

Технологическая карта урока открытия новых знаний «Длина окружности и число π » (9 класс)

1. Общая информация

Составитель: Водяницкий Н. П. (студент КГПУ)

УМК: Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. — «Геометрия 7-9»

Предмет: Математика — Геометрия

Класс: 9 (базовый)

Раздел программы: Окружность. Длина окружности. Число π .

Количество учащихся: 20–24 чел.

2. Необходимое обеспечение занятия

- Компьютеры/планшеты (1 на 2 уч.), проектор, ПО «Математический конструктор» (сцена «Circle-Tape»).
- Раздатка: ленты-измерители 50 см, верёвочные рулетки, карточки «Светофор».
- Интерактивная таблица для фиксации результатов эксперимента.

3. Методические ориентиры

Тема: «Длина окружности и число π ».

Тип урока: открытие новых знаний (ОУН).

Цель: экспериментально вывести зависимость между длиной окружности и её диаметром, открыть число π , сформулировать и освоить формулу $C = \pi \cdot d$ (или $2\pi r$).

Задачи:

- Образовательные — получить опыт измерения длины окружности, установить постоянство отношения C / d для разных кругов; вывести и применить формулу $C = \pi \cdot d$.
- Развивающие — формировать навыки экспериментально-исследовательской деятельности, умение обобщать результаты наблюдений, вычислительные навыки.
- Воспитательные — формировать аккуратность при измерениях, культуру совместного поиска истины, уважение к историческому опыту науки.

4. Планируемые результаты обучения

Предметные результаты	Личностные результаты	Метапредметные (УУД)
Экспериментально подтверждают постоянство отношения C / d ; формулируют число π ; применяют формулу $C = \pi \cdot d$ и $2\pi r$ при решении задач.	Осознают ценность экспериментальной проверки идей, развивают познавательный интерес к истории науки и технике.	Познавательные — анализ и систематизация данных, вывод закономерности. Регулятивные — постановка цели, планирование эксперимента, самооценка. Коммуникативные — распределение ролей, совместное обсуждение результатов, аргументация.

5. Характеристика этапов занятия

№	Этап	Время	Форма	УУ	Содержание / методы	Деятельность	Деятельность
---	------	-------	-------	----	---------------------	--------------	--------------

				Д		учителя	учащихся
0	Мотивация «Лесоруб-строитель »	3 мин	фронт.	К	Сюжет о выборе брёвен одинакового диаметра как быстро оценить «в обхвате»?	Рассказывает историю, демонстрирует бревен-муляж; подводит к идее измерения окружности.	Слушают, отвечают на вопросы о диаметре, обхвате.
1	Постановка проблемы	2 мин	фронт.	К	«Измеряя обхват, мы фактически измеряем длину окружности. Как её считать?»	Фиксирует проблему на доске: «Как найти длину окружности?»	Формулируют затруднение, предлагают гипотезы.
2	Эксперимент (измерения лентой)	6 мин	групповая	П	Группы получают 3 круглых предмета, измеряют диаметр линейкой и длину окружности лентой; вносят данные в общую	Инструктирует, распределяет материалы, демонстрирует образец.	Измеряют, считают отношение C / d , озвучивают результаты

					таблицу.		(~3.14).
3	Анализ данных	4 мин	фронт.	П	Коллективно выясняют, что отношение почти постоянно; ввод понятия π .	Сводит результаты на экране, пишет « $\pi \approx 3.14$ ».	Обобщают, формулируют вывод: $C \approx \pi \cdot d$.
4	Динамическая проверка	5 мин	коллективно (ПК)	П	Моделирование в «Математическом конструкторе»: ползунок изменяет радиус, программа считает C и d	Демонстрирует, предлагает учащимся предсказать значения.	Наблюдают, сравнивают, убеждаются в постоянстве π .
5	Формулировка правила	3 мин	фронт.	П	Окончательно формулируют $C = \pi \cdot d$ и $C = 2\pi r$; обсуждают единицы измерения.	Записывает формулы, подчёркивает условия применения.	Переписывают, задают уточняющие вопросы.
6	Первичное закрепление (три задания)	10 мин	парная	Р	Задания №1-3 (см. раздатку).	Раздаёт карточки, курирует решение,	В парах решают задачи, отмечают

						проводит blitz-проверку.	ответы на карточках.
7	Рефлексия «Светофор»	2 мин	фронт.	Р/К	Карточки зелёный/жёлтый/красный .	Просит выбрать цвет, комментирует.	Оценивают своё понимание, формулируют, что осталось неясным.
8	Итог и Д/з	2 мин	фронт.	Р	Подведение итогов, объявление Д/з.	Озвучивает домашнее задание и критерии оценивания.	Записывают Д/з, выводы.

6. Карточка «Первичное закрепление» (используется на этапе 6)

№	Формулировка задания
1	Велосипедное колесо имеет диаметр 70 см. Найдите

	длину его обода (ответ выразите в сантиметрах).
2	Стадион имеет беговую дорожку по кругу радиусом 20 м. Какой путь (в метрах) пробежит спортсмен за один круг?
3	Колесо тележки диаметром 0,4 м совершает x оборотов, проходя расстояние 1 км. Найдите x (ответ округлите до целого).

7. Домашнее задание

Тип	Задания
Базовый уровень + Повышенный + Творческое	Учебник Атанасян, § 86: № 4, 6, 9; Рабочая тетрадь, блок «Длина окружности»: № 2, 3; Проект (по желанию, +1 балл): снять 30-секундное видео, где демонстрируется практическое использование формулы $C = \pi \cdot d$ (измерение столешницы, крышки кастрюли и т. д.).