МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики

Кафедра математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
протокол № 9
от 8 мая 2025 г.

Зав. кафедрой

М.Б. Шашкина

ОДОБРЕНО
на заседании
научно-
методического
совета ИМФИ
протокол № 8
от 14 мая 2025г.
Председатель

Е.А. Аешина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Для профилей по направлениям подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию «Ядра высшего педагогического образования»
Квалификация: бакалавр

Составитель: Багачук А.В., доцент кафедры математики и МОМ

1. Назначение фонда оценочных средств.

1.1. **Целью** создания ФОС дисциплины «Дифференциальные уравнения» является установление соответствия учебных достижений запланированным результатам обучения и требованиям основной профессиональной образовательной программы, рабочей программы дисциплины.

1.2. ФОС по дисциплине «Дифференциальные уравнения» **задачи**:

- оценка уровня сформированности компетенций, характеризующих способность выпускника к выполнению видов профессиональной деятельности по квалификации бакалавр, освоенных в процессе изучения данной дисциплины.

1.3. **ФОС разработан на основании нормативных документов**:

- федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование;
- основной профессиональной образовательной программы высшего образования;
- Положения о формировании фонда оценочных средств для текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре в федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева и его филиалах.

2. Перечень компетенций, формируемых в процессе изучения дисциплины:

- способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач (ПК-1).

3.2.2. Фонд оценочных средств (контрольно-измерительные материалы)

1.0. Примерный вариант теста (входной контроль).
1.1. Вопросы к коллоквиуму.
1.2. Контрольная работа №1.
1.3. Контрольная работа №2.
1.4. Самостоятельная работа.
1.5. Вопросы к зачету.

Вопросы к коллоквиуму

1. 1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Проверьте, что линейное дифференциальное уравнение I порядка удовлетворяет теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
3. Что называется интегральной кривой?

1. Уравнения с разделяющимися переменными.
2. Являются ли приведенные ниже функции однородными? Если да, то укажите степень однородности: $f_1 = \frac{4x^2 + y^2}{2y + x}$; $f_2 = \frac{(\sqrt{xy} + 2y)^3}{x^2 + y^2}$; $f_3 = \ln \frac{2x + y}{3x + 5y}$; $f_4 = \ln \frac{x}{y} + 4x$; $f_5 = x \ln \frac{2x}{y} - y$.
3. Как задаются начальные условия для дифференциального уравнения первого порядка?

1. Однородные уравнения.
2. Можно ли сказать, что через каждую точку плоскости проходит по одной интегральной кривой уравнения $\frac{dy}{dx} = ay$?
3. Какие линейные дифференциальные уравнения называются однородными?

1. Линейные дифференциальные уравнения I порядка.
2. Какие из уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными a) $y' = \frac{y}{x} - x^3 y^4$; b) $y^2 dx + x^2 dy = 0$; c) $a(xdy + 2ydx) = xydy$?
3. Какая функция называется однородной степени k?

1. Геометрическое истолкование дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Какие из уравнений являются линейными a) $(x + y)y' + x - y = 0$; b) $xy' - y = x^2 \cos x$; c) $y' = -\frac{2x + y}{2y + x}$; d) $xy' + y - e^x = 0$; e) $xy' + 2y - xy^2 = 0$?
3. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?

1. Теорема о замкнутом подмножестве полного метрического пространства.
2. Какие из перечисленных функций являются однородными, а какие нет $f_1 = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{y^2 - x^2}$; $f_2 = x^3 + 5x^2 y - y^3$; $f_3 = 2x^2 + y^2 - 3x + 5$; $f_4 = \frac{x}{y} + e^{x/y}$; $f_5 = \frac{x^2 - y^2}{5x}$?
3. Какое дифференциальное уравнение называется линейным?

1. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения I порядка, ее геометрический смысл.
2. Какие из уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными
   a) $x^2y' + y^2 = xyy'$; b) $(a^2 - x^2)dy + xydx = 0$; c) $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$?
3. Какое дифференциальное уравнение называется однородным?

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Определите тип, к которому принадлежат следующие уравнения:
   a) $y' + \frac{1-y^2}{1-x^2} = 0$; b) $(3xy^2 + 2x^3)dx + y^3dy = 0$; c) $y' = x^2 + y$?
3. Какая подстановка используется для решения однородного дифференциального уравнения?

1. Уравнения с разделяющимися переменными.
2. Какие из уравнений являются линейными a) $(x+y)y' + x - y = 0$; b) $xy' + y\sin x = x^3 - 1$; c) $y' = -\frac{2x+y}{2y+x}$?
3. В чем состоит условие Липшица для функции $f(x,y)$ по y?

1. Однородные уравнения.
2. Определите тип, к которому принадлежат следующие уравнения:
   a) $y'\cos x + y\sin x = 1$; b) $(y^2 - x^2)dx + 2xydy = 0$; c) $(x - y + 1)y' = x + y + 1$?
3. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ пересекаться?

1. Линейные дифференциальные уравнения I порядка.
2. Какие из уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными
   a) $x^2y' + y^2 = xyy'$; b) $(a^2 - x^2)dy + xydx = 0$; c) $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$?
3. Какие условия являются достаточными для единственности решения дифференциального уравнения?

1. Геометрическое истолкование дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Какие из уравнений являются линейными a) $xy' + y - e^x = 0$; b) $xy' + 2y - xy^2 = 0$; c) $x^2y' - y = x^2\cos x$?
3. Справедливо ли утверждение: если функция $f(x,y)$ имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, то она удовлетворяет условию Липшица по переменной y?

1. Теорема о замкнутом подмножестве полного метрического пространства.
2. Определите тип, к которому принадлежат следующие уравнения:
   a) $(a^2 - x^2)dy + xyd x = 0$; b) $y' = \frac{y - x^3}{x}$; c) $y' = x^2 + 2x - y$?
3. Является ли решением линейного однородного уравнения функция $y \equiv 0$? Может ли это решение быть получено из общего?

1. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения I порядка.

2. Являются ли приведенные ниже функции однородными? Если да, то укажите степень однородности: $f_1 = \dfrac{x^3 + y^3}{5x^2 \; y^3 + 3x}$; $f_2 = \arcsin \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$; $f_3 = \ln \dfrac{2x + y}{3x + 5y}$.
3. В чем состоит метод вариации постоянных?

Контрольная работа № 1

Вариант № 1

1. Решите уравнение $(x^2 + xy + y^2)\,dx = x^2 dy$.
2. Найти кривую, проходящую через точку А(3; 2) и обладающую тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.
3. Найдите частное решение уравнения $y' - 3x^2 y = x^5 + x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.
4. Решите уравнение $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.
5. Решите уравнение $y''' = \dfrac{2}{x^3}$.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
2. Найти кривую, проходящую через точку А(2; 4), зная, что абсцисса точки пересечения касательной в произвольной точке кривой с осью Ох равна удвоенной абсциссе точки касания.
3. Проинтегрируйте уравнение $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.
4. Решите уравнение $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y}$.
5. Решите уравнение $y'' + 2xy' = 0$.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.
2. Найти кривую, проходящую через точку А(1; 2), для которой абсцисса точки пересечения касательной в произвольной точке кривой с осью Ох равна $3^{\frac{2}{}}$ абсциссы точки касания.
3. Проинтегрируйте уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.
4. Решите уравнение $xdy - ydx = ydy$.
5. Решите уравнение $y'' + 2y = 0$.

Вариант № 4

1. Найдите частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + ctg\frac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.
2. Найти кривые, у которых длина поднормали постоянна и равна p.
3. Проинтегрируйте уравнение $xy' + y - e^x = 0$.
4. Решите уравнение $y' + 2y = y^2 e^x$.
5. Решите уравнение $y'' = \frac{2}{x^5}$.

Контрольная работа №2

Вариант № 1

1. Найдите частное решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 2x^2 e^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.
2. Решите уравнение $y'' - 2y' + y = 4e^x$.
3. Решите уравнение $y'' + y = 6\sin 2x$.

Вариант № 2

1. Найдите частное решение уравнения $y'' + 4y = 4e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$.
2. Решите уравнение $y'' - y' + y = -13\sin 2x$.
3. Решите уравнение $y'' - y = x^2 - x + 1$.

Самостоятельная работа

Вариант № 1

Определите тип следующих уравнений и решите их:

1. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$
2. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
3. $y\ln y - xy' = 0$

Вариант № 2

Определите тип следующих уравнений и решите их:

1. $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2 dy$

2. $y' = 9y^2 - 4$

3. $y' - 3x^2 y = x^5 + x^2$

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений.
3. Уравнения с разделяющимися переменными. Примеры.
4. Однородные дифференциальные уравнения. Примеры.
5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Примеры..
6. Геометрическое истолкование дифференциальных уравнений 1-го порядка. Поле направлений. Изоклины.
7. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
8. Метод вариации постоянной для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 1 порядка.
9. Дифференциальные уравнения Бернулли. Примеры.
10. Линейный дифференциальный оператор и его свойства.
11. Теорема о линейной комбинации частных решений линейного однородного дифференциального уравнения 2 порядка.
12. Понятия определителя Вронского. Теорема об определителе Вронского частных решений линейного однородного дифференциального уравнения 2 порядка.
13. Линейно зависимые функции. Теорема об определителе Вронского линейно зависимых функций.
14. Линейно независимые функции, определитель Вронского линейно независимых функций,
15. Линейно независимые функции. Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения 2 порядка.
16. Метод вариации постоянных для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка.

17. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка.

18. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами: определение, методы их решения.