МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики
(наименование института/факультета)
Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕНО

На заседании кафедры
Протокол № 8 от «07» мая 2025
Шашкина Мария Борисовна
ФИО зав. кафедрой

ОДОБРЕНО

На заседании научно-методического совета специальности (направления подготовки)
Протокол № 8 от 14 мая 2025

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся

по алгебре
наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),
Направление (профиль) образовательной программы Математика и Информатика
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию
«Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составитель: С.И. Калачева, доцент
(ФИО, должность)

ВХОДНОЙ КОНТРОЛЬ

Тест

…………………………………………

Элементарная математика,
Тест

1. Сумма корней уравнения $1 - sin5x = (cos\frac{3x}{2} - sin\frac{3x}{2})^2$, принадлежащих отрезку $[180°, 270°]$, равна

1) $360°$; 2) $225°$; 3)$222°$; 4) $370°$

2. Число целых решений неравенства $cosx < -0{,}5\sqrt{2}$, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ равно

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

3. Значение $\frac{x_1}{tg\, x_2}$, где x_1 - наибольший, а x_2 - наименьший из корней уравнения $3cos^2x - sin^2x$-sin2x=0, принадлежащих интервалу $(-90°, 90°)$, равно

1) $15°$; 2) $-15°$; 3) $135°$; 4) $-135°$; 5) $45°$.

4. Число корней уравнения $x^3 - 2x^2 - 8x = \sqrt{cos\pi(x+1) - 1}$ равно

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.

5. Число различных корней уравнения $(1 + cos4x)sin2x = cos^2 2x$ на промежутке $(30°, 90°)$ равно

1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) 5.

6. Сравните числа *a* и *b*:

а) $a = 100!$, $b = 10^{100}$ б)$a = sin1cos2$, $b = cos1cos2$

с) $a = log_{0,22}0{,}7$, $b = log_{0,33}0{,}7$

7. Докажите неравенство $1 + 2a^4 \geq a^2 + 2a^3$.

ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ

…………………………………………………..

Самостоятельная работа 1.1. Элементы теории множеств

Вариант 1.

1. Найдите A ∪ B, A ∩ B, A \ B, $\overline{A}$, B \ $\overline{A}$, если A = (2, 4), B = [4, 5]. Изобразите на графикедекартовы произведения A × B и B × A.

2. Выясните, справедливо ли равенство A\(B\C) = (A\B)\C.

3. Методом математической индукции докажите, что:

а) $S_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = ½\cdot n(3n - 1)$; б) $8^n - 1$ нацело делится на 7.

4. Выясните, является ли бинарное отношение ρ, заданное на множестве целых чиселследующим образом:

$m \rho n \Leftrightarrow (9m - n)$ делится нацело на 4,

рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным,отношением эквивалентности, отношением порядка.

5. Бинарное отношение задано на множестве пар действительных чисел.

Выясните, являетсяли оно отношением эквивалентности или отношением порядка.

а) $(a, b)\ \rho\ (c, d) \Leftrightarrow\ a - b = c - d$.

б) $(a, b)\ \rho\ (c, d) \Leftrightarrow\ a < c \wedge b \leq d$.

6. Пусть A = {0, 1, 2, 3} в множество B = {1, 2, 3, 4}. Отображение S: A $\to$ B задано следующим образом: S = {(0, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4)}. Является ли оно сюръективным, инъективным, биективным?

7. Охарактеризуйте соответствия (отображения), действующие на множестведейстительных чисел: а) $xfy \Leftrightarrow 1 = x^2 + y^2$; б) $xgy \Leftrightarrow y = \cos x$.

8. Найдите композиции $g \circ f$, $f \circ g$: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \cos x$.

9. Докажите, что для данных функций существуют обратные функции и найдите их.

а) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - 2$;   **б**) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = e^x$.

Самостоятельная работа-1.2. Теория делимости

Вариант 1

1. Найдите НОД и НОК чисел $a = 318$ и $b = 477$. Найти целые x, y, такие, что:

$$\text{НОД}(a, b) = ax + by.$$

2. С каким наименьшим неотрицательным числом сравнимо число a по модулю 7.а) $a = 342$; б) $a = -23$?

3. Перечислите все классы вычетов по модулю 6. К какому классу принадлежит число 153? Укажите не менее трёх положительных и трѐх отрицательных элементов для класса, порожденного элементом 4.

Самостоятельная работа 1.3. Основные алгебраические структуры

Вариант 1

1. Выясните, является ли множество целых чисел кратных 7, группой относительносложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?

2. Выясните, является ли множество чисел вида $\{a + b\sqrt{\ } \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ группой относительно сложения, группой относительно умножения, кольцом, полем?

3. Вычислите i^{345}.

4. Найдите все комплексные корни уравнения $x^2 + x + 2 = 0$.

5. Вычислите корни $\sqrt[5]{\dfrac{1-i}{\sqrt{\ }}}$ и результат записать в тригонометрической форме.

6. Геометрически описать множество комплексных чисел z, для которых $|z - 1| = 6$.

Самостоятельная работа 1.4. Системы линейных уравнений и матрицы

Вариант 1.

1. Вычислите определитель $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Пусть $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A = B \cdot C$. Найдите для каждой матрицы определитель.

3. Найдите матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Решите систему по правилу Крамера $\begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$

Самостоятельная работа 2.1. Конечномерные векторные пространства

Вариант 1

1. Вычистите ранг системы векторов: $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,$

$0, 0, 2)$.

2. Найдите координаты вектора $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 3)$ в базисе $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1, 1, 0)$,

$\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_4 = (1, 0, 0, 0)$.

3. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4 \end{cases}$$

4. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Самостоятельная работа 2.2. Линейные отображения и линейные операторы

Вариант 1

1. Выясните, является ли данный оператор линейным. Если это возможно, найти егоматрицу в базисе {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}.

а) $a(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$б) $a(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, 2x_1x_2)$.

2. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе линейного пространства матрицей $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Самостоятельная работа 3.1. Теория многочленов.

Вариант 1

1. Найдите частное и остаток от деления многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ на многочлен

$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

2. Найти НОД и НОК многочленов $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.
3. Используя схему Горнера найдите $f(a)$, где $f = 4x^3 + x^2$, $a = -1 - i$.
4. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x) = 2x^6 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ постепеням $(x - 4)$.
5. С помощью производной отделить неприводимые кратные множители

многочлена:

$f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$.

6. Найдите все рациональные корни многочлена и разложить его на множители,неприводимые над полем рациональных чисел $f(x) = 20x^5 - 72x^4 + 57x^3 - 75x^2 + 37x - 3$.
7. Найдите все комплексные корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.
8. Найдите все комплексные корни уравнения: $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$.
9. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25}+4\sqrt[3]{5}+1}$.
10. Выразите многочлен $f\ (x_1,\ x_2, x_3) = 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2\ x_2^2x_{2\,3}^2$ через основные (элементарные)симметрические многочлены.
11. Найдите сумму кубов корней многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Индивидуальная домашняя работа №1

(Матрицы, определители, системы линейных уравнений)

Задание 1. *Для матриц A и B:*

1) вычислить определитель двумя способами;

2) найти обратную матрицу и результат проверить умножением.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 2. *Решить СЛУ тремя способами (методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера), если это возможно.*

1. $a)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

Проверочная работа №1

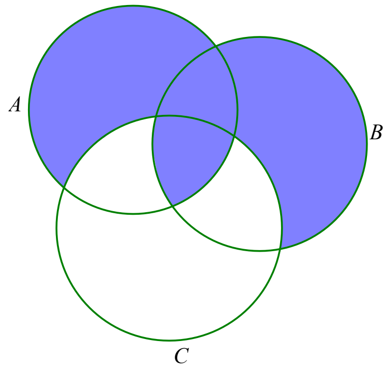
Вариант 1

1. Решить систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

2. Найти ранг, базис системы векторов, выразить оставшиеся векторы через него и применив к нему процесс ортогонализации, получить ортогональный базис: a_1=(-2;-1;0;1), a_2=(1;2;0;0), a_3=(0;1;2;2), a_4=(2;2;2;1),

a_5=(-2;-1;-2;-1)

3. Описать заштрихованное множество



.

Индивидуальная домашняя работа №2

(Векторное пространство, линейная зависимость, базис)

Задание. *Найти базис системы векторов и выразить оставшиеся векторы через него. Найти другой базис системы и выразить оставшиеся векторы через новый базис.*

Вариант 1.

1) a_1=(1;-1;2;0), a_2=(2;0;1;-1), a_3=(0;-1;2;3), a_4=(1;3;-3;3), a_5=(2;2;2;2)

2) a_1=(1;1;1;1), a_2=(1;0;1;0), a_3=(-1;-1;-1;-1), a_4=(0;1;0;1), a_5=(-1;0;-1;0)

3) a_1=(4;0;0;0), a_2=(1;4;0;0), a_3=(1;1;4;4;), a_4=(0;0;0;4), a_5=(0;0;4;1)

4) a_1=(3;2;1), a_2=(1;2;3), a_3=(2;3;1), a_4=(2;1;3), a_5=(0;0;1)

Поверочная работа №2

1. Доказать, что векторы α_1=(1,2,3), α_2=(3,1,2), α_3=(3,–2,–2) составляют базис пространства R^3 и найти координаты единичных векторов в этом базисе.
2. Известно, что $\begin{cases} a_1 = (1,1,0) \\ a_2 = (0,1,1), \\ a_3 = (1,0,1) \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = (0,0,1) \\ b_2 = (0,1,0) \\ b_3 = (1,0,0) \end{cases}$ – векторы линейного пространства L, заданные своими координатами в некотором базисе e_1, e_2, e_3. В том же базисе найдите матрицу линейного отображения φ, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3.

Индивидуальная домашняя работа №3

(Линейная алгебра: линейные операторы)

Задание 1. *Найти матрицу линейного оператора φ, при котором базис (a) переходит в базис (b).*

1. $(a)\colon \begin{cases} \bar{a}_1 = (1,0,1) \\ \bar{a}_2 = (0,1,1) \\ \bar{a}_3 = (1,1,0) \end{cases}$ $(b)\colon \begin{cases} \bar{b}_1 = (1,1,1) \\ \bar{b}_2 = (1,2,3) \\ \bar{b}_3 = (3,1,1) \end{cases}$

Задание 2. *Привести матрицу к диагональному виду с помощью линейного оператора. Указать базис, в котором данная матрица имеет диагональный вид.*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 3. *Привести квадратичную форму к диагональному виду.*

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy + 6yz$

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

Вопросы к теоретическому зачету 1

Зачет 1. Вопросы.
1. Операции над множествами, их свойства.
2. Метод математической индукции.
3. Бинарные отношения на множестве, их свойства. Операции над бинарными отношениями.
4. Отношение эквивалентности. Построение разбиения множества по эквивалентности.
5. Определение, примеры и виды отображений (соответствий, функций). Композиция отображений, её свойства.
6. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.
7. Отношение делимости нацело на множестве целых чисел и его простейшие свойства. Теорема о делении с остатком.
8. НОД и НОК целых чисел. Алгоритм Евклида. Взаимно простые числа.
9. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел.
10. Основная теорема арифметики и следствия из нее.
11. Отношение сравнимости по натуральному модулю на множестве целых чисел и его свойства. Множество классов вычетов Zm.
12. Бинарная алгебраическая операция и ее свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства.
13. Определение , примеры и простейшие свойства групп. Группы подстановок и классов вычетов.
14. Подгруппы. Смежные классы и теорема Лагранжа.
15. Изоморфизм и гомоморфизм групп.
16. Определение, примеры и простейшие свойства колец.
17. Подкольца и идеалы кольца.
18. Поле как частный случай кольца: примеры и простейшие свойства.
19. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Свойства операции комплексного сопряжения.
20. Геометрическое представление комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.
21. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.
22. Извлечение корней из комплексных чисел.
23. Матрицы и операции над ними. Кольцо матриц.
24. Знак подстановки. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядков.
25. Основные свойства определителей.
26. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.
27. Обратная матрица, способы ее вычисления.
28. Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определенные и

неопределенные системы линейных уравнений.
29. Запись и решение системы n линейных уравнений с n переменными в матричной форме. Правило Крамера.

Экзамен 2. Вопросы.

1. Примеры и простейшие свойства векторных пространств. Арифметические векторные пространства.
2. Линейная зависимость системы векторов.
3. Базис и ранг конечной системы векторов. Разложение векторов по базису. Базис и размерность конечномерного векторного пространства.
4. Ранг матрицы. Способы его вычисления.
5. Критерий совместности системы линейных уравнений.
6. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
7. Однородная система линейных уравнений. Связь решений неоднородной и ассоциированной с ней однородной системы.
8. Подпространства, критерий подпространства, примеры.
9. Подпространства фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.
10. Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Угол между векторами. Ортонормированный базис.
11. Линейные отображения и линейные операторы векторных пространств, примеры, простейшие свойства. Ядро и образ линейного отображения.
12. Матрица линейного оператора относительно данного базиса, ее изменение при переходе к другому базису.
13. Собственныевекторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение/

Зачет 3. Вопросы.

1. Кольцо многочленов от одной неизвестной. Степень многочлена и ее свойства.
2. Многочлены над полем: деление с остатком, НОД многочленов, разложение многочлена на неприводимые множители.
3. Теорема Безу. Схема Горнера. Многочлены над областью целостности: количество корней, функциональное и алгебраическое равенство многочленов.
4. Формальная производная многочлена и кратные корни.
5. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена над полем комплексных чисел на неприводимые множители.
6. Теорема Виета.
7. Решение уравнений 3-й и 4-й степени.
8. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.
9. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.
10. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел.
11. Алгебраические расширения полей. Избавление от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби. Примеры геометрических задач, сводящихся к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах.
12. Алгебраические и трансцендентные числа.
13. Построение кольца многочленов от нескольких переменных.
14. Симметрические многочлены.
15. Применение симметрических многочленов к решению систем уравнений.