

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики

Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО

На заседании кафедры
Протокол № 8 от «07» мая 2025
Зав кафедрой М.Б. Шашкина

ОДОБРЕНО

на заседании НМСС(Н) ИМФИ
протокол № 8 от 14 мая 2025
Председатель Е.А. Аёшина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся

по теории вероятностей и математической статистике

наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) «физика» и
«математика», 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
«математика» и «информатика»
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию
«Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составитель: Н.А. Журавлева, доцент
(ФИО, должность)

Красноярск 2025

**Фонд оценочных средств по дисциплине
Теория вероятностей и математическая статистика**

Раздел 1. Случайные события и величины

Тема 1.1. Случайные события

Типовая Контрольная работа

1. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.
2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы в течение часа первого элемента равна 0,95, второго – 0,98, третьего – 0,9. Найдите вероятность того, что в течение часа будет работать хотя бы один элемент.
3. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определите вероятность того, что вынутый шар – белый.
4. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми? Каково наиболее вероятное число попаданий кольца на колышек при восьми бросаниях?
5. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найдите вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.
6. См. задачу 5. Какова вероятность того, что частота проросших семян отклонится по абсолютной величине от вероятности прорастания не больше, чем на 0,01?
7. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах. (задача из открытого банка заданий ЕГЭ)

Тема 1.2. Случайные величины

Индивидуальное/ групповое задание

1. По одному и тому же маршруту совершают полет три самолета. Для каждого самолета вероятность прибыть в аэропорт по расписанию равна 0,8. Составьте ряд распределения числа самолетов, прибывших в аэропорт по расписанию. Найдите $M(X)$, $D(X)$, . Постройте многоугольник распределения.
2. Бросается игральная кость до первого выпадения пяти очков. Составить ряд распределения числа бросков. Сколько раз в среднем придется бросать игральную кость?
3. Задана интегральная функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Требуется: 1) найти дифференциальную функцию $f(x)$, 2) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, 3) построить графики интегральной и дифференциальной функций:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x/2, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$
4. Дана дифференциальная функция $f(x)$ случайной величины X . Требуется: 1) найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, 2) найти интегральную функцию $F(x)$, 3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin (0; \pi] \\ 0.5 \sin x, & \text{при } x \in (0; \pi] \end{cases}$$
5. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 2 минут.

6. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением 100 м. Найти: 1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м; 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

7. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Пользуясь неравенством Чебышева, оцените вероятность неравенства $|X - M(X)| < 0,4$.

8. На поле площадью в 1000 га берется на выборку по 1 м² с каждого га и подсчитывается урожайность. Оцените вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от средней урожайности по всей площади не более чем на 0,2 ц, если дисперсия на каждый га не превышает 2.

9. Вероятность наличия зазубрин на металлических брусках, заготовленных для обтачки, равна 0,2. Оцените вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 5%.

Раздел 2. Математическая статистика

Лабораторные работы Тема: «Выборочный метод»

(задания 1-4 составлены на основе школьных методических пособий)

Задание 1. В таблице приведены размеры одежды 50 учащихся 9 класса:

50	40	44	44	46	46	44	48	46	44
38	44	48	50	40	42	50	46	54	44
42	42	52	44	46	48	38	46	42	44
46	48	44	40	52	44	48	50	46	46
48	40	46	42	44	50	46	44	46	48

На основании этих данных составить таблицу распределения по частотам значений случайной величины X - размеров одежды учащихся 9 класса. 1) Построить полигон частот. 2) Найти среднее значение величины X , медиану, моду, выборочную дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

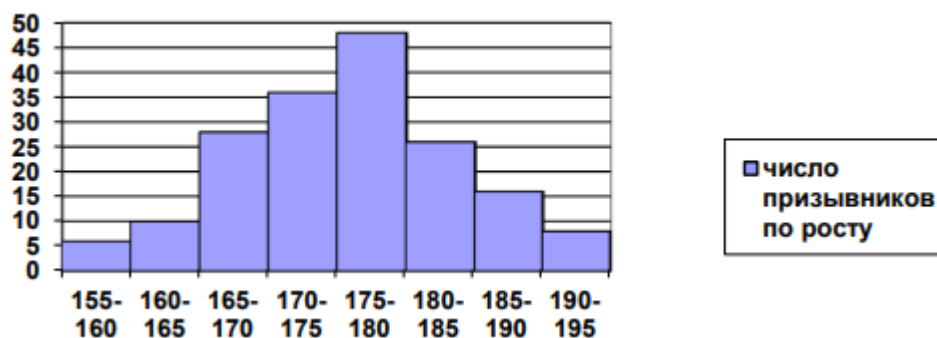
Задание 2 При изучении учебной нагрузки учащихся попросили 32 восьмиклассников отметить время (с точностью до 0,1 ч), которое они затратили в определенный день на выполнение домашних заданий. Получили следующие данные:

2,7	2,5	3,1	3,2	3,4	1,6	1,8	4,2
2,6	3,4	3,2	2,9	1,9	1,5	3,7	3,6
3,1	2,9	2,8	1,5	3,1	3,4	2,2	2,8
4,1	2,4	4,3	1,9	3,6	1,8	2,8	3,9

Представьте полученные данные в виде интервального ряда с интервалами длиной 0.5 ч.

Найдите среднее время, потраченное на выполнение домашних заданий. Постройте полигон частот.

Задание 3/ Гистограмма характеризует распределение призывников по росту:



Пользуясь гистограммой, найдите:

- А) число призывников ростом от 180 до 185 см;
- Б) группу роста, к которой относится наибольшее число призывников;
- В) общее число призывников;

Для случайной величины X , означающей рост призывника, найдите: среднее значение, и медиану. Найдите приближенное значение моды.

Задание 5 Даны наблюдавшиеся значения некоторой случайной величины. Требуется:

1. Построить сгруппированный статистический ряд.
2. Построить кумуляту.
3. Построить гистограмму и полигон относительных частот.
4. Найти выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, моду, медиану.

185	151	187	211	155	208	178	193	149	175
193	163	166	131	200	173	145	166	216	216
156	174	174	161	225	178	188	157	177	183
206	187	209	157	180	163	189	196	204	199
242	192	160	123	181	172	183	120	164	197
134	204	148	157	133	151	169	219	189	134

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое выборка? Какая выборка является репрезентативной?
2. Дайте определение понятия статистического ряда распределения?
3. Как строится сгруппированный статистический ряд?
4. Что такое полигон и гистограмма?
5. Что такое мода и медиана? Как графически их можно найти?
6. Запишите формулы для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии: а) если имеется дискретный статистический ряд, б) если имеется сгруппированный статистический ряд.

Тема: «Статистические оценки параметров распределения»

Приводятся результаты измерения некоторой величины, которые будем рассматривать как n реализаций случайной величины X

31,85 31,36 30,32 30,90 31,70 32,40
31,60 31,12 30,98 31,02 31,05 31,00

В предположении, что X имеет нормальное распределение:

1. Найти точечные несмещенные оценки математического ожидания μ и среднего квадратического отклонения σ .
2. Найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью: $\gamma = 0,95$; $\gamma = 0,99$; $\gamma = 0,999$.
3. Найти погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает математическое ожидание μ случайной величины X , если доверительная вероятность $\gamma = 0,99$; $\gamma = 0,999$.
4. Найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$ можно было утверждать, что, принимая среднее арифметическое за математическое ожидание случайной величины X , допускаем погрешность $\varepsilon = \frac{1}{3}\sigma$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение понятия оценки параметра.
2. Какие требования предъявляются к оценкам?
3. Какие оценки называются точечными?
4. Запишите формулы для нахождения точечных оценок.
5. Приведите примеры несмещенной и смещенной оценок.
6. Для чего вводят интервальные оценки?
7. Дайте определение доверительного интервала, надежности, точности оценки.
8. Какое распределение называется нормальным?

9. Запишите формулы для нахождения доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном .
10. Каков алгоритм нахождения доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном σ ?

Тема: «Статистическая оценка статистических гипотез»

Задание 1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки.

Границы интервалов	-10;-6	-6;-2	-2;-2	2;6	6;10	10;14
частота	6	13	19	12	6	4

Задание 2 В двух группах учащихся — экспериментальной и контрольной — получены следующие результаты по учебному предмету (тестовые баллы; см. табл.).

Первая группа (экспериментальная) N=11 человек	Вторая группа (контрольная) M=9 человек
12 14 13 16 11 9 13 15 15 18 14	13 9 11 10 7 6 8 10 11

Выдвинем гипотезы: H_0 : средние тестовые баллы по учебному предмету в экспериментальной и контрольной группах совпадают. H_1 : средние тестовые баллы по учебному предмету в экспериментальной и контрольной группах не совпадают. Проверьте нулевую гипотезу с помощью критерия Крамера-Уэлча, подсчитав следующие характеристики:

$$T_{эмп} = \frac{\sqrt{M \cdot N} \cdot |\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{N \cdot D_x + M \cdot D_y}}, \quad \text{где} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \sum y_i, \quad D_x = \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2,$$

$$D_y = \frac{1}{M-1} \sum (y_i - \bar{y})^2.$$

(Если $T_{эмп} > 1,96$, то нулевая гипотеза отвергается).

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое статистическая гипотеза?
2. Какая гипотеза называется нулевой, какая – конкурирующей?
3. Какие виды ошибок могут возникнуть при проверке нулевой гипотезы?
4. Что означает уровень значимости α ?
5. Что такое статистический критерий?
6. Что такое критическая область? Каковы виды критических областей?
7. Что такое критерий согласия?
8. В чем заключается критерий согласия Пирсона?
9. Сформулируйте правило проверки нулевой гипотезы.
10. Каков алгоритм отыскания теоретических частот в предположении нормального распределения генеральной совокупности в зависимости от различных исходных данных (вариационный ряд, интервальный ряд)?

Тема: «Элементы теории корреляции»

Задание. По заданной выборке:

- 1) найти уравнение прямой линии регрессии Y на X ,
- 2) оценить тесноту линейной связи, вычислив выборочный коэффициент корреляции;
- 3) проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции при уровне значимости 0,1.

X	9,7	10,4	10,3	9,8	10,1	10,2	10,0	9,9	9,6	9,8
Y	3,5	3,1	3,2	3,4	3,0	3,3	3,1	3,4	3,5	3,2

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение понятия статистической и корреляционной зависимости.
2. Что понимают под условной средней?
3. Сформулируйте задачи корреляционного анализа.
4. В чем состоит суть метода наименьших квадратов?
5. Что характеризует коэффициент корреляции? Каковы его свойства?
6. Что можно сказать о связи между двумя случайными величинами, если коэффициент корреляции равен нулю?
7. Запишите уравнение прямой регрессии.
8. Запишите формулу выборочного коэффициента корреляции.
9. Как проверяется значимость выборочного коэффициента корреляции?