

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Татарников Антон Викторович

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ
ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ
ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ»

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы: Математика



ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой

канд. пед. наук, доцент Шашкина М.Б.

* 17.06.2024 * [Signature]

(дата, подпись)

Научный руководитель

д-р. физ.-мат. наук., доцент Михалкин Е.Н.

[Signature]

Дата защиты

17.06.2024

Обучающийся

Татарников А.В.

[Signature]

Оценка

уровневысоко

Прописью

Красноярск 2024

Содержание

Введение	3
Глава 1. Теоретические основы организации обучения учащихся решению задач по теме производная, ориентированная на формирование математической грамотности	5
1.1 Математическая грамотность: понятие и условия формирования	5
1.2 Цели и задачи обучения понятию производная в школьном курсе алгебры и начал анализа	8
1.3 Содержательный компонент и методы обучения понятию производная	10
Вывод по главе 1	14
Глава 2. Методика формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе обучения темы «Производная»	15
2.1. Методическая схема обучения по теме производная в курсе алгебры и начал анализа	15
2.2. Система задач по теме производная для подготовки к итоговой аттестации старшеклассников	18
2.3. Анализ результатов опытно-экспериментальной работы и оценка эффективности разработанной модели	23
Вывод по главе 2	35
Заключение	36
Библиографический список	38

Введение

Актуальность исследования

В современном мире, когда наука не стоит на месте и технологии выходят на новый уровень, математическая грамотность переходит в ключевой момент образования. Математическая грамотность — это не только способность решать математические задания, но и шанс подключить своё мышление, разного рода методы для реализации поставленных задач и объективная оценка их решения. Одним из важных аспектов этого раздела является тема производная в математике, которая является не просто обычным разделом математики, но и есть инструмент для математической грамотности ученики в жизни.

Раздел темы «Производная» — это прочное понятие, которая дает шанс к пониманию вещей с изменением различных величин. Знание и понимание этих вещей безусловно важно для понимания математической грамотности, так как это направление позволяет предсказывать и решать поставленные задачи, что является центральным навыком. Задания, связанные с темой, производная, направлена на решение задач, которые ученики могут продемонстрировать в решении задач, узнавать и понимать эти задачи, и реализовывать их на процессе решения этих же задач.

Конечным итогом этих задач будет являться не только использование формул для решения, но и понимание как эти задачи можно реализовать и использовать полученные знания в жизни, в использовании таких наук как физика, химия, биология, инженерия. При развитии математической грамотности ученики, углубляют понимание различных рода функций и их графиков.

Решение и понимание задач по теме производная важны для формирования математической грамотности в образовательном процессе. Они помогают глубоко начинать понимать математику. Что бы образовательный процесс стал более успешным, на уроках должны

происходить такие элементы как решение задач, разные подходы обучения, реализация проектов.

Глава 1. Теоретические основы организации обучения учащихся решению задач по теме «производная», ориентированная на формирование математической грамотности

1.1 Математическая грамотность: понятие и условия формирования

Требованием ФГОС СОО, изучение математики должно способствовать «осознание значения математики в повседневной жизни человека, понимание роли математических процессов в современном мире, формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления мире» [22, с. 46].

Современные стандарты ФГОС предусматривают обязательное освоение предметных знаний по дисциплине математика. Подчеркивается, что изучение математики способствует развитию познавательных способностей, формированию определенного типа мышления.

Из Государственной программы РФ «Развитие образования», рассчитанной на 2018-2025 гг. следует, что одной из основных задач ФГОС является формирование функциональной грамотности» [17, с. 1].

Леонтьев А.А.: «Функционально грамотный человек — это человек, который способен использовать все постоянно приобретаемые в течение жизни знания, умения и навыки для решения максимально широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений» [Образовательная система «Школа 2100». Педагогика здравого смысла / под ред. А. А. Леонтьева. М.: Баласс, 2003. С. 35.]

Из того что написано выше образовательной госпрограммы можно сделать вывод, что «в качестве основных составляющих функциональной грамотности выделена математическая грамотность [17, с. 1].

Согласно исследованиям, PISA «математическая грамотность – это способность индивидуума проводить математические рассуждения и формулировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разных контекстах реального мира. Она включает математические понятия, процедуры, факты и инструменты, чтобы описать, объяснить и предсказать явления. Она помогает понять роль математики, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые необходимы конструктивному, активному и размышляющему гражданину» [20, с. 1].

Под математической грамотностью так же можно понимать «способность определять и понимать роль математики в мире, высказывать обоснованные математические суждения, умение применять математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданину» - Т.Н. Волкова [4, с. 173].

Всё выше написанное соответствует нынешним условиям, которые требуют от учеников не просто знаний теоретических вопросов, а также умения применять полученные знания в жизни и на практике.

Математическая функциональная грамотность может включать в себя следующие навыки:

- Обнаруживать проблемы, появляющиеся в современном мире, которые можно решить через математические знания;
- Подкреплять принятые решения через математические рассуждения;
- Анализировать как были решены те или иные задачи.

Умения, которые описаны выше, могут развивать логическое мышление, решать трудные задачи не только в классе, но и в других дисциплинах, а также использовать эти знания в жизни.

Всё это можно реализовать, только если у учеников будет мотивация к получению этих знаний. Уровень личностного развития ученика, можно повысить только через его мотивацию и самоорганизацию.

Для достижения целей по личностному развитию и для решения проблем в нынешней реальности, стоит не только давать знания и навыки, но и формировать базовый уровень по компетенциям, а согласно требованиям ФГОС – формировать универсальные учебные действия (УУД) [22, с. 1].

«Умение учиться, способность учащихся к саморазвитию и самосовершенствованию» - ФГОС УУД [22, с. 1].

Универсальные учебные действия или (УУД) — это базовый элемент умения учиться; они формируются у учеников в процессе обучения и дают возможность освоить любой вид деятельности. Они включают в себя:

- Познавательные;
- Регулятивные;
- Коммуникативные;
- Личностные действия.

Познавательные – это желание учиться.

Регулятивные – умение планировать свои действия.

Коммуникативные – общение, толерантность.

Личностные – межличностные отношения, самоопределение.

Если утверждать, что человек в будущем не выберет профессию, которая будет связана с математикой, то он все равно должен будет принимать какие-либо решения, делать выводы на основе данных. В незнакомой для него ситуации он будет реализовывать определённые математические методы решения задач. Этому должны научить в каждой школе:

- Подростки реализуют свой потенциал логического мышления, самоанализируют себя, а также свободно ведут диалог на нравственной теме.

- Письменная речь помогает ученику сформулировать свои доводы и мысли, передавать их тому, кто находится рядом и участвует в диалоге.

- В результате такой работы, ученики усваивают материал лучше, получают новый опыт реализации математических знаний в жизни.

Таким образом, можно определить условия развития математической грамотности у учеников:

- Ведение математической и теоретической базы;
- Решение задач связанные с реальными ситуациями, которые могут происходить в реальной жизни;
- Нахождения поиска путей решения той или иной задачи, связанной с реальной жизнью;
- Формирование коммуникативной, читательской и информационной компетенций.

Таким образом, из вышеперечисленного, следует то, что ученики школ, должны получать навыки, связанные с решением задач, умения использовать эти знания, которые он может применять и реализовывать в реальной жизни. Вот почему выделяется практико-ориентированный подход, который предназначен для реализации решения и понимания задач, которые связаны с реальной жизнью. Таким образом, математическая грамотность – это способность ученика, реализовывать полученные навыки, для решения задач из реального мира в различных сферах деятельности.

1.2 Основные цели и задачи обучения понятию «производная» в школьном курсе алгебры и начал анализа

Начало изучения темы производная в школьном курсе математики и начал анализа дает возможность поставить перед собой ряд важных целей и задач. Это не только помогает развитию математических умений у учеников, но и способствует благоприятному развитию применять полученные знания на практике.

Главной целью развития понятию производная будет понимание как функция изменяется по времени, или как переменные зависят друг от друга. Решение этих задач помогает укреплять мышление, дает возможность разбираться в не легких вопросах, помогает проводить анализ и делать выводы. Принципы работы с производными даёт возможность понимать суть

свойств функций, находить точки максимума и минимума, которая в свою очередь является большой ролью в изучении материала. Решение задач по теме производная, актуальна для решения задач в науках такие как физика, биология, программная инженерия, экономические направления, где суть работы заключается в решении задач с переменными.

Так же к обучению будет относиться техника дифференцирования, которая в свою очередь включает правила дифференцирования, нахождение производных, использование правила нахождения частного. В таких науках как физика и геометрия можно производную можно использовать в реализации задач на скорость, угол наклона функции в точке. Эти решения задач помогают адаптироваться в жизни и решать задачи в реальной ситуации.

В школе закладывают основу для понимания и интереса к другим наукам, в ходе обучения по теме производная, так же это развивает умения, которые пригодятся в дальнейшей жизни.

Использование математики в других науках, реализуют показ на сколько эта тема актуальна в наблюдении в естественных явлениях.

Это дает возможность ученикам понимать суть математики в различных областях. Математика в ИТ- сфере не в области ПО не менее важна, она подходит для расчета производных, нахождении функции, помогает ученикам увидеть применение её на практике и развивает область ИТ.

При развитии мышления дается возможность решать проблему и понимать, как одна вещь, может повлиять на развитие ситуации в другую сторону. При этом развитии, ученики учатся правильно задавать вопросы и находить нужные ответы.

Ключевым навыком будет являться, как ученик умеет понимать информацию и показывать конечный итог своей деятельности.

Как найти мотивацию для изучения темы? Ученикам можно приводить примеры, что данная тема будет являться решением задач по экономике, геологии, химии, или просто в быту, при попадании в реальную ситуацию,

когда математика применяется для решения задач в жизни, а это способствует нахождению ученика себя в жизни.

Тема «Производная» готовит ученика к высшему учебному заведению и реализации своей будущей карьеры, в которой требуется мышление и навыки. Эта тема вносит значительный вклад в жизнь ученика.

1.3 Содержательный компонент и методы обучения понятию производная

Содержательный компонент и методы обучения, в линии школьного курса математики и его разделов: алгебры, начал анализа, геометрии. Тема производная относится к алгебраическим и линиям анализа. Также современные стандарты ведут сквозную содержательно-методическую линию, где ученики изучают разные разделы школьного курса. Понятие производная охватывает большое количество заданий и подходов реализации к ним, это дается с целью, чтобы появилось понимание и умение применять это знание в жизни. Цель данного мероприятия состоит в том, чтобы учебный процесс перестал быть обыденным и стал более интересным, для этого можно использовать интерактивные проведения урока, давать практические работы, связанные с проблемами реального мира, чтобы эти знания можно было использовать в жизни.

Знание правил дифференцирования дает понять возможность нахождения произведения производной, суммы или частного. Также знание этой темы дает ответы на решения задач по нахождению свойствам о кривых. Тема производная так же используется при решении в разных областях, таких как физика, геология, экономика, биология и так далее.

Если неправильно рассказать эту тему, то у учащихся не появится сама картина, понимания и как реализовывать эти знания в деле, тогда в этой ситуации нужно демонстрировать эту тему визуальным примером, что бы ученики поняли способы решения, если неправильно преподнести этот материал, то будет труднее вернуть учеников в русло.

Так же для более обширного обучения рекомендуется использовать на занятиях решение актуальных задач, использование кейс-задания, в которых будет находиться производная. Использование интерактивных методов, реализация различного рода проектов, дебаты по теме производная, использование групповые методы обучения, помогут ученикам понять и усвоить данную тему, а также развивать коммуникативные навыки.

Использование задач, связанные и примерами реальных ситуаций, которые будут направлены на развитие математического мышления.

Все темы математики и начал анализа, требуют определенного подхода, как и тема производная, при правильном подходе, ученики будут не только понимать суть понятия, но и осознавать всю важность.

Развитие учебного процесса, это создание математической модели, чтобы стимулировать учеников к решению данных задач, которые идут на нахождение производной. К созданию благоприятных и стимулирующих условий можно привести, разработку электронные ресурсы, материалы интерактивного характера, видео, звуковое и текстовое сопровождение задания. Также можно провести урок посредством метода перевернутый класс, где учеников делят на три команды, первая команда изучает материал дома, вторая команда в классе самостоятельно, третья команда при присмотре учителя, далее эти команды меняются местами, и на основании этих уроков провести тестирование, а после реализовать рефлексию по пройденному материалу. Эти действия позволяют сделать урок более интересным и поучительным. С другими дисциплинами как писалось выше связь может происходить в физике, химии, биологии, это помогает понимать и улучшить межпредметные пропуски в каждом из направлений.

Тема «производной» можно разделить на несколько уровней:

1 уровень:

Делится на 3 темы:

Первая тема производная, сюда относятся правила определения производной, геометрический смысл. Второе – простые правила

дифференцирования (производные основных функций). Третья – применение производной.

2 уровень:

Делится на 4 темы:

Первая основы теории производной. Вторая – правила дифференцирования. Третья – применение производных при решении сложных задач. Четвертая – решений уравнений.

Таблица №1

Авторы учебников / Понятия, определения, теоремы, формулы	Базовый и углубленный уровни					Углубленный уровень	
	Ш. А. Алимов	А. Н. Колмог оров	А. Г. Мордкови ч	Ю.М. Калягин	С. М. Никольс кий	М.Я. Пратусеви ч	Н. Я. Виленки н
Приращение функции\приращение аргумента		+	+		+	+	+
Предел функции	+		+	+	+	+	+
Определение производной	+	+	+	+	+	+	+
Определение предела	+	+	+	+	+	+	+
Дифференцируемая функция	+	+	+	+	+	+	+
Физический смысл производной		+			+	+	+
Геометрический смысл производной	+	+	+	+	+	+	+
Механический смысл	+	+	+		+	+	+
Уравнение касательной	+	+	+	+	+	+	+
Правила дифференцирования	+	+	+	+	+	+	+
Дифференциал функции			+		+	+	+

Продолжение Таблицы 1

Производные элементарных функций	+	+	+	+	+	+	+
Производные обратных функций			+		+	+	+
Исследование на монотонность	+	+	+	+	+	+	+
Экстремумы функций	+	+	+	+	+	+	+
Выпуклость\вогнутость, точки перегиба	+	+	+	+	+	+	+
Алгоритм исследования функции	+	+	+	+		+	+
Теорема Лагранжа	+	+		+	+	+	+
Теорема Ферма	+			+		+	
Другие теоремы			+		+	+	
Приближенное вычисление значений		+			+	+	+

Анализируя представленный в школьный учебник материал, можно прийти к выводу, что в учебниках с углубленным уровнем изучения предмета теория по теме «Производная и ее применение» дана более обширнее и полно, чем в учебниках для изучения базового и профильного уровня. Основные понятия и правила схожи, но имеются различия в интерпретации, в применении производной.

Изучая выбранный в соответствии с учебной программой учебник, можно брать примеры из других учебников, составлять тесты и давать домашнее задание.

Вывод по первой главе

Первая глава знакомит нас с понятием математической грамотности.

Определения были взяты из различных источников, для более расширенного раскрытия данного понятия.

Были выявлены условия, которые необходимы для развития математической грамотности. Они включают:

- Решения задач, где учащийся погружается в ситуации, связанные с реальной жизнью;
- Поиск решений для решения задач, применение методов решения задач в реальных ситуациях;
- Формирование компетенций: коммуникативной, информационной и читательской;
- Контроль над процессом и результатом своей деятельности при решении задач.

Так же было определено, что решения различного рода задач, помогают адаптироваться в жизни и решать различного рода задания.

Начало изучения темы производная в школьном курсе математики и начал анализа дает возможность поставить перед собой ряд важных целей и задач. Это не только помогает развитию математических умений у учеников, но и способствует благоприятному развитию применять полученные знания на практике.

Глава 2. Методика формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе обучения темы «Производная»

2.1 Методическая схема обучения производной в курсе алгебры и начал анализа

Методическая схема обучения производной в курсе алгебры и начал анализа должна быть нацелена на формирование глубокого понимания концепции производной, её математического смысла, а также на развитие умения применять знания производной в решении задач. Рассмотрим шаги, которые помогут составить эффективную методическую схему обучения.

Шаг 1: Введение в понятие производной:

— Мотивационный аспект: показать применение производной в реальной жизни (наука, инженерия, экономика) для повышения интереса.

— Понятийное определение: ввести определение производной как предела отношения приращений функции и аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Шаг 2: Геометрический и физический смысл:

— Геометрическое интерпретирование: объяснить производную как угловой коэффициент касательной к графику функции в точке.

— Физическое значение: продемонстрировать, как производная используется для определения мгновенной скорости и ускорения в физике.

Шаг 3: Правила дифференцирования:

— Базовые производные: производные стандартных функций, таких как степенная, тригонометрическая, экспоненциальная.

— Правила дифференцирования: включая правила для суммы, произведения, частного и сложной функции (цепное правило).

Шаг 4: Применение производной:

- Исследование функций: использование производной для определения интервалов возрастания и убывания, экстремумов, выпуклости и вогнутости функции, а также точек перегиба.

- Задачи оптимизации: применение производной для решения практических задач на максимум и минимум.

Шаг 5: Производные высших порядков:

- Вторая производная и выше: исследование и интерпретация высших порядков производной, их применение в определении точек перегиба и анализе графиков функций.

Шаг 6: Практические задания и интерактивные методы:

- Решение задач: практическое применение знаний на конкретных примерах и задачах.

- Проектные работы и исследования: проекты на тему реального применения производной в различных областях.

- Использование технологий: применение математического программного обеспечения для визуализации функций и их производных, что помогает более глубоко понять материал.

Шаг 7: Связь с предыдущими и последующими темами:

Интеграция знаний: показать связь производной с предыдущими темами (например, с пределами) и будущими (интегралы, дифференциальные уравнения).

Шаг 8: Оценка знаний:

- Формирование и контрольные работы: проведение оценочных работ, направленных не только на проверку знаний, но и на умение применять их в нестандартных ситуациях.

Эта методическая схема предназначена для поэтапного освоения учащимися понятия производной, от базовых концепций до сложных приложений, с акцентом на практическое применение и глубокое понимание материала.

Технологическая карта изучения темы «Производная» по учебнику профильного
уровня А.Г. Мордковича

Целеполагание	Диагностика	Коррекция
В1: находить производную функции в точке x_0 , составлять уравнение касательной, проведённой к графику функции, находить площадь фигуры, ограниченной линиями.	Д1: Найдите производную функции в точке x_0 , если а) $y = \ln(2 - x)$, $x_0 = -1$; б) $y = e^{2x} - 1$, $x_0 = 1/2$; в) $y = x + e^{-2x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$; г) $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.	К1 Возможные ошибки в нахождении производной, вычислении значений функции, вычислительные ошибки
В2: указывать промежутки возрастания и убывания функции, находить площадь фигуры, ограниченной линиями.	Д2: а) $y = 2xe^x$; б) $y = 4^x$, $y = 4$, $x = 0$.	К2 Возможные ошибки в нахождении производной, вычислении значений функции, вычислительные ошибки
В3: находить производную функции в точке x_0 , находить точки экстремума и экстремумы функции, находить площадь фигуры, ограниченной линиями.	Д3: а) $y = \ln x/x$, $x_0 = 1$. б) $y = 2x/e$. в) $y = 3/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$	К3 Возможные ошибки в нахождении производной, вычислении значений функции, вычислительные ошибки

Результаты, полученные в диагностическом блоке, являются рабочим материалом для блока «коррекция» рамках которого проводится работа над ошибками. После блока «коррекция» отбирается соответствующие задания для домашней работы, которые отражены в блоке «Домашняя работа». Она рассчитана на внеаудиторную деятельность обучающихся в соответствии с микроцелями и делится на три уровня «стандарт», «хорошо», «отлично». Данный блок по теме «Производная» отражены в технологической карте изучения темы (таблица 3), в ней указаны номера заданий для самостоятельного выполнения с применением дифференцированного подхода соответствующей УМК. Стоит обратить внимание, при изучении производной, целесообразно предлагать учащимся задания, аналогичные тем, что встречаются и на государственной итоговой аттестации.

2.2 Система задач по теме «Производная» для подготовки к итоговой аттестации старшеклассников

Система задач по теме "Производная" направлена на укрепление и проверку знаний и умений старшеклассников, готовящихся к итоговой аттестации, такой как ЕГЭ по математике в России. Приведенный перечень задач охватывает основные аспекты темы и может быть использован в процессе подготовки.

Пример задачи с решением:

1. Найти производную функции

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 1$$

$$y = \sqrt{(2x - 1)}$$

2. Определить критические точки функции и их тип (минимум/максимум/перегиб)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

3. Исследование функции и построение её графика

- Дана функция $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$). Найдите интервалы возрастания и убывания, точки экстремума и интервалы выпуклости/вогнутости.

4. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции в заданной точке

- Дана функция $f(x) = x^2$ (и точка на графике с абсциссой $(x = 2)$).

5. Применение производной к решению прикладных задач

- Зависимость пройденного пути от времени задается функцией $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, где (S) — путь в метрах, (t) — время в секундах. Определить момент времени, когда скорость объекта была максимальна.

6. Использование производной для нахождения асимптот графика функции

- Для функции $f(x) = \frac{2x}{2x^2 - 1}$) найти вертикальные и наклонные асимптоты.

Рекомендации по решению:

- Обозначьте, что именно требуется найти (например, $f'(x)$ для первой производной).

- Используйте правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного, а также таблицу производных элементарных функций.

- При решении задач на экстремумы и точки перегиба помните о необходимости нахождения второй производной.

- Переходите от общей к конкретной задаче. Например, при построении графика сначала исследуйте поведение функции (возрастает/убывает, выпуклость/вогнутость, асимптоты), а затем переходите к построению.

- При анализе прикладных задач важно определить, какие математические модели и формулы применяются для их решения.

Организация подготовки:

- Решайте задачи в разнообразии контекстов — это поможет лучше понять, как применять производные в различных условиях.

- Используйте групповые и парные формы работы для обсуждения и объяснения решений, что улучшает понимание.

- Анализируйте ошибки — они являются важным источником обучения.

- Используйте дополнительные ресурсы — книги, видео лекции, Интернет-ресурсы, для закрепления материала и разностороннего понимания темы.

Ниже приведены примеры задач каждого типа по двум уровням сложности

1. Задачи на определение производной.

Базовый уровень

1.1. Вычислить производную функции $F(x) = x^3 + 6x^2 - 72x + 90$ в точке $x=5$

Справка: Следующие способы обозначения функции эквивалентны:

$$y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$$

В некоторых заданиях бывает удобно обозначить функцию «у», а в некоторых через «f'(x)».

Сначала находим производную:

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 72x + 90)' = 3x^2 + 6x - 72$$

Надеюсь, многие уже приуловились находить такие производные устно.

На втором шаге вычислим значение производной в точке $x=5$:

$$f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 - 72 = 75 + 30 - 72 = 33$$

1.2. Вычислить производную функции

$f(x) = \left(\frac{x^2 + \arctg 5x}{2} - \frac{x}{10} + \frac{1}{50} \arctg 5x \right)'$ в точке $x = \frac{1}{5}$ Сначала найдем производную:

$$f(x) = \left(\frac{x^2 + \arctg 5x}{2} - \frac{x}{10} + \frac{1}{50} \arctg 5x \right)'$$

$$\frac{1}{2} (x^2 \arctg 5x)' - \frac{1}{10} (x)' + \frac{1}{50} (\arctg 5x)'$$

$$\frac{1}{2} ((x^2)' \arctg 5x + x^2 (\arctg 5x)') - \frac{1}{10} + \frac{\frac{1}{50} \cdot 1}{1 + (5x)^2} \cdot (5x)'$$

$$\frac{1}{2} \left(2 \arctg 5x + x^2 - \frac{5}{1 + (5x)^2} \right) - \frac{1}{10} + \frac{5}{50(1 + 25x)^2}$$

$$x \arctg 5x + \frac{5x^2}{2(1 + 25x|2)} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10(1 + 25x|2)}$$

Производная, в принципе, найдена, и можно подставлять требуемое значение $x = \frac{1}{5}$. Но что-то делать это не сильно хочется. Выражение очень длинное, да и значение «икс» у нас дробное. Поэтому стараемся максимально упростить нашу производную. В данном случае попробуем привести к общему знаменателю три последних слагаемых:

$$x \arctg 5x + 5x^2 * 5 - \frac{(1 + 25x|2) + 1}{10(1 + 25x|2)} = x \arctg 5x + \frac{25x^2 - 1 - 25x^2 + 1}{10(1 + 25x|2)}$$

$$x \arctg 5x + \frac{0}{10(1 + 25x|2)} = x \arctg 5x + 0 = x \arctg 5x$$

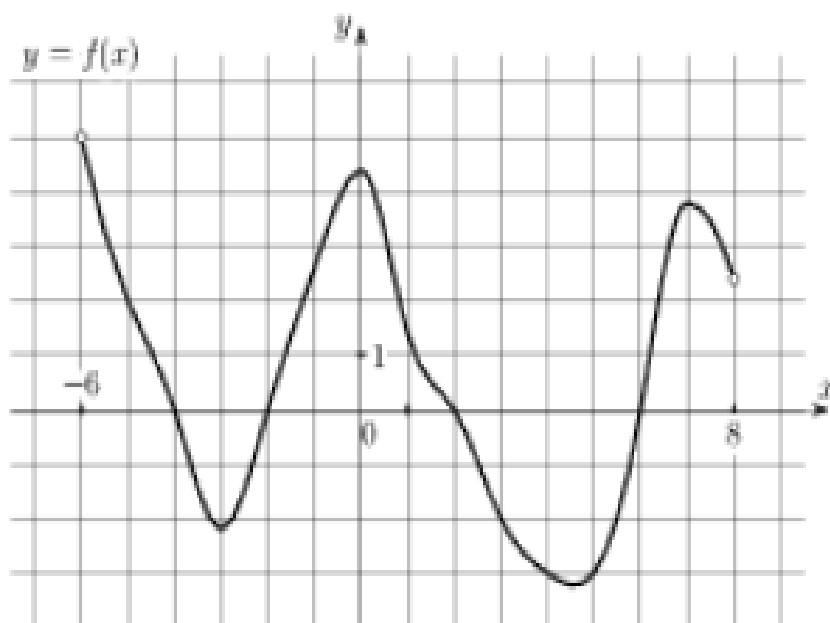
Ну вот, совсем другое дело. Вычислим значение производной в точке $x = \frac{1}{5}$:

$$f' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{5 * 1}{5} \right) = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{5} * \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}$$

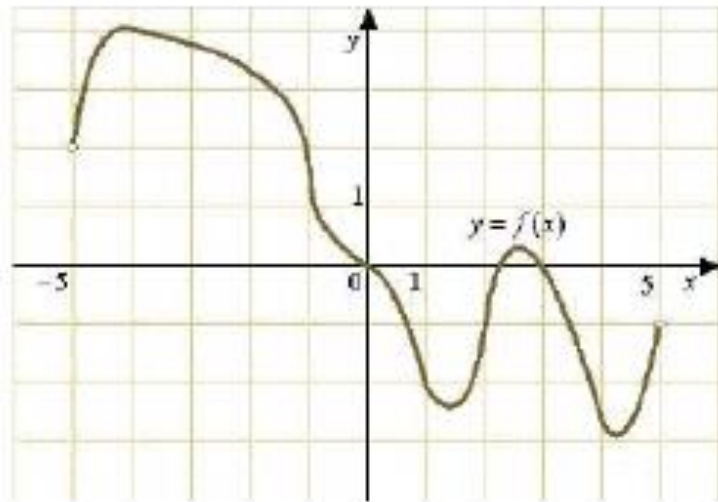
Типовые задачи:

Задача 1. Прямая $y=7x-5$ параллельна на касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$. Найдите абсциссу точки качания.

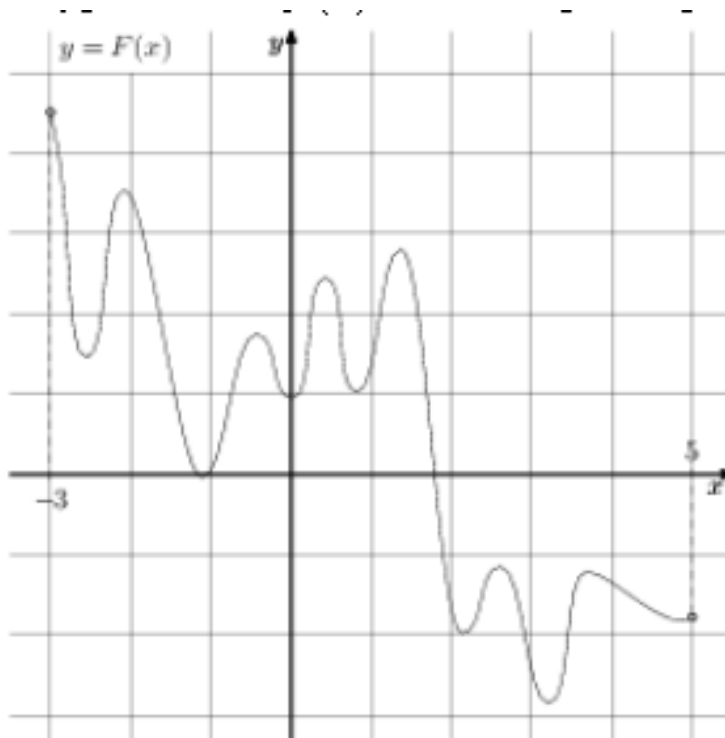
Задача 2. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-6;8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительная.



Задача 3. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=6$ или совпадает с ней.



Задача 3. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнений $f(x)=0$ на отрезке $[-2;4]$.



2.3 Анализ результатов опытно-экспериментальной работы и оценка эффективности разработанной модели

Экспериментальная часть исследования проводилась на базе Муниципального автономного общеобразовательного учреждения "Средняя школа № 55" среди учащихся 10-11 класса.

Для проведения эксперимента был выбран 10 класс, в котором математика преподавалась в традиционной форме обучения.

Для понимания на каком уровне находится формирование математической грамотности у учеников 10 класса. Им было предложено выполнить онлайн тест, предложенный PISA, «Математическая грамотность» представленный на ресурсе: <https://onlinetestpad.com/ru/testview/1285993-matematicheskaya-gramotnost> [30]. Тест содержит в себе 10 вопросов, в каждом из которого можно выбрать 1 вариант из 4. За верные ответы на вопросы ученик получает 2 или 3 балла, в зависимости от вопроса. Максимальный балл, в ходе выполнения который может набрать ученик составляет 25. Время теста ограничена, и составляет 30 минут. В ходе реализации тестирования, учеников рассадили за компьютер и смотрели что бы они не вели диалог и не помогали друг другу.

Вопросы по математической грамотности предложенный PISA.

Вопрос 1.

1 1 из 10

Стороны треугольника равны А, В и С. Какое из утверждений верно:

- С минус В всегда равно А.
- С минус В всегда больше А.
- С минус В всегда меньше А.
- Ни один вариант не верен.

Вопрос 2.

2

2 из 10

Без подручных средств найдите из представленных ниже примеров тот, итог которого (произведение чисел) отличается от остальных.

- 2 x 6 x 36
- 2 x 15 x 16
- 12 x 8 x 5
- 3 x 32 x 5

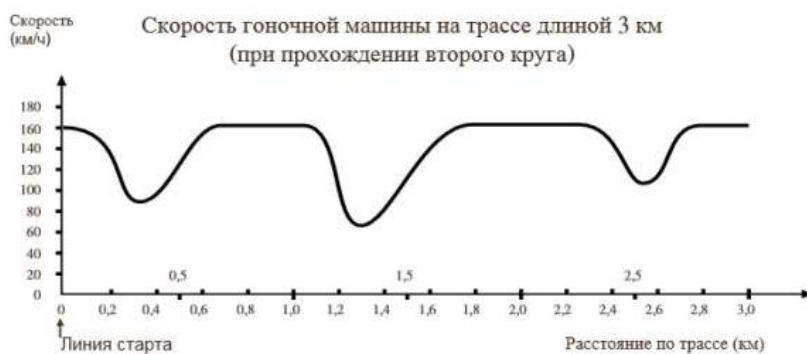
Далее

Завершить

Вопрос 3.

3

3 из 10



Данный график отображает изменение скорости гоночной машины при прохождении второго круга трехкилометровой кольцевой трассы.

- 0,5 км.
- 1,5 км.
- 2,3 км.
- 2,6 км

Далее

Завершить

Вопрос 4.

4

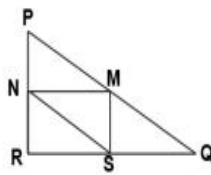
4 из 10

Обведите букву, которой обозначена фигура, подходящая под описание ниже.

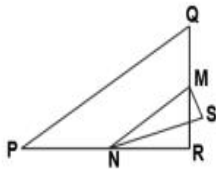
Треугольник PQR – прямоугольный с прямым углом R . Сторона RQ меньше стороны PR .

M – середина стороны PQ , а N – середина стороны QR . S – точка внутри данного треугольника. Отрезок MN больше отрезка MS .

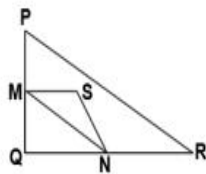
A



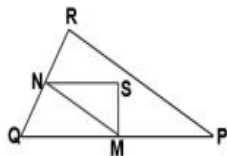
B



C



D



Далее

Завершить

Вопрос 5.

5

5 из 10

Морскому коту нужно дышать, даже если он спит под водой. Мартин наблюдал за морским котиком в течение часа. В начале наблюдения морской котик всплыл на поверхность и сделал вдох. Затем он нырнул на дно и уснул. Со дна он медленно всплыл на поверхность за 8 минут и снова сделал вдох. Через три минуты он вновь был на дне. Мартин обратил внимание, что данный процесс носил довольно регулярный характер.

Через час морской котик?

- Был на дне
- Поднимался
- Делал вдох
- Опускался

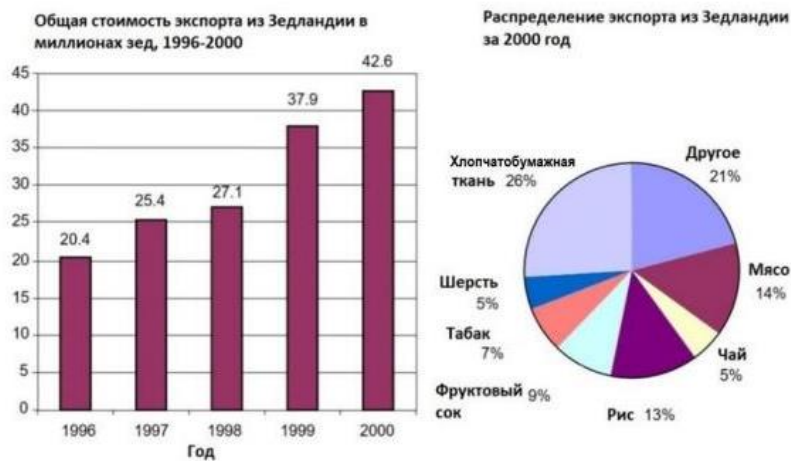
Далее

Завершить

Вопрос 6.

6

6 из 10



График, представленный ниже, показывает информацию об объеме экспорта из Зедландии (страна, которая использует зеды в качестве валюты).

Какая стоимость экспорта фруктового сока из Зедландии была в 2000?

- 1,8 миллионов зед.
- 2,3 миллионов зед.
- 3,8 миллионов зед.
- 3,4 миллионов зед.

Далее

Завершить

Вопрос 7.

7

7 из 10

В школе, где учится Оля, учитель по физике дал тесты, которые оцениваются по 100-балльной шкале. Оля набрала в среднем по 60 баллов за первые четыре теста по физике. За пятый тест она получила 80 баллов. Какое количество баллов в среднем Оля набрала после всех пяти тестов?

- 80
- 60
- 70
- 64

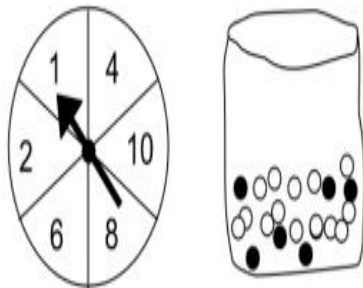
Далее

Завершить

Вопрос 8.

8

8 из 10



Игра на весенней ярмарке предполагает использование вращающегося колеса. Если колесо останавливается на четном числе, игроку разрешается вытянуть один шарик из мешка.

Вращающееся колесо и шарики в мешке показаны на рисунках ниже.

- Невозможно.
- Маловероятно.
- Около 50% вероятности.
- Весьма вероятно.

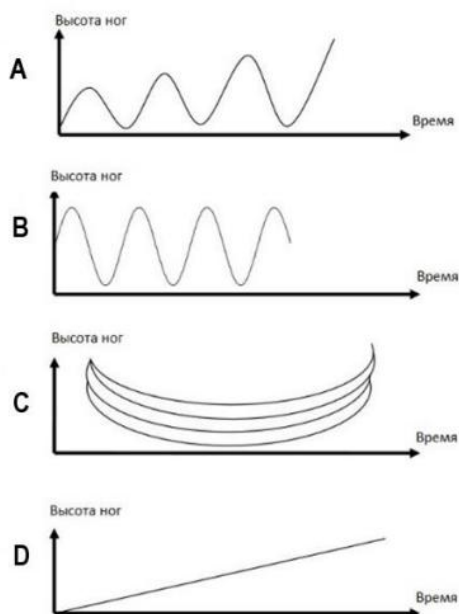
Далее

Завершить

Вопрос 9.

9

9 из 10



Влад сидит на качелях. Он начинает раскачиваться. Он пытается раскачаться как можно выше. Какой график лучше всего изображает высоту его ног над землей, когда он раскачивается?

- A
- B
- C
- D

Далее

Завершить

Вопрос 10.

10

10 из 10

По телевизору транслировали документальный фильм о землетрясениях и о том, как часто они происходят. В нем шла речь о возможности прогнозирования землетрясений. Геолог определил следующее: "В течение следующих двадцати лет вероятность землетрясения в Алматы составляет два к трем".

Какое утверждение из следующих лучше всего отражает заявление геолога?

- $2/3 \times 20 = 13.3$, следовательно, в промежутке между 13 и 14 лет начиная с этого момента в Алматы будет землетрясение.
- $2/3$ это больше чем $1/2$, следовательно, можно быть уверенным, что в Алматы в какой-то момент в течение 20 лет может произойти землетрясение.
- Вероятность того, что в Алматы произойдет землетрясение в какой-то момент в течение следующих 20 лет, выше, чем вероятность того, что оно не произойдет.
- Невозможно сказать, что случится, потому что никто не уверен в том, что случится землетрясение.

Далее

Завершить

Результат тестирования. Итоговые баллы, которые получили после тестирования по каждому ученику, были внесены в итоговую таблицу. Результаты отображаются в таблице 3.

Таблица 3 - Исходный уровень сформированности математической грамотности

	Полученные баллы										Итог
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Ученик 1	2	0	3	0	2	3	0	0	2	0	12
Ученик 2	2	0	0	0	2	3	0	3	0	0	10
Ученик 3	2	2	0	2	0	3	0	0	2	0	11
Ученик 4	2	0	0	0	2	0	0	0	0	2	6
Ученик 5	0	2	0	2	0	3	2	0	0	0	9

Продолжение Таблицы 3

Ученик 6	0	2	3	0	0	3	2	3	0	2	17
Ученик 7	2	2	0	2	0	0	2	0	0	2	10
Ученик 8	2	0	0	2	2	0	0	3	0	0	9
Ученик 9	2	0	0	2	0	0	2	0	2	2	10
Ученик 10	2	0	3	0	2	3	0	3	0	0	13
Ученик 11	2	0	3	2	0	0	0	0	2	2	11
Ученик 12	2	0	0	2	0	0	2	3	0	2	11
Ученик 13	2	0	0	2	0	3	2	3	2	2	16
Ученик 14	0	2	3	0	2	0	2	0	2	0	11

Шкала оценивая:

Сумма баллов 1-5, уровень математической грамотности Базовый.

Сумма баллов 6-10, уровень математической грамотности Средний-низкий.

Сумма баллов 11-14, уровень математической грамотности Средний.

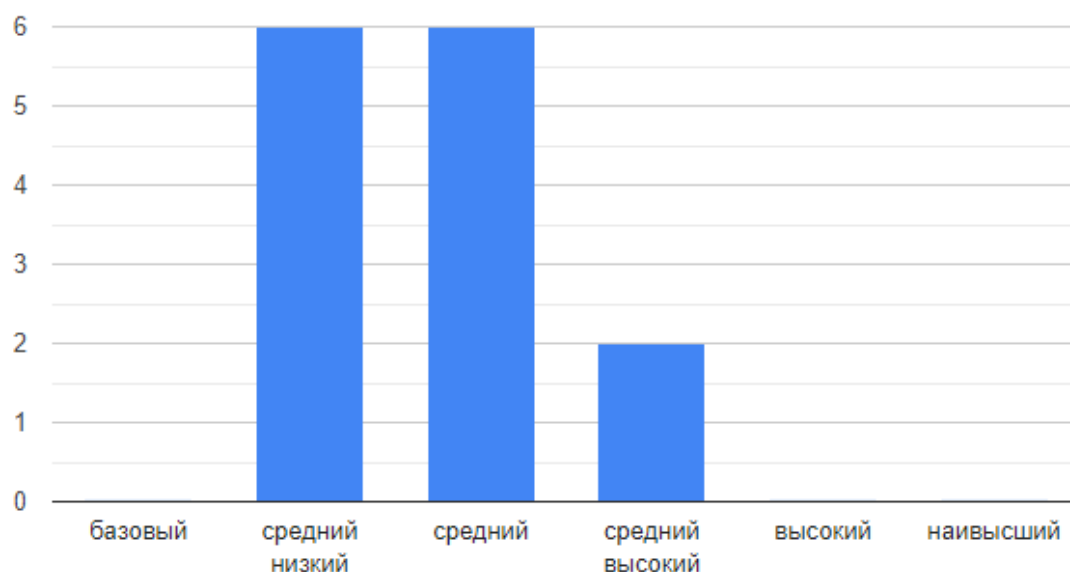
Сумма баллов 15-18, уровень математической грамотности Средний-высокий.

Сумма баллов 19-23, уровень математической грамотности Высокий.

Сумма баллов 24-25, уровень математической грамотности Наивысший.

Результаты теста, сформированности математической грамотности показаны на диаграмме 1.

Диаграмма 1 – Исходное определение обучающихся



Анализ результатов данного теста показал, что большинство учеников 10 класса, имеют средний уровень сформированности математической грамотности. Ученики плохо реализуют полученные знания на уроках.

Следующим этапом экспериментальной частью проводилась контрольная по теме «Производная». Ребятам поделили на 2 группы. Первая группа работа по

Участниками контрольной работы также являлись ученики 10 класса.

За правильный ответ дается 2 балла;

За ответ с ошибками дается 1 балла;

За не правильный ответ баллов не давалось.

Подготовка к тесту проходила по двум разным способам обучения.

1 способ был традиционный для первой группы участников.

Под традиционным обучением принято понимать такой вид обучения, который направлен педагогом на передачу знаний ученикам в подготовленной форме, предназначенных для усвоения воспроизводящего типа, где преподаватель является одним главным действующим человеком в учебном процессе. Во второй же группе проводились дополнительные формирующие занятия по дисциплине.

Таблица 4 – Контрольная работа

№ п/п	Задание
1	Производная – это: а) дифференциал аргумента; б) конечный предел отношения приращения функций к приращению аргумента, когда она стремится к нулю; в) приращение аргумента; г) нет правильного ответа
2	Функция $f(x)=x^2+5x+21$ возрастает на промежутке: а) $x > 2$ б) $x < -2,5$ в) $x > -2,5$
3	Функция $f(x)=x^3-6x^2+9x-7$ убывает на промежутке: а) $1 < x < 3$ б) $-3 < x < 1$ в) $-1 < x < 3$
4	Найдите минимум функции $y=x^3+x^2-5x+1$: а) 3 б) 1,5 в) -3
5	Геометрический смысл производной – это: а) угловой коэффициент касательной к графику функций; б) касательная; в) скорость изменения функций; г) дифференцирование
6	Производная единицы равна: а) 1; б) 0

Окончание Таблицы 3

7	<p>Функция задана формулой $y = -8 / (x - 2)$. При каком значении аргумента функция принимает значение, равное 2:</p> <p>а) 4 б) -2 в) 2</p>
8	<p>Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала (a, b), то эта функция ... на этом интервале:</p> <p>а) возрастает в) остается неизменной г) нет ответа</p>
9	<p>Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала (a, b), то эта функция ... на этом интервале:</p> <p>а) возрастает б) убывает в) остается неизменной</p>
10	<p>Найдите промежуток убывания функции $f(x)=x+1/x$:</p> <p>а) $x > -6$ б) $x < -6$ в) всюду убывает, кроме $x=0$</p>

Ответы для контрольной работы:

1 б); 2 в); 3 а); 4 в); 5 а); 6 б); 7 б); 8 а); 9 б); 10 в).

На вопросы ребята отвечают письменно на одинарных листах.

Так же проводились наблюдения то, как учащиеся записывали задания.

Большое внимание уделялось на то, как ученик выполнял математические действия. Ученик получал всего 1 вопрос на тестировании.

Критерии и уровни математической грамотности.

Высокий уровень:

Ученик отвечает на вопросы и решает пример легко. Формулирует и делится своими толкованиями. Применяет математические концепции. Данный уровень оценивается в 15-20 баллов.

Средний уровень:

Ученик решает легкие примеры и отвечает на легкие вопросы. Обобщает и применяет найденную информацию. Данный уровень оценивается в 8-14 баллов.

Низкий уровень:

Ученик плохо отвечает на вопросы и плохо решает задания. Тяжело анализирует и использует найденную информацию. Использует ограниченный диапазон знаний. Данный уровень оценивается в 1-7 баллов.

Таблица 4 – Результаты 1 группы

	Полученные баллы										Итого
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Ученик 1	2	2	2	1	0	0	1	1	1	2	12
Ученик 2	2	1	1	2	0	1	1	1	2	1	12
Ученик 3	2	1	2	1	1	2	0	1	1	1	12
Ученик 4	2	0	0	0	1	2	0	2	0	0	7
Ученик 5	1	1	1	0	1	2	0	0	0	0	6
Ученик 6	1	1	2	2	0	2	1	0	2	2	12
Ученик 7	2	1	1	1	1	2	1	1	2	1	14

Таблица 5 – Результаты 2 группы

Ученик 8	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	17
Ученик 9	2	1	2	2	2	2	1	2	2	2	18
Ученик 10	2	1	2	2	2	2	1	2	1	2	17
Ученик 11	1	0	1	1	2	1	2	2	1	2	13
Ученик 12	2	0	1	0	1	1	1	0	0	1	7
Ученик 13	1	1	2	1	2	1	1	0	1	0	10
Ученик 14	1	2	1	1	2	1	0	1	1	1	11

После данной контрольной работы, формировались показатели по всем двум группам.

Сводные показатели математической грамотности по теме производная у обучающихся 10 класса, разбитых на две группы показаны в Таблице 6.

Таблица 6 – Сводные данные

Уровень	1 группа		2 группа	
	Человек	%	Человек	%
Высокий	-	-	3	42
Средний	5	70	3	42
Низкий	2	30	1	16
Всего	7	100	7	100

По результатам эксперимента, можно сделать вывод что в 10 классе присутствует средний уровень понимания математической грамотности. Все занятия были реализованы не в традиционной форме обучения. Таким образом, можно заключить, что задачи, ориентированные на практику, глубоко проникают в реальные жизненные процессы в реальной жизни.

Вывод по второй главе

В ходе теоретического исследования была рассмотрена методика формирования математической грамотности у учащихся 10 класса, рассмотрение содержательного компонента и разработку требований для проектирования содержательного компонента учебного процесса.

По результатам эксперимента можно сказать, что во второй группе, с которыми были проведены дополнительные формирующие занятия, уровень заметно выше, чем в первой группе, с которой проводились традиционные занятия.

Из этого следует, что задачи с применением понятия «Производная» показали, что это понятие намного шире и возможности производной очень много, её можно применять в физике, химии, биологии и так далее.

Практическая ценность данной работы заключается в том, что предложенные методы и способы организации образовательной деятельности на уроках математике по теме «Производная» ориентирована на развитие математической грамотности учеников 10 класса, могут быть использованы в реальном процессе обучения математике.

Заключение

Предмет математика является сложным, а тема «Производная», ещё труднее для восприятия ученику школы. Самая большая проблема изучения этой темы, является то, что ученики не каким образом не применяют «Производную» в быту, на практике и в реальной жизни. Поэтому они не имеют представления и не понимают о реальных значениях производной.

Данная тема является серьезной и необходимой темой для формирования математической грамотности.

Математическая грамотность – это умение человека эффективно применять математические знания в повседневной жизни. Важно не просто научить решать задачи под копирку, а сформировать личностные качества учеников через универсальные учебные действия (УУД).

По теме "Производная" и задачи, ориентированные на формирование математической грамотности обучающихся, выделяют значимость осмысленного подхода к изучению производных. Выходит, за рамки простого запоминания формул и правил, подчеркивая важность применения производной для решения практических и теоретических задач, а также её вклад в развитие аналитического мышления и способности к моделированию реальных процессов.

Важность математической грамотности:

Математическая грамотность не ограничивается умением считать и решать стандартные задачи. Она включает в себя способность анализировать, обобщать, моделировать математические ситуации, а также применять математику в нестандартных и прикладных контекстах. Тема "Производная" отлично вписывается в этот подход, поскольку она предлагает мощный инструмент для исследования изменений и зависимостей.

Задачи на формирование математической грамотности:

1. Анализ изменений. Задачи, в которых анализируется изменение показателей во времени (скорость роста растения, скорость изменения температуры и т. д.), позволяют обучающимся увидеть прямое применение производной.

2. Минимизация и максимизация. Решая задачи на поиск оптимальных условий, например, максимальной прибыли или минимальных затрат, студенты учатся применять производную для нахождения экстремумов функций.

3. Предсказания и моделирование. Задачи, связанные с прогнозированием, например, предсказанием населения региона или тенденций в финансовом рынке на основе данных прошлых периодов, развивают навыки математического моделирования.

4. Интерпретация графиков. Навыки анализа и интерпретации графиков функций и их производных формируют понимание зависимостей и взаимосвязей между переменными в реальных ситуациях.

5. Проектные задачи. Проекты, объединяющие знания по математике с реальной жизнью, такие как исследование экологических, экономических или инженерных проблем с помощью производной, способствуют глубокому пониманию материала и формированию устойчивых умений.

Подход, ориентированный на формирование математической грамотности через активное использование и понимание производной, обеспечивает не только успешное освоение математики, но и развивает критическое мышление, аналитические навыки и способность к решению сложных задач. Такой подход делает учебный процесс не только полезным, но и интересным, мотивируя обучающихся к дальнейшему развитию в области точных наук.

Библиографический список

1. Алимов Ш.А. Алгебра и начала математического анализа : Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров / Под ред. Ш.А. Алимова. – М.: Просвещение, 2016. – 384 с.
2. Башмаков М.И. Математика / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС 2017. – 394 с.
3. Виленкин Н.Я. Алгебра и начала математического анализа : Учеб. пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд.– М. : Мнемозина, 2014. – 335 с.
4. Волкова Т.Н. Использование практико-ориентированных задач в обучении математике учащихся основной школы / Т.Н. Волкова // Математика и математическое образование: современные тенденции и перспективы развития. Сборник научных трудов по материалам II заочной Всероссийской научно-практической конференции. – 2017. – С.173–176.
5. Гамезо М.В. Атлас по психологии. Информационно методическое пособие / М.В. Гамезо, И.А. Домашенко. – М.: Педагогическое общество России, 2012. – 276 с.
6. Дубровина И.В. Руководство практического психолога: психологические программы развития личности в подростковом и старшем школьном возрасте / И.В. Дубровина. – М.: Астрель, 2015. – 268 с.
7. Калинкина Е.Н. Сборник заданий по развитию функциональной математической грамотности обучающихся 5-9 классов / Е.Н. Калинкина. – Новокуйбышевск, 2019. – 22 с.
8. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала математического анализа :Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.
9. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа : Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений; базовый и профильный уровни /

50 Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин / Под ред. А.Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2011. – 368 с.

10. Мерзляк А.Г. Алгебра и начала математического анализа : базовый уровень (ФГОС) 10 класс : учебник / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, М.С. Якир / Под ред. В.Е. Подольского. – М.: Просвещение, 2021. – 368 с.

11. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа : учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.– М.: Мнемозина, 2013. – 287 с.

12. Назарова С.Н. Практико-ориентированные задачи по математике как средство повышения качества обучения / С.Н. Назарова // Вестник науки и образования. – 2016. – № 12 (24).. – С. 94–95.

13. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа : Учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.– М.: Просвещение, 2009. – 383 с.

14. Педагогика здравого смысла. Образовательная система «Школа 2100» / Под ред. А.А. Леонтьева. М.: Баласс, 2013. – 124 с.

15. Петров В.А. Прикладные задачи школьного курса математики на уроках математики: Кн. для учителей математики и студентов мат. фак. педвузов / В.А. Петров. – Смоленск: СГПУ, 2011. – 268 с.

16. Пожарова Г.А. Практико-ориентированные задачи как один из важнейших элементов формирования математической грамотности учащихся / Г.А. Пожарова // Молодой ученый. – 2021. – № 1 (343). – С. 62-64.

17. Постановление Правительства РФ «Об утверждении государственной программы Российской Федерации «Развитие образования» от 26.12.2017 г. № 1642 (ред. от 26.09.2022) // КонсультантПлюс – режим доступа: <https://www.consultant.ru> (дата обращения: 02.12.2022)

18. Развитие функциональной грамотности обучающихся основной школы: методическое пособие для педагогов / Под ред. Л.Ю. Панариной, 51

И.В. Сорокиной, О.А. Смагиной, Е.А. Зайцевой. – Самара: СИПКРО, 2019. – 114 с.

19. Расташанская Т.В. Развитие математической грамотности на основе предметного и межпредметного содержания: методическое пособие для учителя / Т.В. Расташанская, Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, М.С. Попов. – М.: Академия, 2021. = 50 с.

20. Результаты международного исследования PISA 2018. Публикации [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.centeroko.ru/pisa18/pisa2018_ml.html (дата обращения 03.03.2023)

21. Трофимова Т.А. Математическая грамотность : пособие по развитию функциональной грамотности старшеклассников / Т.А. Трофимова, И.Е. Барсуков, А.А. Бурдакова / Под ред. Р.Ш. Мошнинаой. – М.: Академия Минпросвещения России, 2021. – 68 с.

22. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования Приказ Минобрнауки России № 287 от 31.05.2021 [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://fgos.ru> (дата обращения: 03.03.2023)

23. Фирсов В.В. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения / В.В. Фирсов. – М.: Просвещение, 1994. – 312 с.

24. Яценко И.В. ОГЭ-2021. Математика. Типовые тестовые задания / И.В. Яценко, Л.О. Рослова, И.Р. Высоцкий. – М.: Экзамен, 2020. – 80 с.