

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования  
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»  
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики  
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

**Карпова Ангелина Юрьевна**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

**ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС ПО ТЕМЕ «КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ»  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ  
GEOGEBRA**

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы: Математика



ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой

канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина

17.05.2024

*(Handwritten signature)*

(дата, подпись)

Научный руководитель

Доцент кафедры МиМОМ, канд. физ.-мат. наук,  
Абдулкин В.В.

*(Handwritten signature)*

Дата защиты

18.06.2024

Обучающийся

Карпова А.Ю.

*(Handwritten signature)*

Оценка хорошо

Прописью

Красноярск 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ .....	2
ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ И ПРЕИМУЩЕСТВА ПРИМЕНЕНИЯ СДМ.....	
1.1 Роль стереометрии в школьном курсе геометрии .....	6
1.2. Особенности использования информационных технологий при изучении стереометрии .....	9
1.3. Сравнительный анализ систем динамической математики .....	12
Вывод к 1 главе.....	15
ГЛАВА 2. ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС ПО ТЕМЕ «КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ «GEOGEBRA».....	
2.1 Преимущества использования элективного курса .....	16
2.2 Программа Элективного курса «Комбинации многогранников» с помощью СДМ «GEOGEBRA» .....	20
2.2.1. Пояснительная записка.....	20
2.2.2. Учебно-тематический план .....	22
2.2.3. Содержание курса .....	23
2.3. Апробация элективного курса .....	48
Вывод по главе 2 .....	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	52
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	54

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность данной темы заключается** в том, что, современный мир постоянно подвергается изменениям. Не отстает от этого и образование, в том, числе и математическое. В данной теме поднимается проблема изучения стереометрии в старших классах школьного курса. Как же и с помощью чего можно увеличить знания учащихся и сделать предмет интересным? Уровень графических навыков выпускников школ, желает оставлять лучшего, что всё же требуется создание методики развития представлений геометрических понятий в обучении геометрии в старших классах. Геометрия играет ключевую роль развитию мышления учащихся. Специфика геометрического материала помогает развить одни из важных качеств, такие как: логика и мышление. Так как учащимся очень сложно дается изучение стереометрии, а также сталкиваются с трудностью представления фигур в пространстве, необходимо применять разные донесения информации. В школах сейчас очень активно применяют системы динамической математики (СДМ), например: Живая Математика, GeoGebra, Математический конструктор. Данная образовательная среда, основанная на этих программах, помогает улучшить качество обучения, развить компьютерные навыки учащихся.

Для того чтобы увеличить интерес учащихся к изучению стереометрии в старших классах, необходимо создавать уроки, которые были бы интерактивными и практичными. Учащиеся должны видеть применение геометрических знаний в реальной жизни, что поможет им лучше понимать материал. Для успешного изучения стереометрии важно также обеспечить учащихся доступом к качественным учебным материалам и ресурсам. Это могут быть учебники с достаточно подробными объяснениями, лекции, курсы и т.д. Важно, чтобы учащиеся имели возможность самостоятельно изучать материал и получать поддержку со стороны преподавателей и родителей. Только так можно добиться успешного усвоения стереометрии и развития геометрического мышления учащихся.

**Цель исследования** разработать элективный курс по теме «Комбинации многогранников» с использованием системы динамической математики

«GeoGebra».

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие **задачи:**

1. На основе методической литературы, раскрыть роль стереометрии в школьном курсе геометрии.
2. Рассмотреть особенности использования информационных технологий в изучении стереометрии.
3. Провести сравнительный анализ систем динамической математики.
4. Раскрыть теоретические основы создания элективного курса.
5. Разработать элективный курс по изучению темы «Комбинации многогранников» с использованием СДМ «GeoGebra».
6. Провести апробацию разработанного элективного курса

**Объектом исследования** является процесс обучения стереометрии в старшей школе.

**Предметом исследования** является методическая система создания элективного курса с использованием СДМ «GeoGebra»

**Теоретической основой по изучению** применения СДМ и созданию элективного курса при изучении многогранников в старшей школе, послужили работы таких авторов как:

Ситникова Н.Д., Куликова Н.Г, Сафуанов, И. С., Ярошевич, Сафонов, В. И., Бамаева, О. А., Тагаева, Е. А., Смирнова И.М, Смирнов В.А.

**Методы исследования:** сбор и анализ педагогической и методической литературы; изучение опыта учителей математики по данной теме исследования; сопоставление учебных пособий и их элементов с другими материалами, которые имеют отношение к данной тематике; обобщение и систематизация информации, которая относится к данной теме.

**Практическая значимость** состоит в том, что предложенный элективный курс по теме может быть непосредственно применен на практике для старшеклассников в процессе изучения геометрии, разработанные задания могут быть использованы в работе учителей математики.

**Работа состоит** из введения, двух глав, заключения и библиографического списка.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ И ПРЕИМУЩЕСТВА ПРИМЕНЕНИЯ СДМ

## 1.1 Роль стереометрии в школьном курсе геометрии

Из школьного курса геометрии мы знаем, что она состоит из двух — частей — это планиметрия и стереометрия. В данном исследовании мы рассмотрим:

«Почему же изучение стереометрии является важным элементом образования в школе?». Изучение стереометрии является важным элементом образования в школе, потому что оно помогает развивать пространственное мышление у учащихся. В школе стереометрия нас знакомит с разнообразием изображения пространственных фигур.

В школьном курсе выделяют два основных этапа: [2]

1. Формирование первых представлений и пространственных фигурах (1-9 класс).

2. Систематический курс (10-11 класс).

Данная наука также имеет практическое применение некоторых областях, таких как: архитектура, дизайн, инженерия, строительство, медицина и т.д. Стереометрия способствует развитию логического мышления. Если рассмотреть значимость стереометрии при изучении в школьном курсе, то она помогает приобрести необходимые практические навыки, при измерении основных геометрических величин (площадь, объем, длина, углы).

Кроме того, данный раздел геометрии сам по себе очень интересен и имеет историю, связанную с именами знаменитых ученых: «Пифагор; Евклид; Архимед; Декарт; Эйлер; Лобачевский.»

Рассмотрим роль стереометрии в школьном курсе геометрии. При изучении стереометрии выделяют следующие задачи: [25]

1) Развитие и закрепление содержательных тем, начатых в средней школе, а также обобщение основных математических методов пространства.

- 2) Изучение свойств пространственных фигур.
- 3) Изображение пространственных фигур на плоскости с использованием свойств параллельного проектирования.
- 4) Развитие логического мышления учащихся при решении задач и доказательстве теорем в курсе стереометрии.

Можно выделить некоторые методические особенности изучения стереометрии [23].

1) Курс стереометрии тесно связан с курсом планиметрии. Большинство задач стереометрии сводятся к решению планиметрических задач.

2) Чтобы успешно изучать стереометрию, учитель должен постоянно возвращаться к материалу по планиметрии; перед изучением какой-либо теоремы необходимо повторить соответствующие планиметрические сведения.

3) В стереометрии, используется другой подход к построениям. В отличие от планиметрии, где можно использовать чертежи для наглядного представления объектов, в стереометрии нет такой возможности. Здесь работают только с изображением. Каждая задача в стереометрии требует построения изображения фигуры с помощью параллельной проекции.

4) В стереометрии важное значение придается логическому аспекту проводимых рассуждений. Каждый вывод должен быть обоснован.

5) Программа по стереометрии предполагает более быстрое изучение материала, чем в планиметрии. Однако для решения задач требуется больше времени, поэтому самостоятельная работа школьников занимает более значительное место. На уроке необходимо тщательно подбирать задания, включая только самое необходимое.

Формирование пространственных представлений идет в несколько этапов и включает в себя:

1. способность представить целостное изображение геометрической фигуры по чертежу, определить взаимное расположение ее элементов; (на этом этапе создаётся наглядная основа для формирования целостного образа фигуры; на этом этапе учителю необходимо использовать модели и реальные объекты

окружающего мира)

2. умение изменить положение фигуры в уме и рассмотреть её с другой стороны; способность ментально декомпозировать фигуру и создать из неё новый объект; (на этом этапе роль моделей сокращается, чтобы не замедлять развитие способности школьников к мысленному представлению особенностей расположения фигуры и её элементов)

В конце первого этапа и на втором этапе школьники формируют образы фигур и их комбинаций, которые они могут представить себе в почти неизменных условиях. При создании чертежа на этих этапах учитель не должен сразу показывать готовый чертеж, а должен постепенно выполнять его вместе с учащимися, чтобы они могли поэтапно воспринимать пространственные образы.

1. навык изображения фигуры на чертеже с адекватным отражением имеющихся отношений;

2. способность представить фигуру на основе её устного описания (на этом этапе ученики учатся работать с изображением в измененных условиях; сначала используется основной чертеж, который поможет увидеть все детали фигуры)

Изучение стереометрии дает возможность учащимся углубить свои знания о трехмерных фигурах, их свойствах и взаимных отношениях. Эта тема также позволяет развивать умение анализировать сложные конструкции и видеть пространственные перспективы. Решение задач по стереометрии требует от учеников точности, логического мышления и умения рассматривать объекты в трехмерных пространствах.

Однако, недостаточное внимание к стереометрии в образовательной программе может привести к тому, что учащиеся не «разовьют» необходимых навыков пространственного мышления. Большинство задач по геометрии в школьной программе сконцентрированы на плоских фигурах, и стереометрия зачастую остается на втором плане. Это может быть недостатком, так как развитие пространственного мышления играет важную роль в формировании интеллектуальных способностей учащихся.

Важно обратить внимание, на активное использование задач по этой теме в

процессе обучения. Это позволит ученикам более глубоко понять трехмерные объекты, развить свою пространственную интуицию и лучше подготовиться к решению сложных задач на экзаменах. Таким образом, стереометрия заслуженно занимает важное место в образовании и способствует развитию обширного спектра интеллектуальных качеств учащихся.

## **1.2. Особенности использования информационных технологий при изучении стереометрии**

Изучение геометрии играет важную роль в развитии интеллектуальных и творческих способностей, учащихся как в средних, так и в старших классах. Если изучить анализ результатов ОГЭ и ЕГЭ за 2023 год, то видно что знание геометрии у учащихся «хромает», его просто недостаточно.[15] Почему же это может возникнуть? Первое, что влияет на мой взгляд, это как преподнесён материал учителем, какими методами он воспользовался, и чтобы достичь высокий уровень геометрической подготовки учащихся, в первую очередь нужно развить пространственное мышление и вести к самостоятельному изучению материала. Тогда будет видно эффективность работы учащихся. Чтобы исправить эту ситуацию, самый эффективный инструмент- это внедрение информационных технологий. Что подразумевает собой данное понятие?[5] «Информационные технологии – это совокупность методов, программно-технических и технологических средств». Использование данных инструментов помогут развить пространственное мышление учащихся. Такой подход характеризуется индивидуальным и дифференцированным подходом, что приводит к изменению содержания и характера взаимодействия учителя и ученика.[16]

Рассмотрим пять основных функций компьютера в преподавании геометрии:[21]

- 1) Выполнение упражнений (когда учащимся предлагаются задания, распределенные по трудности).

- 2) Использование электронной доски и мультимедиа проектора на уроках геометрии.
- 3) Моделирование.
- 4) Исследование (когда ученик выбирает и аргументирует собственное решение).
- 5) Математические расчёты.

Использование компьютера в процессе обучения геометрии активизирует учащихся. Компьютер в этот момент выступает в роли помощника во время учебных упражнений. Его функции основаны на сочетании трех ключевых задач: компьютер как инструмент, компьютер как партнер и компьютер как создатель атмосферы. Это значительно облегчает работу учителя.

Использование компьютера значительно расширяет возможности решения сложных задач по стереометрии. Этот инструмент позволяет визуализировать задачи, что делает их более понятными. [9]

Проблема недостаточной наглядности при изучении геометрии в школе связана с тем, что изображения геометрических фигур, представленные в учебниках или на доске, часто содержат ошибки. Однако современные компьютерные технологии предоставляют решение этой проблемы.

С использованием специализированного программного обеспечения, учителя могут создавать трехмерные модели геометрических фигур, которые позволяют учащимся рассмотреть их со всех сторон и лучше понять их структуру. Это делает процесс обучения более наглядным и интерактивным, что способствует более глубокому усвоению материала.

Благодаря возможности взаимодействия с геометрическими объектами на компьютере, учащиеся могут легко проводить эксперименты, изменяя параметры фигур и наблюдая, как это влияет на их свойства. Это позволяет им не только лучше понимать геометрические концепции, но и развивать свою логическую и пространственную мысль.

Более того, использование компьютерных технологий в обучении геометрии позволяет персонализировать процесс обучения, учитывая индивидуальные

особенности каждого ученика. Программы могут адаптировать задания под уровень знаний и скорость усвоения материала каждым учащимся, что повышает эффективность обучения и помогает каждому ученику достичь успеха в изучении геометрии.

При переходе на изучение стереометрии в 10 классе ученики, уже знакомые с геометрией на плоскости с 7 по 9 класс, сталкиваются с трудностями в освоении трехмерного пространства.

Другая проблема, с которой сталкиваются школьники, – это поиск правильного подхода к доказательству теоремы или решению сложной задачи. Учителям нелегко научить учеников применять правильную методику. [27] Большинству школьников требуется помощь в развитии навыков представления и визуализации геометрических фигур; им приходится обучать геометрическому мышлению – пониманию теорем и условий задач, изложенных в словесной форме.

Для успешного освоения стереометрии учениками требуются хорошие пространственные способности. [31] Под этими способностями понимается умение формировать воображаемые образы и манипулировать ими в уме. Исследования в области психологии и педагогики показывают, что учащиеся 10-го класса обладают менее развитыми пространственными способностями по сравнению с учениками 7-го класса.

Отображение расположения объектов внутри геометрических фигур иногда представляет сложность; невозможно отследить динамику построений; переход от трехмерной модели к ее изображению на плоскости затруднен для учащихся. Для преодоления этих трудностей используются специальные компьютерные программы, создающие трехмерные визуализации.

Сегодня существует множество различных программ для создания трехмерных визуализаций, каждая из которых имеет свои особенности и возможности. Некоторые из них бесплатны и доступны для широкой публики, в то время как другие предназначены для профессионального использования и обладают более продвинутыми функциями. В любом случае, использование таких программ помогает учащимся лучше понимать и визуализировать сложные

геометрические концепции и повышает их интерес к изучению математики и других наук.

### 1.3. Сравнительный анализ систем динамической математики

«Живая Математика» - этот набор инструментов предоставляет все необходимые средства для создания и анализа чертежей. Он позволяет "открывать" и проверять геометрические факты, а также "оживлять" чертежи, плавно изменяя положение исходных точек. [30]

- Платформа (ОС): Mac OS X, Windows, Linux
- Компания: Key Curriculum Press Technologies
- Лицензия: Свободное пользование
- Язык: русский

#### Плюсы

- языки: Английский, Испанский, Датский, Русский, Корейский, Тайский, Традиционный и упрощенный китайский, Литовский;
- поддерживаются: макросы, Java-апплеты, анимация, измерения/вычисления.

#### Минусы

- Высокая цена индивидуальной лицензии
- Ограниченные возможности по встраиванию (работе из HTML страницы)

«GeoGebra» – это бесплатная, динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете. Кроме того, у программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т.д.) за счет команд встроенного языка. [30]

- Разрабатывается с 2002 года

- Переведена на 50 языков
- Свободно распространяется
- Создатель: Markus Hohenwater

#### **Плюсы**

- Хорошо продуманный интерфейс
- Совмещает в себе возможности выполнения построений и аналитическую геометрию
- Встроенный язык, при помощи которого можно задавать построения и производить математические расчеты
- Активное сообщество пользователей по всему миру (190 стран)

#### **Минусы**

- Встроенные анимационные возможности ограничены.

**«Математический конструктор»** - образовательный инструмент представляет собой цифровую геометрическую платформу. Предназначен для создания интерактивных математических моделей, сочетающих в себе конструирование, моделирование, динамическое варьирование, виртуальный эксперимент. [30]

- Разработчик: “1С”
- Разрабатывается: с декабря 2006 года
- Лицензия на компьютерный класс
- Кроссплатформенная (написана на Java)

#### **Плюсы**

- расширенный набор операций
- встроенный язык программирования (JavaScript)
- проверка, построена ли геометрическая фигура
- активно развивается
- возможность интеграции с другими программными продуктами (SCORM)

### **Минусы**

- Документация не описывает объектную модель (для написания скриптов).
- Программа выпускается с большим количеством ошибок и недоработок.

Изучив литературу по данной теме, можно заключить, что программы «GeoGebra», «Живая Математика» и «Математический конструктор» являются одними из наиболее популярных среди средств дистанционного обучения математике при изучении школьного курса геометрии.

В данном исследовании будет использована программа "Geogebra», [1] которая предоставляет мощные возможности для создания точных, хорошо описываемых и легко редактируемых чертежей. Простая техника измерения элементов геометрических фигур, доступная учащимся, позволяет им экспериментально усвоить метрические соотношения, не придерживаясь догматического подхода, особенно для тех, кто испытывает трудности с восприятием геометрии.

Формирование учебных средств для понимания стереометрии у старшеклассников требует использование новейших технологий в разработке программного обеспечения,[14] которое включает в себя функцию трехмерного моделирования.

Применение программного комплекса "Geogebra" на занятиях по стереометрии представляет собой важную задачу,[10] направленную на усиление результативности образовательного процесса. Применение предоставленного ПО на уроках позволяет учеников погружаться в изучение основных умений в интерактивной форме, минимизируя технические сложности. Это способствует активизации исследовательской работы учащихся, расширяет диапазон изучаемой информации и способствует развитию умения восприятия пространства. Такой метод освоения стереометрии улучшает понимание стереометрических конструкций, делает их более понятными и ускоряет процесс усвоения знаний среди студентов.[20]

## **Вывод к 1 главе**

Технологии трехмерного моделирования с помощью программы "Geogebra" позволяют создавать интерактивные модели и демонстрировать ученикам сложные пространственные конструкции в удобной форме. Это способствует более глубокому пониманию материала и помогает визуализировать различные геометрические формы и их взаимосвязи. Кроме того, благодаря использованию таких программных средств, обучающиеся могут самостоятельно экспериментировать, изменяя параметры модели и наблюдая за изменениями в реальном времени.

Важным преимуществом программы "Geogebra" является возможность индивидуализации обучения, так как учитель может предложить каждому ученику задания на своем уровне сложности и подборку упражнений, соответствующих его возможностям. Это позволяет стимулировать интерес к изучаемому материалу и развивать учебные навыки каждого ученика в индивидуальном порядке. Кроме того, такой подход позволяет дать возможность каждому ученику реализовать свой творческий потенциал и научиться решать сложные пространственные задачи.

В результате использования программы "Geogebra" в процессе обучения стереометрии, ученики приобретают не только теоретические знания, но и практические навыки работы с пространственными моделями. Это способствует развитию логического мышления, умения работать с информацией и принимать обоснованные решения. Таким образом, использование передовых технологий в образовании позволяет повысить качество обучения и подготовить учащихся к успешной деятельности в современном мире.

## ГЛАВА 2. ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС ПО ТЕМЕ «КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ «GEOGEBRA».

### 2.1 Преимущества использования элективного курса

Достижение целей индивидуального самоопределения учащихся в их профессионально-личностном развитии представляет собой важное исследовательское направление. Элективные курсы, в целом, обладают достаточной эффективностью как способ обеспечения данного процесса.

У учеников имеется свобода в выборе элективных курсов, что позволяет им избежать повторения материала основного учебного курса.

В чём отличия элективного курса от факультатива?

Как известно, факультативные курсы – это необязательные учебные занятия для всех учащихся, а элективные курсы – обязательный образовательный компонент для всех учащихся общеобразовательных учреждений, их выбирает каждый учащийся.

Еще одна отличительная черта факультативных и элективных курсов – их разная продолжительности.

Продолжительность элективных курсов может составлять от 17 до 68 учебных часов.

Элективные курсы предназначены для:[32]

- стимулирования учебно-познавательной деятельности учащихся,
- развития их умственных возможностей,
- обучения алгоритмам универсальных учебных действий,
- формирования представлений о современных технологиях лучшего восприятия материала.

Кроме того, с помощью различных специализированных курсов учащиеся могут определить свои профессиональные предпочтения и выбор деятельности в будущем, получая дополнительные знания по выбранному направлению в

дополнение к основному образовательному курсу.

Элективные курсы также способствуют развитию у учащихся самостоятельности и ответственности за свое обучение. Помимо того, они позволяют углубить знания в конкретной области и развить профессиональные навыки, что может быть полезно для дальнейшей карьеры. Кроме того, элективные курсы могут помочь выявить скрытые таланты учеников и направить их в нужное русло для дальнейшего развития [6].

Важно отметить, что элективные курсы могут быть адаптированы под конкретные потребности и интересы учащихся, что способствует более эффективному обучению. Благодаря разнообразию курсов, учащиеся имеют возможность выбора и могут изучать те предметы, которые им по-настоящему интересны, что способствует более

глубокому и качественному усвоению материала.

Таким образом, элективные курсы играют важную роль в образовательном процессе, обогащая программу обучения и позволяя учащимся раскрыть свой потенциал. Важно продолжать совершенствовать эти курсы, учитывая потребности и интересы учащихся, чтобы обеспечить им максимальную пользу и эффективность в процессе обучения.

Приведем некоторые основные формы организации занятий элективного курса. К ним относятся: [8]

- лекционные занятия,
- занятия в форме свободного обсуждения,
- дискуссии и полемика,
- соревнования групп учащихся, игры,
- индивидуальные занятия-консультации,
- практические занятия, посвященные решению задач,
- групповая и индивидуальная учебно-познавательная исследовательская деятельность,
- дистанционная поддержка,

– контрольные и зачетные занятия.

По завершении программы элективного курса учащиеся имеют возможность проявить свою креативность и таланты через индивидуальные или групповые проекты. Это позволяет им не только проявить свои уникальные способности, но и развить навыки работы в команде, коммуникации и самостоятельности. Индивидуальные творческие работы могут быть выполнены в различных форматах, от литературных произведений и исследовательских проектов до художественных работ и мультимедийных презентаций [19].

Групповые проекты также играют важную роль в обучении учащихся. Они учат детей сотрудничать, делиться ответственностью и принимать коллективные решения. В ходе работы над проектом учащиеся могут раскрывать свои лидерские качества, организационные способности и умение преодолевать трудности вместе. Подобный опыт полезен не только в учебе, но и в будущей профессиональной деятельности.

Презентация проектов может быть организована как для участников образовательного процесса, так и для широкой аудитории. Это позволяет учащимся показать результаты своего труда, получить обратную связь и поддержку со стороны учителей, одноклассников и родителей. Такой подход к обучению не только стимулирует учащихся к творчеству, но и помогает им осознать свой потенциал и найти свое призвание.

Выбор задач для включения в элективный курс основан на нескольких принципах [3,4]:

Принцип непрерывности, когда новые задачи могут быть решены с использованием уже имеющихся знаний и навыков, а также с учетом взаимосвязи основного и элективного курсов.

Принцип объединения теории с практикой, где задачи продолжают полученные теоретические знания и помогают понять новый материал.

Принцип полноты, отражающий математические идеи и включающий примеры из разных областей.

Принцип контрастности, который требует наличия как положительных, так и

отрицательных ответов, а также разнообразия в задачах.

Система задач должна поощрять использование эвристических методов, что способствует развитию научного мышления при их решении. Среди наиболее часто встречающихся эвристических методов в методике преподавания математики - аналогия, индукция, элементарные задачи, моделирование и другие.

Принцип развития исследовательских умений, который подразумевает активное построение знаний через творческий подход к решению задач. Важные этапы в учебных исследованиях - постановка проблемы, формулирование гипотез, доказательство или опровержение гипотезы.

ЭК способствуют развитию и формированию у учащихся следующих навыков:[18]

способности к аналитическому мышлению,

разносторонних интересов,

умения самостоятельно учиться,

общей математической грамотности,

вовлечения школьников в самостоятельные учебные исследовательские задания,

знакомства с актуальными научными достижениями

При создании ЭК по геометрии требуется:

определить цель курса и его функцию в рамках основного учебного курса по геометрии,

выявить различия в содержании дополнительного курса по сравнению с основным курсом геометрии,

структурировать учебный план курса по темам с указанием часов, выделенных на каждую из них,

обеспечить учащихся необходимым учебным материалом для изучения геометрии,

выделить основные типы образовательной деятельности учащихся, определить их уровень самостоятельности,

установить критерии успешного завершения дополнительного курса по

геометрии,

подготовить контрольные задачи и вопросы для проведения промежуточного оценивания.

ЭК открывают студентам двери в мир дополнительных знаний в области, которая может быть как вторичной к основному образовательному направлению, так и просто привлекать их внимание. Главная особенность таких курсов заключается в возможности настройки учебного плана под личные интересы и амбиции ученика, что способствует развитию его индивидуальности и повышает стимул к обучению.

К тому же, данные предоставляют студентам возможность освоить дополнительные умения, которые могут пригодиться в будущей профессиональной деятельности или повседневной жизни. Также такие курсы могут помочь учащимся открыть для себя уровень таланта и способностей, которые ранее оставались им неизвестными.

Не менее важными являются и социальные преимущества ЭК. Они предоставляют отличную возможность расширить круг общения, встретиться с единомышленниками и создать новые связи. В дополнение, изучение новой темы в неформальной атмосфере может стать источником новых ощущений и вдохновения для учащихся.

## **2.2 Программа Элективного курса «Комбинации многогранников» с помощью СДМ «GEOGEBRA»**

### **2.2.1. Пояснительная записка**

Элективный курс "Комбинации многогранников" представляет собой изучение сложной и значимой темы стереометрии в старших классах. Он предназначен для учеников 11-х классов и поможет подготовиться к экзамену ЕГЭ.

При изучении «геометрии в пространстве» каждый раз приходится изобразить разные трехмерные фигуры на плоскости. При решении каждой задачи необходимо провести чертеж. Многие ученики сталкиваются с проблемой в начальном этапе изучения этого раздела - неспособностью интерпретировать

чертежи и неосознанием взаимосвязей между элементами фигур.

Материал данного курса привлечет внимание учащихся, которым интересна геометрия.

С помощью программы Geogebra, ученики смогут более полно и ясно представить пространственные фигуры, а также экспериментировать с ними, изменять параметры и строить новые формы. Это позволит им лучше понять геометрические законы и принципы, а также развить свои навыки в области математики и компьютерных технологий. Такой подход к обучению сделает процесс интересным, захватывающим и эффективным.[12,13]

Курс разработан для помощи учащимся в освоении основ стереометрии, что позволит им успешно справляться с заданиями по этой теме на экзаменах. Знания стереометрии также помогут развить пространственное мышление и логику, что важно не только для школьной программы, но и для будущей профессиональной деятельности. Поэтому данный курс поможет учащимся не только повысить результаты на экзаменах, но и развить важные навыки для успешной учебы и работе.

Задачи, связанные с комбинациями многогранников, можно решить с помощью бесплатной компьютерной программы. Он помогает представить пространственную ситуацию, описанную в задаче, позволяя создавать модели многогранников и их комбинаций.

Цель элективного курса: [32]

1. Расширение и углубление пространственных представлений у учащихся
2. С помощью практической деятельности познакомить учащихся с задачами на комбинации многогранников с помощью компьютерной программы GEOGEBRA.

Задачи элективного курса:

1. Познакомить учащихся с основными понятиями и свойствами «Многогранники» и их комбинациями.
2. Сформировать умения и навыки самостоятельной работы

### 3. Совершенствовать навыки решения стереометрических задач

Знать:

- Правила изображения пространственных фигур и их комбинаций;
- Формулировки и доказательства теорем

Уметь:

- Применять полученные теоретические знания к решению задач, содержащих комбинацию тел;
- Выделять в комбинации геометрических пространственных фигур их существенные элементы;
- Изображать пространственные фигуры и их комбинации.

Именно в этом курсе учащиеся смогут глубже погрузиться в мир многогранников, изучить их свойства и формулы, чтобы легко решать сложные задачи. Ведь знание теории и умение ее применять в практических задачах – ключ к успеху в выпускном экзамене. Несмотря на сложность материала, он преподнесет его так, чтобы каждый ученик мог понять и запомнить основные концепции, а также научиться самостоятельно решать задачи, основанные на изученных теоремах и правилах.

#### **2.2.2. Учебно-тематический план**

Примерный учебно-тематический план представлен ниже в таблице №1

В разделе 2.2.3 представлено содержание курса с теорией и предлагаемыми заданиями.

Предлагаемое распределение часов, а также последовательность изучения тем могут быть изменены.

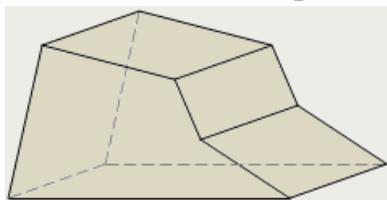
Таблица №1

№ п\п	Наименование занятия	Количество часов
1	Вводное занятие	1
<b>Этап №1. Общие вопросы</b>		
2	Тема 1. Определение многогранника. Правильные многогранники	1
3	Тема 2. Куб, тетраэдр, пирамида, призма (изображение фигур)	2
4	Тема 3. Выпуклые многогранники	1
5	Тема 4. Сечение многогранников	1
6	Тема 5. Основные понятия параллельного проектирования	1
7	Итоговое тестирование №1	1
<b>Этап №2 Решение задач</b>		
8	Тема 6. Комбинации многогранников	4
9	Тема 7. Объём общей части многогранников	4
10	Итоговое тестирование №2	1

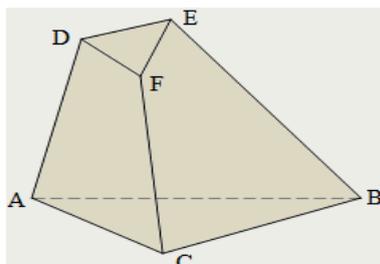
### 2.2.3. Содержание курса

#### Тема 1. Определение многогранника. Правильные и неправильные многогранники.

Многогранник представляет собой трёхмерное объект, поверхность которого формируется множеством ограниченных плоских многоугольников.[28]



Поверхность многогранника, называются его гранями; стороны многоугольников – рёбрами; вершины – вершинами многогранника:



$ABC, DEF, ABED, BCFE, ACFD$  – грани;

$AB, BC, AC, DE, EF, DF, AD, BE, CF$  – ребра;

$A, B, C, D, E, F$  – вершины многогранника  $ABCDEF$ .

Правильный многогранник — это многогранник, ребра которого имеют одинаковую длину и составлен из правильных многоугольников. Это трехмерный объект с острыми вершинами и плоскими гранями, состоящими из прямых краев. Эти многогранники широко известны как Платоновы тела.

Расположение вершин, ребер и граней в правильных многогранниках демонстрирует симметрию, а грани представляют собой конгруэнтные правильные многоугольники.

К числу характерных образцов правильных многогранников относятся тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Многогранник, не отвечающий критериям правильности, классифицируется как неправильный. Он отличается асимметрией своих вершин, ребер и граней, при этом не все грани обладают конгруэнтностью или соответствуют правильным многоугольникам.

К примерам неправильных многогранников можно отнести кубоид, неправильные додекаэдр и икосаэдр.

Некоторые многогранники: (тетраэдр, призма, пирамида, куб)

Теорема Эйлера для многогранников: [11]

Если  $V$  — число вершин выпуклого многогранника,  $R$  — число его ребер и

$G$ — число граней, то получаем:

$$V - R + G = 2$$

## Тема 2. Куб, тетраэдр, пирамида, призма

Куб – это прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны.

1. Нахождение диагонали куба

$$d = a\sqrt{3}$$

2. Площади полной поверхности:

$$S_{\text{п}} = 6 \cdot a^2, S_{\text{п}} = 2 \cdot d^2,$$

3. Объёма:

$$V = a^3, V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$$

В программе GEOGEBRA изобразим куб.

(Инструмент «Куб» позволяет получать модель куба. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши две точки (вершины куба). На рисунке 1 показан пример такого куба)

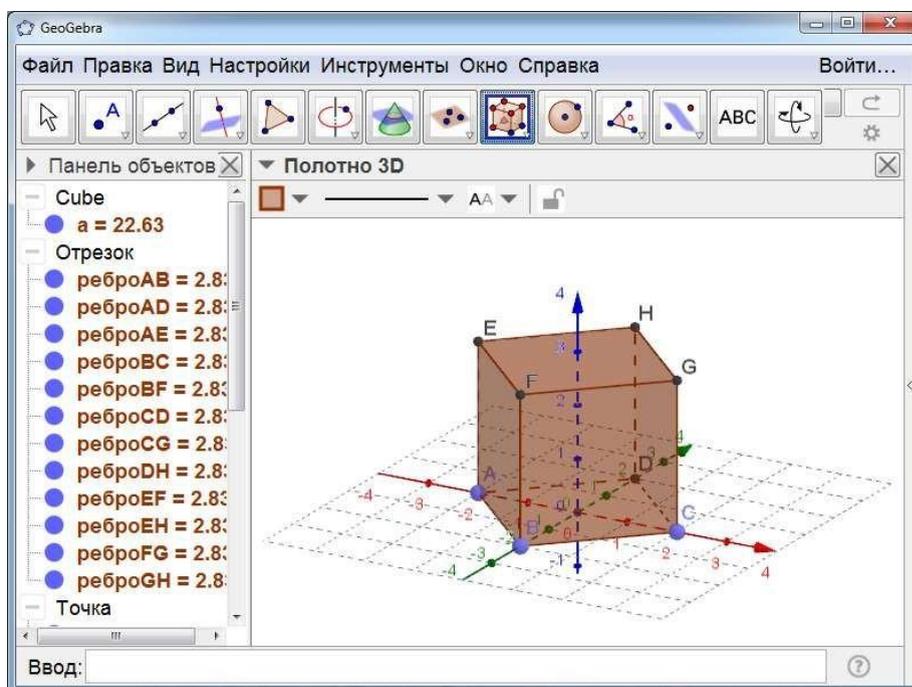


Рис. 1

Тетраэдр – это разновидность пирамиды; четырехгранник, гранями

которого являются треугольники.

Тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер. Каждая грань фигуры может быть ее основанием.

1. Нахождение площади поверхности:

$$S_{1\text{-ой грани}} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

$$S_{\text{полная}} = \sqrt{3} \cdot a^2$$

2. Объема:

$$V = \frac{1}{12} \cdot a^3 \cdot \sqrt{2}$$

В программе GEOGEBRA изобразим тетраэдр.

(Инструмент «Тетраэдр» позволяет получать изображения правильного тетраэдра. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши две точки (вершины тетраэдра). На рисунке 2 показан пример такого тетраэдра.)

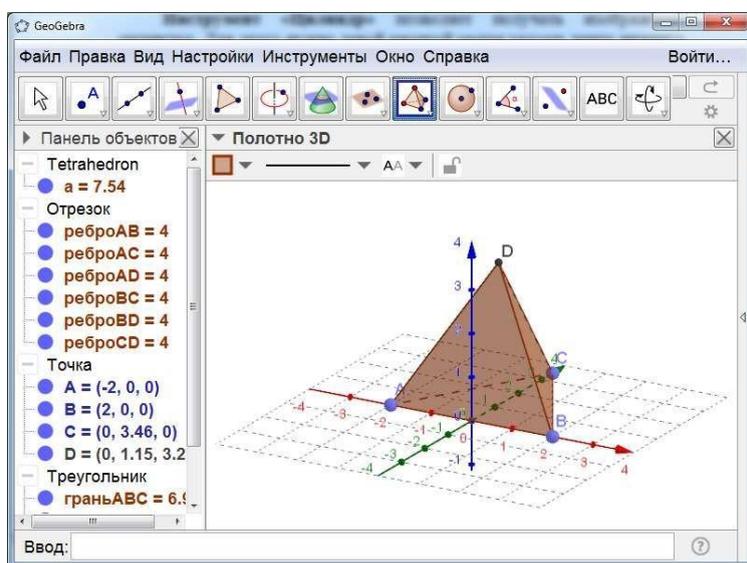


Рис. 2

Призма - представляет собой трёхмерный многогранник, соединяющий два равносторонних многоугольника, расположенных в различных плоскостях и соединённых друг с другом через параллельный перенос, а также линии, которые

связывают соответствующие вершины этих многоугольников.

Основания призмы идентичны и находятся в параллельных плоскостях. Ребра боковых сторон призмы также равны и параллельны.

Объём поверхности призмы включает в себя две основные поверхности и боковую часть. Любая боковая поверхность призмы формируется из параллелограммов, где у каждого из них две стороны являются сторонами основ, а остальные две – боковыми ребрами.

Высота призмы определяется как любой перпендикуляр, опущенный из точки одного основания на плоскость второго основания. Призма считается прямой, когда её ребра образуют прямые углы с плоскостями оснований. В ином случае призма классифицируется как наклонная. Боковые стороны прямой призмы имеют форму прямоугольников. Длина бокового ребра прямой призмы соответствует её высоте.

Боковая поверхность:

$$1. S_b = P_{осн} \cdot h$$

В программе GEOGEBRA изобразим призму

(Инструмент «Призма» позволяет построить модель призмы. На рисунке 3 показана правильная шестиугольная призма. Для её построения сначала нужно построить правильный шестиугольник (основание призмы). Для этого нажмём левой кнопкой мыши на окошко с надписью «Вид» и выберем строчку с надписью «Полотно». Получим разделение рабочего окна на две части для плоских фигур (левая часть) и пространственных фигур (правая часть). В левой части построим правильный шестиугольник, как это делалось на плоскости. При этом правильный шестиугольник появится и в правой части окна. Закроем левое окно, нажав левой кнопкой мыши на крестик в правом верхнем углу.)

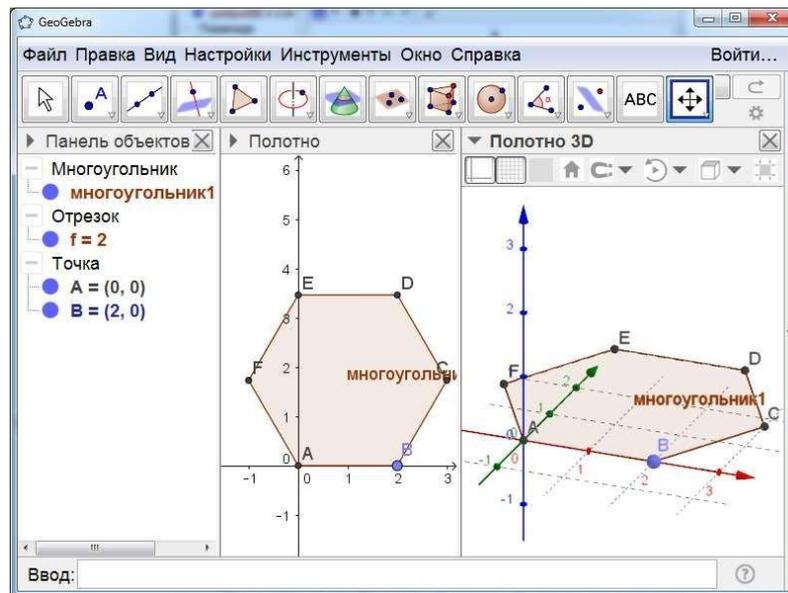


Рис. 3

(Выбрав инструмент «Призма», нажмем левой кнопкой мыши сначала на построенный правильный шестиугольник, а затем на какую-нибудь точку оси аппликат. Получим правильную шестиугольную призму, рисунок 4)

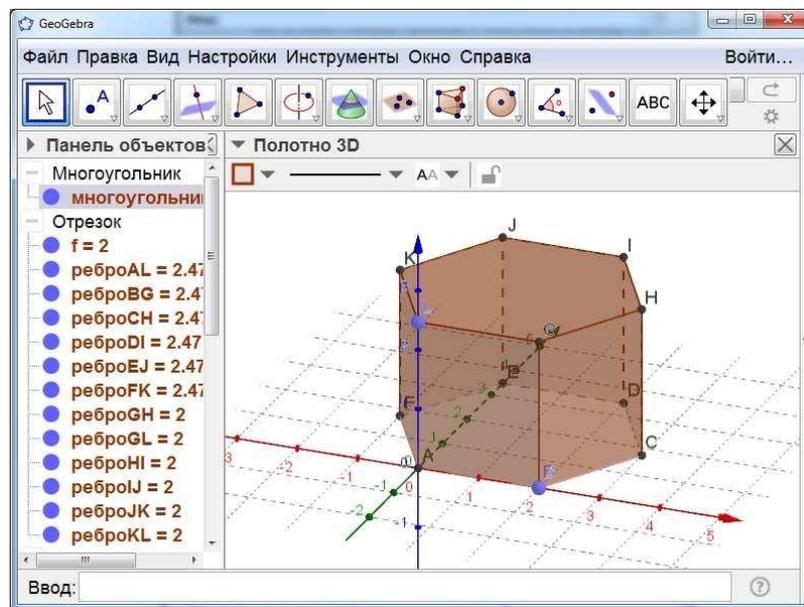


Рис. 4

Пирамида представляет собой многогранник, который включает в себя плоский многоугольник в основании, вершину, находящуюся вне плоскости основания, и все отрезки, соединяющие эту вершину с точками на основании. Отрезки, идущие от вершины пирамиды к вершинам основания, называются боковыми ребрами.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней, каждая из

которых является треугольником. Вершина пирамиды является одной из вершин этих треугольников, а противоположная сторона треугольника совпадает с одной из сторон основания пирамиды.

Сумма площадей боковых граней пирамиды образует её боковую поверхность. Основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной вокруг основания пирамиды, если выполнено одно из следующих условий:

- все боковые ребра равны;
- боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; боковые ребра образуют равные углы с высотой пирамиды.

Основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в основание пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом; высоты боковых граней равны;
- боковые грани образуют равные углы с высотой пирамиды.

1. Объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$$

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}}$$

В программе GEOGEBRA изобразим

(Инструмент «Пирамида» позволяет строить модель пирамиды. Для этого нужно сначала построить или указать многоугольник (основание пирамиды), а затем указать её вершину. На рисунке 5 показана четырёхугольная пирамида.)

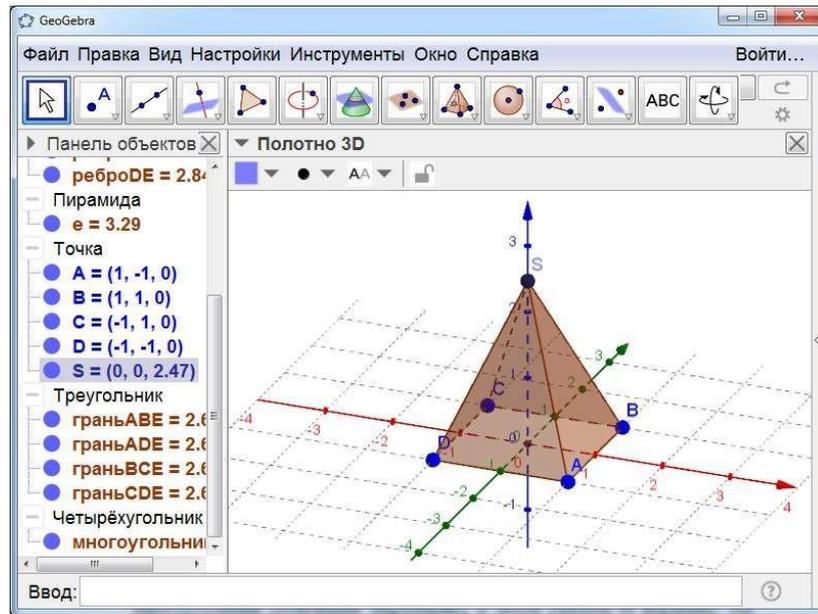


Рис. 5

### Тема 3. Выпуклые многогранники

Среди плоских и пространственных фигур выделяют выпуклые фигуры.

Многогранник называется выпуклым если он весь лежит по одну сторону от плоскости любой его грани.

Рассмотрев (рисунок 6):

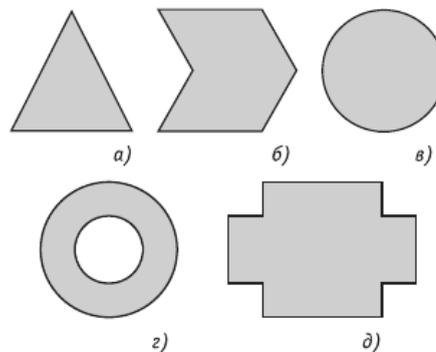


Рис. 6

мы можем определить исходя и из определения, что  $a, в$  - выпуклые,  $б, г, д$  - невыпуклые.

#### Задание к теме №3

Укажите, какие из многогранников на рисунке 7 являются выпуклыми, а какие – невыпуклыми?

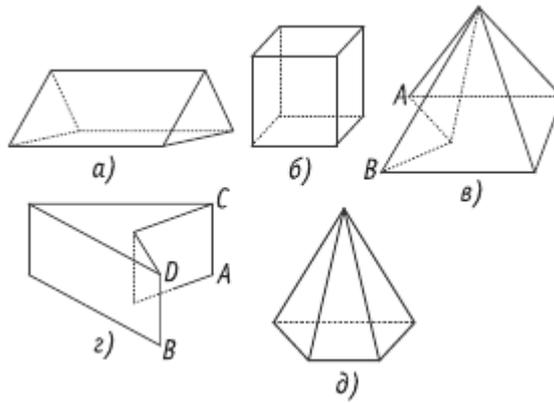


Рис.7

#### Тема 4. Сечение многогранников

Секущей плоскостью называют любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данной фигуры.

Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам.

Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.

Построить плоскость можно:

1. с помощью трёх точек, не лежащих на одной прямой



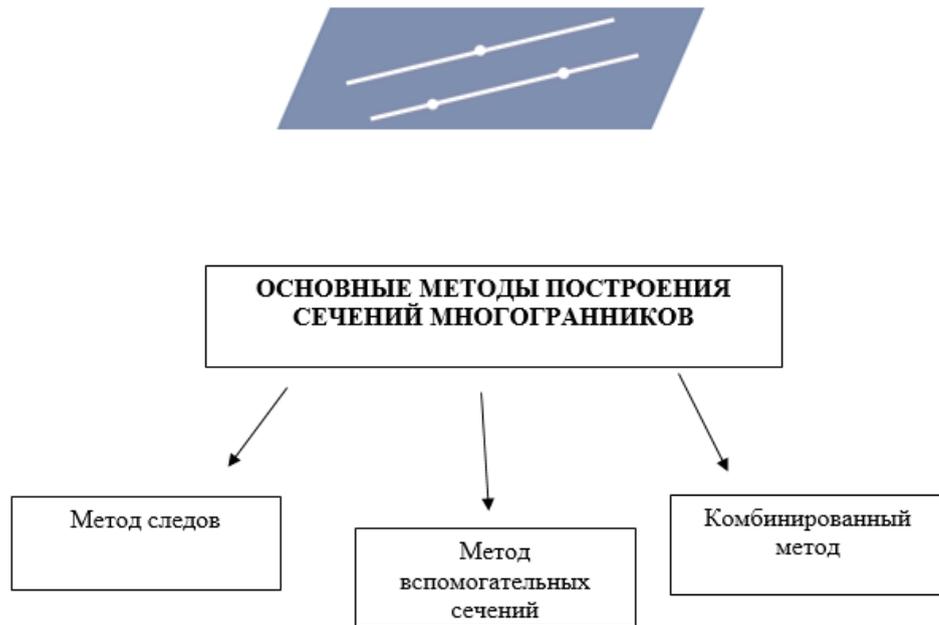
2. с помощью двух пересекающихся прямых



3. с помощью прямой и точки, которая не лежит на прямой



4. а также с помощью двух параллельных прямых



Метод следов включает три ключевых этапа: сначала необходимо построить линию пересечения (след) секущей плоскости с основанием многогранника; затем определить точки пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника, а после этого построить и заштриховать сечение.

В основе метода следов лежат две теоремы:

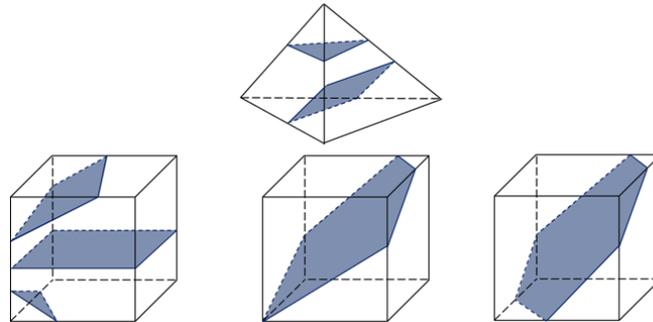
- 1) если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости;
- 2) если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения будет параллельна первой прямой.

Метод вспомогательных сечений используется для построения сечений в тех случаях, когда неудобно находить след секущей плоскости.

Комбинированный метод построения сечений многогранников заключается в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с методом следов или методом вспомогательных сечений.

Обратите внимание: тетраэдр имеет четыре грани, поэтому его сечения могут быть только треугольниками и четырёхугольниками. В то время как

параллелепипед имеет шесть граней, поэтому его сечения могут быть треугольниками, четырёхугольниками, пятиугольниками и шестиугольниками.



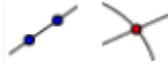
*Задание №1 Построить сечение тетраэдра в GeoGebra.*

*Задача: На ребрах  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$  отмечены точки  $M, N$  и  $P$ . Построить сечение тетраэдра плоскостью  $MNP$ .*

1. Постройте тетраэдр 

2. Отметьте точки  $N, P, M$  на ребрах 

3. Построим сначала прямую, по которой плоскость  $MNP$  пересекается с плоскостью грани  $ABC$ . Точка  $M$  является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещё одной общей точки построим прямые  $NP$  и  $BC$  и найдём точку их пересечения  $E$ , которая и будет второй общей точкой плоскостей  $MNP$  и  $ABC$ .

.Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой  $ME$ . 

4. Постройте прямую  $ME$  и найдите точку  $Q$ - пересечения с ребром  $AC$ .

5. Постройте четырёхугольник  $MNPQ$  – искомое сечение  (рисунок 8)

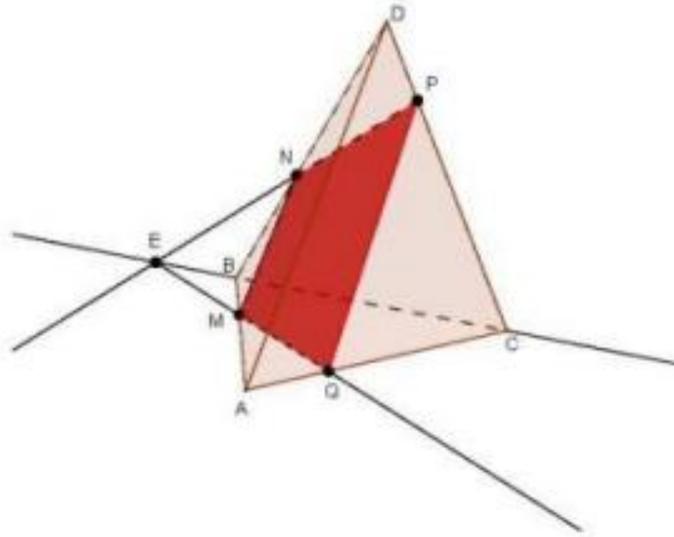
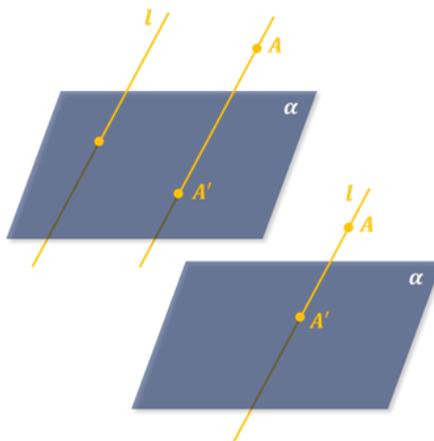


рис.8

### Тема 5. Основные понятия параллельного проектирования

Итак, часто для того, чтобы изобразить на плоскости (например, на бумаге) геометрические фигуры, находящиеся в пространстве, применяется параллельная проекция. Она определяется следующим образом.

Пусть  $\alpha$  — некоторая плоскость, а  $l$  — некоторая прямая, пересекающая эту плоскость. Возьмём в пространстве произвольную точку  $A$ . Если точка  $A$  не лежит на прямой  $l$ , то проведём через точку  $A$  прямую, параллельную прямой  $l$ , и обозначим через  $A'$  точку пересечения этой прямой с плоскостью  $\alpha$ . Если же точка  $A$  лежит на прямой  $l$ , то обозначим через  $A'$  точку пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\alpha$ .



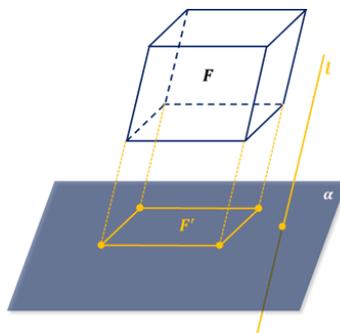
Точка  $A'$  называется проекцией точки  $A$  на плоскость  $\alpha$  при проектировании параллельно прямой  $l$  (или параллельной проекцией точки  $A$ ).

Плоскость  $\alpha$  называется плоскостью проекций, а о прямой  $l$  говорят, что она задаёт направление проектирования.

Все прямые, параллельные прямой  $l$ , задают одно и то же направление проектирования, поэтому также называются проектирующими прямыми.

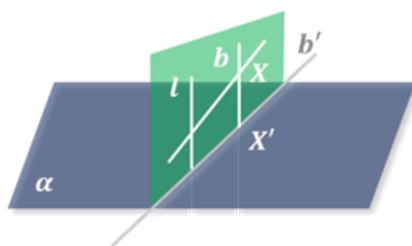
Пусть  $F$  — плоская или пространственная фигура. Проекцией фигуры  $F$  на плоскость  $\alpha$  при проектировании параллельно прямой  $l$  называется множество  $F'$  проекций всех точек фигуры  $F$ .

Заметим, что проекция заданной фигуры зависит от выбора плоскости проекций и проектирующей прямой.

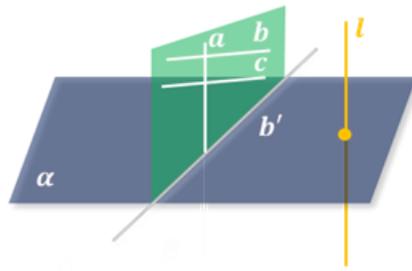


Рассмотрим ключевые характеристики параллельного проектирования, при условии, что проектируемые отрезки и прямые не параллельны направляющей прямой.

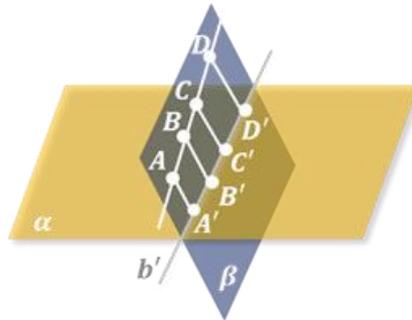
1. Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка — отрезок.



2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.



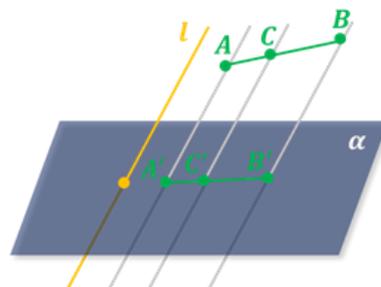
3. Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.



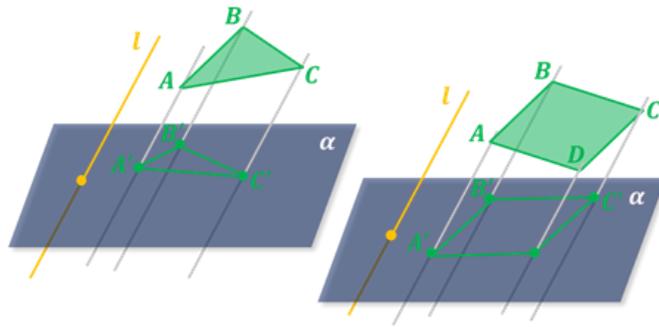
В процессе параллельного проецирования середина отрезка отображается в середину его проекции.

Хотя при параллельном проецировании могут изменяться размеры отрезков и углы, параллельность прямых всегда сохраняется.

Если точка делит отрезок в отношении  $m:n$ , то проекция точки будет делить проекцию отрезка также в отношении  $m:n$ .

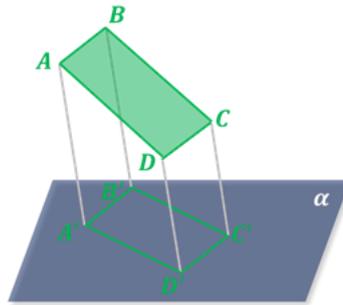


Центр правильного треугольника находится в точке пересечения медиан его проекции, а центр квадрата — в точке пересечения диагоналей его проекции

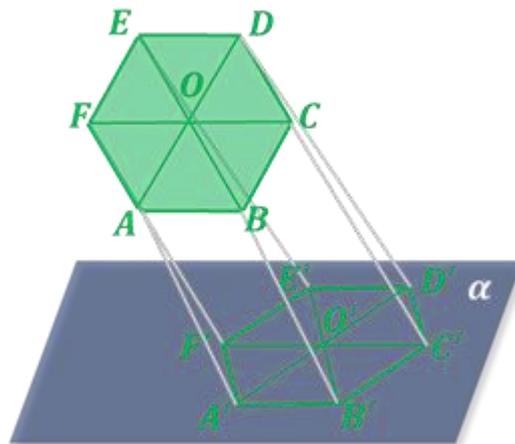


Изученные характеристики параллельного проектирования используются при создании рисунков (изображений фигур), иллюстрирующих теоремы и задачи стереометрии.

Параллелограмм проектируется в параллелограмм, так как параллельные прямые сохраняют параллельность.

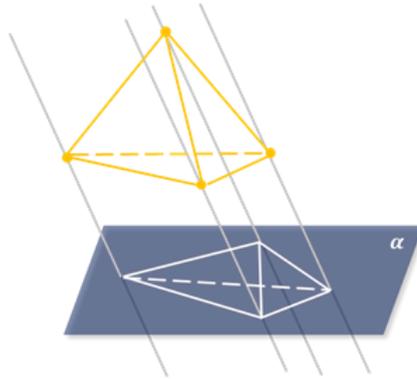


В частности, любой параллелограмм может быть представлен в виде прямоугольника, квадрата или ромба. Правильный шестиугольник при проекции превращается в искажённый шестиугольник, при этом параллельность противоположных сторон сохраняется.



При создании изображений пространственных фигур учитывают, что

фигуру, составленную из сторон и диагоналей любого выпуклого или невыпуклого четырёхугольника, можно рассматривать как проекцию треугольной пирамиды при выборе определённого направления проецирования и плоскости, на которую проецируется эта пирамида.



## Итоговое тестирование №1

### Задание №1

1. Два тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от неё. Сколько вершин, рёбер и граней в полученном многограннике? Является ли он выпуклым?
2. Докажите, что не существует многогранника, имеющего семь рёбер
3. В правильной четырёхугольной призме сторона основания равна 6 см, а боковое ребро равно 8 см. Найдите расстояние от стороны основания до не пересекающей её диагонали призмы.
4. Правильная треугольная пирамида, все рёбра которой равны 12 см, пересечена плоскостью, параллельной плоскости основания пирамиды и проходящей через середину её высоты. Найдите высоту и апофему полученной усеченной пирамиды.

### Задание №2

<https://learningapps.org/view1358987>

## Тема 6. Комбинации многогранников

Решение данных задач рассматривается в программе «GEOGEBRA» [7,24]

**Задача №1** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $B, D, A_1, C_1$  единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Как он называется? Найдите его рёбра. (рисунок 9)

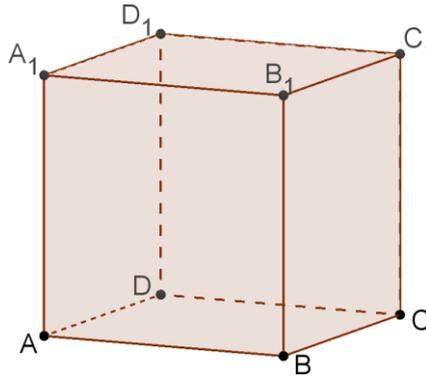


Рис.9

*Решение:* Искомым многогранником является правильный тетраэдр. Его рёбра равны  $\sqrt{2}$  (рисунок 9.1)

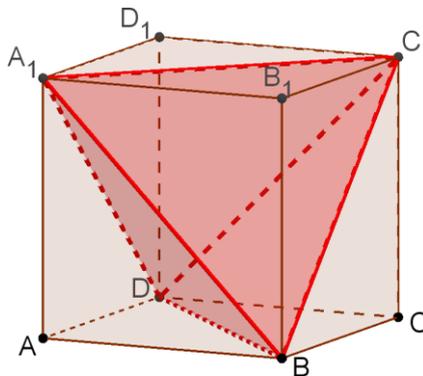


Рис.9.1

**Задача №2.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, C_1, B_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ . Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1. (рисунок 10)

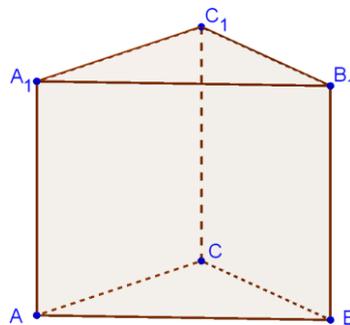


Рис.10

Решение: Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида  $ABCC_1B_1$ . Её объем равен  $\frac{2}{3}$ . (рисунок 10.1)

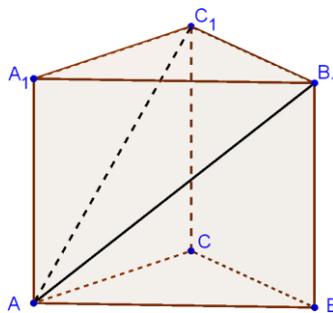


Рис.10.1

Задача №3. Объем четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равен 1,  $E$  – середина ребра  $SC$ ,  $F$  – середина ребра  $SD$ . Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки  $A, B, E, F, S$ . (рисунок 11)

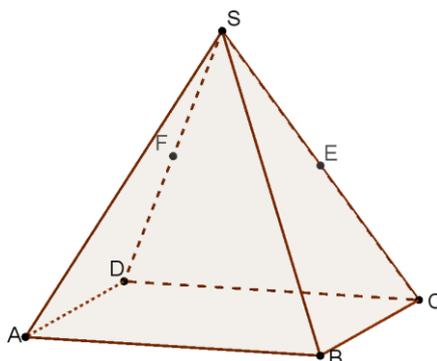


Рис. 11

Решение: Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида  $SABEF$ . Она состоит из двух треугольных пирамид  $SABE$  и  $SAEF$ . Объем пирамиды  $SABE$  равен  $\frac{1}{4}$ . Объем пирамиды  $SAEF$  равен  $\frac{1}{8}$ . Следовательно, объем пирамиды  $SABEF$  равен  $\frac{3}{8}$ . (рисунок 11.1)

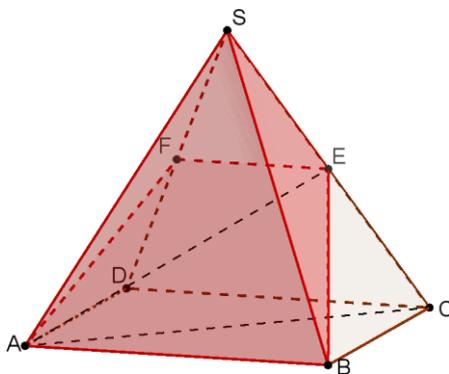


Рис. 11.1

**Задача №4** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, E_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ . Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1. (рисунок 12)

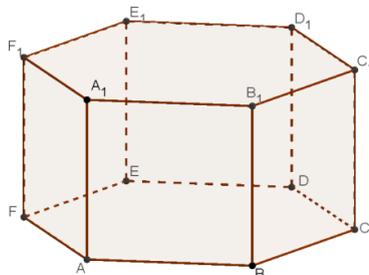


Рис.12

**Решение:** Искомым многогранником является треугольная пирамида  $E_1 ABC$ . Её объём равен  $\frac{1}{18}$ . (рисунок 12.1)

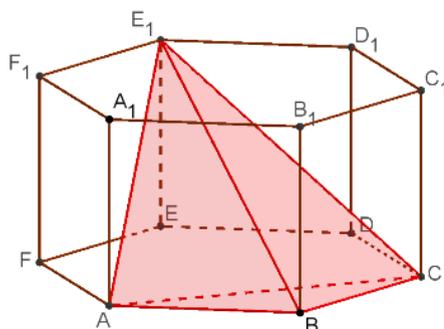


Рис.12.1

**Задача №5.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A, C, D, C_1, D_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ . Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1. (рисунок 13)

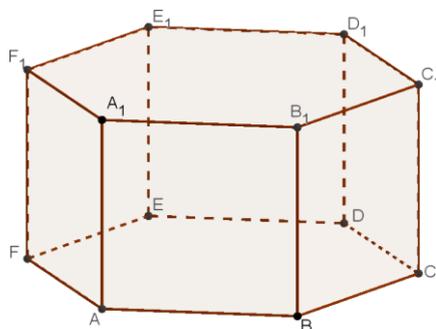


Рис.13

Решение: Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида  $ACD_1C_1$ . Её объем равен  $\frac{2}{3}$ . (рисунок 13.1)

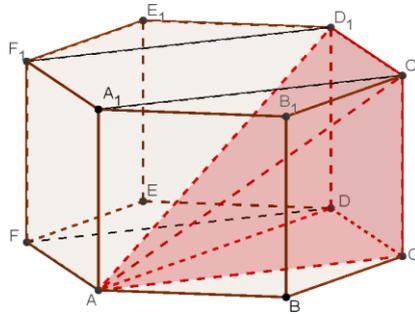


Рис.13.1

Задача №6 Изобразите многогранник, вершинами которого являются центры граней единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Как он называется? Найдите его рёбра. (рисунок 14)

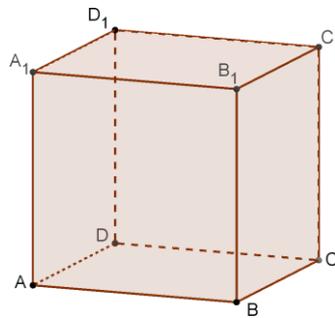


Рис. 14

Решение: Искомым многогранником является октаэдр. Его рёбра равны  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . (рисунок 14.1)

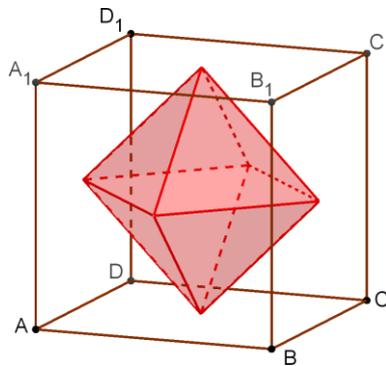


Рис. 14.1

## Тема 7. Объем общей части многогранников

Решение данных задач рассматривается в программе «GEOGEBRA» [29,26]

**Задача №1** Для единичного куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  найдите объем общей части призм  $ADA_1BCB_1$  и  $ADD_1BCC_1$ . (рисунок 15)

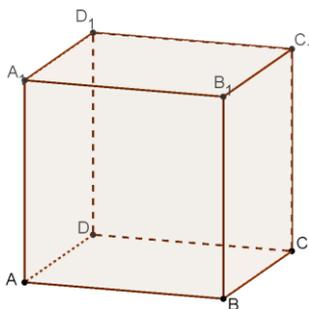


Рис.15

*Решение:* Общей частью призм  $ADA_1BCB_1$  и  $ADD_1BCC_1$  является треугольная призма  $ADEBCF$ . Её объем равен  $\frac{1}{4}$ . (рисунок 15.1)

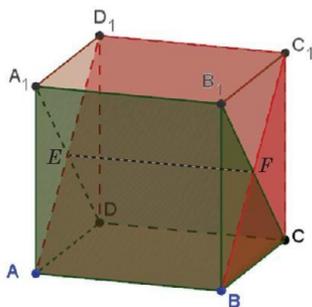


Рис. 15.1

**Задача №2** Объем треугольной пирамиды  $SABC$  равен 1,  $D$  – середина ребра  $SB$ ,  $E$  – середина ребра  $SC$ . Найдите объем общей части двух пирамид  $DABC$  и  $EABC$ . (рисунок 16)

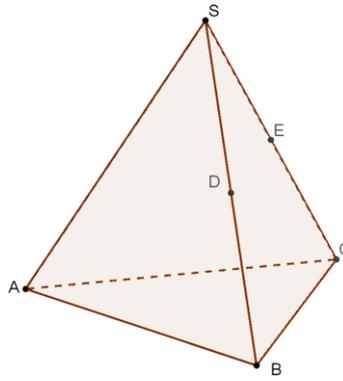


Рис. 16

*Решение: Общей частью двух пирамид  $DABC$  и  $EABC$  является треугольная пирамида  $ABCF$ , объем которой равен  $\frac{1}{3}$ . (рисунок 16.1)*

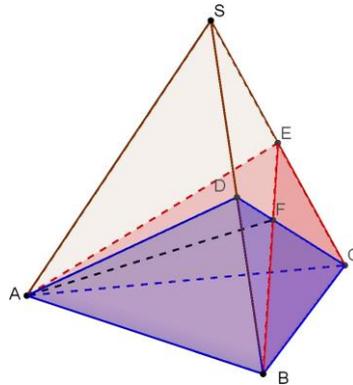


Рис. 16.1

*Задача № 3 Найдите объем общей части двух пирамид  $A_1ABC$  и  $AA_1B_1C_1$ , содержащихся в треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , объем которой равен 1. (рисунок 17)*

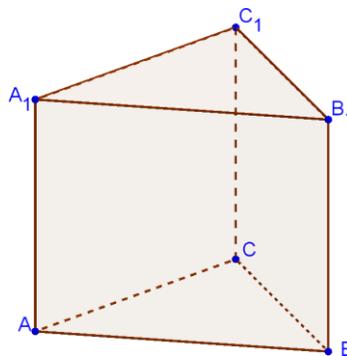


Рис. 17

Решение: Общей частью двух пирамид  $A_1ABC$  и  $AA_1B_1C_1$  является треугольная пирамида  $AA_1EF$ . Объем которой равен  $\frac{1}{12}$ . (рисунок 17.1)

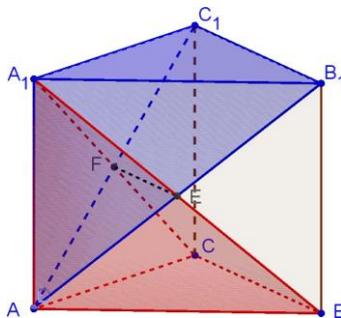


Рис.17.1

**Задача №4** Правильную треугольную призму повернули вокруг прямой, проходящей через центры её оснований, на угол  $60^\circ$ . Какой многогранник является общей частью исходной призмы и повернутой? Найдите его объем, если объем исходной призмы равен 1 (рисунок 18)

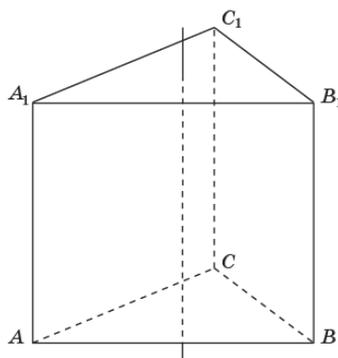


Рис.18

Решение: Данная и повернутая призма показана на рисунке. Их общей частью является правильная шестиугольная призма, стороны основания которой в три раза меньше сторон основания исходной призмы, а высота равна высоте этой призмы. Объем шестиугольной призмы равен  $\frac{2}{3}$ . (рисунок 18.1)

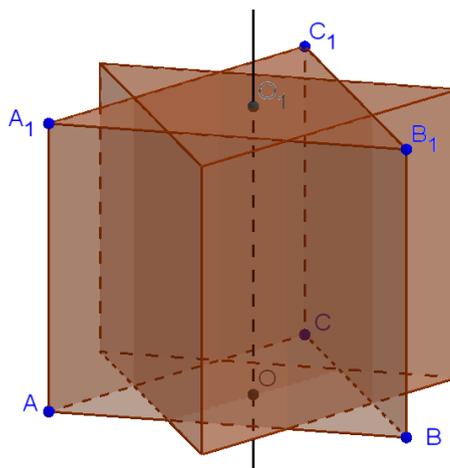


Рис.18.1

**Задача №5** Единичный куб повернули вокруг прямой, проходящей через центры его противоположных граней, на угол  $45^\circ$ . Какой многогранник является общей частью исходного куба и повернутого? Найдите его объём. (рисунок 19)

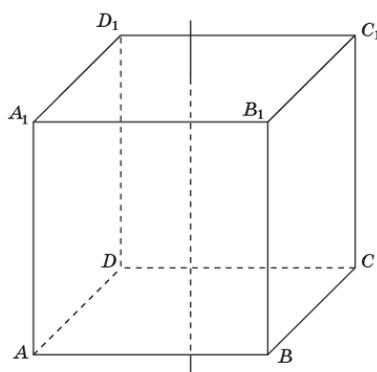


Рис. 19

*Решение:* Данный и повернутый кубы показаны на рисунке. Общей частью этих кубов является правильная восьмиугольная призма, боковые рёбра которой равны 1, а стороны основания равны  $\sqrt{2}-1$ . Эта призма получается из единичного куба отрезанием четырёх треугольных призм, объём каждой из которых равен  $\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$ .

Следовательно, искомый объём правильной восьмиугольной призмы равен  $2\sqrt{2}-2$ . (рисунок 19.1)

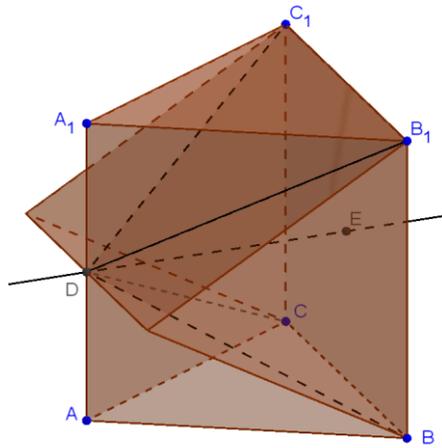


Рис. 19.1

*Задача №6. Правильный тетраэдр повернули вокруг прямой, проходящей через середины двух его противоположных рёбер, на угол  $90^\circ$ . Какой многогранник является общей частью исходного тетраэдра и повернутого? Найдите его объём, если объём исходного тетраэдра равен 1. (рисунок 20)*

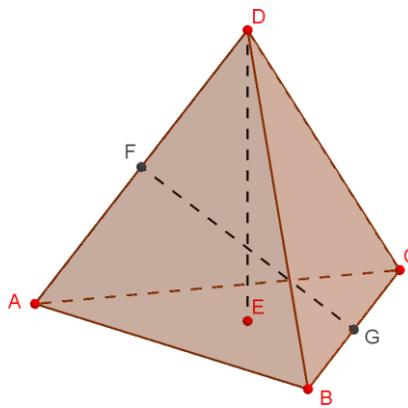


Рис. 20

*Решение: Общей частью исходного тетраэдра и повернутого является октаэдр. Его объём равен 0,5 (рисунок 20.1)*

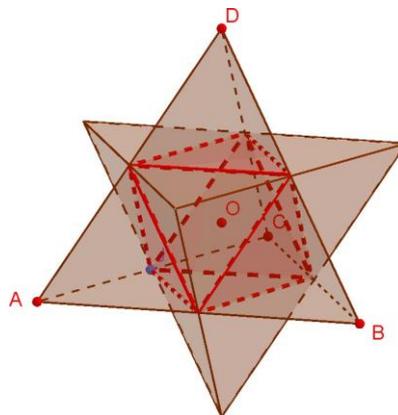


Рис. 20.1

## Итоговое тестирование №2

С помощью программы GEOGEBRA решить данные задачи:

1. Правильную четырёхугольную пирамиду симметрично отразили относительно середины её высоты. Найдите объём общей части исходной и симметричной пирамид, если объём исходной пирамиды равен 1
2. Правильную шестиугольную призму, все рёбра которой равны 1, повернули вокруг прямой, проходящей через центры противоположащих боковых граней, на угол  $90^\circ$ . Какой многогранник является общей частью исходной призмы и повернутой? Найдите его объём.
3. Единичный куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  повернули вокруг прямой  $AC_1$  на угол  $60^\circ$ . Какой многогранник является общей частью исходного куба и повернутого? Найдите его объём.
4. Изобразите многогранник, вершинами которого являются центры граней единичного октаэдра. Как он называется? Найдите его рёбра.
5. Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Как он называется? Найдите его рёбра.
6. Изобразите многогранник, вершинами которого являются центры граней единичного икосаэдра. Как он называется? Найдите его рёбра.

### 2.3. Апробация элективного курса

Апробация данного ЭК осуществлялась на базе МАОУ СШ №149 г.Красноярска.

В целях исследования ЭК заранее было проведено анкетирование, в целях выявления понимания учащихся теории основ стереометрии и знаний в реализации задач с многогранниками.

Предполагаемое время ЭК было рассчитано на 17 часов (1 час в неделю)

Для осуществления курса были взят учебник по геометрии для 10,11 класса с

использованием СДМ GeoGebra. Смирнова И.М, Смирнов В.А. В данном курсе учебника имеются задачи разного уровня сложности.

Для компьютерного сопровождения курса занятий используется программа GEOGEBRA.

Первые 6 занятий были посвящены теоретическому материалу в форме лекций, а также с практическим закреплением, далее уже проводились занятия в форме практического занятия.

В апробации участвовали учащиеся 11 А класса. Занятия проходили в кабинете информатики.

Во время проведения эксперимента было замечено, что большинство учащихся проявили высокий интерес к изучению стереометрии и успешно справлялись с поставленными задачами.

На этапе завершения были заданы вопросы:

1.	Были ли занятия в лекционной форме интересны для Вас?
2.	Что на практических занятиях Вам давалось более легко?
3.	Какой материал вызвал у Вас наибольшее затруднение?
4.	Какой материал оказался наиболее интересным?
5.	Насколько интересным стало применение компьютерной программы для решения задач?
6.	При решении, какого типа задач из других разделов математики можно применить полученные во время курса знания и навыки?
7.	Считаете ли Вы для себя полезными умения и навыки, полученные во время посещения занятий?

В целом учащиеся посчитали курс интересным (около 70%), затруднения возникли при изучении темы №6,7 (около 55%).

Задачи приводящие в ходе проведения ЭК, демонстрируют удобство и полезность программы Geogebra.

Данная программа упрощает процесс решения задач. С помощью этой программы преподаватели смогут разрабатывать творческие ресурсы для

увлекательного обучения.

Педагоги согласны в том, что углубленное изучение отдельных предметов положительно влияет на образовательный процесс в целом. Эксперты утверждают, что включение ЭК в обязательную школьную программу имеет смысл. Такие занятия помогают решить две задачи: помочь ученикам выбрать будущую профессию и подготовить их к поступлению в вуз. Практика показывает, что курсы способствуют как общему развитию ученика, так и освоению основных предметов. Однако есть и противники этой системы, которые утверждают, что дети получают слишком большую нагрузку.

Важно помнить, что цель образования — это не только передача знаний, но и развитие личности. Программа, упрощающая процесс обучения, может стать мощным инструментом для достижения этой цели, помогая ученикам не только осваивать материал, но и развивать креативное мышление и навыки самостоятельной работы.

## **Вывод по главе 2**

В этой главе рассматриваются особенности преподавания темы «Комбинации многогранников» и возможности компьютерных программ.

Приведены некоторые виды задач и теорем, по которым предлагается курс.

Разработанный элективный курс ориентированный на решения следующих задач:

1. Изучить основы теории
2. Изучить основы изображений фигур планиметрии и стереометрии
3. Создать начальное представление о моделировании в GeoGebra
4. Разработать навыки построения чертежей
5. Научить решать задачи по данной теме

Используя данный курс, учитель, способствует углублению знаний, сформированного логического и пространственного мышления.

Понимание и освоение комбинаций многогранников имеет широкие

практические применения в различных областях, таких как наука, инженерия, информационные технологии и дизайн. Этот курс позволяет учащимся развить навыки анализа, синтеза и креативного мышления, что поможет им успешно применять полученные знания в будущей профессиональной деятельности.

Изучение комбинаций многогранников также способствует развитию у учащихся математического мышления, логического мышления и умения работать с абстрактными концепциями. Эти навыки являются необходимыми для решения сложных задач и построения новых знаний на основе уже известной информации.

Кроме того, освоение данной темы позволяет учащимся углубленно изучить принципы построения и анализа геометрических фигур, что может быть полезно при решении разнообразных задач, связанных с пространственными отношениями. Поэтому предлагаемый курс по комбинациям многогранников поможет учащимся стать более компетентными и уверенными в своих знаниях и навыках на пути к профессиональному успеху.

В целом, изучение комбинаций многогранников является важным этапом в формировании у учащихся углубленного понимания пространственных структур, а также развития их творческого потенциала и аналитического мышления. Предлагаемый курс позволит учащимся приобрести фундаментальные знания, которые будут полезны им в дальнейшем профессиональном развитии и внесут вклад в их будущий успех.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ещё издавна известно, что «Математика – царица наук». Она занимает особое место в науке, культуре и общественной жизни любой страны. Изучение математики играет большую роль в образовании, поскольку математика развивает всё.

Целью данной работы являлось разработать элективный курс по теме «Комбинации многогранников» с использованием системы динамической математики «GeoGebra».

Анализируя проделанную работу, можно сделать ряд выводов:

1. Достигнута цель исследования – разработать элективный курс по теме «Комбинации многогранников» с использованием системы динамической математики «GeoGebra».

2. Анализ теоретического материала, предшествующий практической части работы, позволил структурировать отобранный материал наиболее логичным и приемлемым способом, в соответствии с целью исследования.

Для достижения цели были выполнены следующие задачи, а именно:

- На основе методической литературы, раскрыть роль стереометрии в школьном курсе геометрии;
- Рассмотреть особенности использования информационных технологий в изучении стереометрии;
- Провести сравнительный анализ СДМ. Рассмотреть преимущества использования СДМ «GeoGebra» как средства компьютерного сопровождения курса стереометрии в старшей школе;
- Раскрыть теоретические основы создания элективного курса
- Разработать элективный курс по изучению темы «Комбинации многогранников» с использованием СДМ «GeoGebra»;
- Провести оценку эффективности элективного курса

Таким образом, использование СДМ в образовании сегодня становится все

более популярным и востребованным. Электронные платформы для обучения математике позволяют учителям персонализировать учебный процесс, адаптируя его под конкретные потребности и способности каждого ученика. Это значительно повышает эффективность обучения, помогая каждому ученику достичь наилучших результатов.

Благодаря использованию СДМ, учащиеся могут воспринимать математические концепции не только как абстрактные теоремы, но и как конкретные объекты и задачи, которые можно визуализировать и решить с помощью компьютерных программ. Это способствует более глубокому и долговременному усвоению материала, так как ученики могут применять свои знания на практике и видеть результаты своего труда непосредственно.

Более того, СДМ открывают перед учителями и учениками новые возможности для сотрудничества и обмена знаниями. Коллективное решение задач, создание совместных проектов и обсуждение математических проблем способствуют развитию коммуникативных навыков и сотрудничества. Таким образом, СДМ не только обогащают образовательный опыт, но и способствуют формированию ключевых компетенций учащихся, необходимых для успешной адаптации в современном мире.

В целом, с использованием СДМ образовательный процесс становится более интерактивным, эффективным и привлекательным для учеников. Это позволяет создать более комфортную и увлекательную образовательную среду, которая стимулирует учащихся к саморазвитию, творческому мышлению и самостоятельному поиску знаний. Таким образом, СДМ играют важную роль в современной системе образования и помогают учащимся добиваться успешных результатов в обучении математике.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. <https://www.geogebra.org/classic?lang=ru>
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 10- 11 классы: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни /. М.: Просвещение, 2020. 255 с.
3. Венкова Н.Р. Элективный курс «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» в школьном курсе математики с применением программы GEOGEBRA / Н.Н. Кошелева, Н.Р. Венкова // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе», 1-3 марта 2023 г., г. Омск.
4. Венкова Н.Р. Элективный курс «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» в школьном курсе математики с применением программы GEOGEBRA / Н.Н. Кошелева, Н.Р. Венкова // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе», 1-3 марта 2023 г., г. Омск.
5. Володченко, В.С., Ланцова, Д. С. Понятие и классификация информационных технологий [Текст] / В. С. Володченко, Д. С. Ланцова // Достижения науки и образования. — 2020. — № . — С. 41.
6. Егорова А. М. Профильное обучение и элективные курсы в средней школе [Текст] // Теория и практика образования в современном мире: материалы Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, февраль 2012 г.). — СПб.: Реноме, 2012. — С. 173-179. — URL <https://moluch.ru/conf/ped/archive/21/1617/> (дата обращения: 11.06.2024).
7. Задачи на комбинации многогранников // vasmirnov.ru URL: [https://julaniha.ucoz.ru/Bikkardt/uroki/Smirnov\\_16.01.20.pdf](https://julaniha.ucoz.ru/Bikkardt/uroki/Smirnov_16.01.20.pdf) (дата обращения: 06.06.2024).
8. Зайцева И.А. Элективные курсы. - [Электронный ресурс] - [URL:http://zaitseva-irina.ru/html/fl093455595](http://zaitseva-irina.ru/html/fl093455595)
9. Зимнякова Т.С., Ларин С.В., Ларина Е.И. Особенности использования

- цифровых образовательных ресурсов в обучении математике и физике. Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, 2019. № 2 (48). С. 26-32.
10. Иванчук Н.В., Эйкен О.В., Мартынова Е.В., Самылова Ю.В., Данько О.Е. Использование компьютерной программы GeoGebra на уроках математики в 7-11 классах: Методическое пособие. – Мурманск: МГПУ, 2008. – 36 с, (дата обращения 07.06.2024)
  11. Иевлева Людмила Георгиевна Теорема Эйлера и её приложения // Потенциал. - С. 2-3. ( дата обращения: 11.06.2024)
  12. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra. 2-е изд., исправ. и доп. Учебное пособие для вузов. М.: «Юрайт», 2018. 233 с.
  13. Майер В. Р. Обучение геометрии будущих бакалавров - учителей математики с использованием систем динамической геометрии // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2015. №1 (31). URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-geometrii-buduschih-bakalavrovuchiteley-matematiki-s-ispolzovaniem-sistem-dinamicheskoy-geometrii> (дата обращения: 10.06.2024).
  14. Майер В.Р., Ларин С.В., Кочеткова Т.О., Карнаухова О.А. Особенности создания и использования компьютерных анимационных рисунков в обучении математике. Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, 2020. № 1 (51). С. 6-14.
  15. Методический анализ результатов единого государственного экзамена по математике профильного уровня в Иркутской области в 2023 году / Составители: Гаер М.А., канд. техн. наук, доцент, Зенцов А.Г., Лапшина Е.С. канд. ф.-м. наук, доцент.
  16. Мозговая, М.А. Формирование исследовательских умений в процессе обучения геометрии в средней школе / Е.И. Санина, М.А. Мозговая // Актуальные проблемы современного образования. Организация исследовательской деятельности в образовательных учреждениях: сборник научных трудов VII Международной научно-практической конференции; науч. ред.: Н.В. Аммосова,

- А.М. Черкасова. – Астрахань: Изд-во ООО ПКФ «Триада», 2019. – С. 91-98
17. Научная электронная библиотека «Elibrary» [Электронный ресурс].  
<http://elibrary.ru/defaultx.asp>
  18. Программы элективного курса Исаева С.В., Миронова М.Г., Накоренок Д.А., Рекаева С.В., Чирва Т.А. под редакцией А.О. Корнеевой «Избранные вопросы геометрии».
  19. Рогова Г.А. Элективные курсы как содержательная основа профильного обучения// Вопросы интернет образования – 2007. – № 56.; [Электронный ресурс]. URL: [http://vio.uchim.info/Vio\\_58/cd\\_site/articles/art\\_4\\_7.htm](http://vio.uchim.info/Vio_58/cd_site/articles/art_4_7.htm) (дата обращения: 06.06.2024).
  20. Сафонов, В. И., Бамаева, О. А., Тагаева, Е. А. Потенциальные возможности интерактивной среды GeoGebra в реализации преемственности математического образования "школа-вуз" [Текст] / В. И. Сафонов, О. А. Бамаева, Е. А. Тагаева // Перспективы науки и образования. — 2019. — № . — С. 430-437.
  21. Сафуанов, И. С., Ярошевич, В. И. Использование систем динамической математики в проектной деятельности учащихся [Текст] / И.С. Сафуанов, В.И. Ярошевич // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. — 2020. — С. 77-82.
  22. Сечения многогранников // ФОКСОФОРД URL: [https://foxford.ru/wiki/matematika/secheniyamnogogrannikov?utm\\_referrer=https%3A%2F%2Fyandex.ru%2F](https://foxford.ru/wiki/matematika/secheniyamnogogrannikov?utm_referrer=https%3A%2F%2Fyandex.ru%2F) (дата обращения: 10.06.2024).
  23. Ситникова Н.Д., Куликова Н.Г. Методика первых уроков стереометрии / Ситникова Н.Д., Куликова Н.Г. [Электронный ресурс] // Солнечный свет : [сайт]. — URL: [https://solncesvet.ru/book\\_work/52045/](https://solncesvet.ru/book_work/52045/) (дата обращения: 16.04.2024).
  24. Смирнова Е.С. Планиметрия: виды задач и методы их решений: Элективный курс для учащихся 9—11 классов. Электронное издание. М.: МЦНМО, 2017
  25. Смирнова И. М. Цели обучения геометрии в школе. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.geometry2006.narod.ru/Art/Aim.htm> (дата обращения 08.06.2024).
  26. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10 класс [Текст]: учебник для

- учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни)  
- 5-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2019. 135 с.
- 27.Тумашева О.В. Методические продукты будущих учителей математики как форма отражения готовности к реализации системнодеятельностного подхода. Материалы IV Междунар научной конф. «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе» (4 – 5 декабря 2018г.). Калуга: Изд-во АКФ «Политоп», 2018. Т. II. С. 96-99.
- 28.Урок 13. Многогранник // Российская электронная школа URL: <https://resh.edu.ru/subject/lesson/6018/conspect/221549/> (дата обращения: 10.06.2024).
29. Учебно-методический материал к УМК И.М. Смирновой и В.А. Смирнова: Геометрия. Нестандартные исследовательские задачи, 7-11 кл., «Мнемозина»;
- 30.Фунтиков, Р. А. Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» / Р. А. Фунтиков. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2018. — № 33 (219). — С. 8-11. — URL: <https://moluch.ru/archive/219/52350/> (дата обращения: 16.05.2024).
- 31.Хорошая А.А Актуализация материала планиметрии при изучении стереометрии в старших классах / Хорошая А.А [Электронный ресурс] // Библиотека ЛПИ-филиала СФУ : [сайт]. — URL: <https://lpi.sfu-kras.ru/> (дата обращения: 16.05.2024)
32. Что такое элективный курс и зачем он нужен // EDUNews URL: <https://edunews.ru/school/info/elektivnyj-kurs.> (дата обращения: 06.06.2024).