

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Красноярский государственный педагогический университет  
им. В.П. Астафьева»

(КГПУ им. В.П. Астафьева)

**ПРЕДМЕТНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ**  
**Теория функций действительного переменного**  
**рабочая программа дисциплины (модуля)**

Закреплена за кафедрой **D10 Математики и методики обучения математике**  
Квалификация **бакалавр**  
44.03.05 Физика и математика (о, 2024).plx  
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)  
Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **3 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 108  
в том числе:  
аудиторные занятия 36  
самостоятельная работа 71,85  
контактная работа во время  
промежуточной аттестации (ИКР) 0,15  
Виды контроля в семестрах:  
зачеты 9

**Распределение часов дисциплины по семестрам**

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	9 (5.1)		Итого	
	уп	рп		
Неделя	13 3/6			
Вид занятий	уп	рп	уп	рп
Лекции	18	18	18	18
Практические	18	18	18	18
Контактная работа (промежуточная аттестация) зачеты	0,15	0,15	0,15	0,15
Итого ауд.	36	36	36	36
Контактная работа	36,15	36,15	36,15	36,15
Сам. работа	71,85	71,85	71,85	71,85
Итого	108	108	108	108

Программу составил(и):  
*кфмн, Доцент, Багачук Анна Владимировна*

Рабочая программа дисциплины  
**Теория функций действительного переменного**

разработана в соответствии с ФГОС ВО:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (приказ Минобрнауки России от 22.02.2018 г. № 125)

составлена на основании учебного плана:

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль) Физика и математика

Выпускающие кафедры:

физики и методики обучения физике; математики и методики обучения математике

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры  
**D10 Математики и методики обучения математике**

Протокол от 08.05.2024 г. № 9

Зав. кафедрой кпн, доцент Шашкина Мария Борисовна

Председатель НМСС(С) кпн, доцент Аешина Екатерина Андреевна  
15.05.2024 № 7

### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

овладение базовыми предметными знаниями, основными методами доказательства и методами решения базовых задач курса; формирование готовности решать межпредметные и практико-ориентированные задачи на основе использования известных базовых предметных знаний и методов; овладение основными способами освоения математических знаний и способности обучить им учащихся.

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Цикл (раздел) ОП: Б1.В.02

#### 2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

2.1.1 Элементарная математика

2.1.2 Дополнительные главы математического анализа

2.1.3 Математический анализ

#### 2.2 Дисциплины (модули) и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

2.2.1 Теория функции комплексного переменного

2.2.2 Дифференциальные уравнения

2.2.3 Дифференциальная геометрия

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**ПК-1: Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач**

**ПК-1.1: Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)**

#### Знать:

Уровень 1	<ul style="list-style-type: none"><li>- характеристические признаки метрического пространства, полного метрического пространства, компактного множества;</li><li>- классификацию точек метрического пространства;</li><li>- взаимосвязь между понятиями меры открытого и замкнутого ограниченного множеств и меры Лебега ограниченного множества;</li><li>- основные свойства измеримых множеств;</li><li>- характеристические признаки измеримой по Лебегу функции;</li><li>- способ конструирования интеграла Лебега;</li><li>- основных свойства интеграла Лебега;</li><li>- связь между интегралами Римана и Лебега.</li></ul>
Уровень 2	<ul style="list-style-type: none"><li>- характеристические признаки метрического пространства, полного метрического пространства, компактного множества;</li><li>- классификацию точек метрического пространства;</li><li>- основные свойства измеримых множеств;</li><li>- способ конструирования интеграла Лебега;</li><li>- основных свойства интеграла Лебега;</li><li>- связь между интегралами Римана и Лебега.</li></ul>
Уровень 3	<ul style="list-style-type: none"><li>- характеристические признаки метрического пространства, компактного множества;</li><li>- классификацию точек метрического пространства;</li><li>- основные свойства измеримых множеств;</li><li>- связь между интегралами Римана и Лебега.</li></ul>

#### Уметь:

Уровень 1	<ul style="list-style-type: none"><li>- устанавливать взаимосвязь между сходимостью по различным метрикам;</li><li>- конструировать геометрические образы при различных отображениях метрических пространств;</li><li>- конструировать измеримые по Лебегу множества;</li><li>- доказывать различные свойства измеримых функций, используя определение измеримой по Лебегу функции;</li><li>- устанавливать сходимости по мере последовательности измеримых функций;</li><li>- вычислять интеграл Лебега.</li></ul>
Уровень 2	<ul style="list-style-type: none"><li>- конструировать геометрические образы при различных отображениях метрических пространств;</li><li>- конструировать измеримые по Лебегу множества;</li><li>- доказывать различные свойства измеримых функций, используя определение измеримой по Лебегу функции;</li><li>- вычислять интеграл Лебега.</li></ul>
Уровень 3	<ul style="list-style-type: none"><li>- конструировать геометрические образы при различных отображениях метрических пространств;</li><li>- доказывать различные свойства измеримых функций, используя определение измеримой по Лебегу функции;</li><li>- вычислять интеграл Лебега.</li></ul>

<b>Владеть:</b>	
Уровень 1	навыками доказательства различных свойств измеримых функций.
Уровень 2	навыками доказательства различных свойств измеримых функций, используя определение измеримой по Лебегу функции.
Уровень 3	навыками анализа доказательства различных свойств измеримых функций.
<b>ПК-1.2: Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО</b>	
<b>Знать:</b>	
Уровень 1	- способы описания множеств на основе классификации точек метрического пространства; - связь между интегралами Римана и Лебега.
Уровень 2	- связь между свойствами множеств и классификацией точек метрического пространства; - связь между интегралами Римана и Лебега.
Уровень 3	- классификацию точек метрического пространства.
<b>Уметь:</b>	
Уровень 1	- конструировать и решать задачи на нахождение геометрических образов при различных отображениях метрических пространств; - использовать принцип сжимающих отображений при решении алгебраических и функциональных уравнений; - конструировать измеримые по Лебегу множества.
Уровень 2	- решать задачи на нахождение геометрических образов при различных отображениях метрических пространств; - использовать принцип сжимающих отображений при решении алгебраических и функциональных уравнений.
Уровень 3	- решать задачи на нахождение геометрических образов при отображениях одномерного евклидова пространства в себя, осуществляемых элементарными функциями; - использовать принцип сжимающих отображений при решении алгебраических уравнений.
<b>Владеть:</b>	
Уровень 1	навыками составления задач на нахождение геометрических образов при различных отображениях и доказательства существования решений алгебраических и функциональных уравнений с использованием принципа сжимающих отображений.
Уровень 2	навыками решения задач на нахождение геометрических образов при различных отображениях и доказательства существования решений алгебраических и функциональных уравнений с использованием принципа сжимающих отображений.
Уровень 3	навыками решения простейших задач на нахождение геометрических образов при различных отображениях и доказательства существования решений алгебраических уравнений с использованием принципа сжимающих отображений.

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература	Инте факт.	Пр. подгот.	Примечание
	<b>Раздел 1. Метрические пространства</b>							
1.1	Понятие метрического пространства. Примеры $(R^n, C[a; b])$ ;	9	2	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.2	Окрестности точек в метрическом пространстве. Открытые, замкнутые совершенные множества в метрическом пространстве и их свойства. /Лек/	9	4	ПК-1.1 ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.3	Предел последовательности точек метрического пространства. Сходимость по метрике и по норме. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображений /Лек/	9	2	ПК-1.1 ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.4	Компакты. Их замкнутость и ограниченность. Непрерывные отображения компактных множеств. /Лек/	9	2	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.5	Полные метрические пространства. Примеры. Принцип сжимающих отображений /Лек/	9	2	ПК-1.1 ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			коллоквиум

1.6	Понятие метрического пространства. /Пр/	9	2	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			тест
1.7	Открытые, замкнутые совершенные множества в метрическом пространстве и их свойства. /Пр/	9	4	ПК-1.1 ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.8	Предел последовательности точек метрического пространства. Сходимость по метрике и по норме. /Пр/	9	2	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.9	Непрерывные отображения компактных множеств. /Пр/	9	2	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.10	Отображения метрических пространств. Непрерывность отображений /Пр/	9	2	ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.11	Принцип сжимающих отображений и его применения /Пр/	9	2	ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3		2	контрольная работа
1.12	Теорема Вейерштрасса о непрерывном отображении компакта в $R^n$ . /Ср/	9	12	ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
1.13	Полные метрические пространства. Примеры. /Ср/	9	12	ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
<b>Раздел 2. Мера Лебега</b>								
2.1	Мера открытых и замкнутых ограниченных множеств на числовой прямой. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Мера Лебега ограниченного множества на числовой прямой. /Лек/	9	2	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
2.2	Определение функции одной действительной переменной, измеримой по Лебегу. Основные свойства измеримых функций. /Лек/	9	2	ПК-1.1 ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
2.3	Основные свойства измеримых функций. /Пр/	9	2	ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			проектные задания
2.4	Мера Лебега ограниченного множества на числовой прямой. /Ср/	9	10	ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
2.5	Последовательность измеримых функций. Сходимость по мере. Теорема Егорова. /Ср/	9	10	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
<b>Раздел 3. Интеграл Лебега</b>								
3.1	Понятие интеграла Лебега от ограниченной функции и его основные свойства. /Лек/	9	2	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
3.2	Сравнение интегралов Римана и Лебега. /Пр/	9	2	ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3		2	Контрольная работа
3.3	Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. /Ср/	9	9,85	ПК-1.1	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
3.4	Критерий интегрируемости по Риману ограниченной функции. /Ср/	9	18	ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			
3.5	Зачет /КРЗ/	9	0,15	ПК-1.1 ПК-1.2	Л1.1 Л1.2 Л1.3			

**5. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА)  
для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации**

**5.1. Контрольные вопросы и задания**

Входной контроль

Тест

1. Выберите условия, являющиеся существенными в определении определенного интеграла:

- 1) произвольность выбора точек на частичных отрезках;
- 2) непрерывность подынтегральной функции;
- 3) произвольность разбиения отрезка интегрирования на части;
- 4) ограниченность подынтегральной функции.

Правильные ответы: 1, 3.

2. Если функции  $f(x,y,z)$  интегрируема в области  $D$ , то она в  $D$ :

- 1) непрерывна;
- 2) ограничена;
- 3) имеет непрерывные частные производные ;
- 4) дифференцируема.

Правильный ответ: 2

3. Если  $(x_n)$  и  $(y_n)$  – бесконечно большие последовательности, то предел их отношения равен:

- 1) бесконечности;
- 2) 0;
- 3) некоторому числу, отличному от нуля;
- 4) ничего определенного об этом пределе сказать нельзя.

Правильный ответ: 4

Контрольная работа №1

1. Докажите, что при непрерывном отображении прообраз открытого множества является открытым множеством.
2. Выясните, является ли фундаментальной заданная последовательность в указанном пространстве.
3. Приведите пример замкнутого множества в заданном пространстве.

Контрольная работа №2

1. Покажите, что если данные функции измеримы на множестве, то и их алгебраическая сумма также измерима на этом множестве.
2. Докажите, что данные функции интегрируемы по Лебегу на указанном множестве.
3. Вычислите интегралы Лебега заданных функций на указанных множествах.

## 5.2. Темы письменных работ

Проектные задания

Тема 1. Монотонные функции

Цель: изучив свойства монотонной функции, описать их доказательства и показать применение свойства монотонности функции при решении некоторых математических задач.

Примерное содержание: свойства монотонной функции: множество точек разрыва, интегрируемость, дифференцируемость, интегрируемость производной (и другие, которые студент может выбрать самостоятельно).

Тема 2. Функции с конечным изменением

Цель: изучив основные свойства функции с конечным изменением, описать их доказательства.

Примерное содержание: связь с ограниченностью, арифметические операции над функциями с конечным изменением, свойства вариации функции с конечным изменением, связь с монотонными функциями, множество точек разрыва, множество точек дифференцируемости, непрерывные функции с конечными изменениями. Геометрическое приложение класса функций с ограниченным изменением.

Тема 3. Функции, суммируемые с квадратом

Цель: описать пространство суммируемых с квадратом функций.

Примерное содержание:  $L_2$  – гильбертово пространство. Последовательное доказательство того, что  $L_2$  – линейное пространство,  $L_2$  – евклидово пространство (т.е. пространство со скалярным произведением),  $L_2$  – полное пространство.

## 5.3. Оценочные материалы (оценочные средства)

Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие метрического пространства. Примеры  $(R^n, C[a,b])$ .
2. Окрестность точки в метрическом пространстве. Предел последовательности точек в метрическом пространстве. Основные свойства предела последовательности.
3. Открытые множества в метрическом пространстве, их основные свойства.
4. Замкнутые множества в метрическом пространстве, их основные свойства.
5. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображений.
6. Линейные нормированные пространства. Примеры. Метризуемость линейного нормированного пространства. Норма и метрика.
7. Компактные множества, их основные свойства.
8. Непрерывные отображения компактных множеств.
9. Полные метрические пространства. Примеры.
10. Принцип сжимающих отображений и его применения.

Вопросы к зачету

1. Понятие метрического пространства. Примеры ( $R^n$ ,  $C[a, b]$ ).
2. Окрестность точки в метрическом пространстве. Предел последовательности точек в метрическом пространстве. Основные свойства предела последовательности.
3. Открытые множества в метрическом пространстве, их основные свойства.
4. Замкнутые множества в метрическом пространстве, их основные свойства.
5. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображений.
6. Линейные нормированные пространства. Примеры. Метризуемость линейного нормированного пространства. Норма и метрика.
7. Компактные множества, их основные свойства.
8. Непрерывные отображения компактных множеств.
9. Полные метрические пространства. Примеры.
10. Принцип сжимающих отображений и его применения.
11. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества.
12. Мера открытых и замкнутых ограниченных множеств на числовой прямой.
13. Мера Лебега ограниченного множества на числовой прямой. Свойства измеримых множеств.
14. Понятие функции одной действительной переменной, измеримой по Лебегу.
15. Основные свойства измеримых функций.
16. Понятие интеграла Лебега от ограниченной функции и его основные свойства.
17. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
18. Критерий интегрируемости по Риману ограниченной функции.

**6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**6.1. Рекомендуемая литература**

**6.1.1. Основная литература**

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Адрес
Л1.1	Свешников А. Г., Тихонов А. Н.	Теория функций комплексной переменной: учебник	Москва: Физматлит, 2010	<a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=75710">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=75710</a>
Л1.2	Стоилов С.	Теория функций комплексного переменного: учебник	Москва: Издательство иностранной литературы, 1962	<a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=464266">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=464266</a>
Л1.3	Чуешев В. В., Чуешева Н. А.	Теория функций комплексного переменного: учебное пособие	Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2020	<a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=600355">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=600355</a>

**6.3.1 Перечень программного обеспечения**

1. Microsoft® Windows® 8.1 Professional (ОЕМ лицензия, контракт № 20А/2015 от 05.10.2015);
2. Kaspersky Endpoint Security – Лиц сертификат №1В08-190415-050007-883-951;
3. 7-Zip - (Свободная лицензия GPL);
4. Adobe Acrobat Reader – (Свободная лицензия);
5. Google Chrome – (Свободная лицензия);
6. Mozilla Firefox – (Свободная лицензия);
7. LibreOffice – (Свободная лицензия GPL);
8. XnView – (Свободная лицензия);
9. Java – (Свободная лицензия);
10. VLC – (Свободная лицензия);

**6.3.2 Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем**

Elibrary.ru: электронная библиотечная система : база данных содержит сведения об отечественных книгах и периодических изданиях по науке, технологии, медицине и образованию. Адрес: <http://elibrary.ru> Режим доступа: Свободный доступ;

Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн». Адрес: <https://biblioclub.ru> Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ;

Электронно-библиотечная система издательства «ЛАНЬ». Адрес: [e.lanbook.com](http://e.lanbook.com) Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ;

Образовательная платформа «Юрайт». Адрес: <https://urait.ru> Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ;

ИС Антиплагиат: система обнаружения заимствований. Адрес: <https://krasspu.antiplagiat.ru> Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ;

Консультант Плюс /Электронный ресурс/: справочно – правовая система. Адрес: Научная библиотека Режим доступа: Локальная сеть вуза;

## 7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Перечень учебных аудиторий и помещений закрепляется ежегодным приказом «О закреплении аудиторий и помещений в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева на текущий год» с обновлением перечня программного обеспечения и оборудования в соответствии с требованиями ФГОС ВО, в том числе:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации
2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся
3. Помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования
4. Перечень лабораторий.

## 8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Данные методические рекомендации предназначены для студентов в помощь к подготовке к зачету и оформлению проектного задания, направленного на углубленное изучение отдельных разделов дисциплины «Теория функций действительного переменного».

Целью зачета по данной дисциплине является контроль уровня общей математической культуры студентов и проверка их подготовленности по соответствующим разделам дисциплины.

Студенты должны: владеть основными понятиями теории множеств, функционального анализа, меры и интеграла Лебега; уметь охарактеризовать связь каждого из них с некоторыми понятиями математического анализа.

В соответствии с поставленными целями и требованиями к знаниям и умениям выпускников на зачет по «Теории функций действительного переменного» вынесено 28 вопросов. Отвечая на предложенный вопрос, необходимо раскрыть содержание вводимых понятий, проиллюстрировать их примерами и контрпримерами, показать применение теорем, в доказываемых теоремах – раскрыть значение тех или иных условий теоремы, по возможности – дать их геометрическое и физическое истолкование, возможность (или невозможность) обращения теоремы.

Разумеется, можно расширить предлагаемый план дополнительными математическими и историческими фактами, относящимися к данному вопросу.

Содержание четырех вопросов, отмеченных звездочками в списке вопросов к зачету, необходимо уметь излагать на уровне определения понятий и формулировки основных предложений.

Что касается оформления проектного задания, то следует отметить, что он выполняется на стандартной бумаге формата А4. Основные правила оформления текста. Параметры страницы: верхнее, нижнее поля – 2 см; правое поле – 1,5 см; левое поле – 2,5 см. Номера страниц проставляются сверху, в центре (на первой странице номера нет, вторая страница – содержание, третья – введение). Текст должен быть выровнен по ширине, абзацный отступ – 1,27 см. Заголовки – по центру, без точек в конце предложения. Шрифт – высота 14 пт. Межстрочный интервал – 1,3-1,5. Образец оформления титульного листа приведен ниже.

Общий объем должен составлять 20-25 страниц (без приложений). Во введении обосновывается актуальность темы, ее практическая значимость. Содержание должно быть представлено в развернутом виде. Представленные в тексте таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Номер таблицы проставляется сверху справа. Заголовок таблицы помещается с выравниванием по центру. На каждую таблицу и рисунок необходимы ссылки в тексте "в соответствии с рисунком 5 (таблицей 3)". В заключении реферата излагаются краткие выводы по результатам работы, характеризующие степень решения задач, поставленных во введении. Следует уточнить, в какой степени удалось реализовать цель реферирования, обозначить проблемы, которые не удалось решить в ходе написания реферата.

Данные о найденных источниках следует заносить в библиографический список. Источники в списке располагаются в алфавитном порядке по фамилии первого автора (названию). Существуют регламентированные правила оформления библиографических источников ГОСТ 7.05-2008. Перечень используемой литературы должен содержать минимум 15 наименований.