

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»**

Институт математики, физики и информатики

Кафедра математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
протокол № 9
от 8 мая 2024 г.

Зав. кафедрой



М.Б. Шашкина

ОДОБРЕНО
на заседании
научно-
методического
совета ИМФИ
протокол № 7
от 15 мая 2024 г.
Председатель



Е.А. Лешина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

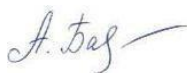
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование,
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию
«Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составители:



Багачук А.В., доцент кафедры
математики и МОМ

1. Назначение фонда оценочных средств.

1.1. **Целью** создания ФОС дисциплины «Теория функций действительного переменного» является установление соответствия учебных достижений запланированным результатам обучения и требованиям основной профессиональной образовательной программы, рабочей программы дисциплины.

1.2. ФОС по дисциплине «Теория функций действительного переменного» **задачи:**

- оценка уровня сформированности компетенций, характеризующих способность выпускника к выполнению видов профессиональной деятельности по квалификации бакалавр, освоенных в процессе изучения данной дисциплины.

1.3. **ФОС разработан на основании нормативных документов:**

- федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (уровень магистратуры);

- основной профессиональной образовательной программы высшего образования;

- Положения о формировании фонда оценочных средств для текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре в федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева и его филиалах.

2. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе изучения дисциплины «Теория функций действительного переменного»

- способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач (ПК-1).

3.2.2. Фонд оценочных средств (контрольно-измерительные материалы)

- 1.0. Примерный вариант теста (входной контроль).
- 1.1. Вопросы к коллоквиуму по модулю 1.
- 1.2. Контрольная работа №1 по модулю 1.
- 1.3. Проектное задание по модулю 2.
- 1.4. Контрольная работа №2 по модулю 3.
- 1.5. Вопросы к зачету.

6.0. Тест (входной контроль)

1. Формула $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq -3, \\ 9 - x^2, & \text{если } -3 \leq x \leq 3, \\ -x, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$

а) задает функцию на $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$;

б) не задает функцию на

$(-\infty; +\infty)$;

в) задает функцию на $(-\infty; +\infty)$;

г) задает функцию на $[-3; 3]$.

2. Функция $f(x) = \frac{\sin 10x - 2 \cos 3x}{6 + \operatorname{ctg}^2 x}$

а) ограничена сверху, но не ограничена снизу;

б) ограничена;

в) не ограничена ни сверху, ни снизу;

г) ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3. Если последовательность (y_n) – бесконечно большая и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = d, d \neq 0$,

то

а) последовательность $(x_n \cdot y_n)$ – бесконечно большая;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = d$;

в) последовательность $(x_n \cdot y_n)$ – ограничена;

г) ничего определенного о последовательности $(x_n \cdot y_n)$ сказать нельзя.

4. Если (x_n) и (y_n) – бесконечно большие последовательности, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$

равен:

а) ∞ ;

б) 0;

в) некоторому числу $a \neq 0$;

г) ничего определенного об этом пределе сказать нельзя.

5. Число A называется пределом функции f при $x \rightarrow \infty$, если:

- а) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $c > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > c$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $c > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < c$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- в) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $c > 0$ и x , такие, что как только $|x| > c$, так $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- г) для $\varepsilon > \frac{1}{2}$ существует такое $c > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > c$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

6. Функция f , заданная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если:

а) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \Delta y$;

б) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = 0$;

в) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$;

г) $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} (f(x_0 + \Delta x) + f(x_0)) = 0$.

7. Функция $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } x < 0, \\ |x^2 + 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$

- а) непрерывна только слева;
- б) непрерывна только справа;
- в) разрывна;
- г) непрерывна.

8. Не вычисляя интегралов, а исходя из условий интегрируемости, убеждаем-

ся, что будет корректно поставить вопрос о вычислении интеграла

3
 $\int_{-3}^3 f(x)dx$ для функции

а) $f(x) = \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$;

г) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ \ln x, & \text{если } 0 < x \leq 3. \end{cases}$

9. Число I называется определенным интегралом от функции f по отрезку $[a; b]$, если

а) $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ и при любом разбиении отрезка $[a; b]$ на части, лишь бы $\lambda < \delta$, и произвольном выборе точек ξ_k выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$;

б) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ такое, что при любом разбиении отрезка $[a; b]$ на части, лишь бы $\lambda \geq \delta$, и произвольном выборе точек ξ_k выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$;

в) $\forall \varepsilon > 0$ и при любом разбиении отрезка $[a; b]$ на части и произвольном выборе точек ξ_k выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$;

г) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ такое, что при любом разбиении отрезка $[a; b]$ на части, лишь бы $\lambda < \delta$, и произвольном выборе точек ξ_k выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

10. Основываясь на геометрическом смысле определенного интеграла, убеж-

даемся, что интеграл $\int_{-5}^0 \sqrt{25 - x^2} dx$ равен

а) $\frac{25}{2} \pi$;

б) $\frac{25}{4} \pi$;

в) 10π ;

г) 5π.

11. Выберите условия, являющиеся существенными в определении определенного интеграла:

- а) произвольность выбора точек ξ_k ;
- б) непрерывность подынтегральной функции;
- в) произвольность разбиения отрезка интегрирования на части;
- г) ограниченность подынтегральной функции.

12. Среднее значение функции $y = -3x^2 + 4x$ на отрезке $[0; 3]$ равно

- а) -3;
- б) -9;
- в) 3;
- г) 9.

13. Сравните: $\int_a^b h dx$ и $\int_a^b dx \int_0^h dy$

- а) >;
- б) <;
- в) =;
- г) зависит от значений a, b, h .

14. Если функции $f(x, y, z)$ интегрируема в области D , то она в D :

- а) непрерывна;
- б) ограничена;
- в) имеет непрерывные частные производные ;
- г) дифференцируема.

Проверяемые знания, умения, компетенции. Знание основных понятий математического анализа; умение их использовать при решении практических задач. ОК-4, ОПК-1.

6.1.

Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие метрического пространства. Примеры $(\mathbb{R}^n, C_{[a,b]})$.

2. Окрестность точки в метрическом пространстве. Предел последовательности точек в метрическом пространстве. Основные свойства предела последовательности.
3. Открытые множества в метрическом пространстве, их основные свойства.
4. Замкнутые множества в метрическом пространстве, их основные свойства.
5. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображений.
6. Линейные нормированные пространства. Примеры. Метризуемость линейного нормированного пространства. Норма и метрика.
7. Компактные множества, их основные свойства.
8. Непрерывные отображения компактных множеств.
9. Полные метрические пространства. Примеры.
10. Принцип сжимающих отображений и его применения.

6.2. Контрольная работа № 1

(Раздел 1)

Вариант № 1

1. Докажите, что при непрерывном отображении прообраз открытого множества является открытым множеством.
2. Является ли фундаментальной последовательность $y_n(x) = x^n$ в пространстве $C \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$?
3. Докажите, что уравнение $x - \varepsilon \sin x = m$ при любом m и $0 < \varepsilon < 1$ имеет единственное решение и его можно найти методом последовательных приближений.
4. Приведите пример замкнутого множества в R^2 .

Вариант № 2

1. Докажите, что расстояние $\rho(x; y)$ есть непрерывная функция от переменных x и y .

2. Является ли полным пространство натуральных чисел с метрикой

$$\rho(m;n) = \frac{|m-n|}{mn} ?$$

3. Является ли отображение $f(x) = \sin x$ числовой прямой в себя сжимающим?

4. Приведите пример замкнутого множества в $C_{[a,b]}$.

6.3. Проектное задание

(Раздел2)

Тема 1. Монотонные функции

Цель: изучив свойства монотонной функции, описать их доказательства и показать применение свойства монотонности функции при решении некоторых математических задач.

Примерное содержание. Свойства монотонной функции: множество точек разрыва, интегрируемость, дифференцируемость, интегрируемость производной (и другие, которые студент может выбрать самостоятельно).

Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.; 1970.
3. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. М.; 1968.

Тема 2. Функции с конечным изменением

Цель: изучив основные свойства функции с конечным изменением, описать их доказательства.

Примерное содержание. Связь с ограниченностью, арифметические операции над функциями с конечным изменением, свойства вариации функции с конечным изменением, связь с монотонными функциями, множество точек разрыва, множество точек дифференцируемости, непрерывные функции с конечными изменениями.

Геометрическое приложение класса функций с ограниченным изменением – спрямляемость непрерывной кривой $y = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.

Тема 3. Абстрактная мера Лебега

Цель: построить и описать лебегову меру как продолжение меры по схеме Лебега.

Примерное содержание. Доказательство всех теорем на пути построения меры $m: \sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$; m - σ - аддитивная мера на полукольце σ с единицей:

- 1) продолжить m (m^1) на $\mathbb{R}(\sigma)$ – минимальное кольцо над полукольцом σ . Доказать единственность продолжения. Доказать σ -аддитивность продолжения m^1 ;
- 2) продолжить m^1 (с $\mathbb{R}(\sigma)$ на булиан единицы полукольца) до внешней меры μ^* ;
- 3) построить лебегову меру μ как сужение μ^* на класс измеримых множеств.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.
2. Толстов Г.П. Мера и интеграл. М.; 1974.

Тема 4. Функции, суммируемые с квадратом

Цель: описать пространство суммируемых с квадратом функций.

Примерное содержание. L_2 – гильбертово пространство. Последовательное доказательство того, что L_2 – линейное пространство, L_2 – евклидово пространство (т.е. пространство со скалярным произведением), L_2 – полное пространство, L_2 – сепарабельное пространство. Доказательство существования счетного базиса и построение ряда Фурье для $f \in L_2$ по этому базису с применением общей теории гильбертовых пространств.

Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.

Проверяемые знания, умения, компетенции. Знание свойств измеримых множеств, измеримой по Лебегу функции; умение конструировать измеримые по Лебегу множества, доказывать различные свойства измеримых функций. ОК-4, ОПК-1, ОПК-5.

6.4. Контрольная работа №2

(Раздел3)

Вариант № 1

1. Покажите, что если функция $y = f(x)$ измерима на множестве E , то и функция $y = k f(x)$ также измерима на этом множестве.

2. Докажите, что следующие функции интегрируемы по Лебегу на отрезке $[0,1]$ и вычислите интегралы: а) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in J, \\ 2, & x \in Q \end{cases}$; б)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 2, & x \in CK \end{cases}, \text{ где } K - \text{ канторово множество, а } CK - \text{ его дополнение}$$

до всего отрезка $[0,1]$

Вариант № 2

1. Покажите, что если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ измеримы на множестве E , то и функция $y = f(x) \pm g(x)$ также измерима на этом множестве.

2. Докажите, что следующие функции интегрируемы по Лебегу на отрезке $[0,1]$ и вычислите интегралы: а) $f(x) = \begin{cases} |x^2, & x \in Q, \\ -x^2, & x \in J \end{cases}$; б)

$$f(x) = \begin{cases} |x^2, & x \in A, \\ \sin \pi x, & x \in [0,1] \cap CA \end{cases}, \text{ где } A \text{ множество алгебраических чисел, а}$$

$$CA = R^1 \setminus A.$$

Проверяемые знания, умения, компетенции. Знание способа конструирования интеграла Лебега, его основных свойств, связи между интегралами Римана и Лебега; умение вычислять интеграл Лебега. ОК-5, ОПК-1, ОПК-5, ПК-2.

6.5. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Докажите, что если A измеримое множество положительной меры, то в нем существуют хотя бы две точки, расстояние между которыми рационально.

2. Множества A и B измеримы по Лебегу, причем $A \cap B = \emptyset$. Докажите, что для любого множества E верно равенство $m^*(E \cap (A \cup B)) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B)$.

3. Множества A и B измеримы по Лебегу, причем $A \cap B = \emptyset$. Докажите, что для любого множества E верно равенство
- $$m_*(E \cap (A \cup B)) = m_*(E \cap A) + m_*(E \cap B).$$
4. Докажите, что для любых измеримых по Лебегу множеств F и G справедливо соотношение $m(F \cup G) = m(F) + m(G) - m(F \cap G)$.
5. Является ли измеримой функцией сумма сходящегося на отрезке $[a, b]$ ряда измеримых функций?
6. Пусть $x = \varphi(t)$ - измеримая на множестве E функция, $E_1 = \varphi(E)$ - множество ее значений, а $y = f(x)$ - функция, непрерывная на E_1 . Выясните, является ли измеримой на множестве E сложная функция $y = f(\varphi(t))$.
7. Пусть $y = f(x)$ измерима на множестве E , E_0 - измеримое подмножество множества E . Обязательно ли множество $f(E_0)$ быть измеримым? Если нет, то приведите соответствующий пример.
8. Пусть $x = \varphi(t)$ - функция, непрерывная на отрезке $E = [\alpha, \beta]$, $E_1 = \varphi(E)$ - множество ее значений, а $y = f(x)$ - функция, измеримая на E_1 . Обязана ли быть измеримой на множестве E сложная функция $y = f(\varphi(t))$?
9. Покажите, что если $\int_0^1 f(x) dx = 1$, $f(x) \geq 0$ на отрезке $[0, 1]$, то $f(x) = 1$ почти всюду.