КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. П. АСТАФЬЕВА

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы XI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 90-летию КГПУ им. В.П. Астафьева

Красноярск, 10–11 ноября 2022 г.

Электронное издание

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.П. АСТАФЬЕВА»

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы XI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 90-летию КГПУ им. В.П. Астафьева

Красноярск, 10–11 ноября 2022 г.

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2022

ББК 22.1
И 471

И 471 **Информационные технологии в математике и математическом образовании:** материалы XI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 90-летию КГПУ им. В.П. Астафьева. Красноярск, 10–11 ноября 2022 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2022. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz, 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-601-3

Представлены статьи секций «Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений в фундаментальных исследованиях по математике», «Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке школьников и студентов», «Информационные технологии в занимательной, школьной и неэлементарной математике».

Предназначены специалистам в области математики и математического образования, а также всем интересующимся данными проблемами.

ББК 22.1

ISBN 978-5-00102-601-3

СОДЕРЖАНИЕ

Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений в фундаментальных исследованиях по математике

Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке студентов и школьников

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ, СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

ТРОПИЧЕСКИЙ ДИСКРИМИНАНТ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ[1]

TROPICAL DISCRIMINANT FOR A SYSTEM OF POLYNOMIALS

И.А. Антипова, Е.А. Клешкова **I.A. Antipova, E.A. Kleshkova**

Дискриминант, многогранник Ньютона, тропическое многообразие, веер Бергмана, матроид.
Исследуется тропикализация дискриминантного множества системы n полиномов Лорана от n неизвестных. Используется комбинаторная конструкция, предложенная в [5], для тропикализации алгебраических многообразий, допускающих параметризацию в виде мономов от линейных форм.

Discriminant, Newton polytope, tropical variety, Bergman fan, matroid.
We study the tropicalization of the discriminant locus for a system of n Laurent polynomials in n unknowns. We use the combinatorial construction proposed in [5] for tropicalization of algebraic varieties admitting a parametrization by a linear map followed by a monomial map.

1. Введение

Рассмотрим систему n полиномиальных уравнений вида:

$$P_i \coloneqq \sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_\lambda^{(i)} y^\lambda = 0, \qquad i = 1, \dots, n \tag{1}$$

с неизвестными $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, переменными комплексными коэффициентами $a = (a_\lambda^{(i)})$, в которой множества $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$ фиксированы, конечны и содержат нулевой элемент $\bar{0}$, $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $y^\lambda := y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$. Решение $y(a) = (y_1(a), \dots, y_n(a))$ системы (1) обладает свойством полиоднородности, поэтому она, как правило, допускает дегомогенизацию с помощью мономиальных преобразований коэффициентов $x = x(a)$ (см. [1]). Для этого необходимо выделить набор из n показателей $\omega^{(i)} \in A^{(i)}$ с условием, что матрица $\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})$ невырожденная. В результате получим приведенную систему вида:

$$Q_i \coloneqq y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где $\Lambda^{(i)} \coloneqq \mathrm{A}^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, \bar{0}\}$ – переменные комплексные коэффициенты. Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$, и пусть N есть мощность этого множества, то есть количество переменных коэффициентов в системе (2). Множество коэффициентов системы пробегает векторное пространство $\mathbb{C}_x^N$, в котором координаты точек $x = (x_\lambda)$ индексируются элементами $\lambda \in \Lambda$.

[1] Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Обозначим через ∇° множество всех коэффициентов $x = (x_{\lambda}^{(i)})$, для которых полиномиальное отображение $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ имеет кратные нули в комплексном алгебраическом торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, т.е. нули, в которых якобиан $\frac{\partial Q}{\partial y}$ отображения Q равен нулю. *Дискриминантным множеством* ∇ системы (2) называют замыкание множества ∇° в пространстве коэффициентов. Если множество ∇ есть гиперповерхность, то определяющий ее полином $\Delta(x)$ называют *дискриминантом* системы (2). Множество ∇ также называют *приведенным дискриминантным множеством* системы (1).

Наша задача – исследовать тропикализацию дискриминантного множества ∇ системы (2). Тропическое многообразие имеет структуру полиэдрального веера, одномерные конусы которого определяют направления нормалей к гиперграням многогранника Ньютона дискриминанта системы. Напомним, что *многогранником Ньютона* $\mathcal{N}_{\Delta}$ многочлена $\Delta(x)$ называется выпуклая оболочка (в пространстве $\mathbb{R}^n$) носителя многочлена $\Delta(x)$. Построение тропического дискриминанта основано на общей комбинаторной конструкции тропикализации алгебраических многообразий, допускающих параметризацию в виде произведения линейных форм [5]. Нами используется параметризация дискриминантного множества системы n полиномов Лорана вида (2), детально исследованная в [1].

2. Параметризация дискриминантного множества ∇

Множество Λ запишем в виде блочной матрицы $\Lambda := (\Lambda^{(1)} | \dots | \Lambda^{(n)})$, столбцами которой являются векторы λ из показателей мономов системы. Введем $(n \times N)$ – матрицы $\Psi := \omega^* \Lambda$, $\widetilde{\Psi} := \Psi - |\omega| \chi$, где ω^* – присоединенная матрица к матрице ω, χ – матрица, i–я строка которой представляет характеристическую функцию подмножества $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$, $|\omega|$ – детерминант матрицы ω. Далее строки матриц Ψ и $\widetilde{\Psi}$ обозначим $\psi_1, \dots, \psi_n$ и $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_n$ соответственно.

Введем два экземпляра пространства $\mathbb{C}^N$: одно $\mathbb{C}_x^N$ с переменными $x = (x_{\lambda})$, а другое $\mathbb{C}_s^N$ с переменными $s = (s_{\lambda})$. В обоих случаях координаты точек индексируются элементами $\lambda \in \Lambda$. Пространство $\mathbb{C}_s^N$ будем трактовать как пространство однородных координат для $\mathbb{CP}_s^{N-1}$. В [1] доказано, что параметризация дискриминантного множества ∇ системы (2) определяется алгебраическим многозначным отображением из проективного пространства $\mathbb{CP}_s^{N-1}$ в пространство коэффициентов системы $\mathbb{C}_x^N$, имеющим координаты

$$x_{\lambda}^{(i)} = -\frac{|\omega| s_{\lambda}^{(i)}}{\langle \tilde{\psi}_i, s \rangle} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\langle \tilde{\psi}_k, s \rangle}{\langle \psi_k, s \rangle} \right)^{\frac{\psi_{k\lambda}}{|\omega|}}, \quad \lambda \in \Lambda^{(i)}, \ i = 1, \dots, n \qquad (3)$$

здесь треугольные скобки обозначают скалярное произведение, $\psi_{k\lambda}$ – координата с номером $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ строки ψ_k. Число ветвей в (3) равно модулю детерминанта $|\omega|$, однако некоторые ветви могут совпадать. Для того, чтобы образ отображения (3) был гиперповерхностью, достаточно, чтобы все координаты векторов $\psi_k, \tilde{\psi}_k, k = 1, \dots, n$ были ненулевые [1].

Рассмотрим рациональное отображение $w(s): \mathbb{CP}_s^{N-1} \to \mathbb{C}_w^N$, полученное из отображения (3) путем возведения каждой его компоненты в степень $|\omega|$. Это отображение определяет гиперповерхность $\widetilde{\nabla} \subset \mathbb{C}_w^N$, амеба которой имеет те же асимптотические направления, что и амеба исследуемой дискриминантной гиперповерхности ∇. Каждая координата отображения $w(s)$ представляет собой моном с целыми показателями в композиции с линейными функциями. Это отображение удобно ассоциировать с парой блочных матриц следующего вида:

$$U = \left(-|\omega| E_N | \Psi^T | \widetilde{\Psi}^T\right)^T, \ V = \left(-|\omega| E_N | -\Psi^T | \widetilde{\Psi}^T\right)^T, \tag{4}$$

где E_N – единичная матрица. Строки матрицы U определяют линейные функции, а строки матрицы V – показатели мономов в параметризации $w(s)$.

3. Тропический веер $\tau(\widetilde{\nabla})$

Исследуем тропикализацию $\tau(\widetilde{\nabla})$ алгебраического многообразия $\widetilde{\nabla} \subset \mathbb{C}^N$. Основные положения тропической геометрии, а также многочисленные ссылки на фундаментальные работы можно найти в монографии [8].

Тропическое многообразие имеет структуру полиэдрального веера. В частности, тропикализация линейного подпространства $X \subset \mathbb{C}^k$ представляет собой веер Бергмана матроида $M(X)$, ассоциированного с этим подпространством (см. [3], [5]). Веер Бергмана неприводимого подмногообразия $X \subset \mathbb{C}^k$ представляет собой конечное объединение выпуклых полиэдральных конусов с вершиной в нуле той же размерности, что и само многообразие [4].

Остановимся подробнее на концепции матроида, охватывающей комбинаторную сущность понятий независимости в линейной алгебре, теории графов и т. д. Существует несколько разных эквивалентных систем аксиом для определения матроида (см., например, [3], [9]). Определим матроид на языке независимых множеств.

Определение 1. *Матроидом M называется пара $(\mathcal{E}, \mathfrak{I})$, состоящая из конечного множества $\mathcal{E}$ и набора $\mathfrak{I}$ подмножеств $\mathcal{E}$, называемых независимыми множествами, такими, что*

(I-1) $\emptyset \in \mathfrak{I}$.

(I-2) Если $J \in \mathfrak{I}$ и $I \subset J$, то $I \in \mathfrak{I}$.

(I-3) Если $I, J \in \mathfrak{I}$ и $|I| < |J|$, то существует $j \in J - I$ такой, что $I \cup j \in \mathfrak{I}$.

Предполагается, что все одноэлементные подмножества независимы. Максимальные независимые множества называют *базами* матроида. Из аксиомы (*I-3*) следует, что все базы матроида M имеют одинаковую мощность $r = r(M)$, называемую *рангом* матроида. Если A – подмножество множества $\mathcal{E}$, то мощность наибольшего содержащегося в A независимого множества называется рангом A и обозначается $r(A)$. Минимальное по включению зависимое множество $C \subseteq \mathcal{E}$ называется *циклом* матроида M. Подмножество $F \subseteq \mathcal{E}$ называют *замкнутым*, если $r(E \cup e) > r(F)$ для всех $e \notin F$. Следуя англоязычным источникам по теории матроидов, в тексте статьи замкнутые множества мы будем называть *флэтами* (от англ. flat). Флэт F называется собственным, если его ранг не равен 0 или r. Каждый флэт F матроида M представляется вектором инцидентности

$$e_F \coloneqq \sum_{i \in F} e_i.$$

Вектор e_F рассматривается как элемент {тропического проективного пространства} $\mathbb{R}^{|\mathcal{E}|} / \mathbb{R}1$, здесь $1 = (1, 1, \ldots, 1)$. Частично упорядоченное множество всех флэтов образует решетку флэтов матроида.

Веер Бергмана является одной из геометрических моделей матроида. В качестве определения веера Бергмана матроида M используем первое утверждение следующей теоремы [3]:

Теорема 1.

(1) Веер Бергмана $\mathfrak{B}_M$ матроида M на множестве $\mathcal{E}$ представляет собой полиэдральный комплекс в $\mathbb{R}^{|\mathcal{E}|} / \mathbb{R}1$, состоящий из конусов

$\sigma_{\mathcal{F}} = cone\{e_F : F \in \mathcal{F}\}$

для каждого флага $\mathcal{F}$ собственных флэтов M. Здесь $e_F \coloneqq e_{f_1} + \ldots + e_{f_k}$ для $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$.

(2) Тропикализация линейного подпространства X представляет собой веер Бергмана $\mathfrak{B}_{M(X)}$ матроида $M(X)$, ассоциированного с подпространством X.

Пусть X – это линейное подпространство в $\mathbb{C}^{N+2n}$, являющееся образом линейного отображения $s \to Us$, заданного матрицей U, $s \in \mathbb{CP}_s^{N-1}$. На множестве строк матрицы U (на множестве $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, N + 2n\}$) зададим матроид $M(X)$. В работе [2] доказан следующий факт:

Теорема 2. *Тропическое многообразие $\tau(\widetilde{\nabla})$ есть образ веера Бергмана $\mathfrak{B}_{M(X)}$ матроида $M(X)$ при линейном отображении $\mathbb{R}^{N+2n} \to \mathbb{R}^N$, заданном матрицей V.*

Таким образом, одномерные образующие тропического веера $\tau(\widetilde{\nabla})$ порождены столбцами матрицы V. Они определяют нормальные направления к гиперграням многогранника Ньютона дискриминанта системы (2). Однако количество гиперграней не обязательно равно количеству столбцов матрицы V, оно может быть больше или меньше. Далее в примере показано, каким образом построенное тропическое многообразие выявляет «скрытые» гиперграни многогранника Ньютона дискриминанта системы.

4. Пример

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными y_1, y_2, y_3 и тремя переменными коэффициентами x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} y_1 + x_1 y_1^2 y_2 y_3 - 1 = 0, \\ y_2 + x_2 y_1 y_2^2 y_3 - 1 = 0, \\ y_3 + x_3 y_1 y_2 y_3^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Матрица показателей системы имеет вид:

$$(\omega|\Lambda) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

индекс подрешетки в $\mathbb{Z}^3$, порожденной ее столбцами, равен 1. Это наибольший общий делитель всех миноров третьего порядка матрицы. Кроме того, строки матриц

$$\Psi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \widetilde{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

не содержат нулевых элементов, поэтому дискриминантное множество ∇ системы (5) является гиперповерхностью и параметризуется рациональным отображением $\mathbb{CP}_s^2 \to \mathbb{C}_x^3$ вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{s_1}{s_1+s_2+s_3}\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{2s_1+s_2+s_3}\right)^2\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{s_1+2s_2+s_3}\right)\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{s_1+s_2+2s_3}\right), \\ x_2 &= -\frac{s_2}{s_1+s_2+s_3}\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{2s_1+s_2+s_3}\right)\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{s_1+2s_2+s_3}\right)^2\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{s_1+s_2+2s_3}\right), \\ x_3 &= -\frac{s_3}{s_1+s_2+s_3}\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{2s_1+s_2+s_3}\right)\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{s_1+2s_2+s_3}\right)\left(\frac{s_1+s_2+s_3}{s_1+s_2+2s_3}\right)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

с кратностью 1. Здесь $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3$ есть однородные координаты в $\mathbb{CP}_s^2$.

Исследуем тропикализацию $\tau(\nabla)$ рационального многообразия $\nabla \subset \mathbb{C}^3$, заданного параметризацией (6). Как отмечалось выше, отображение (6) кодируется парой матриц:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матроид M на множестве $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ строк матрицы U. Тропическое линейное пространство, ассоциированное с матроидом M, представляет собой веер Бергмана $\mathfrak{B}(M)$. Это двумерный веер в $\mathbb{R}^9 / \mathbb{R}1$ или граф, изображенный на рис. 1.

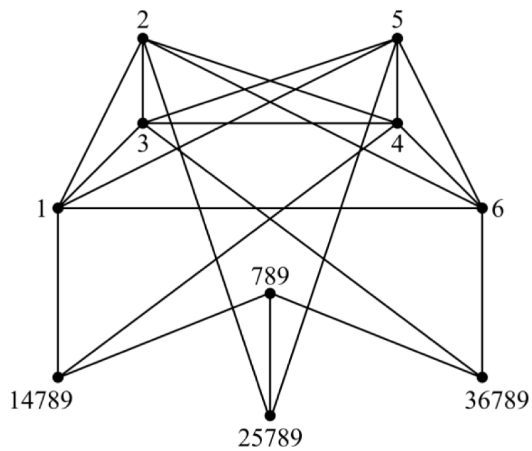


Рис. 1. Комплекс Бергмана

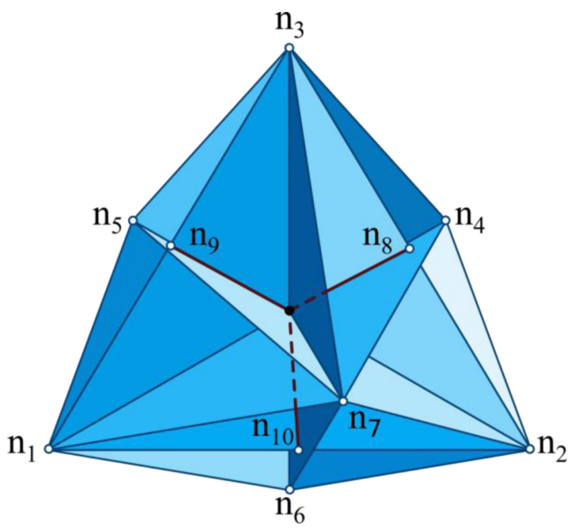


Рис. 2 Тропический веер $\tau(\nabla)$

Граф имеет десять вершин: среди них семь вершин $1,2,3,4,5,6,789$ соответствуют флэтам ранга 1 и три вершины 14789, 25789 и 36789 соответствуют флэтам ранга 2 матроида M. Ребра $12, 13, 15, 16, 23, 24, 26, 43, 35, 45, 46, 56$ графа соответствуют флэтам ранга 2.

Образ веера $\mathfrak{B}(M)$ при отображении V представляет собой двумерный веер в $\mathbb{R}^3$ (рис. 2).

Построенное таким образом тропическое многообразие $\tau(\nabla)$ позволяет найти нормальный веер многогранника Ньютона $\mathcal{N}_\Delta$ дискриминанта системы (5). Семь лучей $n_1, \dots, n_7$ веера $\tau(\nabla)$, порожденные столбцами матрицы V, определяют нормальные направления к гиперграням многогранника $\mathcal{N}_\Delta$. Помимо них, возникают еще три луча в результате пересечения двумерных конусов веера $\tau(\nabla)$. А именно образы конусов 14789 и 23 пересекаются по лучу $\mathbb{R}_{\geq 0}(0,1,1)^T$ (n_8 на рис. 2), образы конусов 25789 и 13 пересекаются по лучу $\mathbb{R}_{\geq 0}(1,0,1)^T$ (n_9 на рис. 2), образы конусов 36789 и 12 пересекаются по лучу $\mathbb{R}_{\geq 0}(1,1,0)^T$ (n_{10} на рис. 2). Таким образом, найдены десять внутренних нормалей к гиперграням многогранника Ньютона $\mathcal{N}_\Delta$. Дискриминант системы (5) имеет вид:

$$\Delta(x) = a^5b^2 - 8a^5bc + 4a^5c^2 - 27a^4b^4 + 36a^4b^3c - 6a^4b^3 - 2a^4b^2c^2 + 6a^4b^2c + a^4b^2 + 36a^4bc^3 + 6a^4bc^2 - 2a^4bc - 27a^4c^4 - 6a^4c^3 + a^4c^2 + 36a^3b^4c - 6a^3b^4 - 256a^3b^3c^3 - 52a^3b^3c^2 + 16a^3b^3c - 2a^3b^3 - 52a^3b^2c^3 - 16a^3b^2c^2 + 2a^3b^2c + 36a^3bc^4 + 16a^3bc^3 + 2a^3bc^2 - 6a^3c^4 - 2a^3c^3 + 4a^2b^5 - 2a^2b^4c^2 + 6a^2b^4c + a^2b^4 - 52a^2b^3c^3 - 16a^2b^3c^2 + 2a^2b^3c - 2a^2b^2c^4 - 16a^2b^2c^3 - 6a^2b^2c^2 + 6a^2bc^4 + 2a^2bc^3 + 4a^2c^5 + a^2c^4 - 8ab^5c + 36ab^4c^3 + 6ab^4c^2 - 2ab^4c + 36ab^3c^4 + 16ab^3c^3 + 2ab^3c^2 + 6ab^2c^4 + 2ab^2c^3 - 8abc^5 - 2abc^4 + 4b^5c^2 - 27b^4c^4 - 6b^4c^3 + b^4c^2 - 6b^3c^4 - 2b^3c^3 + 4b^2c^5 + b^2c^4.$$

Вычисления дискриминанта проведены с помощью системы компьютерной алгебры Singular [6]. Многогранник Ньютона $\mathcal{N}_\Delta$ имеет 10 гиперграней.

Библиографический список

1. Антипова И.А., Цих А.К. Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n неизвестных // Изв. РАН. Сер.: Матем. 2012. Т. 76, № 5. С. 29–56.
2. Antipova I.A., Kleshkova E. On facets of the Newton polytope for the discriminant of the polynomial system // Сиб. электрон. матем. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1180–1188.
3. Ardila F., The Geometry of Matroids // Notices Amer. Math. Soc. 2018 Vol. 65.8. P. 902–908.
4. Bieri R., and Groves J.R.J., The geometry of the set of characters iduced by valuations // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1984. Vol. 347. P. 168–195.
5. Dickenstein A., Feichtner E. M., Sturmfels B. Tropical discriminants // J. Amer. Math. Soc. 2007. 20. P. 1111–1133.
6. Decker W., Greuel G.-M., Pfister G., Schonemann H. Singular 4-1-2 – A computer algebra system for polynomial computations, http://www.singular.uni-kl.de 2019.
7. Feichther E. M., Sturmfels B., Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans // Portugalie Mathematica (N.S.). 2005. Vol. 62. P. 437–468.
8. Maclagan D. and Sturmfels B., Introduction to Tropical Geometry // Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc. 2015. Vol. 161, Providence, RI.
9. Oxley James, Matroid theory // Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press, Oxford. 2011. Vol. 21.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО РАЗБИЕНИЯ ТРАПЕЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA

INVESTIGATION OF THE ISOPERIMETRIC PARTITION OF A TRAPEZOID USING ANIMATION IN A DYNAMIC GEOGEBRA ENVIRONMENT

Ю.В. Бортникова **Y.V. Bortnikova**

Изопериметрическое разбиение трапеции, сплиттер, GeoGebra, компьютерная анимация, исследовательская задача, замечательные отрезки трапеции.
В статье рассматривается решение задачи об изопериметрическом разбиении трапеции с помощью анимационных возможностей динамической среды GeoGebra. Получено изображение разбиения внутренних точек трапеции в зависимости от количества сплиттеров, проходящих через эти точки.

Isoperimetric partition of a trapezoid, splitter, GeoGebra, computer animation, research problem, remarkable trapezoid segments.
The article considers the solution of the isoperimetric partition problem of a trapezoid using the animation capabilities of the dynamic environment GeoGebra. The image of the internal points partition of the trapezoid depending on the number of splitters passing through these points is obtained.

В геометрии для многих фигур известны замечательные отрезки. Несомненно, больше всего замечательных отрезков изучено в треугольнике. Известны отрезки, которые делят периметр треугольника на две равные части. Они называются сплиттер и кливер. Для четырехугольников отрезки с аналогичными свойствами не исследованы. Самым известным примером являются отрезки трапеции, которые связаны с замечательными неравенствами между средним арифметическим, средним геометрическим, средним гармоническим и средним квадратичным [1].

Пусть дана произвольная трапеция $ABDC$ с основаниями $AB = a$ и $CD = b$. Для трапеции известны следующие замечательные отрезки (рис. 1).

1. Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется выражение вида $\frac{2ab}{a+b}$.

В трапеции $ABDC$ среднее гармоническое изображается отрезком EF, параллельным основаниям и проходящим через точку пересечения диагоналей.

2. Среднее геометрическое – это величина $\sqrt{a \cdot b}$. В трапеции $ABDC$ она изображается отрезком KL, параллельным основаниям и делящим трапецию на две подобные.

3. Среднее арифметическое – это $\frac{a+b}{2}$. В трапеции $ABDC$ изображается отрезком GH, параллельным основаниям трапеции и проходящим через середину ее высоты (это средняя линия трапеции).

4. Средним квадратичным называется выражение вида $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

В трапеции $ABDC$ среднее квадратичное изображается отрезком MN, параллельным основаниям и разбивающим трапецию $ABDC$ на две равновеликие трапеции.

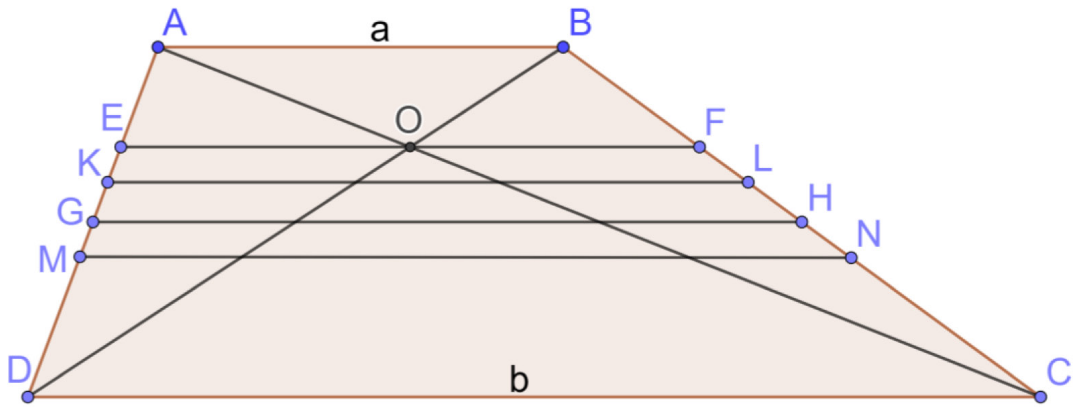


Рис. 1. Замечательные отрезки в трапеции

В статье исследуются отрезки, которые разбивают периметр трапеции на две равные части. Будем называть их сплиттерами, а разбиение трапеции – изопериметрическим. Использование инструментов динамической среды GeoGebra для решения исследовательских геометрических задач описано, например, в работах [2; 3; 4]. Следуя идеям и результатам этих работ, в данной статье решается новая исследовательская задача.

Задача. Внутри трапеции выбирается произвольная точка. Через нее нужно провести все прямые, которые делят периметр трапеции пополам. Как разбиваются внутренние точки трапеции по этому свойству?

Решение. Заметим, что существует несколько типов расположения концов сплиттера на сторонах трапеции.

1. Концы сплиттера лежат на основании и боковой стороне трапеции (рис. 2а, рис. 2в).

2. Концы сплиттера лежат на основаниях трапеции (рис. 2б).

3. Концы сплиттера лежат на боковых сторонах (рис. 2г).

Для решения задачи требуется узнать, могут ли все сплиттеры пересекаться в одной точке, или они пересекаются только попарно?

В каждом случае, используя инструменты анимации в GeoGebra, такие как «Анимация» и «Оставлять след», можно закрасить ту часть трапеции, внутри которой находятся точки, через которые можно провести сплиттер каждого типа. Если закрашенные области для разных типов сплиттеров будут накладываться друг на друга, то значит, в этой общей части будут содержаться те точки трапеции, через которые можно провести 2 или 3 сплиттера.

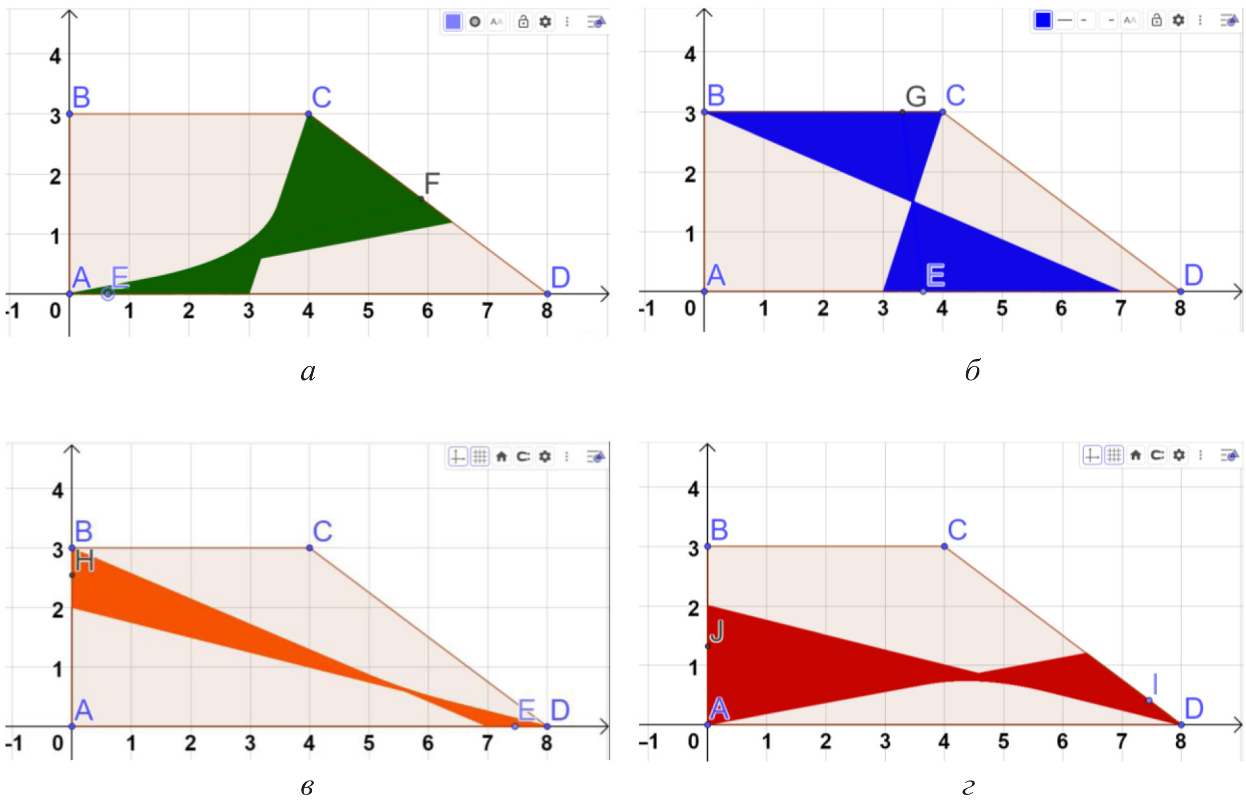


Рис. 2. Различные расположения концов сплиттера на сторонах трапеции

Рассмотрим движение концов сплиттера. Пусть один конец сплиттера (точка E) двигается от вершины A трапеции по направлению к вершине D по основанию AD. Для того чтобы построить положение 2-го конца сплиттера, выполним следующие построения в GeoGebra (рис. 2).

1. Построим окружность с центром в точке C и радиусом

$$CF = \frac{P_{ABCD}}{2} - AB - BC - AE.$$

F – точка пересечения окружности и боковой стороны CD. Соединив точки E и F, получим отрезок, являющийся сплиттером первого типа.

2. Построим окружность с центром в точке B и радиусом

$$BG = \frac{P_{ABCD}}{2} - AB - AE.$$

G – точка пересечения окружности и основания BC. Соединив точки E и G, получим отрезок, являющийся сплиттером второго типа.

3. Построим окружность с центром в точке A и радиусом

$$AH = \frac{P_{ABCD}}{2} - AE.$$

H – точка пересечения окружности и боковой стороны AB. Соединив точки E и H, получим отрезок, являющийся сплиттером первого типа.

4. Закончив движение по основанию AD, точка E совпадет с вершиной D. Останется непройденной часть боковой стороны AB и CD. Значит, точка E, двигающаяся по основанию AD, перейдет в точку, которая продолжит движение

от вершины D по направлению к вершине C по стороне CD. Построим окружность с центром в точке A и радиусом

$$AJ = \frac{P_{ABCD}}{2} - AD - DI.$$

J – точка пересечения окружности и боковой стороны AB. Соединив точки I и J, получим отрезок, являющийся сплиттером третьего типа.

Закрасим часть трапеции, содержащей точки, через которые можно провести сплиттер определенного типа. Для одного конца сплиттера включаем режим «Анимация», а для самого сплиттера включаем функцию «Оставлять след». В итоге при движении сплиттера часть точек внутри трапеции закрашивается в некоторый цвет, и при постоянном движении концов сплиттера мы можем наблюдать, какие области будут покрашены двумя или тремя цветами.

В результате применения инструментов анимации в GeoGebra мы получим визуальное разбиение точек трапеции на области. Для каждой области можем указать, сколько сплиттеров проходит через ту или иную точку внутри трапеции (рис. 3).

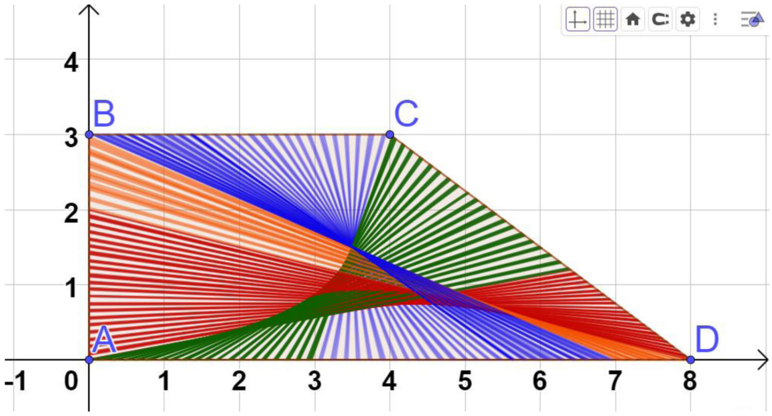


Рис. 3. Покрашенные области трапеции, полученные при движении сплиттеров всех типов

Таким образом, в статье с помощью инструментов анимации в GeoGebra построено визуальное разбиение внутренних точек трапеции в зависимости от количества сплиттеров, проходящих через них. В статье был использован визуальный подход к построению разбиения точек фигуры, примененный также в работе [5].

Библиографический список

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. М.: Мир, 1965.
2. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе / Абдулкин В.В. и др. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2019.
3. Ларин С.В. Использование компьютерной анимации при решении исследовательских задач // Информатизация образования и методика электронного обучения: материалы II Международной научной конференции. Сибирский федеральный университет, 2018. С. 139–143.
4. Нигматулин Р.М., Мартынова Е.В. Использование системы динамической геометрии GeoGebra для организации исследовательской деятельности бакалавров педагогического образования в курсе геометрии // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. КГПУ им. В.П. Астафьева, 2019. С. 193–197.
5. Чупин В.О. Анимационные возможности динамической среды GeoGebra для экспериментального решения геометрических задач // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. КГПУ им. В.П. Астафьева, 2020. С. 188–193.

ОБ ОДНОМЕРНЫХ ГОМОЛОГИЯХ ЗАМЫКАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ В ТОРИЧЕСКОЙ КОМПАКТИФИКАЦИИ ДВУМЕРНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

ON THE HOMOLOGY OF AN ALGEBRAIC CURVE IN A TORIC COMPACTIFICATIONOFTWO-DIMENSIONAL COMPLEX SPACE

Н.А. Бушуева, И.В. Овчинникова **N.A. Bushueva, I.V. Ovchinnikova**

Торическое многообразие, группа гомологий, алгебраическая кривая, матрица инциденций.
Предлагается конструктивный способ построения базиса группы одномерных гомологий замыкания алгебраической кривой в торической компактификации двумерного комплексного пространства.

Toric manifold, homology group, algebraic curve, incidence matrix.
We give a constructive method for constructing a basis for the one-dimensional homology group of the closure of an algebraic curve in a toric compactification of a two-dimensional complex space.

Рассматривается задача построения базисных циклов одномерных гомологий замыкания алгебраической кривой в двумерном гладком торическом многообразии. Одномерные гомологии замыкания в сферической и проективной компактификациях комплексного пространства изучены достаточно хорошо. В работах А.П. Южакова [1] и А.К. Циха [2] вычислены размерности соответствующих групп гомологий, а также установлен изоморфизм с группой двумерных гомологий дополнения. Поскольку комплексное проективное пространство принадлежит к классу торических многообразий, возникает вопрос о переносе описанных результатов на более широкий класс множеств.

Торическое многообразие характеризуется мономиальностью функций перехода. Его можно трактовать как компактификацию комплексного пространства конечным числом бесконечно удаленных кривых, каждая из которых гомеоморфна проективной прямой $\mathbb{CP}^1$. Подходы к построению торических многообразий см., например, в [3–5]. Примерами гладких компактных торических многообразий являются комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \bigcup L_{\infty}$ $\mathrm{CP}^2 = \mathrm{C}^2 \cup \mathrm{L}_{\infty_1}$ и пространство теории функций $\bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2 \bigcup L_{\infty 1} \bigcup L_{\infty 2}$ $\bar{\mathrm{C}} \times \bar{\mathrm{C}} = \mathrm{C}^2 \cup \mathrm{L}_{\infty_1} \cup \mathrm{L}_{\infty_2}$.

Известная из работ А.П. Южакова и А.К. Циха формула размерности группы одномерных гомологий замыкания алгебраической кривой была распространена на случай торической компактификации в статье [6]. Рассмотрим алгебраическую кривую T в пространстве $\mathbb{C}^2$, задаваемую нулями полинома $Q(w,z)$:

$$T = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 \colon Q(w,z) = 0\},$$

пусть при этом Q раскладывается на множители: $Q(w,z) = Q_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot Q_m^{r_m}$, где $Q_1(w,z), \ldots, Q_m(w,z)$ – неприводимые полиномы. Имеет место следующая

[1] Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Теорема 1. Пусть $\bar{T}$ – замыкание алгебраической кривой T в торической компактификации пространства $\mathbb{C}^2$. Размерность группы $H_1(\bar{T})$ определяется формулой:

$$dim\, H_1(\bar{T}) = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{s} q_i - s - m + M, \tag{1}$$

где ρ_j– род римановой поверхности алгебраической функции, определяемой уравнением $Q_j = 0$; q_i – число неприводимых компонент множества T в его i-й точке самопересечения; s – число точек самопересечения множества T; m – число различных неприводимых множителей $Q_1, \dots, Q_m$ полинома Q, M – число связных компонент $\bar{T}$.

Построим базис группы одномерных гомологий. Будем считать, что множество $\bar{T}$ связно. Это не ограничивает общности, поскольку при наличии нескольких компонент связности базис гомологий выбирается в каждой компоненте отдельно независимо от других.

Базис группы $H_1(\bar{T})$ составляют следующие циклы:

– $\sum_{i=1}^{m} 2\rho_i$ *канонических* циклов;

– $\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} (k_{ij} - 1)$ циклов *самопересечения*, где l_i – число компонент множества T, которые пересекаются в точке самопересечения A_i, k_{ij} – число, пересекающихся в A_i элементов -й по счету (в A_i) компоненты множества $\bar{T}$;

– $\sum_{i=1}^{s} l_i - s - m + 1 \sum_{i=1}^{s} l_i - s - m + 1$ *транскомпонентных* циклов.

Канонические циклы соответствуют параллелям и меридианам ручек компонент $\bar{T}$.

Если точка A_i является точкой самопересечения какой-либо компоненты, скажем $T_{(j)}$, то в A_i сходятся k_{ij} элемента $T_{(j)}$ ($k_{ij} > 1$). Тогда строим циклы, которые выходят из точки A_i по элементам от первого до предпоследнего, а возвращаются обратно в A_i по последнему элементу компоненты $T_{(j)}$ в точке A_i.

Особенность транскомпонентных циклов заключается в том, что они располагаются как минимум на двух компонентах $\bar{T}$, в отличие от канонических и циклов самопересечения, которые лежат в пределах одной.

Заметим, что специфика построения перечисленных циклов обеспечивает их гомологическую независимость, а общее число совпадает со значением правой части формулы (1). Таким образом, предложенный набор составляет базис группы одномерных гомологий $\bar{T}$.

Строить циклы третьего типа предлагается при помощи преобразования матрицы инценденций. Идея метода заключается в том, что вместо поверхности $\bar{T}$ рассматривается ассоциированный с ней сингулярный комплекс KK. Далее при помощи матриц инцеденций находится базис одномерных гомологий K, при этом соответствующие циклы на $\bar{T}$ будут транскомпонентными и вместе с каноническими циклами и циклами самопересечения составят базис $H_1(\bar{T})$.

Перейдем к описанию конструкции. В качестве *нульмерных* симплексов выберем:

– A_i – точки самопересечения кривой $\bar{T}$, $i = \overline{1, s}$, (достаточно взять только те, в которых пересекаются разные неприводимые компоненты, точки самопересечения одной компоненты ситуации не испортят, но приведут к увеличению числа преобразований);

– B_j – точки на неприводимых компонентах $\bar{T}_j$, взятые по одной на каждой компоненте, $j = \overline{1, m}$.

В качестве *одномерных* симплексов положим:

– $A_i B_j$ – криволинейные симплексы на $\bar{T}_j$, соединяющие точки A_i и B_j в случае, если $A_i \in \bar{T}_j$, при этом ориентируем 1 – симплексы от B_j к A_i.

В результате получаем одномерный комплекс K, базисные циклы которого соответствуют базисным циклам на поверхности $\bar{T}$.

Одномерные гомологии K вычисляются при помощи матрицы инцеденций (подробности метода см. в [7], [8]). В нашем случае исходная матрица имеет специфический вид. В верхних s строках расположены по одной единице в каждом столбце, остальные места занимают нули, а в оставшихся mm строках по одной -1 в столбце, на остальных местах 0. В результате последовательности преобразований столбцов в матрице возникает треугольный блок и нулевые столбцы. При этом синхронно преобразуются симплексы (на шаге 2 и далее – цепи), соответствующие столбцам матрицы. Метод обеспечивает гомологическую независимость циклов, соответствующих нулевым столбцам. В результате предъявляется базис гомологий исследуемого комплекса.

Пример. В качестве иллюстрации описанного метода рассмотрим кривую $T = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon w(w^2 - z^3)(w^2 - z^3 - z^4) = 0\}$, которая состоит из трех неприводимых компонент T_1, T_2 и T_3, задаваемых нулями множителей полинома, определяющего T.

В комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ кривая T имеет две точки самопересечения: $A_1 = (0, -1) = T_1 \cap T_3$ и $A_2 = (0, 0) = T_1 \cap T_2 \cap T_3$. При компактификации T в пространстве теории функций $\bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}}$ на бесконечности добавляются: одна точка к T_1 и одна к T_2 и T_3 – точка самопересечения A_3. При этом у компоненты T_3 на бесконечность уходят два элемента, они сходятся в A_3.

Согласно формуле (1), $dim\, H_1(\bar{T}) = 3$. Построим три базисных цикла.

Все три компоненты кривой T имеют род 0 (рис. 1), поэтому канонических циклов на $\bar{T}$ нет.

На третьей компоненте строим один цикл самопересечения, проходящий через A_3, и оба элемента $\bar{T}_3$ на бесконечности.

Отметим на компонентах $\bar{T}$ точки B_j, $j = \overline{1, 3}$ и построим вспомогательный комплекс K (рис. 2).

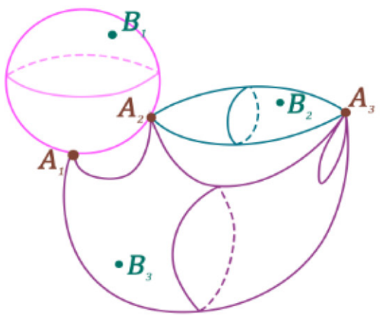


Рис. 1. Модель $\bar{T}$ в $\bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}}$

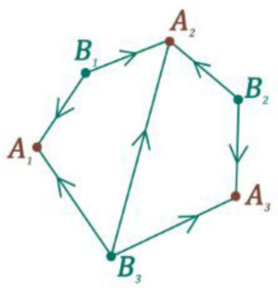


Рис. 2. Схема комплекса K

Следующим шагом является построение матрицы инциденций. Исходная матрица имеет вид:

$$
\begin{array}{c}
 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} B_1A_1 & B_3A_1 & B_1A_2 & B_2A_2 & B_3A_2 & B_2A_3 & B_3A_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Матрица после приведения:

$$
\begin{array}{c}
 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

где

$$
\begin{aligned}
E_1 &= B_1A_1, \\
E_2 &= B_1A_2, \\
E_3 &= B_2A_3, \\
E_4 &= B_3A_1 - B_1A_1, \\
E_5 &= B_3A_3 - B_2A_3, \\
E_6 &= B_2A_2 - B_3A_2 + B_3A_3 - B_2A_3, \\
E_7 &= B_3A_2 - B_1A_2 + B_1A_1 - B_3A_1.
\end{aligned}
$$

Нулевым столбцам матрицы соответствуют комбинации E_7 и E_8, которые на $\bar{T}$ представляют два транскомпонентных цикла. Они вместе с описанным ранее циклом самопересечения составляют базис $H_1(\bar{T})$.

Библиографический список

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979. 368 с.
2. Цих А.К. Двумерные гомологии дополнения алгебраической кривой в $\mathbb{CP}^2$ // Изв. вузов. Математика. 1977. № 5. С. 122–124.
3. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 4. С. 56–64.
4. Fulton W. Introdiction to toric varieties. Ann. of Math. Studies: Princention Univ. Press. V. 131. 1993.
5. Batyrev V., Cox D. On the Hodge structure of projective hypersurfaces in toric varieties // Duke Math. J. 1994. V. 75, № 2. P. 293–338.
6. Бушуева Н.А., Овчинникова И.В. О размерности группы одномерных гомологий алгебраической кривой в двумерном торическом многообразии // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Майера Роберта Адольфовича. 2021. С. 28–31.
7. Фоменко А.Т. Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире. М.: Издательство МГУ, 1998. 416 с.
8. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 448 с.

О КОГОМОЛОГИЯХ КОМПЛЕКСА ДЕ РАМА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

ON THE COHOMOLOGIES OF THE DE RHAM COMPLEX OVER WEIGHTED HÖLDER SPACES

К.В. Гагельганс **K.V. Gagelgans**

Весовые пространства Гёльдера, метод интегральных представлений, анизотропные пространства.

Мы рассматриваем комплекс де Рама над шкалами весовых изотропных и анизотропных пространств Гёльдера с заданной асимптотикой на бесконечности. Исходя из теорем о разрешимости системы операторных уравнений, порожденной дифференциалом де Рама d и формально сопряженным с ним оператором d*, получено описание групп когомологий комплекса де Рама над данными шкалами. Доказано также, что в изотропном случае пространство когомологий конечномерно, а в анизотропном случае приведен общий вид элемента из пространства когомологий.

Weighted Hölder spaces, integral representation's method, anisotropic spaces.

We consider the de Rham complex over scales of weighted isotropic and anisotropic Hölder spaces with prescribed asymptotic behavior at the infinity. Starting from theorems on the solvability of the system of operator equations generated by the de Rham differential d and the operator d* formally adjoint to it, a description of the cohomology groups of the de Rham complex over these scales was obtained. It was also proved that in the isotropic case the cohomology space is finite-dimensional, and in the anisotropic case the general form of an element from the cohomology space is presented.

Рассмотрим пространство R^n, $n \geq 1$. Мы намерены контролировать рост функций в бесконечности. Пусть

$$w(x) = \sqrt{1 + |x|^2}, \qquad w(x,y) = \{w(x), w(y)\}, \qquad x, y \in R^n.$$

Через $C_\delta^{0,0}$ обозначим пространство непрерывных весовых функций, заданных на R^n, с конечной нормой

$$\|u\|_{C_\delta^{0,0}} = w^\delta(x)|u(x)|.$$

Пусть U будет непустой ограниченной окрестностью нуля в R^n. Тогда для $0 < \lambda \ \leq \ 1$ определим весовые пространства Гёльдера с конечной нормой

$$\|u\|_{C_\delta^{0,\lambda}} = \|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{U})} + \|u\|_{C_\delta^{0,0}} + \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda},$$

где $\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{U})}$ – есть норма в классических пространствах Гёльдера $C^{0,\lambda}(\overline{U})$ на компакте $\overline{U}$.

Пусть $s \in Z_+$. Тогда через $C_\delta^{s,\lambda}$ обозначим пространства s раз непрерывно дифференцируемых весовых функций, для которых конечна норма

$$\|u\|_{C_\delta^{s,\lambda}} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial_x^\alpha u\|_{C_{\delta+|\alpha|}^{0,\lambda}}.$$

Рассмотрим комплекс банаховых пространств вида

$$0 \to C^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^0} \to C^{s-1,\lambda}_{\delta+1,\Lambda^1} \to \cdots \to C^{1,\lambda}_{\delta+(s-1),\Lambda^{s-1}} \to C^{0,\lambda}_{\delta+s,\Lambda^s} \cap S_{d^s} \to 0, \quad (1)$$

где Λ^q – расслоения внешних дифференциальных форм степени $0 \leq q \leq n$ над R^n, а S_{d^s} обозначает ядро оператора d_s. Целью работы является описание когомологий комплекса (1), поэтому пусть

$$Z^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q} = C^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q} \cap S_{d^q},$$

$$B^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q} = \left\{ f \epsilon C^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q} : \exists\, u \epsilon C^{s+1,\lambda}_{\delta-1,\Lambda^{q-1}},\ \text{удовлетворяющая уравнению } f = du \right\},$$

$$H^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q} = Z^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q} / B^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q}$$

обозначают пространства коциклов, кограниц и когомологий соответственно.

Теорема: Пусть $n \geq 2$, $s \epsilon Z_+$ $0 < \lambda < 1$ и $n + m - 1 < \delta < n + m$. Тогда группы когомологий комплекса (1) конечномерны и изоморфны образу оператора $d(\Phi - \Phi_m)$, действующего из $C^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q}$ в $Z^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q}$.

Библиографический список

1. McOwen R. Behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces // Comm. Pure Appl. Math. 1979. V. 32. P. 783–795.
2. Krantz S. Intrinsic Lipschitz classes on manifolds with applications to complex function theory and estimates for the and equations // Manuscripta Mathematica. 1978. V. 24. № 4. P. 351–378.
3. Sidorova (Gagelgans) K.V. On the Closure of Smooth Compactly Supported Functions in Weighted Holder Spaces/ K.V. Sidorova (Gagelgans), A.A. Shlapunov // Math. Notes. 2019. V. 105. № 4. P. 616–631.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЛУ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

USING OF THE GEOGEBRA DYNAMIC ENVIRONMENT TO STUDY THE BOUNDARIES OF THE STABILITY DOMAIN OF THE DISCRETE PIELOU MODEL WITH TWO DELAYS

Е.Е. Мещерякова **E.E. Meshcheryakova**

GeoGebra, дискретные математические модели, область устойчивости, кривые, асимптоты.

В работе с помощью динамической среды GeoGebra исследуются границы области устойчивости дискретной модели Пьелу с двумя запаздываниями. В GeoGebra выполнены вычисления, найдены асимптоты граничных кривых, построены изображения области устойчивости, исследовано изменение формы граничной кривой в зависимости от запаздываний.

GeoGebra, discrete mathematical models, stability domain, curves, asymptotes.

Using the GeoGebra dynamic environment, the boundaries of the stability domain of the discrete Pielou model with two delays are investigated. Calculations were performed in GeoGebra, the asymptotes of the boundary curves were found, images of the stability domain were constructed, the change in the shapes of the curves depending on the delays was investigated.

Многие дискретные математические модели, например, в биологии, экологии, популяционной динамике, представляют собой разностные уравнения [2; 3].

Одним из важных свойств таких моделей является устойчивость стационарного решения уравнения в пространстве его коэффициентов или параметров [1; 2; 3].

Одной из известных дискретных моделей является модель Пьелу с двумя запаздываниями

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-m}}{1 + x_{n-m} + \beta x_{n-k}},$$

в которой натуральные числа k, m называются запаздываниями. Область устойчивости этого разностного уравнения представляет собой множество точек плоскости коэффициентов (α, β) и получено в работе [3]. Для нечетных m $(m > 1)$ область устойчивости изображена на рис. 1 [3]. Однако описание границы области устойчивости не было полным, в частности для граничной кривой (проходящей через точку M) не было исследовано асимптотическое поведение.

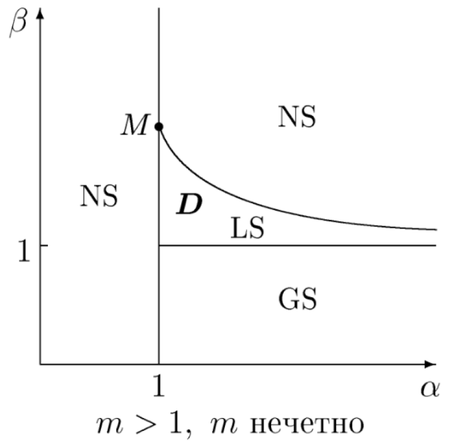


Рис. 1. Области устойчивости для дискретной модели Пьелу с двумя запаздываниями k, m на плоскости коэффициентов (α, β) [3]

Цель работы: используя инструменты динамической среды GeoGebra, изучить асимптотическое поведение граничной кривой области устойчивости дискретной модели Пьелу с двумя запаздываниями.

Используя результаты работы [3], мы получили параметрические формулы для кривой, являющейся границей области устойчивости:

$$\begin{cases} \alpha(\omega) = \dfrac{\sin(k-m)\omega}{\sin k\omega - \sin m\omega}, \\ \beta(\omega) = \dfrac{\sin m\omega}{\sin(k-m)\omega - \sin k\omega}, \end{cases}$$

где значения ω изменяются между $\pi - \frac{j\pi}{k}$ и $\pi - \frac{s\pi}{m}$; j, s – натуральные числа, удовлетворяющие условиям: $|mj - ks| = 1$, $j < k$, s нечетно [3].

Для нахождения горизонтальной асимптоты необходимо выполнение условий:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\omega\to\omega^*} \alpha(\omega) = +\infty, \\ \lim\limits_{\omega\to\omega^*} \beta(\omega) = C \ (C > 1). \end{cases}$$

Для выполнения первого условия необходимо, чтобы знаменатель дроби $\alpha(\omega)$ был равен нулю, т. е. $\sin k\omega - \sin m\omega = 0$. Получим:

$$2\sin\frac{k-m}{2}\omega\cos\frac{k+m}{2}\omega = 0.$$

Применив формулу синуса двойного угла в числителе дроби $\alpha(\omega)$, получим:

$$\alpha(\omega) = \frac{\cos\frac{k-m}{2}\omega}{\cos\frac{k+m}{2}\omega}.$$

Условие $\lim_{\omega\to\omega^*} \alpha(\omega) = +\infty$ выполняется только в точках вида

$$\omega^* = \frac{\pi(2l+1)}{k+m}, l \in \mathbb{Z}.$$

Упростив дробь $\beta(\omega)$ аналогичным образом, получим:

$$\beta(\omega) = -\frac{\cos\frac{m}{2}\omega}{\cos\frac{2k-m}{2}\omega}.$$

Тогда в точках ω^* получим:

$$\beta(\omega^*) = -\frac{\cos\frac{\pi m(2l+1)}{2(k+m)}}{\cos\frac{\pi(2k-m)(2l+1)}{2(k+m)}}.$$

Ограниченную кривую строим на промежутке между точками $\pi - \frac{j\pi}{k}$ и $\pi - \frac{s\pi}{m}$, причем в этот промежуток входит лишь одно значение ω^*.

Рассмотрим примеры построения граничной кривой и соответствующей ей асимптоты в динамической среде GeoGebra.

Пусть $k = 4, m = 3$. Тогда $l = 2, \omega^* = \frac{5\pi}{7}$, $\beta\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{3\pi}{14}} \approx 1{,}25$. Таким образом, получаем уравнение горизонтальной асимптоты $y = \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{3\pi}{14}}$ (рис. 2).

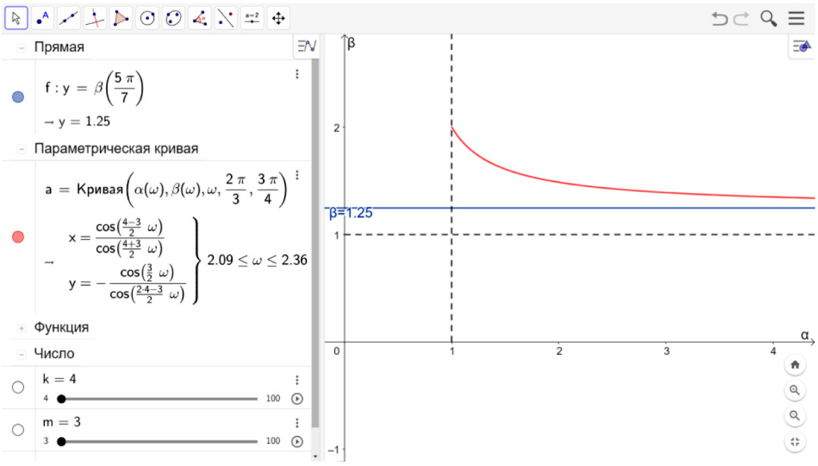


Рис. 2. Построение асимптоты к граничной кривой при запаздываниях $k = 4, m = 3$ в динамической среде GeoGebra

Пусть $k = 10, m = 3$. Тогда $l = 4, \omega^* = \frac{9\pi}{13}$, $\beta\left(\frac{9\pi}{13}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{26}}{\cos\frac{3\pi}{26}} \approx 1{,}06$. Таким образом, получаем уравнение горизонтальной асимптоты $y = \frac{\cos\frac{\pi}{26}}{\cos\frac{3\pi}{26}}$ (рис. 3).

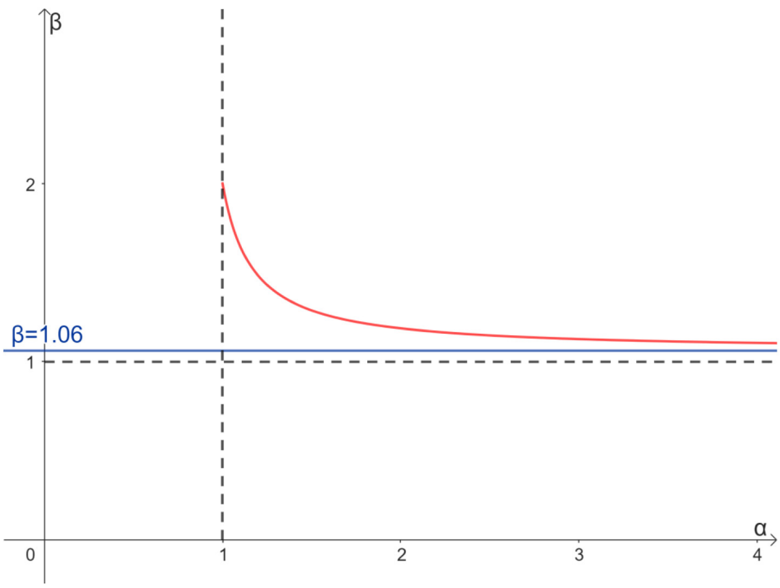


Рис. 3. Асимптота к граничной кривой при запаздываниях $k = 10, m = 3$

Пусть $k = 14, m = 11$. Тогда $l = 4, \omega^* = \frac{9\pi}{25}, \beta\left(\frac{9\pi}{25}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{50}}{\cos\frac{3\pi}{50}} \approx 1{,}016$. Таким образом, уравнение горизонтальной асимптоты $y = \frac{\cos\frac{\pi}{50}}{\cos\frac{3\pi}{50}}$ (рис. 4).

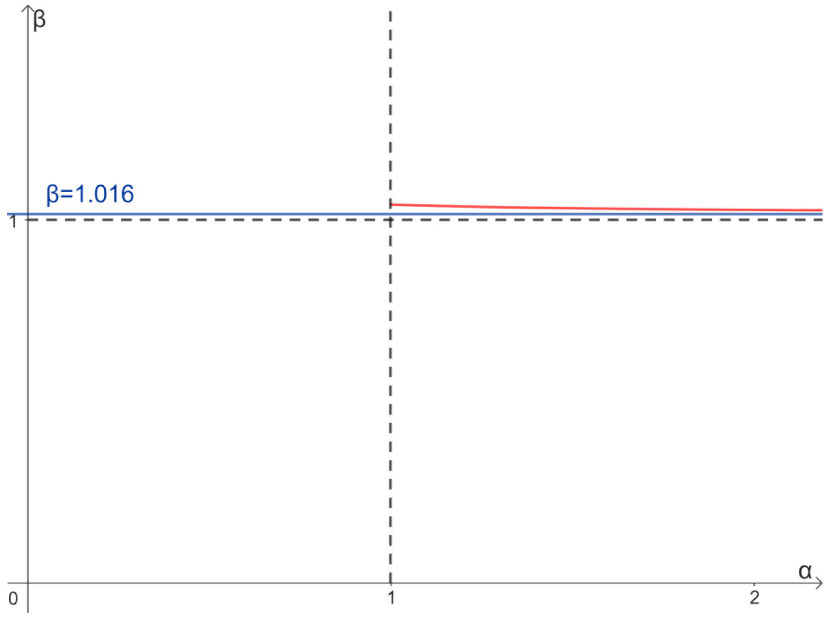


Рис. 4. Асимптота к граничной кривой при запаздываниях $k = 14, m = 11$

Таким образом, в работе с помощью динамической среды GeoGebra исследована граница области устойчивости дискретной модели Пьелу с двумя запаздываниями на плоскости параметров (α, β), построена граничная кривая и соответствующая ей асимптота. Заметим, что традиционными аналитическими методами эту задачу было бы решать достаточно сложно.

Библиографический список

1. Zhang Q., Ouyang M., Zhang Z. On second-order fuzzy discrete population model // Open Mathematics. 2022. 20 (1). P. 125–139.
2. Александров А.Ю. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ / А.Ю. Александров, А.В. Платонов, В.Н. Старков, Н.А. Степенко. СПб.: Лань, 2016.
3. Нигматулин Р.М. Глобальная устойчивость дискретной модели динамики популяции с двумя запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 105–113.

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЁВА С НУЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ ВНЕ ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ ДУГИ[1]

CHEBYSHEV POLYNOMIALS WITH ZERO SET OUTSIDE THE CONVEX HULL OF THE ARC

Н.Н. Рыбакова **N.N. Rybakova**

Многочлены Чебышёва, многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, нулевое множество, многочлены с вещественными коэффициентами.
Найдены многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на дуге единичной окружности, с нулевым множеством вне выпуклой оболочки дуги и на ее границе для полиномов с вещественными коэффициентами.

Chebyshev polynomials, polynomials least deviating from zero, zero set, polynomials with real coefficients.
The polynomials least deviating from zero on the arc of the unit circle with a zero set outside the convex hull of the arc and on its boundary for polynomials with real coefficients are found.

Задачи на минимакс и, в частности, описание полиномов, наименее уклоняющихся от нуля на отрезках действительной оси и на компактах комплексной плоскости (многочленов Чебышёва), играют важную роль в теории приближений и в смежных с ней разделах математики (см., например, [6]).

Пусть K – некоторый компакт комплексной плоскости, A_n – класс унитарных полиномов степени n. Для любого многочлена $P_n(z)$ из A_n норму на компакте K определим так: $\|P_n\|_K = \max\limits_{z\in K}|P_n(z)|$, а символом $Z(P_n)$ обозначим множество всех его нулей. В общем виде задача нахождения многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на K с нулевым множеством на некоторой фиксированной области D из $\mathbb{C}$ или из $\mathbb{R}$ ставится так: найти число $E_n(K,D) = \inf\left\{\|P_n\|_K \,|\, P_n \in \mathrm{A}_n, Z(P_n) \subset D\right\}$ и многочлен P_n^* такой, что $\|P_n^*\|_K = E_n(K,D)$, который называется экстремальным или многочленом Чебышёва.

Эту проблему и другие близкие задачи для тех или иных областей решали такие математики, как П.Л. Чебышёв, М.Л. Содин и П.М. Юдицкий [7], С.В. Тышкевич [9], В.С. Виденский [3], В.В. Арестов и А.С. Менделев [10], В.Н. Дубинин [4], Э.Б. Байрамов [2] и другие.

Рассмотрим дугу единичной окружности $\Gamma_\alpha = \left\{z = e^{i\varphi} \,|-\alpha \le \varphi \le \alpha\right\}$, где $0 < \alpha < \pi$, интервал $G_\alpha = \left\{z = \cos\alpha + iy \,\|y| < \sin\alpha\right\}$ и L_α – выпуклую оболочку дуги.

Задача А. Среди унитарных полиномов с вещественными коэффициентами с нулевым множеством в области $D = (\mathbb{C} \setminus L_\alpha) \cup \Gamma_\alpha \cup G_\alpha$ найти многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на дуге Γ_α.

[1] Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Теорема 1. *Пусть* $n \ge 2$, $n = 2r$ *или* $n = 2r+1$, $a_k^{(n)} = 1 - 2(x_{nk} \sin(\alpha/2)^2)$, $x_{nk} = \cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}$, *тогда экстремальный многочлен решения задачи А соответственно при* $n = 2r$ *или* $n = 2r+1$ *имеет вид:*

$$T_n(z) = S_n^{(r)} := \prod_{k=1}^{r} (z^2 - 2a_k^{(2r)} z + 1),\ T_n(z) = (z-1) S_n^{(r)}, \tag{1}$$

причем $\|T_n\| = 2\sin^n(\alpha/2)$. *Для* $n = 2$ *и* $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ *решение задачи А не единственно: кроме многочлена* $T_2(z)$, *существует другой экстремальный многочлен –* $F_2(z) = z^2 - 2z\cos\alpha + \cos\alpha$.

Многочлены (1) и их норма впервые были выписаны в статье [5] в связи с решением задачи о нахождении экстремальных многочленов на дуге единичной окружности с нулевым множеством, совпадающим с этой дугой.

Доказательство теоремы опирается на ряд лемм.

Лемма 1. *Нули экстремальных многочленов решения задачи А содержатся в области* $\Gamma_\alpha \cup G_\alpha$.

Это утверждение очевидно и позволяет сузить поиск решений.

Лемма 2. *Для многочленов* $L_2(z) = (z - \cos\alpha - iy)(z - \cos\alpha + iy)$, *где* $0 \le y < \sin\alpha$ *и* $P_2(z) = (z - e^{i\psi})(z - e^{-i\psi})$, *где* $0 \le \psi \le \alpha$ *определяется из равенства* $\cos\psi = \frac{\sin^2\alpha - y^2}{2} + \cos\alpha$, *справедливо неравенство* $|L_2(z)| > |P_2(z)|$ *для всех* $z \in \Gamma_\alpha \setminus \{1; e^{\pm i\alpha}\}$ *и выполняется равенство* $|L_2(z)| = |P_2(z)|$ *для* $z \in \{1; e^{\pm i\alpha}\}$.

Для доказательства леммы достаточно непосредственной проверки равенства и неравенства для $z \in \Gamma_\alpha$. Данное утверждение позволяет для многочлена любые два комплексно-сопряженных его корня из интервала G_α заменить на два, описанных в лемме, корня из дуги Γ_α и получить многочлен с нормой, не превосходящей норму первоначального многочлена.

Справедливо следствие леммы 2.

Следствие 1. *Для любого унитарного многочлена* $P_n(z)$, $n \ge 2$ *с вещественными коэффициентами, имеющего четное число нулей на интервале* G_α, *а все остальные нули – на дуге* Γ_α, *справедливо неравенство* $\|P_n\| \ge 2\sin^n\frac{\alpha}{2}$, *причем равенство выполняется только для многочленов, описанных в теореме 1.*

Лемма 3. Пусть $n \ge 2$, *тогда для нормы многочленов вида,*

$$P_n(z) = (z - \cos\alpha)\prod_{j=1}^{r} (z - e^{i\varphi_j})(z - e^{-i\varphi_j}),\ \text{где}\ n = 2r+1, \tag{2}$$

$$P_n(z) = (z - \cos\alpha)(z-1)\prod_{j=1}^{r} (z - e^{i\varphi_j})(z - e^{-i\varphi_j}),\ \text{где}\, n = 2r+2, \tag{3}$$

справедливо неравенство $\|P_n\| > 2\sin^n\frac{\alpha}{2}$.

Несколько слов об идее доказательства. Если $\cos\alpha = 0$, то лемма верна. Следующие рассуждения будут справедливы для $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$. Пусть $z = e^{i\varphi}$ – точки на дуге Γ_α. Модули многочленов (2) и (3) на Γ_α соответственно равны

$$\left|P_n(e^{i\varphi})\right| = \sqrt{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi}\cdot\prod_{j=1}^{r}\left|2(\cos\varphi_j - \cos\varphi)\right| \text{ и}$$

$$\left|P_n(e^{i\varphi})\right| = \sqrt{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi}\cdot\sqrt{2-2\cos\varphi}\cdot\prod_{j=1}^{r}\left|2(\cos\varphi_j - \cos\varphi)\right|.$$

Применим преобразование $x(\varphi) = sign(\cos\alpha)\left(2\left(\dfrac{\sin\varphi/2}{\sin\alpha/2}\right)^2 - 1\right)$, получим действительные функции на отрезке $[-1;1]$

$$\left|P_n(e^{i\varphi})\right| = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n \cdot 2^{\frac{n-2}{2}}\cdot\left|l_n(x)\right|,$$

где для многочленов (2) и (3) соответственно $l_n(x) = \sqrt{ax+1}\cdot\prod_{j=1}^{r}(x-\nu_j)$ и $l_n(x) = \sqrt{ax+1}\cdot\sqrt{1+sign(a)x}\cdot\prod_{j=1}^{r}(x-\nu_j)$, $a = \cos\alpha$, $\nu_j = x(\varphi_j)$ для $j = 1,\ldots,r$.

Лемма 4. *Для нормы многочлена* $w_n(x) = l_n^2(x) - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ *на отрезке* $[-1;1]$ *справедливо неравенство* $\|w_n\|_{[-1;1]} = \max\limits_{x\in[-1;1]}|w_n(x)| > \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Лемму примем без доказательства. Подробно о многочленах Чебышёва на отрезке $[-1;1]$ можно посмотреть в книге [8], теорему об альтернансе в работе [1, Глава II, с. 66]. Из леммы 4 следует, что $\max\limits_{x\in[-1;1]}\left|\dfrac{l_n^2(x)}{2}\right| > \dfrac{1}{2^{n-1}}$, и получаем $\max\limits_{x\in[-1;1]}|l_n(x)| > 2^{-\frac{n-2}{2}}$, отсюда вытекает справедливость леммы 3.

Рассмотрим следствие лемм 2 и 3.

Следствие 2. *Для любого унитарного многочлена* $P_n(z)$, $n \geq 2$ *с вещественными коэффициентами, имеющего нечетное число нулей на интервале* G_α, *а все остальные нули – на дуге* Γ_α, *справедливо неравенство* $\|P_n\| > 2\sin^n\dfrac{\alpha}{2}$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
2. Байрамов Э.Б. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на квадрате комплексной плоскости // Тр. ИММ УрО РАН, 24, № 3. 2018, С.5–15.
3. Виденский В.С. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем чем период // Докл. АН СССР. 1960. 130:1. С. 13–16.
4. Дубинин В.Н. Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов, УМН, 67:4(406) (2012), 3–88; Russian Math. Surveys, 67:4 (2012). С. 599–684.
5. Маергойз Л.С., Рыбакова Н.Н. Многочлены Чебышёва с нулевым множеством на дуге окружности // Докл. РАН, Т. 426, № 1 (2009). С. 26–28.

6. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. ГИТТЛ. М.-Л., 1949.
7. Содин М.Л., Юдицкий П.М. Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах вещественной оси. Алгебра и анализ, 4:2 (1992), 1–61; St. Petersburg Math. J., 4:2 (1993), 201–249.
8. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. Изд. 2-е, доп. Главная редакция физико-математической литературы издательства. М.: Наука, 1979.
9. Тышкевич С.В. О чебышёвских полиномах на дугах окружности // Матем. заметки, 81:6 (2007), 952–954; Math. Notes, 81:6 (2007), 851–853.
10. Arestov V.V., Mendelev A.S. Trigonometric polynomials of least deviation from zero in measure and related problems, Journal of Approximation Theory, 162 (2010), p. 1852–1878.

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ И ГРУППЫ

CRYSTALOGRAPHY AND GROUPS

В.И. Сенашов **V.I. Senashov**

Group, crystallography, spectra, bottom layer, unitary groups.
Group theory is a powerful tool for studying symmetric physical systems as molecules and crystals. This paper gives examples of the use of the apparatus of group theory in research on crystallography. In particular, in these studies matrix groups and representations of unitary groups are actively used. Some simple non-Abelian groups are not recognizable by their spectra. We have proposed an approach for recognizing groups by the bottom layer. The paper considers some examples of simple non Abelian finite groups that are not recognizable by spectra but simultaneous recognizable by spectrum and by the bottom layer.

Группа, кристаллография, спектр, нижний слой, унитарная группа.
Теория групп – мощный инструмент для изучения симметричных физических систем, таких как молекулы и кристаллы. В статье приведены примеры использования аппарата теории групп в исследованиях по кристаллографии. В частности, в этих исследованиях активно используются матричные группы и представления унитарных групп. Некоторые простые неабелевы группы не распознаются по своим спектрам. Мы предложили подход для распознавания групп по нижнему слою. В статье рассматриваются некоторые примеры простых неабелевых конечных групп, не распознаваемых по спектру, но распознаваемых одновременно по спектру и по нижнему слою.

There are many examples of using of group theory in research on crystallography. In particular, in these studies matrix groups and representations of unitary groups are actively used. For such groups we give an overview of the results on their recognition by the spectrum (by the orders of the elements of the group). This direction has been intensively developed in recent years. Some simple non-Abelian groups are not recognizable by their spectra. We have proposed an approach for recognizing groups by the bottom layer. The bottom layer of a group is the set of its elements of prime orders.

A group is called recognizable by the bottom layer under additional conditions if it is uniquely restored by the bottom layer under these conditions.

The paper considers some examples of simple non-Abelian finite groups that are not recognizable by spectra but simultaneous recognizable by spectrum and by the bottom layer.

Many publications have been devoted to applications of group theory to crystallography (see, for example, [1–6]). Group theory is a powerful tool for studying symmetric systems. Such systems include, in particular, molecules and crystals. The monograph [1] examines the application of group theory to the study of the vibrations of atoms that make up a molecule relative to their equilibrium positions. A.V. Gadolin gave a clear description of 32 crystallographic groups [2].

The symmetry group G is usually determined by several elements, raising the latter to a power or multiplying them until new symmetry elements appear. In most cases, rotations, reflections and translations act as elements of G. A physical system that exists due to the attraction between its components has a ground state with maximum symmetry. Mathematically, this means that the ground state must be invariant with respect to all operations of the group.

Crystals have symmetry. This means that the atoms or ions that make up the crystal are arranged in an orderly spatial lattice. Although real crystals are finite, they are nevertheless limited to considering the model of an infinite crystal. The symmetry of an infinite crystal is determined, as already mentioned, by both rotations and translations combining the crystal with itself and forming the so-called crystalline groups.

Group theory serves to explain the most important characteristics of atomic spectra [3]. When considering specific problems, group theory allows us to draw conclusions about the behavior of the system without complex calculations using ideas about the symmetry of the system. Such predictions are essential in the study of spectra. Regarding the resulting levels, their symmetry properties are known. Therefore, each level corresponds to three representations: one representation of a symmetric group, one is a group of rotations, and one is a group of reflections.

Optical transitions occur only between levels that have certain properties or rules. These rules should follow from quantum mechanics. In the study of atomic spectra, symmetric groups and unitary matrix groups are used. In this case, non-Abelian groups of rotations and reflections are studied. Various representations of unitary groups are also being studied.

Group theory has now found application in many fields of physics [4]. The main role in modern particle physics are played the unitary groups. These groups are the groups of spin and isotopic transformations, and also forms the basis of the transformation groups of weak interactions. The unitary group $SU(3)$ is the basis of the unitary symmetry model.

Other important examples of the specific application of group theory and their representations are examples of calculations of such important characteristics of elementary particles as magnetic moments and axial-vector coupling constants in a unitary symmetry model [5].

One of the main tasks of atomic physics and nuclear physics is to determine the energy levels of a system of equivalent particles. Since it is impossible to precisely solve this problem for a system of interacting particles, one has to resort to perturbation theory methods. In this case, the perturbation will consist of some part of the field of one particle plus the interaction between the particles. If the particles are identical, then the interaction operator will be symmetric over all particles.

The wave function is considered as a vector in n-dimensional space spanned by basis vectors. If the basis vectors are subjected to a unitary transformation, we get another basis for the same vector space. In addition, unitary transformations can be made unimodular. As a result, we can assume that the space spanned by functions gives us a basis for representing the unitary unimodular group $SU(n)$ [6].

Recognition of finite simple non-Abelian groups by their spectra has been studied for last thirty years in Yekaterinburg at the Institute of Mathematics and Mechanics of

Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, in Chelyabinsk Federal University, and in the Novosibirsk Institute of Mathematics of Siberian Division of the Russian Academy of Sciences: A. S. Kondratiev, V. D. Mazurov, A. V. Vasiliev, A. A. Buturlakin and others [7–12].

The *spectrum* $\omega(G)$ of a finite group G is called the set of all element orders of G.

In other words, a natural number n is in $\omega(G)$ if and only if there is an element of order n in G.

A finite group G is called *recognizable by its spectrum* if any finite group whose spectrum coincides with the spectrum of G is isomorphic to G [7].

Among the results on recognizability of simple non-Abelian groups, a typical result is the theorems of A. V. Vasiliev [8].

Almost all simple non-Abelian groups are recognizable by their spectra. But there are exceptions: different groups of this set have the same spectra.

We show the possibility of recognizing by the bottom layer for such simple non-Abelian groups with the same spectrum on the example of the groups $S_6(2)$ and $O_{8^+}(2)$. Groups $S_6(2)$ and $O_{8^+}(2)$ are unrecognizable by their spectra [8].

The *bottom layer* of a group is the set of its elements of prime orders [13].

The groups $S_6(2)$ and $O_{8^+}(2)$ can not be recognized by spectrum alone can be recognized by the combination of their spectrum and bottom layer.

By the bottom layer of a group, you can sometimes recognize a group, sometimes you can say something about the properties of such a group. Among the results of groups recognized by the bottom layer with the additional condition, that the groups without a unit element coincide by the bottom layer are the following: if the bottom layer of the group consists of elements of order 2 and the group does not have non-identity elements of other orders, then G is an elementary Abelian 2-group; if the bottom layer consists of elements of orders 2, 3, 5 and the group has no nonidentity elements of other orders, then A. S. Kondratiev and V. D. Mazurov proved that this is a group of even permutations on five elements [14].

The almost recognizable by bottom layer groups in the class of infinite layer-finite groups are the groups in the following example. V. P. Shunkov proved that if the bottom layer in an infinite layer-finite group consists of one element of order 2, then the group G is either a quasicyclic or an infinite generalized group of quaternions [15].

This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2022-876).

Conclusion

The paper gives some examples of applications of finite groups in crystallography. A small review of the results on the recognition of simple non-Abelian groups by their spectra is presented. The recognizability of some simple non-Abelian groups by both their spectra and their bottom layer for groups that are not recognizable by their spectra is provided. In particular, the groups $S_6(2)$ and $O_{8^+}(2)$ can not be recognized by spectrum alone can be recognized by the combination of their of their spectrum and bottom layer.

References

1. Ivanov E.N. The Theory of Groups and its Applications in Physics. Moscow: MIET, 2006. 160 p.
2. Kartonova L.V. Fundamentals of Crystallography Vladimir: Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletovs, 2015. 80 p.
3. Wigner E. Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanical Theory of Atomic Spectra Moscow: Inostrannaya Literatura. 1961. 444 p.
4. Lyubarsky G.Ya. Group Theory and its Application in Physics. Moscow: Gostekhizdat. 1957. 354 p.
5. Artamonov V.A., Slovokhotov Yu.L. Groups and Their Applications in Physics, Chemistry, Crystallography: Textbook for students of higher institutions. Moscow: Publishing Center «Academy», 2005. 512 p.
6. Hammermesh M. Group Theory and its Application to Physical Problems. Moscow: Mir, 1966. 588 p.
7. Buturlakin A.A., Vasiliev A.V. On constructive recognition of finite simple groups by the orders of their elements. Algebra and Logic. 2014. № 4 (53). P. 541–544.
8. Vasiliev A.V. On the recognition of all finite non-Abelian simple groups whose prime divisors of orders do not exceed 13. Sibirsk. Math. Zhurn. 2005. № 2 (46). P. 315–324.
9. Vasiliev A.V., Staroletov A.M. Almost recognizability by spectrum of simple exceptional groups of Lie type. Algebra and Logic. 2014. № 6 (53). P. 669–692.
10. Gorshkov I.B. Recognition of symmetric groups by spectrum. Algebra and Logic. 2014. № 6 (53). P. 693–703.
11. Mazurov V.D. Characterization of finite groups by sets of orders of their elements. Algebra and Logic. 1997. № 1 (36). P. 37–53.
12. Mazurov V.D. On groups of exponent 60 with exact orders of elements. Algebra and Logic. 2000. № 3 (39). P. 189–198.
13. Parashchuk I.A., Senashov V.I. Restoration of information about the group by the bottom layer. Siberian Mathematical Journal of Science and Technology. 2018. № 2 (19). P. 223–226.
14. Kondratiev A.S., Mazurov V.D. Recognition of alternating groups of prime degree by the orders of their elements. Sib. matem. journal. 2000. № 2 (41). P. 360–371.
15. Shunkov V.P. On a class of p-groups. Algebra i logika. 1970. № 4 (9). P. 484–496.

РАСПОЗНАВАНИЕ ГРУПП ПО НИЖНЕМУ СЛОЮ

GROUPS RECOGNITION BY THE BOTTOM LAYER

В.И Сенашов, И.А. Паращук **V.I. Senashov, I.A. Parashchuk**

Groups, layer-finite group, bottom layer, spectrum, recognizability, finite simple non-abelian groups.

The article discusses the possibility of recognizing a group by the bottom layer, that is, by the set of its elements of prime orders. The paper gives examples of groups recognizable by the bottom layer, almost recognizable by the bottom layer, and unrecognizable by the bottom layer. Results are obtained for recognizing a group by the bottom layer in the class of infinite groups under some additional restrictions. The notion of recognizability of a group by the bottom layer was introduced by analogy with the recognizability of a group by its spectrum.

Группа, слойно конечная группа, нижний слой, спектр, распознаваемость, конечные простые неабелевы группы.

В статье обсуждена возможность восстановления группы по нижнему слою, то есть по множеству её элементов простых порядков. Приведены примеры распознаваемых по нижнему слою, почти распознаваемых по нижнему слою и нераспознаваемых по нижнему слою групп. Получены результаты восстановления группы по нижнему слою в классе бесконечных групп при некоторых дополнительных ограничениях. Понятие распознаваемости группы по нижнему слою введено по аналогии с распознаваемостью группы по спектру.

The article discusses the possibility of restoring groups by the bottom layer under additional conditions.

The bottom layer of a group is the set of its elements of prime orders.

A group is called recognizable by the bottom layer under additional conditions if it is uniquely reconstructed by the bottom layer under these conditions.

A group G is called almost recognizable by the bottom layer under additional conditions if there exists a finite number of pairwise non-isomorphic groups satisfying the same conditions, with the same bottom layer as the group G.

A group G is called unrecognizable by the bottom layer under additional conditions if there exists an infinite number of pairwise non-isomorphic groups satisfying the same conditions, with the same bottom layer as the group G.

Many results for groups with a given bottom layer describe some of the properties of the groups. For example, V.D. Mazurov proved that a group with a bottom layer consisting of elements 2, 3, 5, in which all other non-identity elements are of order 4, is locally finite [1]. If the bottom layer of finite group consists of elements of orders 2, 3, 5 and the group contains no non-identity elements of other orders, then W. Shi proved that this is a group of even permutations on five elements [2].

Among the results on recognizability by the bottom layer, we can name those that describe the entire structure of the group by its bottom layer. For example: if the bottom layer of an infinite group consists of elements of order 2 and the group does not have non-identity elements of other orders, then G is an infinite elementary Abelian 2-group. That is, the group under such conditions is recognizable by the bottom layer.

V.P. Shunkov proved that if the bottom layer in an infinite layer-finite group consists of one element of order 2, then the group is either quasi-cyclic or an infinite generalized group of quaternions [3]. In this example, groups are almost recognizable by the bottom layer.

If the set of orders of elements of the bottom layer of an infinite group is small in terms of the number of its constituent numbers, but not in magnitude, then such examples of groups are quite rare. According to the figurative expression of Yu.I. Merzlyakov, they are comparable with "samples of lunar soil". Such examples include monsters of A.Yu. Olshansky. Olshansky groups, as well as direct products of cyclic groups of prime order, are examples of groups without a single element coinciding with their bottom layer.

The results on group recognition by the bottom layer were reported at the conferences [4–6] and published in journals [7–9].

In articles [8, 9] the recognizability by the bottom layer of the complete group is considered under slightly different conditions: layer finiteness of the group or the existence of a layer finite subgroup S in the center of the group G such that G/S is layer finite group. In the same papers, it was proved that a group is recognizable by the bottom layer among locally solvable group without involutions with the minimality condition.

It is convenient to consider the recognition of groups by the bottom layer in the class of layer-finite groups. However, we can also consider other classes of groups.

Now we consider under which conditions it is possible to recognize groups by the bottom layer in the class of infinite groups.

Periodic complete Abelian groups are not necessarily layer-finite. The next theorem establishes the recognizability of a group by the bottom layer in this class of groups.

Radically complete groups are not necessaryily layer-finite. For example, direct product of infinite number of quasi-cyclic groups for the same prime number is radically complete, but it is not a layer- finite group.

The notion of recognizability of a group by the bottom layer was introduced by analogy with the recognizability of a group by its spectrum.

The spectrum of a finite group is a set of orders of its elements.

A finite group G is called recognizable by spectrum if any finite group which has the spectrum coinciding with the spectrum of G is isomorphic to G. A group G is called almost recognizable by its spectrum if there are finitely many pairwise non-isomorphic groups with the same spectrum as the group G. A group G is called spectrum-unrecognizable if there are infinitely many pairwise non-isomorphic groups with the same spectrum as G.

Results on groups recognizable by spectrum could be found in the works of A.V. Vasil'ev, V.D. Mazurov, A.M. Staroletov, A.A. Buturlakin, M.A. Grechkoseeva, and others [10–20].

An example of a group that is not recognizable by spectrum is group A_6 with the spectrum 2, 3, 4, 5, 8, 9 (there are infinitely many groups, one of which is group A_6 [11].

Also the group $L_3(3)$ with the spectrum 2, 3, 4, 8, 9, 13, 16, 27 is unrecognizable by spectrum [11].

It is proved in [13] that the symmetric groups S_n are recognizable by spectrum for some n. In 1994, W. Shi and R. Brandl proved the recognizability of an infinite series of simple linear groups $L_2(q)$, $q \neq 9$ [14; 15].

By $h(G)$ it is denoted the number of pairwise non-isomorphic finite groups G with the same spectrum [16].

Almost all finite simple non-Abelian groups are recognized by their spectrum in the class of finite simple non-Abelian groups. However, there are some exceptions: different groups of this set have the same spectra.

The possibilities of recognizing of some finite and infinite layer-finite groups by the bottom layer are considered. Results are obtained for recovering groups by the bottom layer in the class of infinite groups with some additional conditions. It is proved that all simple non-Abelian groups are simultaneously recognizable by spectrum and bottom layer in the class of finite simple non-Abelian groups.

This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2022-876).

References

1. Mazurov V.D. On groups of exponent 60 with exact orders of elements // Algebra and Logic. 2000. Vol. 39. No. 3. P. 189–198.
2. Shi W. A characteristic property of A5 // J. Southwest-China Teachers Univ. 1986. Vol. 3. P. 11–14.
3. Shunkov V.P. On a one class of p-groups // Algebra i logika. 1970. Vol. 9. P. 484–496.
4. Senashov V.I., Parashchuk I.A. On the recognition of groups by the bottom layer // Actual problems of aviation and cosmonautics. 2019. Vol. 2. P. 291–293.
5. Parashchuk I.A., Senashov V.I. On the influence of the bottom layer of the group on the structure in different classes of groups // Actual problems of aviation and cosmonautics. 2020. Vol. 2. P. 293–295.
6. Senashov V.I., Parashchuk I.A. On the recognition of layered finite groups by the bottom layer // Actual problems of aviation and cosmonautics. 2021. Vol. 2. P. 460–463.
7. Senashov V. I., Parashchuk I.A. On a bottom layer group // Bulletin of the Karaganda University. 2020. No. 100. P. 136–142.
8. Parashchuk I.A., Senashov V.I. Recovering information about a group by the bottom layer // Siberian Mathematical Journal of Science and Technology. 2018. Vol. 19. No. 2. P. 223–226.
9. Senashov V.I., Parashchuk I.A. Restoration of the group by the bottom layer // Bulletin of Tuva State University. 2018. No. 3. P. 114–118.
10. Buturlakin A. A. Isospectral finite simple groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2010. Vol. 7. P. 111–114.
11. Vasilev A.V., Staroletov A.M. Almost recognizability by spectrum of simple exceptional groups of Lie type // Algebra and Logic. 2014. Vol. 53. No. 6. P. 669–692.
12. Buturlakin A.A., Vasilev A.V. On constructive recognition of finite simple groups by the orders of their elements // Algebra and Logic. 2014. Vol. 53. No. 4. P. 541–544.
13. Gorshkov I.B. Recognition of symmetric groups by spectrum // Algebra and Logic. 2014. Vol. 53. No 6. P. 693–703.

14. Shi W. A characteristic property of J1 and PSL2(2n) // Adv. Math. Vol. 16. P. 397–401.
15. Brandl R., Shi W. The characterization of PSL(2,q) by its element orders // J. Algebra. 1994. Vol. 163. No. 1. P. 109–114.
16. Vasil'ev A.V. On the recognition of all finite non-Abelian simple groups whose prime divisors of orders do not exceed 13 // Sibirsk. mat. zhurn. 2005. Vol. 46. No. 2. P. 315–324.
17. Vasilev A.V., Grechkoseeva M.A. Recognizability by spectrum for simple classical groups in characteristic 2 // Siberian Mathematical Journal. 2015. Vol. 56. P. 1264–1276.
18. Grechkoseeva M.A., Lytkin D.V. Almost recognizability by spectrum of finite simple linear groups of prime dimension // Siberian Mathematical Journal. 2012. Vol. 53. No. 4. P. 805–818.
19. Mazurov V.D. Characterization of finite groups by sets of orders of their elements // Algebra and Logic. 1997. Vol. 36. No. 1. P. 37–53.
20. Mazurov V.D. Unrecognizability of a finite simple group 3D4(2) by spectrum // Algebra and Logic. 2013. Vol. 52. No. 5. P. 601–605.

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕ $\mathbb{C}$-ЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА КОШИ–РИМАНА

AN INCORRECT CAUCHY PROBLEM FOR ONE NOT $\mathbb{C}$-LINEAR PERTURBATION OF THE OPERATOR CAUCHY–RIEMANN

Ю.А. Хорьякова **Y.A. Khoryakova**

Фундаментальное решение, формула Грина, некорректная задача Коши, оператор эллиптического типа.

В работе построено двустороннее фундаментальное решение для одного $\mathbb{R}$-линейного, но не $\mathbb{C}$-линейного возмущения одномерного оператора Коши–Римана. Как следствие, получена формула Грина для этого возмущения, и на ее основе доказан критерий разрешимости некорректной задачи Коши в пространствах Гельдера для такого возмущенного дифференциального оператора в терминах вещественно-аналитического продолжения потенциалов, участвующих в формуле Грина.

Fundamental solution, Green's formula, incorrect Cauchy problem, elliptic type operator.

In this paper, a two-sided fundamental solution is constructed for one R-linear, but not C-linear perturbation of the one-dimensional Cauchy-Riemann operator. As a consequence, the Green formula for this perturbation is obtained and, based on it, the criterion for the solvability of the ill-posed Cauchy problem in Helder spaces for such a perturbed differential operator is proved in terms of the real-analytic continuation of the potentials involved in Green's formula.

Рассмотрим следующий оператор, являющийся возмущением оператора Коши–Римана:

$$\bar{\partial} + A,$$

где по определению для комплекснозначной функции оператор

$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} \pm a & b \\ b & \pm a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. [1] Отметим, что в случае, когда диагональные элементы b матрицы A равны нулю, матрица A будет действовать на U как комплексное сопряжение:

$AU = \bar{U}$, тогда дифференциальный оператор $\bar{\partial} + A$ будет являться линейным над полем вещественных чисел и не являться линейным над полем комплексных чисел (он аддитивен, но не однороден).

Основная цель данной статьи – описание критерия разрешимости задачи Коши для данного оператора, построение фундаментального решения, формулы Грина.

Для нахождения фундаментального решения оператора $\bar{\partial} + A$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма. При действии оператора $\bar{\partial} + A$ справа и слева на сопряженный ему оператор $(\bar{\partial} + A)^*$ получим оператор Гельмгольца:

$$(\bar{\partial} + A)(\bar{\partial} + A)^* U = (\bar{\partial} + A)^* (\bar{\partial} + A) = -\frac{\Delta}{4} U + (a^2 + b^2) U.$$

Таким образом, исходя из этого, мы получаем следующую теорему.

Теорема. Для оператора $\bar{\partial} + A$ двустороннее фундаментальное решение имеет вид:

$$\Phi_A(\zeta, z) = (\bar{\partial} + A)^* \, \Phi(\zeta, z),$$

где

$$\Phi(\zeta, z) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\zeta - z|),$$

– фундаментальное решение оператора Гельмгольца [3,§ 23, п. 8].

Теорема. Пусть D – ограниченная область с гладкой границей ∂D. Если $u: D \to \mathbb{C}$ функция класса $C^1(\underline{D})$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \Phi_A(\zeta, z) u(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \Phi_A(\zeta, z)(\overline{\partial} + A) f(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \begin{cases} u(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases}$$

где ориентация ∂D индуцирована естественной ориентацией $\mathbb{C}$.

Рассмотрим следующую задачу Коши.

Задача 1. По заданным F в области D и U_0 на S найти U

$$\begin{cases} \overline{\partial} U + AU = F \text{ в } D, \\ U|_s = U_0, \end{cases}$$

где S – часть гладкой границы ∂D ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$.

Эта задача есть не $\mathbb{C}$-линейное возмущение классической задачи Коши для системы Коши–Римана, см. [4].

При ее решении мы воспользуемся методом, предложенным в работе Л.А. Айзенберга и А.М. Кытманова [5], позднее адаптированным к изучению некорректной задачи Коши для широкого класса эллиптических систем, см. [2] и [6]. Достроим к области D двойственную область D^+ с гладкой границей ∂D^+ так, чтобы множество $D \cup S \cup D^+$ было односвязной областью. И тогда верен следующий критерий о разрешимости данной задачи.

Теорема. Пусть D – ограниченная область с гладкой границей $\partial D \in C^2$. Пусть $u_0(z) \in C^{1,\lambda}(\bar{S}), f(z) \epsilon\, C^{0,\lambda}(\bar{\mathrm{D}})$. Тогда существует $u(z)$ решение задачи Коши (1) из $\epsilon\, C^{1,\lambda}(D \cup S)$ тогда и только тогда, когда существует функция $F(z) \epsilon\, C^{1,\lambda}(D \cup S \cup D^+)$ такая, что

$$(-\Delta + a^2 + b^2) F(z) = 0 \text{ в } D \cup S \cup D^+,$$

и

$$F(z) = \frac{i}{4} \int_S \Phi_A(\zeta, z) \mathrm{u}_0(\zeta) d\zeta + \frac{i}{4} \int_D \Phi_A(\zeta, z) \mathrm{f}(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \text{ в } D^+,$$

причем

$$u(z) = \frac{i}{4}\int_S \Phi_A(\zeta, z) \mathrm{u}_0(\zeta) d\zeta + \frac{i}{4}\int_D \Phi_A(\zeta, z) \mathrm{f}(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta - F(z) \text{ в } D.$$

Библиографический список

1. Айзенберг Л.А., Кытманов А.М. О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы // Матем. сборник, 182:4. 1991. С. 490–507.
2. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. 248 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Изд-во «Лань», 2004. 336 с.
5. Tarkhanov N.N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations. Berlin: Akademie-Verlag, 1995. 478 p.
6. Shlapunov A.A., Tarkhanov N.N. Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols // Proc. London. Math. Soc. 1995. V. 71, N. 1. P. 1–54.

СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ, КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ И ШКОЛЬНИКОВ

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ

FEATURES OF STUDYING STEREOMETRY IN SCHOOL USING VIRTUAL REALITY TECHNOLOGIES

Ф.Э. Аликулова, М.В. Головенко **F.E. Alikulova, M.V. Golovenko**

Виртуальная реальность, стереометрия, VR-технология, VR-оборудование, технологическое развитие, цифровизация образования, наглядность.

Стереометрия, как и геометрия в целом, требует от преподавателя предоставления материала в наглядном виде. Традиционные методы визуализации уже давно стали неактуальными в связи с цифровизацией образовательного процесса. В статье рассматривается возможности VR-технологии и трудности, возникающие при использовании виртуальной реальности как средства обучения стереометрии.

Virtual reality, stereometry, VR technology, VR equipment, technological development, digitalization of education, visibility.

Stereometry, like geometry in general, requires the teacher to provide material in a visual form. Traditional visualization methods have long become irrelevant due to the digitalization of the educational process. The article discusses the possibilities of VR technology and the difficulties that arise when using virtual reality as a means of teaching stereometry.

В последние годы технологическое развитие привносит свои коррективы во все сферы жизнедеятельности человека. В частности влиянию новаций был подвержен и процесс образования. На смену традиционным бумажным носителям пришли информационные хранилища, возможность сделать обучение более наглядным стало определяющей стороной современного образования.

Стереометрия как наука, изучающая свойства фигур в пространстве, становится наиболее сложной в школьном курсе как раз за счет проблем с наглядностью. По данным Федерального института педагогических измерений, подготовка учащихся в области стереометрии на сегодняшний день находится на низком уровне и имеет тенденцию к снижению [9]. Именно поэтому еще с 1986 года стали создаваться первые среды динамической геометрии, которые позволили изучать трехмерные объекты и показали богатство образовательных возможностей программных продуктов [10]. Позднее изобретение технологий VR и AR реальностей сделало возможным полностью или частично взаимодействовать с трехмерной средой.

Цель настоящей статьи – изучить возможность и особенность применения виртуальной реальности как средства изучения стереометрии в российских школах.

Несмотря на то, что подобные технологии впервые стали широко популярны в игровой индустрии, на сегодняшний день VR и AR реальности активно внедряются в различные сферы деятельности, в том числе и в образование. В нашей стране впервые начали применять VR-технологии в 2016 и 2017 годах. С 2018 года идет активная разработка образовательных проектов по внедрению виртуальной реальности в образовательный процесс: «Образование-2024», «Цифровая школа», «Современная цифровая образовательная среда», «Цифровая экономика Российской Федерации» [3]. Возросший спрос на системы виртуальной реальности связан с их положительным влиянием на образовательный процесс, который подтверждают проведенные исследования. Так, в Пекинском университете в исследовании «Влияние виртуальной реальности на академическую деятельность» у группы студентов, использующей VR при изучении дисциплины, результаты контрольного тестирования, проведенного через две недели, были на 20 % успешней, по сравнению с группой, изучающей предмет классическим образом.

Кроме того, исследования, проводимые в последние годы по внедрению виртуальной реальности в процесс обучения, показали следующие преимущества VR:

– рост мотивации и заинтересованности учащихся;

– самостоятельность обучения с возможностью совершения ошибок;

– возможность обучения в недоступных или опасных средах;

– более глубокое понимание теории;

– компенсация отсутствующего лабораторного оборудования;

– персонализация обучения при возможности работы учащихся в собственном темпе.

Влиянием виртуальной реальности с психологической точки зрения занимались многие исследователи (П. В. Сорочинский, В.В. Селиванов, Ю.Н. Усов, П.А. Побокин и др.). Изучение данной тематики позволило сделать выводы об эффективности использования виртуальной реальности при решении предметных (П.А. Побокин) [2] и латеральных (В.В. Селиванов) [6] задач, а также при развитии творческой составляющей (Ю.Н. Усов) [8]. Так, П.В. Сорочинский в своей статье «Изменение характеристик мышления и психического состояния человека под влиянием виртуальной реальности» выделяет следующие благоприятные психические состояния человека, которые формируются при работе с виртуальной обучающей программой:

– при решении предметной задачи увеличивается в положительную сторону характер прогнозов искомого решения;

– анализ через синтез приобретает все больше черт направленности;

– подсказки для решения задачи применяются все чаще и эффективнее;

– соотношение условий и требований задачи в мышлении отражаются все четче и перспективнее в плане решения [7].

Несмотря на столь выраженные достоинства VR-технологий, их использование в образовании все же подразумевает определенные трудности, которые тем не менее являются преодолимыми.

Одной из наиболее выраженных препятствий на пути к цифровизации обучения в целом является нехватка педагогов, обладающих навыками работы с виртуальными технологиями. По данным Центра НТИ ДВФУ, в России на данный момент более 15 компаний разрабатывают образовательные AR/VR-продукты, с помощью которых становится возможным освоение навыков VR-программирования. Так, в каталогах App Store, Google Play и Steam можно найти AR/VR образовательные продукты, также на данный момент ведутся работы над ПО, специализированное под VR.

Кроме того, внедрение систем виртуальной реальности проводится еще не в полной мере за счет того, что VR-оборудование имеет довольно высокую цену на технологическом рынке. Несмотря на вышеизложенное, в начале 2019–2020 года 2 тысячи сельских школ получили VR-оборудование в рамках проекта «Образование». До 2024 года из российского бюджета планируют выделить около 750 млн руб. на цифровизацию детского образования.

В связи с тем, что использование VR-оборудования в образовательном процессе началось относительно недавно, контента, охватывающего множество учебных дисциплин, недостаточно, а его разработка представляется для педагогов трудоемким процессом. Но на данный момент в России VR-технологии активно изучаются в МГУ им. М.В. Ломоносова, Нетология-групп, НИУ ВШЭ, Modum Lab и ДВФУ, которые разрабатывают и апробируют эффективные программы с применением VR-технологий по различным дисциплинам. Говоря конкретно про образовательный контент для изучения стереометрии с применением виртуальной реальности, можно выделить созданную в 2021 году Дальневосточным федеральным университетом программу «Stereometry VR», деятельность которой заключается в подготовке к курсу стереометрии путем самостоятельного освоения физических действий с пространственными объектами [4].

Еще одной преградой для внедрения виртуальных систем в школы становятся существующие заблуждения относительно VR-технологий, к примеру, большинство заблуждений связано с медико-биологическими и психологическими нарушениями. Одним из основных заблуждений подобного типа считается мнение о том, что использование VR-шлема приводит к нарушению зрения и проблемам с вестибулярным аппаратом, однако в действительности современные VR-шлемы являются безопасными для органов зрения, поскольку состоят из материала, который не выделяет никаких частиц, помимо фотонов света [5].

Что касается использования виртуальной реальности в стереометрии, то наиболее целесообразно осуществлять деятельность учащихся с VR-технологиями при открытии новых фактов и свойств, таким образом, виртуальная реальность становится эффективным средством проведения экспериментов, на которых происходит начальное усвоение теоретических положений. Как отмечается в [1], «у обучаемых при проведении экспериментов развивается умение наблюдать, получать информацию, сортировать и классифицировать ее, предсказывать и проводить испытания. Обучение с помощью эксперимента и исследования строится на различиях в способностях учащихся; оно исходит из глубокого уважения к учащемуся как личности; опирается скорее на развитие его сильных сторон, чем на попытку избавиться от слабых сторон. Насыщение сугубо теоретического курса геометрии компьютерными экспериментами позволяет превратить его в теоретико-экспериментальный курс».

Таким образом, можно сказать, что на сегодняшний день в помощь учителю предложено огромное количество средств для визуализации стерео чертежей, однако предлагаемые школам учебные пособия не адаптированы под применение современных систем, в частности систем виртуальной реальности. И это, на наш взгляд, большое упущение, поскольку, как показывает большинство исследований, использование VR-технологий не только облегчает сам процесс усвоения теории стереометрии и делает ее интересной, но и способствует развитию у учащихся способностей к представлению и изображению стандартных стереометрических конфигураций. Несмотря на все трудности, VR-технологии в настоящее время активно развиваются и уже через пару лет будут доступны многим образовательным организациям.

Библиографический список

1. Майер В.Р. Компьютерные исследования и эксперименты при обучении геометрии // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2012. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kompyuternye-issledovaniya-i-eksperimenty-pri-obuchenii-geometrii (дата обращения: 07.11.2022).
2. Побокин П.А. Целесообразность использования средств виртуальной реальности в курсе изучения стереометрии // Психология когнитивных процессов. Смоленск, 2014. С. 218–222.
3. Распоряжение 2020 – Распоряжение Министерства просвещения РФ от 18 мая 2020 года № Р-44 «Об утверждении методических рекомендаций для внедрения в основные общеобразовательные программы современных цифровых технологий».
4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021618517 Российская Федерация. Программа для решения учащимися задач курса пропедевтики стереометрии с применением виртуальной реальности «STEREOMETRY VR» : № 2021617304 : заявл. 18.05.2021 : опубл. 28.05.2021 / В.Ю. Гусев, С.В. Дацюк, Е.А. Ширяев; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет», Общество с ограниченной ответственностью «Мастерская науки». EDN MNODTE.
5. Селиванов В.В., Селиванова Л.Н. Виртуальная реальность как метод и средство обучения // Образовательные технологии и общество. 2014. Т. 17, № 3. С. 378–391.
6. Селиванов В.В. Использование методов виртуальной реальности в развитии интеллекта и обучении // Образование в современном информационном обществе: синергетическая модель. Саратов, 2009. С. 135–139.
7. Сорочинский П.В. Изменение характеристик мышления и психического состояния человека под влиянием виртуальной реальности // Вестник Череповецкого государственного университета. 2014. № 7 (60). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/izmenenie-harakteristik-myshleniya-i-psihicheskogo-sostoyaniya-cheloveka-pod-vliyaniem-virtualnoy-realnosti (дата обращения: 07.11.2022).
8. Усов Ю.Н. Виртуальное мышление школьников в приобщении к различным видам искусства // Искусство в школе. 2000. № 6. С. 3–6.
9. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». URL: https://fipi.ru/ (дата обращения: 07.11.2022).
10. Шабанова М.В. Системы динамической геометрии в обучении математике: проблемы и пути их решения // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2013. № 9. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/sistemy-dinamicheskoy-geometrii-v-obuchenii-matematike-problemy-i-puti-ih-resheniya (дата обращения: 08.11.2022).

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE В ПРЕПОДАВАНИИ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

SOME METHODICAL ASPECTS OF COMPUTER MATHEMATICS SYSTEM MAPLE USING FOR ALGEBRA AND GEOMETRY TEACHING

О.А. Баркович **O.A. Barkovich**

Система компьютерной математики Maple, алгебра, геометрия, учебный материал, преподаватель, студент, мини-группа, целостность.

Рассматриваются методические аспекты использования системы компьютерной математики Maple в процессе обучения студентов алгебре и геометрии в педагогическом университете. Подчеркивается важность применения системы Maple в качестве компьютерной поддержки при проведении практических занятий, чтении лекций и выполнении учебно-исследовательских заданий по алгебре и геометрии. Проанализированы различные подходы к совершенствованию подготовки студентов области компьютерной системы Maple и математики.

Computer mathematics system Maple, algebra, geometry, training material, teacher, student, mini-group, integrity.

The methodical aspects of computer mathematics system Maple using in the process of algebra and geometry teaching for students at the Pedagogical University are considered. The importance of system Maple as computer support during practical lessons, lectures and educational investigation tasks in algebra and geometry is emphasized. Various approaches to improving the training of students in the field computer system Maple and mathematics are analyzed.

Развитие информационных технологий актуализирует необходимость разработки компьютерного обеспечения таких учебных дисциплин математического цикла, как алгебра и геометрия. Будущему преподавателю математики как никогда ранее важно овладеть не только традиционными технологиями обучения, но и уметь организовать эффективное взаимодействие в процессе изучения математики с опорой при необходимости на систему компьютерной математики Maple, которая позволяет эффективно выполнять в том числе и символьные преобразования и вычисления без предварительного программирования.

С помощью системы компьютерной математики Maple можно решить такие традиционные проблемы преподавания алгебры, как контроль правильности полученного ответа, вспомогательные громоздкие рутинные вычисления, проведение трудоемких численных экспериментов. В учебно-методическом пособии по алгебре [1] параллельно с теоретическим курсом алгебры представлено краткое введение в Maple с примерами решения некоторых задач в системе

Maple: операции с комплексными числами и матрицами, вычисление определителей, нахождение обратной матрицы, решение систем линейных уравнений.

Благодаря Maple студенты получают возможность проверить правильность вычислений при выполнении домашних и аудиторных заданий. Преподавателям система Maple позволяет подбирать многовариантные задания с «красивыми» ответами в натуральных числах, облегчает проверку контрольных работ. С помощью этой системы, например, довольно быстро можно составить 30 вариантов задания «Вычислить определитель матрицы четвертого порядка», так что на первый взгляд все матрицы будут совершенно разными, но будут иметь определитель, равный 1. Или составить 30 систем линейных уравнений, имеющих один и тот же ответ.

При изучении аналитической геометрии система Maple позволяет визуализировать построения на плоскости и в пространстве, посмотреть на них с разных точек зрения. Особенно Maple востребована в стереометрии, при компьютерном моделировании сечений призм, пирамид. Целесообразно использование этой системы при построении и анализе поверхностей второго порядка.

Одним из перспективных направлений является организация самостоятельной работы студентов в мини-группах. Умение работать в команде, организовать эффективное взаимодействие между членами команды в наши дни очень востребовано. В статье [2] проанализированы методические особенности организации самостоятельной работы студентов по алгебре в мини-группах при выполнении домашних заданий, участии в мини-проектах.

Заставить студента понять учебный материал невозможно. Для создания и поддержания развивающей среды, способствующей возникновению чувства сопереживания идеям, воплощенным в математических понятиях, построениях и теоремах, целесообразно использовать метод мини-групп.

Во время презентации заданий, выполненных в мини-группах, приветствуется использование системы компьютерной математики Maple для демонстрации ее вычислительных возможностей, а также возможностей динамической визуализации фигур и поверхностей, полученных в результате умозрительного анализа.

Такой подход способствует восстановлению представления об алгебре и геометрии как едином целом, в котором разные на первый взгляд понятия, идеи, гипотезы, построения неразрывно связаны друг с другом. Это созвучно с тезисами монографии О.А. Сотниковой, в которой за теоретическую основу методологических позиций, применительно к процессу обучения алгебре, принимается «установление студентом взаимосвязей в предметном содержании, способствующее формированию целостного знания» [4, с. 18].

При решении на практических занятиях по алгебре и геометрии систем задач, позволяющих студентам увидеть изучаемые понятия в целостности и единстве, необходимо тщательно продумать и так организовать процесс обучения, чтобы студентам было интересно решать предложенные задачи. Для этого можно использовать как метод мини-групп, так и ментальные карты, а также систему компьютерной математики Maple.

Во время презентации результатов, полученных в мини-группах, целесообразно использовать ментальные карты с элементами вычислений и изображений, полученных с помощью системы Maple [3]. Ориентируясь на развернутую схему учебного исследования, проведенного в мини-группе, студенты получают возможность, представить полученные результаты на более глубоком, продвинутом уровне.

От современного высшего образования требуется уже не простое фрагментарное применение методов исследовательского обучения, включая использование систем компьютерной математики, в образовательную практику, а целенаправленная работа по развитию исследовательских способностей. В коллективном сотворчестве формируется умение сопереживать, работать в команде, что крайне важно уметь не только самому, но и научить других будущему преподавателю математики.

Стратегической линией преодоления трудностей в обучении алгебре и геометрии у студентов может выступать организация учебной деятельности, основанная на учете психологических различий студентов выделенных мини-групп, а также с опорой на проблемные зоны развития студентов в каждой мини-группе, использование современных компьютерных технологий.

В эффективно организованном взаимодействии преподавателя со студентами в процессе изучения алгебры и геометрии с психолого-педагогической точки зрения и с точки зрения использования системы компьютерной математики Maple как вспомогательного средства будущие учителя получают возможность не только продемонстрировать знание учебного материала, но и формируют творческие профессиональные навыки будущих педагогов.

Кроме того, такой подход к организации работы в рамках существующей учебной программы позволяет вовлечь большее число студентов в активную работу на лекциях и практических занятиях по алгебре и геометрии.

Библиографический список

1. Баркович О.А. Алгебра: задания для практических занятий и самостоятельной работы: учеб.-метод. пособие: в 2 ч. Минск: БГПУ, 2005. Ч. 1: Введение в алгебру. 134 с.
2. Баркович О.А. Методические особенности организации самостоятельной работы студентов в мини-группах при обучении алгебре // Весці БДПУ. Серия 3. 2015. № 2. С. 35–40.
3. Баркович О.А. Некоторые методические аспекты применения ментальных карт в процессе обучения студентов-психологов основам высшей математики // Актуальные проблемы педагогических исследований: материалы XVIII Аспирантских чтений, г. Минск, 21 апреля 2022 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка; редкол.: С.Н. Сиренко и др.; А.В. Коклевский (отв. ред.). Минск: БГПУ, 2022. С. 13–19.
4. Сотникова О.А. Целостность вузовского курса алгебры как методологическая основа его понимания. Архангельск: Поморский университет, 2004. 356 с.

ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ

INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN HIGHER EDUCATION

О.М. Беличенко, М.Н. Сомова **O.M. Belichenko, M.N. Somova**

Информационно-коммуникационные технологии, самостоятельная деятельность студентов, дистанционное обучение, динамическая среда Moodle, электронный образовательный ресурс, интернет-тренажеры, интернет-олимпиады.

В статье актуализируется роль самостоятельной деятельности студентов в условиях современного вуза, описываются возможности дистанционного обучения для организации самостоятельной работы студентов. Выделены основные методические принципы, реализуемые в дистанционной среде Moodle, описаны основные составляющие электронного образовательного ресурса, созданного в среде Moodle. Рассмотрен опыт использования Единого портала интернет-тестирования в сфере образования для оценки качества образования.

Information and communication technologies, independent activity of students, distance learning, dynamic Moodle environment, electronic educational resource, Internet simulators, Internet Olympiads.

The article actualizes the role of independent activity of students in the conditions of a modern university, describes the possibilities of distance learning for the organization of independent work of students. The main methodological principles implemented in the remote Moodle environment are highlighted, the main components of the electronic educational resource created in the Moodle environment are described. The experience of using a Single Internet testing portal in the field of education to assess the quality of education is considered.

В настоящее время все большую популярность в сфере образования приобретают информационные образовательные технологии. Использование информационно-коммуникационных технологий способствует повышению качества, эффективности и доступности образования.

К информационно-коммуникационным образовательным технологиям относят: системы дистанционного обучения и тестирования, образовательные порталы, компьютерные программы, электронные библиотеки, электронные учебно-методические комплексы и др. Федеральное законодательство в сфере образования предусматривает возможность освоения образовательных программ с помощью дистанционных образовательных технологий.

Заметим, что переход к новым образовательным технологиям, компьютеризация учебного процесса способствует усилению роли самостоятельной работы, когда обучающийся вырабатывает умение самостоятельно выбирать источники информации, овладевает навыками экономии времени и способностью объективной оценки собственного потенциала.

Сегодня происходит переориентация учебных планов на широкое использование самостоятельной работы, она становится основой высшего образования. Поэтому правильная организация самостоятельной работы в условиях современного вуза ведет к повышению качества подготовки специалистов.

Самостоятельная работа является средством организации самостоятельной деятельности студентов. Под самостоятельной деятельностью понимают систему самостоятельной или групповой деятельности студентов, стимулирующую их познавательную активность и развивающую потребность в самообразовании.

Для того чтобы самостоятельная учебно-познавательная деятельность была эффективной, необходимо: правильное сочетание аудиторной и самостоятельной работы под опосредованным руководством преподавателя, обеспечение студентов учебно-методическими материалами, контроль за ходом выполнения самостоятельной работы и своевременная оценка уровня усвоения материала. Эти условия могут быть реализованы с помощью среды дистанционного обучения [1].

Дистанционное обучение может реализовываться с помощью различных программных средств, но наиболее часто используемой является модульная объективно-ориентируемая динамическая среда Moodle. Методическими принципами, реализуемыми в ней, являются: конфиденциальность, возможность многократных повторений изученного материала, динамичность доступа к информации, модульность, наличие постоянно активной справочной системы, автоматизация процедур оценивания, возможность самоконтроля, сохранение истории обучения, обеспечение наглядности и многовариантность представления информации [2].

К дистанционному обучению целесообразно относиться как к конструктору, состоящему из приемов, организующих учебную деятельность студентов. Опыт показывает, например, что полезно комбинировать обучение, проходящее одновременно с применением видеоконференций, с обучением, которое проходит в разное время, удобное для студентов.

Сотрудники кафедры высшей математики Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева (СибГУ) принимают активное участие в разработке электронных образовательных ресурсов (ЭОР). Так, авторами в целях организации и проведения учебных занятий в среде динамического обучения Moodle был разработан и зарегистрирован на портале электронно-дистанционного обучения СибГУ ЭОР по дисциплине «Высшая математика» для студентов направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность».

В состав образовательного ресурса для дистанционного обучения включены: лекционный курс, содержащий теоретический материал, снабженный большим количеством примеров, что способствует отражению всех тонкостей рассматриваемого материала; сборник заданий для практических занятий с контрольными вопросами и материалами по решению типовых задач, в которых приводятся примеры решения основных задач с подробным описанием логического построения решения и правил его оформления; контрольные вопросы к зачетам и экзамену; тесты для самостоятельной проверки уровня знаний; видеоролики из Internet; справочные материалы, расширяющие кругозор знаний; электронные учебники из электронной библиотечной системы «Лань», что позволяет разнообразить содержание учебного материала, при этом студенты могут читать электронные книги изнутри курса.

В СибГУ широкое распространение получил проект «Интернет-тренажеры в сфере образования», когда в рамках образовательного процесса студенты могут тренироваться и проходить текущий контроль знаний, решая задания по федеральным тестовым материалам и тестам, разработанным преподавателями университета. А ежегодное участие одаренных студентов в интернет-олимпиадах по математике дает возможность оценить качество подготовки обучающихся на международном уровне.

Направление современного образования, основанное на использовании информационных технологий, электронных средств обучения и общения в процессе учебной деятельности, является наиболее перспективным для реализации дистанционного образования. Информационно-коммуникационные технологии в образовании, несомненно, имеют потенциал, способствующий повышению эффективности и качества образования.

Библиографический список

1. Беличенко О.М., Сомова М.Н. Дистанционное обучение как актуальное направление применения информационных технологий в образовании // Информационные технологии в математике и информационном образовании: материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 12–13 ноября 2020 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 84–86.
2. Иванилова Т.Н., Лутошкина Н.В., Доррер А.Г. Руководство по работе в системе дистанционного обучения Moodle: учебное пособие для преподавателей, студентов высших и средних учебных заведений, слушателей курсов ФПКТ. Изд. второе, доп. и перераб. Красноярск: СибГТУ, 2013. 143 с.

СОЗДАНИЕ САЙТА-ПОСОБИЯ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ

CREATING A SITE-TUTORIAL ON STEREOMETRY USING DYNAMIC DRAWINGS

Д.В. Бочкарёва **D.V. Bochkareva**

Обучение математике, стереометрия, динамические чертежи, GeoGebra, пространственное мышление, многогранники, тела вращения, всероссийские проверочные работы.

В статье повествуется о создании сайта-пособия, который будет использоваться для обучения стереометрии и подготовки к всероссийским проверочным работам (ВПР) студентов колледжа. Сайт-пособие наполнен динамическими чертежами, выполненными в программе GeoGebra. Развитие пространственного мышления у обучающихся является достаточно распространенной проблемой для преподавателей, но применение динамических чертежей может облегчить представление геометрических фигур в пространстве.

Teaching mathematics, stereometry, dynamic drawings, GeoGebra, spatial thinking, polyhedra, solids of revolution, all-russian test work.

The article tells about the creation of a site-tutorial that will be used to teach stereometry and prepare college students for the All-Russian Test Works (ARTW). The site-tutorial is filled with dynamic drawings made in the GeoGebra program. The development of spatial thinking in students is a fairly common problem for teachers, but the use of dynamic drawings can facilitate the representation of geometric shapes in space.

Геометрия всегда воспринимается учащимися тяжелее, чем алгебра. Но именно геометрия описывает все объекты вокруг нас. И она, как никакой другой раздел математики, имеет наглядные представления в окружающей нас действительности.

Вопрос развития пространственного мышления всегда стоит очень остро. Если восприятие планиметрии возможно с использованием тетради и доски, то со стереометрией таких инструментов уже недостаточно. Например, изображение пирамиды в учебнике некоторые ученики могут принимать за разносторонний четырехугольник, могут не видеть, так сказать, глубины. Также часто бывают проблемы уже на этапе построения пространственных тел в плоскости тетрадного листа. А если студент не может даже построить фигуру, то решить задачу у него вряд ли получится.

Тема пространственных представлений, например, у старшеклассников средних школ рассмотрена различными авторами.

В статье А.П. Елисовой подтверждается, что проблема развития пространственного мышления и формирования геометрических образов у обучающихся остается актуальной. Преодолевать указанное затруднение помогает сопровождение теоретического материала интерактивными заданиями, требующими построения пространственных фигур и изображений на них [1].

Также Н.А. Савченко отмечает, что важнейшим условием успешного изучения учащимися основ стереометрии является наличие у них развитых пространственных представлений. Этому способствует применение на уроке современных компьютерных технологий, помогающих решить проблему представления геометрических фигур в пространстве [2].

Часто замечается, что выпускники школ, выполняя ЕГЭ, редко приступают к решению заданий по стереометрии. Студенты колледжей не сдают ЕГЭ, но с недавнего времени для них проводятся всероссийские проверочные работы (ВПР), в том числе и для тех студентов, которые в предыдущем учебном году завершили освоение общеобразовательных дисциплин, т. е. для второкурсников, поступивших на базе 9 классов. И им тоже необходимы развитие пространственного мышления, освоение предмета и подготовка к выполнению ВПР.

Решить проблему наглядности помогут компьютерные технологии. Существует немало математических программ, помогающих реализовать те или иные образовательные потребности. Мы обратимся к системе динамической математики GeoGebra.

В.Е. Шарко охарактеризовал основные направления использования GeoGebra в образовательном процессе:

– обеспечение экспериментальной составляющей математической деятельности;

– рассмотрение геометрических объектов с различных ракурсов;

– развитие навыков построения геометрических фигур;

– создание интерактивных мультимедийных иллюстраций [3].

Но не всегда есть время заниматься построениями прямо на уроке, часто нужны заранее заготовленные материалы, которые можно использовать для актуализации или повторения темы. Удобно собрать все формулы и чертежи по разделу, например, в виде сайта. Сайтов со статичными картинками в сети Интернет предостаточно, поэтому мы сделали свой сайт с динамическими чертежами. Сначала заранее создаем заготовки этих динамических чертежей, а потом добавляем их на сайт и далее пользуемся по необходимости.

Рассмотрим алгоритм добавления динамического чертежа на сайт, создаваемый в конструкторе Wix.

Для того чтобы добавить динамический чертеж на сайт, выбираем инструмент на Wix «Вставка html-кода». Вставляем окно, в которое нам нужно будет вставить html-код динамического чертежа. Теперь, чтобы добавить чертеж, нам нужно открыть чертеж в GeoGebra и выбрать вкладку «Файл» – «Экспорт» – «Интерактивный чертеж как веб-страница (html)». После того, как мы проделаем выше указанные действия, у нас откроется сайт GeoGebra, где нам предложат сохранить наш чертеж как свой ресурс. Когда мы сохраним его на сайте, нам нужно открыть чертеж, зайдя во вкладку «Профиль». Теперь, когда чертеж открылся, нужно нажать кнопку «Поделиться», и откроется окно, где мы можем выбрать «Поделиться ссылкой», что мы и делаем. Для того чтобы добавить чертеж на сайт, копируем html-код и вставляем в окно со вставкой кода на нашем сайте. Далее нажимаем кнопку «Обновить», и чертеж появляется на нашем сайте, останется лишь ввести необходимые размеры и поставить чертеж в нужное место (примеры см. на рисунках 1 и 2).

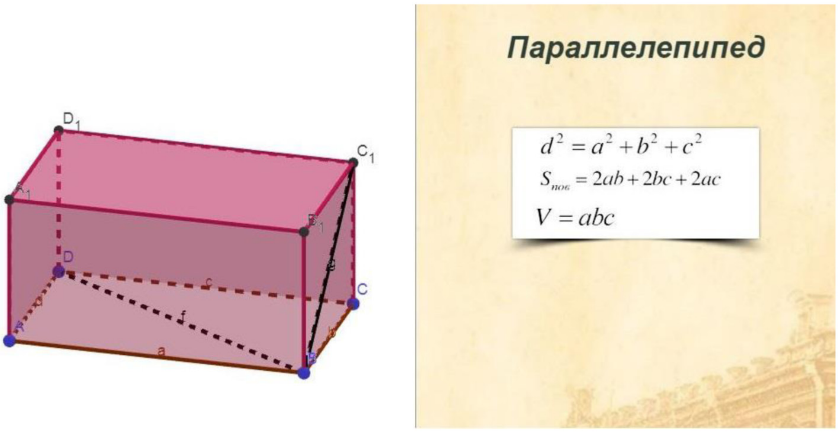


Рис. 1. Динамический чертеж параллелепипеда на странице сайта

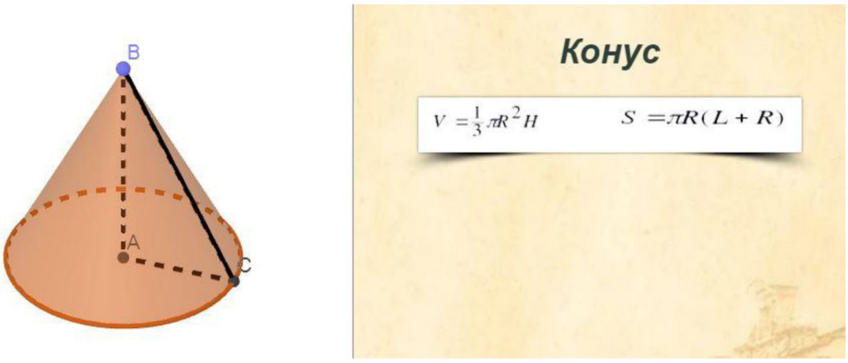


Рис. 2. Динамический чертеж конуса на странице сайта

Конкретно в нашем случае на сайт добавлена еще страница с примерными задачами по стереометрии и некоторыми разборами решения этих задач (см. рисунок 3). Таким образом, на одном сайте собрано все необходимое для освоения раздела «Стереометрия» (формулы и примеры чертежей) и подготовки к ВПР.

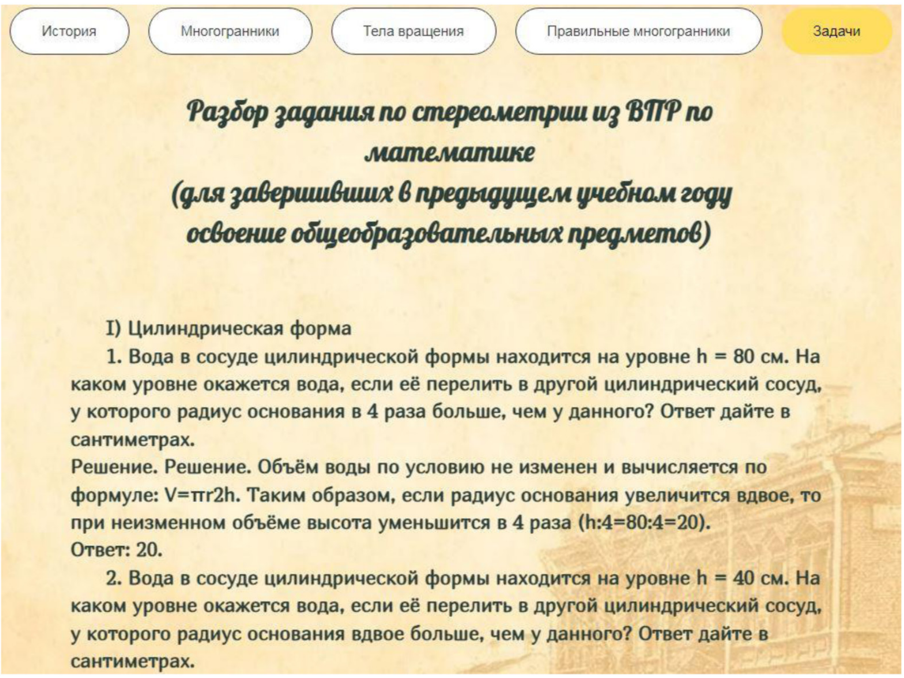


Рис. 3. Страница сайта с примерами задач из ВПР

Динамические чертежи хоть и изображены в плоскости экрана компьютера или смартфона, они все равно имеют преимущества перед обычными рисунками в учебнике или на доске мелом. Их можно рассматривать с разных ракурсов, перемещать, изменять масштаб, как бы «касаться». Если под одним углом зрения пирамида может показаться плоским четырехугольником, то после некого вращения в чертеже уже несомненно увидишь ту самую пирамиду.

Таким образом, компьютерные технологии, а в частности, системы динамической математики, помогают и студентам, и преподавателям преодолеть некоторые барьеры в плане наглядного представления стереометрических объектов.

Библиографический список

1. Елисова А.П., Фирер А.В. Решение позиционных стереометрических задач в среде GeoGebra // Научно-педагогическое обозрение. 2020. № 5 (33). С. 94–102. DOI: 10.23951/2307-6127-2020-5-94-102.
2. Савченко Н.А., Смирнова А.С. Применение программы GeoGebra для решения стереометрических задач // Вопросы педагогики. 2022. № 3-2. С. 213–217. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_48214489_55533883.pdf (дата обращения: 19.07.2022).
3. Шарко В.Е. Дидактические возможности интерактивной геометрической среды GeoGebra при обучении стереометрии // Будущее науки-2020: сборник научных статей 8-й Международной молодежной научной конференции; г. Курск, 21–22 апреля 2020 года. Курск: Юго-Западный государственный университет, 2020. С. 111–114. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_42781036_58104684.pdf (дата обращения: 19.07.2022).

РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 11 КЛАССОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ ПЕРЕВЕРНУТОГО ОБУЧЕНИЯ

DEVELOPMENT OF COGNITIVE UNIVERSAL EDUCATIONAL ACTIONS OF 11TH GRADE STUDENTS IN MATHEMATICS LESSONS BASED ON INVERTED LEARNING

В.В. Вебер **V.V. Weber**

Познавательные универсальные учебные действия, самостоятельность, перевернутый класс, обучающиеся 11 классов, математика.
Содержание данной статьи посвящено реализации методики развития познавательных универсальных учебных действий посредством внедрения «перевернутого класса», одной из моделей смешанного обучения, при изучении математики в 11 классе.

Cognitive universal learning activities, independence, inverted classroom, 11th grade students, mathematics.
The content of this article is devoted to the implementation of the methodology for the development of cognitive universal educational actions through the introduction of the «inverted class», one of the models of mixed learning, when studying mathematics in the 11th grade.

Во главе организации среднего общего образования лежат требования к результатам освоения основной образовательной программы, по окончании реализации которой обучающиеся имеют определенный *набор компетенций* [2], в частности они овладевают познавательными умениями.

Познавательные универсальные учебные действия (ПУУД) в старших классах обеспечивают развитие основных когнитивных процессов учащихся (освоение методов познания окружающей действительности; применение логических, исследовательских операций, умений работать с информацией). Значимая роль в усвоении знаний принадлежит именно развитию у обучающихся умений работать с информацией.

Вопросами формирования и развития ПУУД обучающихся в процессе изучения математики занимались исследователи: И.Д. Лушников, Д.А. Махотин, Л.В. Шкерина, Н.А. Журавлева, и др. Подходы формирования ПУУД рассматривались А.Г. Асмоловым, Г.В. Бурменской, И.А. Володарской, О.А. Карабановой и другими учеными.

Известно, что математика лежит в основе всех современных технологий и научных исследований, является необходимым элементом экономики, построенной на знании. Математические уроки имеют огромный общекультурный потенциал.

На сегодня традиционные уроки сменяют инновационные, способствующие развитию у детей творческих процессов. Под инновационным уроком подразумеваются разнообразие *активных форм* деятельности и *высокий уровень самостоятельности*. Где учитель – пассивный участник образовательного процесса, а учащийся занимает противоположную позицию.

К инновационным урокам относятся смешанное (гибридное) обучение. Моделями смешанных уроков являются: модели ротации «ротация станций» и «ротация лабораторий»; «перевернутый класс» «индивидуальная ротация» и др.

Вышесказанное обусловливает необходимость применения перевернутого обучения на уроках математики, направленного на развитие ПУУД обучающихся в 11 классе.

Выделим цель статьи: обоснование целесообразности применения в 11 классе перевернутого обучения на уроках математики для развития ПУУД обучающихся.

Рассмотрим модель смешанного обучения «перевернутый класс», или flipped classroom. В «перевернутом классе» все наоборот: изучение теоретического материала проходит в неурочное время, а в учебное – его практическое закрепление.

Теория может подаваться в форме параграфов, статей, обучающих видеороликов, презентаций, ссылок на нужные учебники и т.п. Использование видеоматериалов способствует развитию внимания и памяти, активизации познавательных процессов. Бергманн, Сэмс и Смит рассматривают обучающие видеоролики как мощные инструменты для учителей по созданию контента, обмену ресурсами и улучшению практики [1].

При успешной реализации серии перевернутых уроков следует перейти на более продвинутый (творческий) уровень, где обучающиеся получают в качестве домашнего задания только название темы урока.

Мониторинг со стороны учителя о проделанной домашней работе, анализ продуктов самостоятельной деятельности обучающихся должен быть непрерывным.

Рассмотрим один из примеров «перевернутого класса».

Каждый учащийся выбирает одну из инструкций с домашним заданием: базовый или углубленный уровни. Рассылка домашних заданий осуществляется через мессенджеры.

Тема: Показательная функция, ее свойства и график

Технологическая карта урока № 17 представлена в таблице 2.

УМК: Алгебра, 11 класс, учебник и задачник под редакцией А.Г. Мордкович [3]; «Живая математика».

Цель: развитие элементов ПУУД, а именно:

– общеучебных: поиск и выделение искомой информации, представление информации графически и схематически;

– логических: сравнительный анализ, синтез полученных сведений и вывод;

– исследовательских: аргументирование своего мнения, позиции, формулирование и озвучивание вопросов.

Домашняя работа

Инструкция для обучающегося (базовый уровень)

Твоя цель: Знакомство с понятием «Показательная функция». Изучение ее свойств и построение графиков.

Задания: Просмотри видео https://foxford.ru/wiki/matematika/pokazatelnaya-funktsiya. Заполни таблицу (табл. 1) и проведи сравнительный анализ свойств заданных функций. Выяви сходство/отличие данных функций. Объедини ячейки по горизонтали с общей информацией. Сделай логический вывод. Выясни применение показательной функции вне предмета «Математика».

Таблица 1

Сравнительная характеристика свойств показательных функций

Показательная функция – …		
Функция вида	$y = a^x$ при $a > 1$	$y = a^x$ при $0 < a < 1$
Пример функции	$y = 3^x$	$y = (1/3)^x$
Ее график (Картинка с графиком заданной функции, построенным в «Живой математике»)		
$D(f)$		
$E(f)$		
Нули функции		
Точки пересечения с осью OY		
Разрывна/непрерывна		
Возрастает/убывает. (Устно ответь, от чего это зависит?)		

Сравни выражения:
а) $4^2 \dots 4^{1,4}$; б) $1/5^3 \dots (1/5)^4$; в) $6^{-5} \dots (1/6)^{3/2}$; г) $(5/2)^{\sqrt{3}} \dots (5/2)^{1,7}$.
Сформулируй возникшие вопросы (1 минимум) по теме работы.

Инструкция для обучающегося (углубленный уровень)

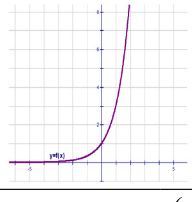
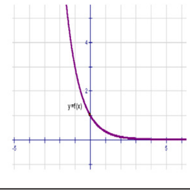
Задание: учебник п. 39. Просмотри внимательно видео: https://yandex.ru/video/preview/3596190161584604980.

В тетради запиши тему и выпиши определение и свойства $y = a^x$ при $a > 1$ и $0 < a < 1$ в сравнительную таблицу и проведи сравнительный анализ полученных данных. Выполни построение 2–3 (по выбору) функций из просмотренного видеоматериала.

Сравни выражения: а) $4^2 \dots 4^{1,4}$; б) $(1/5)^3 \dots 1/5^4$; в) $6^{-5} \dots (1/6)^{3/2}$; г) $(5/2)^{\sqrt{3}} \dots (5/2)^{1,7}$. Сформулируй возникшие вопросы (1–2) по теме работы.

Таблица 2

Технологическая карта урока

<table>
<tr><td rowspan="2">Этапы деятельности/ мин после организаци-онного момента (1)</td><td>Деятельность учителя</td><td colspan="2">Деятельность учащихся</td></tr>
<tr><td></td><td>Выполнили домашнее задание 1 группа</td><td>Выполнили наполовину или не выполнили домашнее задание 2 группа</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Проверка д.р. (2)</td><td>Проверяет рабочие тетради</td><td colspan="2">Демонстрируют результаты работы.</td></tr>
<tr><td>Самостоя-тельная рабо-та (10–15)</td><td>Отправляет ссылку для тестирова-ния (проверка базовых знаний):https://onlinetestpad.com/ru/test/1056263-pokazatelnaya-funkciya-i-ee-svojstva.
После выполнения подходит к каждому ученику, выставляет оценки в журнал. Тест рассчитан на 5–10 минут.
Плюсы данного тестирования. Учите-лю видно: фамилия и имя участника, количество времени, оценка и все отве-ты, в том числе неверные, которые по-зволяют выявить пробелы в знаниях</td><td colspan="2">Выполняют проверочные тесты за компьютерами.
Демонстрируют и отправляют полу-ченные результаты (ссылки) учите-лю через мессенджеры https://onlinetestpad.com/ru/testresult/1056263-pokazatelnaya-funkciya-i-ee-svojstva?res=cq2rglpvxqtvo</td></tr>
<tr><td>Рубрика «Искусство задавать вопросы» (2–5)</td><td>Дает обоснованные ответы</td><td colspan="2">Дети на данном этапе учатся фор-мулировать и задавать краткие, по-нятные вопросы</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Актуализация знаний (3–5)</td><td>– Ребята, поделитесь, что вы нового узнали при выполнении домашней ра-боты? Задает вопросы по теме урока. В процессе всего урока координиру-ет деятельность учащихся, особенно 2 группы.
После ответов детей показывает обра-зец конспекта на интерактивной доске (таблица ниже)</td><td>Отвечают на во-просы учителя, аргументируют свое мнение</td><td>Слушают ответы учащихся и дела-ют краткую запись в тетрадях</td></tr>
<tr><td colspan="3">Показательная функция – функция вида $y = a^x$, где $a \neq 1$ и $a > 0$</td></tr>
<tr><td>Функция вида</td><td>$y = a^x$ при $a > 1$</td><td>$y = a^x$ при $0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>Пример функции</td><td>$y = 3^x$</td><td>$y = (1/3)^x$</td></tr>
<tr><td>Ее график
(картинка с графиком заданной функции, построенным в «Живой математике»)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D(f)</td><td colspan="2">(-∞; + ∞)</td></tr>
<tr><td>E(f)</td><td colspan="2">(0; + ∞)</td></tr>
<tr><td>Нули функци</td><td colspan="2">Отсутствуют</td></tr>
<tr><td>Точки пересечения с осью OY</td><td colspan="2">(0;1)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Прерывна/непрерывна</td><td colspan="2">Непрерывна</td></tr>
<tr><td>Промежутки монотонности</td><td>Монотонно возрастает</td><td>Монотонно убывает</td></tr>
<tr><td>Закрепление знаний (10–15)</td><td>Задание 1.
– Постройте экспоненты по заданным точкам (рисунки слева, справа – полученный результат)

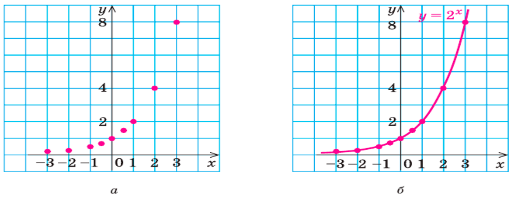



Рис. 13.2

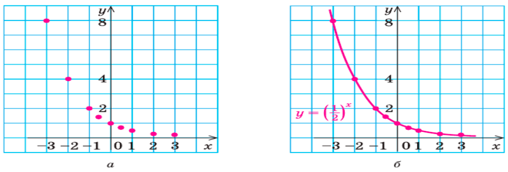



Рис. 13.3
Какие характерные особенности вы заметили. Обоснуйте ответ.
Задание 2.
Постройте график показательной функции в среде «Живая математика». Обоснуйте алгоритм построения заданной функции.
Исследуйте функцию $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$
на монотонность.
Задание 3. Задачник стр. 132, № 39.06;39.08
Индивидуально работает с детьми из 2 группы</td><td colspan="2">На партах карточки, которые раздал учитель.
Выполняют построение.
При выполнении задания 1 замечают, делают вывод, что график искомой функции $y = (1/2)^x$ можно получить из графика функции $y = 2^x$ с помощью геометрических преобразований.
Определяют ось симметрии и то, что к графикам показательной можно провести невертикальную касательную в любой его точке, в том числе и в точке (0;1), наличие производной функции в этой точке.
Проводят исследование функции.
Работают самостоятельно за компьютерами группами – по 2 человека: состав группы – разноуровневый.
Ученики, усвоившие тему, по очереди комментируют свои учебные действия</td></tr>
<tr><td>Рефлексия (2)</td><td>Подводит совместно с детьми итоги урока.
– Ребята, что нового узнали, чему научились и т.п.
Оцените свои результаты</td><td colspan="2">Анализируют, достигнута ли цель урока, какие трудности возникли в процессе домашней и очной работы</td></tr>
<tr><td>Домашнее задание (1)</td><td>Учебник: п. 39. Задачник № 39.2 и 39.3 (на «3»). Постройте экспоненту $y = (3/2)^x$ и выделите особенности графика (на «4»). На «5» выполнить творческое задание: «Историческая справка об изучаемых функциях». Подготовьте мини-доклад (2–3 мин).
– Спасибо за внимание!</td><td colspan="2">Фиксируют домашнее задание</td></tr>
</table>

Явным недостатком перевернутого урока является отсутствие полноценного контроля со стороны учителя при выполнении домашних заданий и увеличение времени на подготовку учителем к урочной деятельности. Следовательно, технологию «перевернутый класс» целесообразно внедрять в образовательный процесс постепенно и только тогда, когда стороны (учитель, обучающиеся и родители) будут заинтересованы в положительной динамике образовательной траектории, а также созданы условия для применения информационных и цифровых технологий. Существенные плюсы – эффективное развитие ПУУД, доступность видеоматериалов, их накопление, дети – активные участники в процессе обучения. У них формируются ценностные личностные качества, такие как ответственность и самостоятельность. Нет временного ограничения при получении новых знаний дома, освобождение немалого количества аудиторского времени у учителя для реализации *индивидуальных* маршрутов и совместного проведения с детьми практических работ и др. Что не может ни повлиять положительно на качество школьного образования.

В заключение отметим, что в «перевернутом классе» выполняемая деятельность будущих выпускников действительно способствует развитию базовых познавательных умений: *самостоятельно:* работать с информацией, представлять ее графически, схематически; проводить сравнительный анализ и делать выводы; аргументировать свое мнение, формулировать/задавать вопросы и др. [4].

Применяя технологию «перевернутый класс», учитель создает благоприятные условия для развития когнитивных процессов у подростков, личности, способной к самообучению.

Библиографический список

1. Tucker B. The Flipped Classroom. Online instruction at home frees class time for learning // Education Next/ 2012. № 1. URL: https://www.educationnext.org/the-flipped-classroom – (дата обращения: 01.11.2022).
2. Вебер В.В. Проблемные ситуации как средство развития интереса к предмету математика в старших классах // Проблемы и перспективы современного естественно-математического образования: материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, 9–19 апреля 2021 года. Соликамск: СГПИ, 2021. С. 21–26.
3. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учебник. М.: Мнемозина, 2009. 399 с.
4. Примерная рабочая программа среднего образования. Математика. Углубленный уровень. Москва, 2022. С. 21–2674 с. [Электронный ресурс] / (дата обращения: 04.11.2022).

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

CONSTRUCTION OF SECTIONS OF POLYHEDRONS USING DYNAMIC MATHEMATICS SYSTEMS

Г.Н. Гиматдинова **G.N. Gimatdinova**

Сечения многогранников, пространственное мышление, системы динамической математики, GeoGebra.

Построение сечений многогранников – одна из самых сложных тем школьного курса математики. При ее изучении рекомендуется для наглядности использовать системы динамической математики. Рассмотрим несколько примеров построения сечений многогранников, построенных с помощью программы GeoGebra.

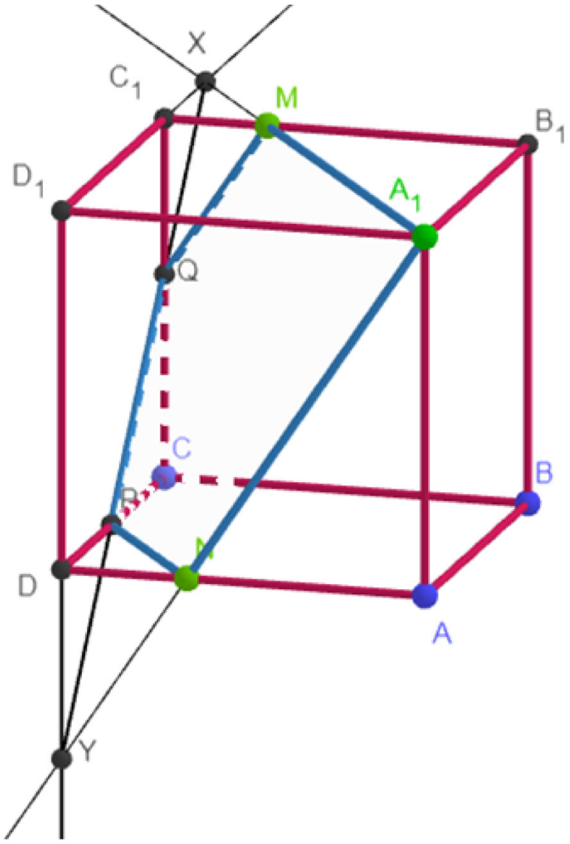
Sections of polyhedra, spatial thinking, systems of dynamic mathematics, GeoGebra.

The construction of sections of polyhedra is one of the most difficult topics in the school mathematics course. When studying it, it is recommended to use systems of dynamic mathematics for clarity. Consider several examples of constructing sections of polyhedra, built using the GeoGebra program.

В школьном курсе стереометрии особое место занимают задачи на построение сечений многогранников, так как умение их решать является основой изучения многих тем курса. Построение сечений многогранников связано с развитием у обучающихся пространственного мышления. По мнению В.И. Бутыриной, задачи на построение сечений многогранников плоскостью являются наиболее продуктивными упражнениями для правильного восприятия пространства, плоскости и пространственных фигур [1]. Как отмечают А.П. Елисова и А.В. Фирер, проблема развития пространственного мышления у обучающихся является одной из актуальных, которая прослеживается, например, в результатах ЕГЭ по математике профильного уровня при решении стереометрической задачи [2]. Инструментами сопровождения теоретического и практического учебного материала по построению сечений являются системы динамической математики, например, Живая геометрия, Maple, GeoGebra, Mathematica и др.

Рассмотрим несколько примеров построения сечений многогранников с помощью программы GeoGebra, которые предлагаются обучающимся старших классов на уроках геометрии. Система динамической математики GeoGebra имеет доступный интерфейс даже для начинающих пользователей. Программа позволяет строить геометрические фигуры на плоскости и в пространстве, отмечать на построенных фигурах другие объекты, строить параллельные и перпендикулярные прямые и многое другое, необходимое для решения геометрических задач, в частности, для построения сечений многогранников.

Пример 1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: A_1; $M \in B_1C_1$; $N \in AD$ (рис. 1).

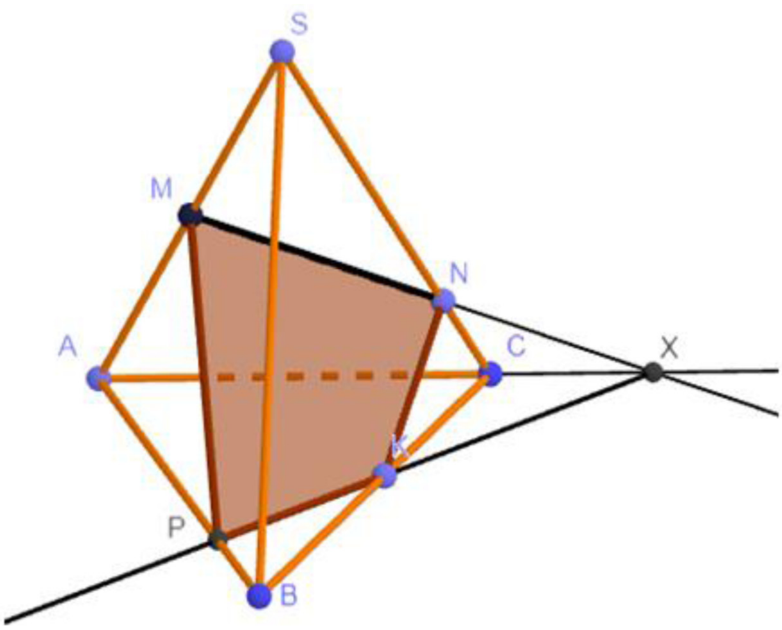


Построение:

1. A_1M;
2. $A_1M \cap D_1C_1 = X$;
3. A_1N;
4. $A_1N \cap D_1D = Y$;
5. XY;
6. $XY \cap CC_1 = Q$;
7. $XY \cap DC = P$;
8. MQ;
9. NP;
10. A_1MQPN – искомое сечение

Рис. 1. Построение сечения куба плоскостью из примера 1

Пример 2. Построить сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через точки: $M \in SA$; $N \in SC$; $K \in BC$ (рис. 2).

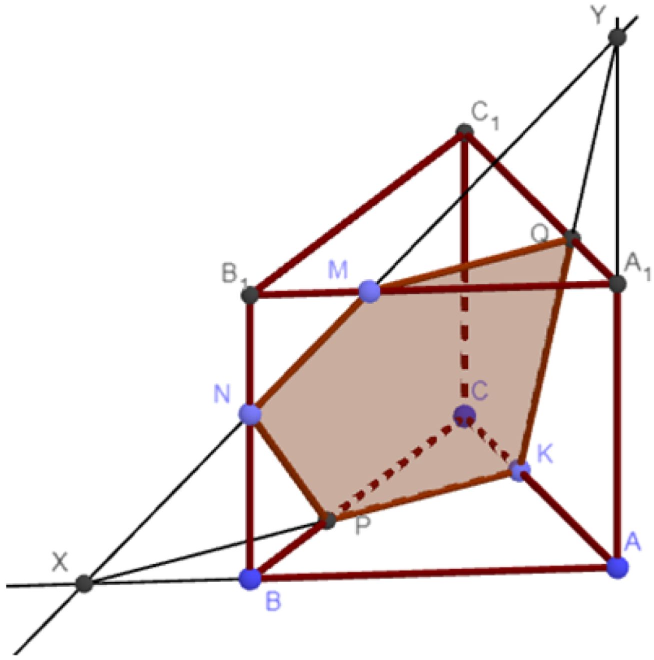


Построение:

1. MN;
2. $MN \cap AC = X$;
3. XK;
4. $XK \cap AB = P$;
5. PM;
6. $MNKP$ – искомое сечение

Рис. 2. Построение сечения тетраэдра плоскостью из примера 2

Пример 3. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки: $M \in A_1B_1$; $N \in BB_1$ и $K \in AC$ (рис. 3).



Построение:

1. MN;
2. $MN \cap AB = X$;
3. XK;
4. $XK \cap BC = P$;
5. $MN \cap AA_1 = Y$;
6. YK;
7. $YK \cap A_1C_1 = Q$;
8. QM;
9. $MNPKQ$ – искомое сечение

Рис. 3. Построение сечения треугольной призмы плоскостью из примера 3

При работе с предложенными заданиями имеется возможность просматривать геометрическую фигуру и построенное сечение с разных ракурсов, изменять месторасположение данных по условию точек и анализировать происходящие изменения с искомым сечением. Так, на рисунке 4 приведено сечение из примера 3, но с измененными первоначальными условиями (рис. 4).

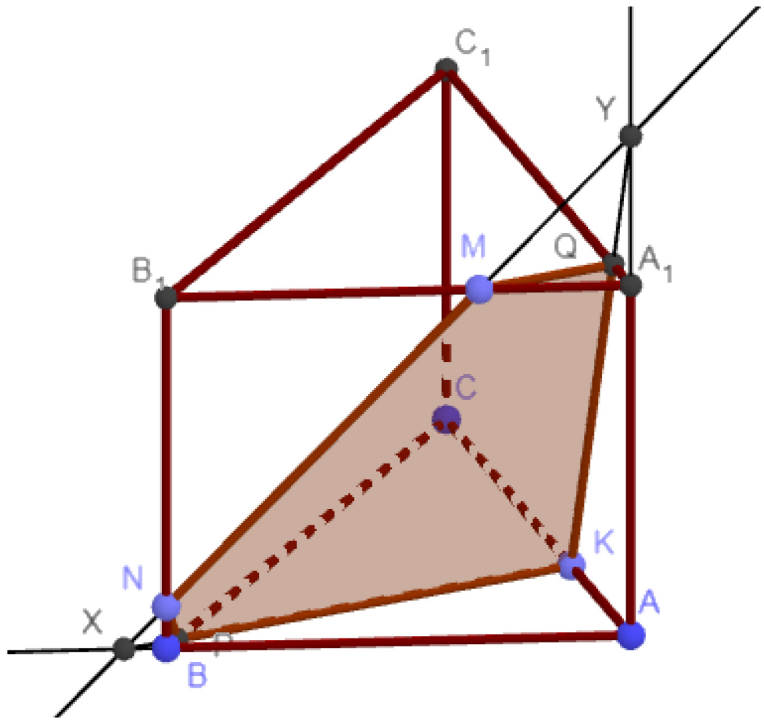


Рис. 4. Построение сечения треугольной призмы плоскостью из примера 3 с измененным расположением данных точек

Системы динамической математики, в том числе и программа GeoGebra имеют огромный потенциал для демонстрации построения сечений многогранников. Опираясь на опыт преподавания в старших классах, можно сделать вывод о том, что использование специализированных программ для построения сечений расширяет возможности для развития пространственного мышления обучающихся, а также способствует овладению алгоритмами построения сечений многогранников, формированию основных стереометрических понятий и умений.

Библиографический список

1. Бутырина В.И. Обучение построению сечений как средство развития пространственного представления на уроках стереометрии // Наука и школа. 2012. № 3. С. 86–89.
2. Елисова А.П., Фирер А.В. Решение позиционных стереометрических задач в среде GeoGebra // Научно-педагогическое обозрение. Pedagogical Review. 2020. № 5 (33). С. 94–102.

«ПОЛЕЗНОЕ НЕРАВЕНСТВО» В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

«USEFUL INEQUALITY» IN THE RESEARCH ACTIVITY OF SCHOOLCHILDREN

А.Н. Грецкая, Л.М. Бронникова **A.N. Gretskaya, L.M. Bronnikova**

Исследование, исследовательская деятельность, полезное неравенство, мотивация учения.
В статье рассматривается исследовательская деятельность как важнейший инструмент обучения школьников. Сделан акцент на формируемых навыках учащихся при проведении исследовательской деятельности. В рамках работы изучено «полезное неравенство» и его доказательство, а также приведены основные упражнения, которые решаются при помощи неравенства.

Research, research activity, useful inequality, learning motivation.
The article considers research activity as the most important tool for teaching schoolchildren. Emphasis is placed on the formed skills of students in the course of research activities. As part of the work, the "useful inequality" and its proof are studied, as well as the main exercises that are solved using the inequality.

Исследовательская деятельность школьника – это процесс, в котором учащийся производит поиск и анализирует информацию, формирует знания, умения и навыки, необходимые для практического применения. Исследовательская деятельность осуществляется под руководством учителя и возможно тогда, когда ученик обладает базовыми знаниями по предмету. Все чаще учащиеся выбирают исследовательскую работу по математике. В связи с этим необходимо выбирать тему, которая в ходе работы сформирует у школьника аналитическое, логическое и критическое мышление. Рассмотрим одну из предполагаемых тем для исследования.

Изучим два полезных алгебраических тождества, которые выводятся из рассуждений, определяя особый фактор $a^3+b^3+c^3-3abc$ [2].

Пусть P обозначает кубический многочлен

$P(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc,$

который имеет a, b и c в качестве его корней. Подставив a,b,c в многочлен, получим:

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,$$
$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,$$
$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0.$$

Сложение данных уравнений дает

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \quad (1)$$

Отсюда следует, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Отметим также, что выражение $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ также можно записать как

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]. \quad (2)$$

Таким образом, мы получаем другую версию тождества (1)

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \quad (3)$$

Это представление тождества приводит к краткому доказательству неравенства AM-GM для трех переменных [4]. Из (3) видно, что если a,b,c – положительные числа, то

$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$. Теперь, если x,y,z – положительные числа, принимая $a=\sqrt[3]{x}, b=\sqrt[3]{y}$ и $\sqrt[3]{z}$, приведет нас к $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$, к равенству тогда и только тогда, когда $x=y=z$ [2].

Упражнение 1. Для действительных чисел x,y,z докажите, что

$x^2+y^2+z^2\geq|xy+yz+zx|$.

Упражнение 2. Для положительных действительных чисел a,b,c докажите, что $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Упражнение 3. Если x,y,z – действительные числа такие, что $x<y<z$, докажите, что $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3>0$.

Упражнение 4. Пусть a,b,c – длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}}\geq\max\{a,b,c\}$$

.

Упражнение 5. Для неотрицательных действительных чисел x,y,z докажите, что $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$.

Упражнение 6. Найдите минимум $x^2+y^2+x^2$, где x,y,z действительные числа такие, что $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$.

Очень простое неравенство, которое может быть полезно для доказательства большого числа алгебраических неравенств, состоит в следующем.

Теорема 1. (Полезное неравенство). Если a,b,x,y – действительные числа и $x,y>0$, то имеет место следующее неравенство:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Доказательство. Доказательство довольно простое. Избавляясь от знаменателя, мы можем выразить неравенство как

$$a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\geq(a+b)^2xy$$

Упрощаем, и становится очевидным $(ay - bx)^2 \geq 0$. Мы видим, что равенство выполняется тогда и только тогда, когда ay$= bx$, т. е. когда $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ [1].

Другой формой доказательства неравенства является использование неравенства Коши-Шварца следующим образом:

$$(a+b)^2 = (\frac{a}{\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}}\sqrt{y})^2 \leq (\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y})(x+y).$$

Используя приведенную выше теорему дважды, мы можем распространить неравенство на три пары чисел:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$$

и простой индуктивный метод показывает, что

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}. \qquad (4)$$

Для всех действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ с равенством, если только $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \cdots = \frac{a_n}{x_n}$.

Неравенство (4) также называют неравенством Коши–Шварца в форме Энгеля или Принцип минимума Артура Энгеля [1].

В качестве первого применения этого неравенства мы приведем еще одно доказательство неравенство Коши–Шварца. Запишем

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2} + \cdots + \frac{a_n^2 b_n^2}{b_n^2}$$

Тогда $\frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2} + \cdots + \frac{a_n^2 b_n^2}{b_n^2} \geq \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$

Таким образом, мы заключаем, что

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ [3].

Упражнение 7. Пусть a, b, c – положительные действительные числа. Доказать, что $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a + b + c$.

Применение современного метода обучения в форме исследовательской деятельности учащихся формирует у него мотивацию учения и позволяет развивать личностные и исследовательские способности школьника.

Библиографический список

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад: сборник задач. М.: Наука, 1975. 84 с.
2. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах: сборник задач. М.: Наука, 1967. 325 с.
3. Andreescu T. Mathematical Olympiads 2000–2001: Problems and Solutions from Around the World / T. Andreescu, Z. Feng, G. Lee. USA: MAA, 2003. 198 с.
4. Barbeau E. J. A Taste Of Mathematics, Volume IV, Inequalities, Canadian Mathematical Society / E. J. Barbeau, B. L. R. Shawyer. Toronto: UNAM, 2000. 352 с.

«ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО: НЕРАВЕНСТВО ПЕРЕСТАНОВКИ» КАК ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ В НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКА

«A REMARKABLE INEQUALITY: INEQUALITY OF PERMUTATION» AS A FUNDAMENTAL RESEARCH IN THE SCHOOLCHILD'S SCIENTIFIC ACTIVITY

А.Н. Грецкая, Л.М. Бронникова **A.N. Gretskaya, L.M. Bronnikova**

Исследование, научная деятельность, неравенство перестановки, исследовательские способности.

В данной статье рассматривается актуальность введения научной деятельности в учебный процесс школьника. Уделено внимание исследовательским способностям учащихся и что необходимо для их развития. Приведено неравенство перестановки и 2 следствия из него, а также решены несколько примеров алгебраической и геометрической направленности.

Research, scientific activity, permutation inequality, research abilities.

This article discusses the relevance of introducing scientific activity into the educational process of a student. Attention is paid to the research abilities of students and what is necessary for their development. The permutation inequality and 2 corollaries from it are given, as well as several examples of algebraic and geometric orientation are solved.

Модернизация современного образования требует постоянного повышения его качества путем применения эффективных методов обучения. Соответственно, необходимо обеспечить дифференциацию и индивидуализацию образования. В настоящее время сделан акцент на исследовательской деятельности школьника, ведь она обеспечивает развитие познавательного интереса, раскрытие особенностей предметного содержания и учитывает предполагаемые результаты обучения.

Для развития исследовательских способностей учителю необходимо подбирать такие задания, которые носят нестандартный, практико-ориентированный характер. Рассмотрим некоторые из них.

Тема: «Замечательное неравенство: неравенство перестановки»

Рассмотрим два набора действительных чисел в порядке возрастания:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \text{и} b_1 \le b_2 \le b_3 \le \cdots \le b_n.$$

Для любой перестановки $(a_1', a_2', \dots, a_n')$ из $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ получается, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \ge a_1'b_1 + a_2'b_2 + \cdots + a_n'b_n \quad (1)$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \ge a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n \quad (2)$$

Более того, равенство в выражении (1) имеет место тогда и только тогда, когда $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.
А равенство в выражении (2) имеет место тогда и только тогда, когда $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$.
Неравенство в выражении (1) известно как неравенство перестановки [4].

Следствие 1. Для любой перестановки $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ из $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ следует, что $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \dots + a_n a'_n$.

Следствие 2. Для любой перестановки $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ из $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ следует, что $\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \dots \ \frac{a'_n}{a_n} \geq n$.

Доказательство перестановочного неравенства.
Предположим, что $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Получаем:

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_r b_r + \dots + a_s b_s + \dots + a_n b_n$$
$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_r b_r + \dots + a_s b_s + \dots + a_n b_n$$

Разница между S и S' заключается в том, что коэффициенты b_r и b_s, где $r<s$ переключаются. Следовательно

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Таким образом, мы имеем, что $S > S'$ тогда и только тогда, когда $a_s \geq a_r$. Повторяя этот процесс, мы получаем результат, что сумма S максимальна, когда $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ [2].

Пример 1.

Рассмотрим два набора чисел $x_1 < x_2 \leq \dots \leq x_n$ и $y_1 < y_2 \leq \dots \leq y_n$ и одну перестановку $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ из$(y_1, y_2, \dots, y_n)$. [1]
Докажем, что $(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2$.
Возведя в квадрат и переформулировав это последнее неравенство, мы находим, что оно эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2.$$

Но с тех пор $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$, то неравенство, которое мы должны доказать, принимает вид эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

что, в свою очередь, есть неравенство (1).

Пример 2.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – различные положительные целые числа, докажем, что

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Пусть $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – перестановка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и пусть $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n-1)^2}, \dots, \frac{1}{1^2})$; т.е. $b_i = \frac{1}{(n+1-i)^2}$ для $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим перестановку $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ из $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, определяемых $a'_i = x_{n+1-i}$ для $i = 1, \dots, n$. Используя неравенство (2), можно утверждать, что

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} = a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \dots + a'_n b_n ,$$

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} \geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n ,$$

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 ,$$

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} = \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2},$$

Так как $1 \leq a_1, 2 \leq a_2, \dots, n \leq a_n$ имеем, что

$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n}$ [1].

Пример 3.

Пусть a, b, c длины сторон треугольника. Докажем, что

$$a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \geq 0.$$

Рассмотрим один случай, когда $c \leq b \leq a$, т.к. остальные случаи аналогичны [3].

Имеем $a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \leq c(a+b-c)$, далее получаем $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$

Используя неравенство (1), получаем:

$$\frac{1}{a}a(b+c-a) + \frac{1}{b}b(c+a-b) + \frac{1}{c}c(a+b-c) \geq \frac{1}{c}a(b+c-a) + \frac{1}{a}b(c+a-b) + \frac{1}{b}c(a+b-c)$$

Следовательно, $a + b + c \geq \frac{a(b-a)}{c} + \frac{b(c-b)}{a} + \frac{c(a-c)}{b} + a + b + c$.

Это следует из того, что $\frac{a(b-a)}{c} + \frac{b(c-b)}{a} + \frac{c(a-c)}{b} \leq 0$. Умножая обе части неравенства на abc, получаем:

$$a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Данная тема является одной из фундаментальных тем в научной работе школьников, заинтересованных в углубленном изучении математики, так как в ней есть большой простор для продвижений, уточнений, вспомогательных задач, обобщений, а при доказательстве используются разнообразные методы.

Библиографический список

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад: сборник задач. М.: Наука, 1975. 109 с.
2. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах: сборник задач. М.: Наука, 1967. 304 с.
3. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (планиметрия): сборник задач по геометрии. М.: Наука, 1982. 160 с.
4. Andreescu T. Mathematical Olympiads 2000–2001: Problems and Solutions from Around the World / T. Andreescu, Z. Feng, G. Lee. USA: MAA, 2003. 271 с.

АНИМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

ANIMATION CAPABILITIES OF THE GEOGEBRA DYNAMIC ENVIRONMENT IN TEACHING SOLVING EQUATIONS AND SYSTEMS OF EQUATIONS WITH PARAMETERS

Н.Ю. Гурина **N.Yu. Gurina**

Уравнения с параметром, системы уравнений с параметром, обучение математике, компьютерная анимация, GeoGebra, GeoGebra Classroom.

В статье рассматривается использование анимационных возможностей динамической среды GeoGebra в обучении решению уравнений и систем уравнений с параметрами. На платформе GeoGebra Classroom разрабатываются примеры апплетов, использование которых позволяет сформировать у учащихся визуальные представления о взаимосвязи значений параметра и положения, формы соответствующего графика функции.

Equations with a parameter, systems of equations with a parameter, teaching mathematics, computer animation, Geogebra, Geogebra Classroom.

The article discusses the use of animation capabilities of the Geogebra dynamic environment in teaching solving equations and systems of equations with parameters. On the Geogebra Classroom platform, examples of applets are being developed, the use of which allows students to form visual representations of the relationship between parameter values and position, the shape of the corresponding function graph.

Решение уравнений и систем уравнений с параметрами вызывает затруднения у многих школьников, так как для успешного решения задания с параметром необходимо владеть не только стандартными методами, но проводить анализ графиков функций, содержащих параметр [1; 3].

Следует отметить, что навык решения задач с параметром проверяется в заданиях повышенной сложности на Основном государственном экзамене (ОГЭ) и Едином государственном экзамене (ЕГЭ). Это свидетельствует о необходимости большего внимания к изучению данной темы в школьном курсе математики [1; 2].

Графический метод является одним из удобных при решении уравнений и их систем с параметрами. При обучении графическому методу важно обеспечить наглядность, показать учащимся, как при изменении значения параметра изменяется вид, положение, форма графиков и линий, а, следовательно, и количество решений уравнения или системы. Для этого эффективно применять системы динамической геометрии, например, GeoGebra, Decmos или «Живая математика» [1; 3; 5].

Систему динамической геометрии удобно использовать в комплексе с платформой для учителя GeoGebra Classroom, в которой имеются возможности создания интерактивных заданий и мониторинга результатов их выполнения в режиме реального времени [5].

Заметим, что при решении уравнений с параметром графическим методом исходное уравнение записывают в виде равенства двух функций. При этом, как правило, в одной части равенства функция не содержит параметр, и ее график будет статичным на динамическом чертеже, а вторая функция будет содержать параметр, и ее график будет меняться на динамическом чертеже в зависимости от параметра. Поэтому важно найти наиболее подходящий способ преобразования исходного уравнения к равенству двух функций.

Нами были разработаны два апплета на основе заданий из учебника Алгебры 9 класса (углубленный уровень) из УМК А.Г. Мерзляка.

В представленных ниже апплетах мы уделяем внимание в первую очередь формированию визуальных представлений об изменениях графиков и линий в зависимости от изменения параметра, поэтому перед учеником не ставятся вопросы о преобразовании исходного уравнения и построении графиков и линий.

Пример 1 (№ 10.22) [4]. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax + \sqrt{-5 - x^2 - 6x} = 2$$

имеет два корня?

Для решения этой задачи был разработан апплет, который включает в себя текстовое поле с формулировкой основного задания, инструкцию и рабочий лист GeoGebra, а также блок вопросов (см. рис. 1, 2, 3).

Задание

При каких значениях параметра a уравнение $ax + \sqrt{-5 - x^2 - 6x} = 2$ имеет два корня?

Инструкция по работе с апплетом

На координатной плоскости изображены графики функций:

1) $y = -\sqrt{-5 - x^2 - 6x}$
2) $y = ax - 2$ (при $a = 1$).

Для изменения значения параметра a передвигайте точку A в области построения, прижав её левой кнопкой мыши.

Рис. 1. Формулировка задания и инструкция в апплете для примера 1

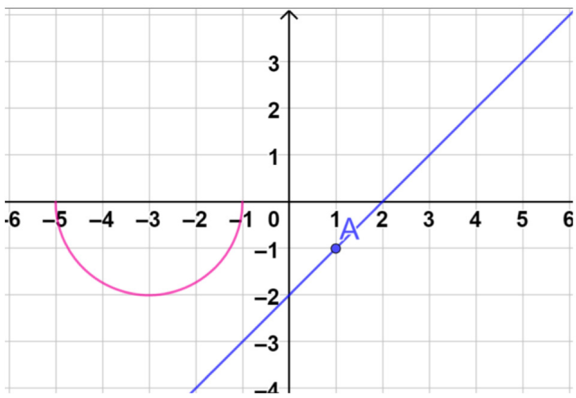


Рис. 2. Область построения графиков в апплете для примера 1

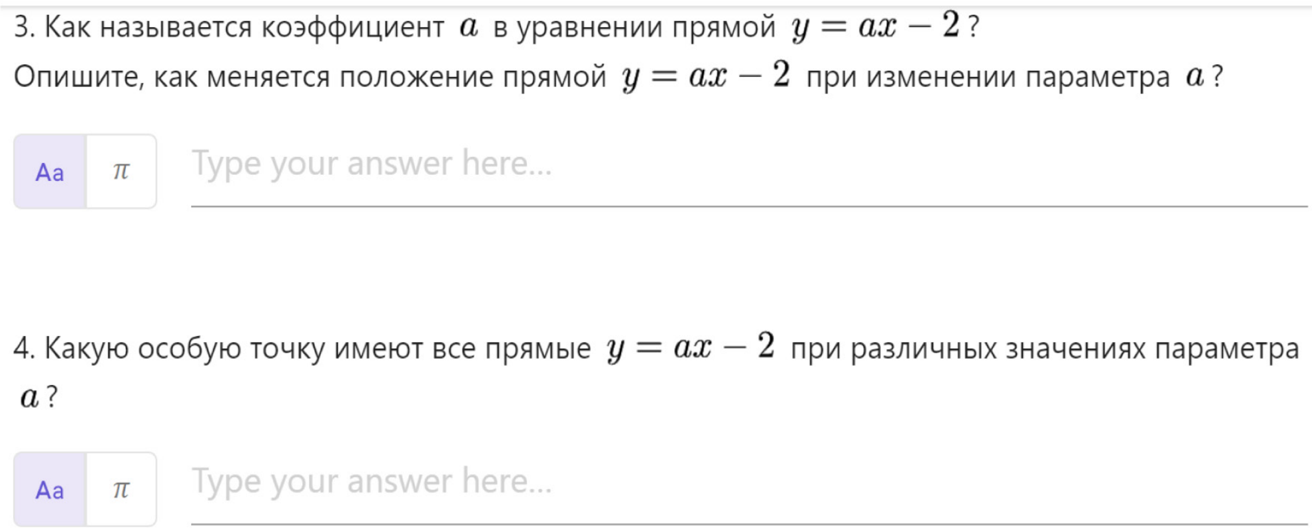


Рис. 3. Часть блока вопросов в апплете для примера 1

Использование апплета GeoGebra обеспечивает наглядность в процессе решения задачи, создает условия для самостоятельного поиска ключевых положений графиков и линий благодаря динамике чертежа.

Такие условия способствуют формированию у учащихся визуальных представлений об изменении графиков функций и линий, содержащих параметр в уравнении при изменении значений параметра.

Работая с апплетом, учащийся, анализируя изображение в области построения, устанавливает связи между изменением параметра и положением, формой графиков на динамическом чертеже. При этом ключевые (граничные) значения параметра учащийся может найти только аналитически, но опираясь на динамический чертеж. Таким образом, апплет не решает задачу за него, а формирует визуальные представления, на которые учащийся может опираться при решении задач с параметрами в дальнейшем без использования графических приложений.

Кроме этого, апплет включает в себя блок вопросов для проверки в онлайн-режиме онлайн понимания взаимосвязей между изменением параметра и формой, расположением графиков. Благодаря этому учитель имеет возможность быстро выявить основные ошибки в решении задачи.

Пример 2 (№ 11.13) [4]. Определите, при каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a+1), \\ (x+y)^2 = 14. \end{cases}$ имеет ровно два решения?

Для решения этой задачи по аналогии был разработан апплет, который также включает в себя текстовое поле с формулировкой основного задания, инструкцию и рабочий лист GeoGebra, а также блок вопросов (см. рис. 4, 5, 6). В отличие от предыдущего примера, этот апплет содержит инструмент «Ползунок» без числовой шкалы и без подписи числовых значений.

Задание

Определите, при каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2+y^2=2(a+1), \\ (x+y)^2=14. \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Инструкция по работе с апплетом

На координатной плоскости изображены графики уравнений:

1) $x^2+y^2=2(a+1)$ (при $a=-0,5$)

2) $(x+y)^2=14$

Для изменения значения параметра a передвигайте точку на ползунке, прижав её левой кнопкой мыши.

Рис. 4. Формулировка задания и инструкция в апплете для примера 2

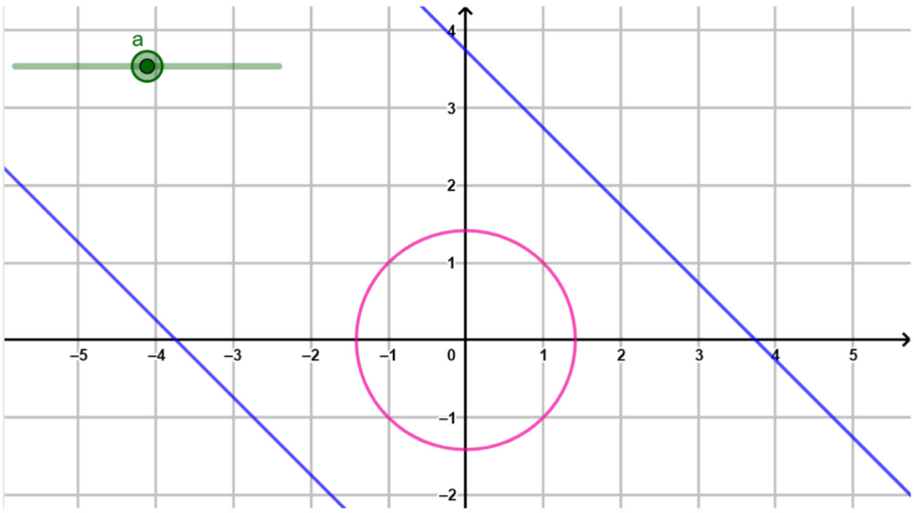


Рис. 5. Область построения графиков в апплете для примера 2

1. Какие ограничения накладываются на значение параметра a в первом уравнении?

Aa π Type your answer here...

2. При каком значении параметра a графиком уравнения $x^2+y^2=2(a+1)$ будет являться точка? Почему?

Aa π Type your answer here...

Рис. 6. Часть блока вопросов в апплете для примера 2

Таким образом, разработка апплетов на платформе GeoGebra Classroom позволяет создавать условия визуализации решения уравнений и систем уравнений с параметром в процессе обучения. Следовательно, формировать у учащихся за счет взаимодействия с динамическим чертежом и графическими объектами на нем наглядные представления о том, как при изменении значения параметра изменяется вид, положение, форма графиков и количество решений уравнения или системы.

Библиографический список

1. Здоровенко М.Ю., Зеленина Н.А., Крутихина М.В. Обучение школьников различным способам решения задач с параметрами // Научно-методический электронный журнал Концепт. 2017. № V7. С. 62–71.
2. Крамор В.С. Задачи с параметрами и методы их решения. М.: Оникс, 2007.
3. Ларин С.В. Использование компьютерной анимации при обучении решению задач с параметрами // Математика в школе. 2022. № 7. С. 43–48.
4. Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Алгебра. 9 класс (углубленный уровень): учебник. М.: Вентана-Граф, 2019.
5. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю., Кипнис М.М. Особенности использования графических онлайн-калькуляторов в процессе математической подготовки бакалавров педагогического образования // Информатизация образования и методика электронного обучения: материалы III Международной научной конференции / Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий. 2019. С. 256–261.

ПРОГРАММА GEOGEBRA КАК ПЛОЩАДКА ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 6–7 КЛАССАХ

GEOGEBRA PROGRAM AS A PLATFORM FOR ORGANIZING RESEARCH ACTIVITIES IN MATH LESSONS IN GRADES 6–7

С.В. Даутова, Ю.И. Пухова **S.V. Dautova, Y.I. Pukhova**

Комплекс заданий, GeoGebra, геометрия.

Авторские разработки по применению программы GeoGebra представляют собой комплекс заданий для изучения тем: углы, построение и измерение углов, некоторые свойства углов в различных треугольниках. Задания позволяют обучающимся самостоятельно, опытным путем, сформулировать теоремы и свойства. Урок с использованием предложенных авторами заданий представляет собой технологию системно-деятельностного подхода в обучении геометрии.

Set of tasks, GeoGebra, geometry.

Author's developments on the application of the GeoGebra program are a set of tasks for studying the topics: angles, construction and measurement of angles, some properties of angles in various triangles. Tasks allow students to independently, empirically, formulate theorems and properties. The lesson using the tasks proposed by the authors is a technology of a system-activity approach in teaching geometry.

Цифровизация отрасли образования стимулирует учителей использовать современные программы и элементы электронного обучения. При этом учителя стоят перед выбором, какую программу использовать и как грамотно преподнести тот или иной материал. Одной из современных бесплатных геометрических сред, позволяющих строить «динамические» чертежи, является программа GeoGebra [1].

Приведем некоторые задания из собственных методических разработок, демонстрирующих применение программы GeoGebra при изучении следующих тем: *углы; построение и измерение углов; некоторые свойства углов в различных треугольниках.*

З а д а н и е № 1. Построение и измерение угла.

Угол – это геометрическая фигура, состоящая из двух лучей, исходящих из одной точки.

Этапы исследования:

1. Постройте точки A, B и C.

2. Постройте лучи AB и AC.

3. Измерьте $\angle BAC$ и $\angle CAB$ (рис. 1).

Что замечаете? «…сумма углов равна 360°, и эти углы вместе образуют полный угол…»

П р о п е д е в т и к а. В дальнейшем в физике, геометрии, алгебре вы узнаете о движении точки по окружности, как связано движение точки с углом поворота, его измерение может быть и положительным, и отрицательным. Мы с вами работаем с положительными значениями углов, а их откладывают против часовой стрелки, значит $0° < \angle BAC \leq 180°$, а $180° \leq \angle CAB < 360°$. В программе GeoGebra, чтобы измерять нужные углы, используются слова «по часовой» и «против часовой» стрелки.

Что еще замечаете? «…угол обозначен буквой греческого алфавита…»

Так обозначают, когда имеют в виду его градусную меру.

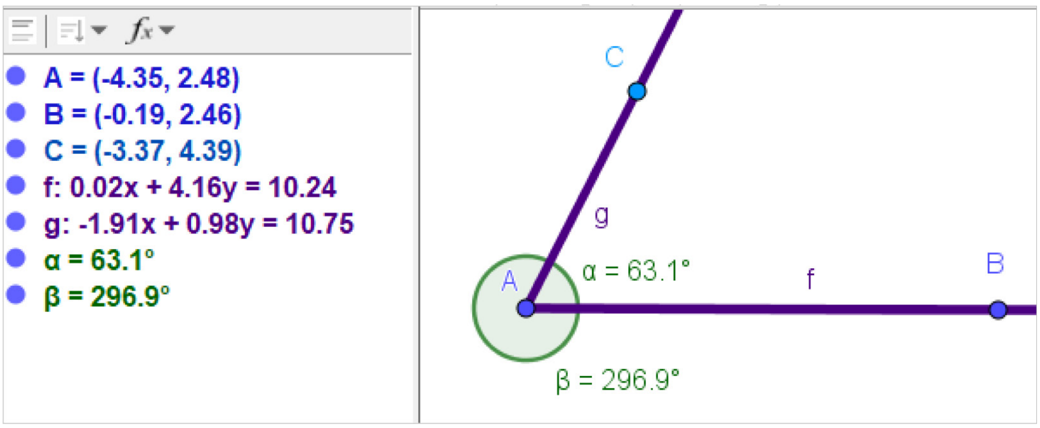


Рис. 1. Результат исследования учащихся по построению и измерению углов

З а д а н и е № 2 направлено на нахождение суммы углов треугольника. Обучающиеся могут проверить свою гипотезу опытным путем, перемещая любую вершину треугольника.

З а д а н и е № 3. Построить треугольник по стороне и двум углам. По этапам построения, прописанным в комплексе заданий, обучающиеся должны определить, *всегда ли получится треугольник? Сделать вывод, какими могут быть углы и их расположение относительно отрезка.*

З а д а н и е № 4 направлено на выявление связи внешнего угла треугольника с суммой углов в треугольнике.

Внешний угол – это угол, смежный внутреннему при данной вершине.

Этапы исследования:

1. Постройте ΔABC, используя инструмент многоугольник.
2. Через точки *A и C* проведите прямую *f* .
3. Отметьте на луче *AC* за точку *C* точку *D*.
4. Измерьте градусные меры внешнего угла $\angle DCB$ треугольника *ABC*, а также внутренние углы треугольника, не смежные с ним.

Что замечаете? «…градусная мера внешнего угла равна сумме градусных мер внутренних углов треугольника, не смежным с ним….».

5. Проверьте свое утверждение опытным путем, перемещая попеременно вершины *A* и *B* для того, чтобы изменились градусные меры углов, перемещая вершину *C* для того, чтобы убедиться в том, что гипотеза выполняется для любого внешнего $\angle DCB$ и острого, и тупого.

З а д а н и е № 5. Прямоугольный треугольник.

1. Постройте отрезок *AB*.
2. Постройте середину С отрезка АВ.
3. Постройте окружность с центром *C* и радиусом *AC*.
4. Отметьте на окружности точку *D*.
5. Скройте окружность.
6. Постройте отрезки *AD*, *CD*, *BD*.

Что можно сказать об отрезках AC, CB, CD? Как называется отрезок CD в $\triangle$*ADB? «…отрезки AC, CB, CD равны, так как это радиусы окружности, отрезок CD – это медиана* $\triangle$*ADB…»*

9. Измерьте $\angle BAD$ и $\angle DBA$.

Что замечаете? «….сумма этих углов равна 90°, а это значит, что угол ADB прямой и треугольник прямоугольный…..»

10. Проверьте свою гипотезу, перемещая вершину *D* (она смещается по окружности, и длина *DC* не изменяется), чтобы убедиться, что для любого расположения точки *D* сумма двух углов всегда 90°, а третий, из вершины которого опущена медиана, – прямой.

Сделайте вывод. «…если медиана треугольника равна половине стороны, на которую опущена, то треугольник прямоугольный…»

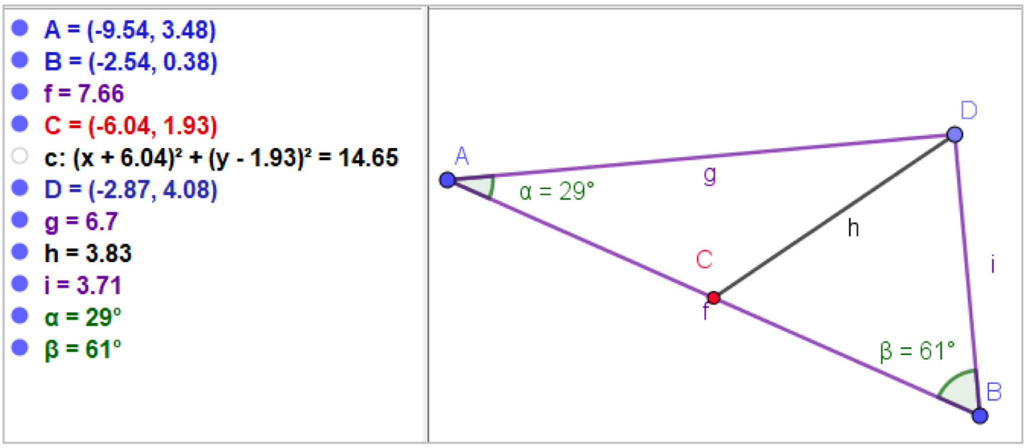


Рис. 2. Результат исследования учащихся в задании 5

В комплекс заданий входят также задачи для самостоятельного исследования. Данные задачи не направлены на доказательства теорем и свойств. Они позволяют семиклассникам самостоятельно, опытным путем, сформулировать их. При этом учитель применяет деятельностный подход, согласно которому ученик не получает знания в готовом виде, а добывает их сам в процессе собственной учебно-познавательной деятельности.

Библиографический список

1. Естественные науки: мастер-класс по математике. Использование на уроках математики компьютерной программы «GeoGebra». URL: https://infourok.ru/master-klass-ispolzovanie-na-uro-kah-matematiki-kompyuternoy-programmi-geo-gebra-1215539.html, свободный – (23.08.2020).

ОБ ИТОГАХ ТЕСТИРОВАНИЯ ПЕРВОКУРСНИКОВ ПО ШКОЛЬНОМУ КУРСУ МАТЕМАТИКИ В 2022 ГОДУ[1]

ABOUT TESTING RESIDUAL KNOWLEDGE IN MATHEMATICS IN 2022

Б.К. Дураков, О.В. Кравцова, В.Р. Майер, Н.Д. Подуфалов, Д.В. Семёнова, И.В. Шевелёва

B.K. Durakov, O.V. Kravtsova, V.R. Mayer, N.D. Podufalov, D.V. Semenova, I.V. Sheveleva

Общее образование, содержание образования, математическое образование, остаточные знания, тестирование.
Рассматриваются проблемы формирования содержания школьного математического образования и методики его преподавания. Анализируются итоги тестирования остаточных знаний по математике, проведенного в осенний период 2022 года, рассматриваются направления совершенствования системы тестов.

General education, educational content, mathematical education, residual knowledge, testing.
The problems of the formation of the content of school mathematical education and methods of its teaching are considered. The results of the testing of residual knowledge in mathematics conducted in the autumn period of 2022 are analyzed, the directions of improving the test system are considered.

В статье «О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике» [1; 2] рассматривались проблемы оптимизации содержания школьного курса математики и ряд связанных с ней вопросов методологического и методического характера, а также была поставлена задача организации систематического тестирования и анализа остаточных знаний, умений и навыков (далее по тексту – остаточных знаний) школьников, абитуриентов и первокурсников по всем разделам школьной математики и определены общие подходы к ее решению.

В 2021 году такое тестирование было проведено на базе СФУ и КГПУ им. В.П. Астафьева на основе тестов, разработанных преподавателями СФУ (см. [1]), итоги которого опубликованы в [3].

В текущем году система тестов была доработана. Часть заданий составлена таким образом, чтобы ответ был развернутым, как в заданиях ЕГЭ, некоторые задания продублированы теоретическими вопросами.

В настоящей статье анализируются некоторые общие итоги тестирования, проведенного осенью 2022 года среди студентов первого курса ФГАОУ ВО

[1] Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).
This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2022-876).

«Сибирский федеральный университет» (СФУ), в том числе Саяно-Шушенского филиала СФУ, ФГБОУ ВО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева» (КГПУ им. В.П. Астафьева).

Отметим, что пока мы не проводим тестирование в школах, поскольку «вход» в школу в условиях значительной перегрузки учителей и учащихся существенно сложнее, чем в университеты.

Поэтому представляется наиболее реальным решение всего комплекса приведенных задач пока осуществлять на базе инновационных школ и площадок.

Как и прежде, в качестве «школьных» показателей мы брали показатели ЕГЭ, а тестирование первокурсников мы называем входным тестированием (ВТ).

Общие итоги тестирования 2022 года и пути дальнейшего развития методологии и методов тестирования остаточных знаний

Отметим, что состав протестированных студентов, как и в 2021 году, отражает весьма широкий спектр направлений подготовки кадров с высшим образованием. В тестировании участвовало 2044 студентов первого курса Сибирского федерального университета (12 институтов и Саяно-Шушенский филиал СФУ) и 73 студента Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева (Институт математики, физики и информатики).

Тематический состав тестов в текущем году включал следующие разделы школьного курса математики: 1. Планиметрия – с развернутым ответом; 2. Стереометрия; 3. Преобразование алгебраического выражения; 4. Теорема Виета; 5. Свойства элементарных функций; 6. Преобразование тригонометрического выражения; 7. Производная; 8. Определенный интеграл; 9. Векторы; 10. Геометрический смысл производной; 11. Вычисление предела функции; 12. Монотонность и экстремумы.

Обратимся теперь к показателям, характеризующим уровень трудности тестовых заданий (доля решивших задания в процентах).

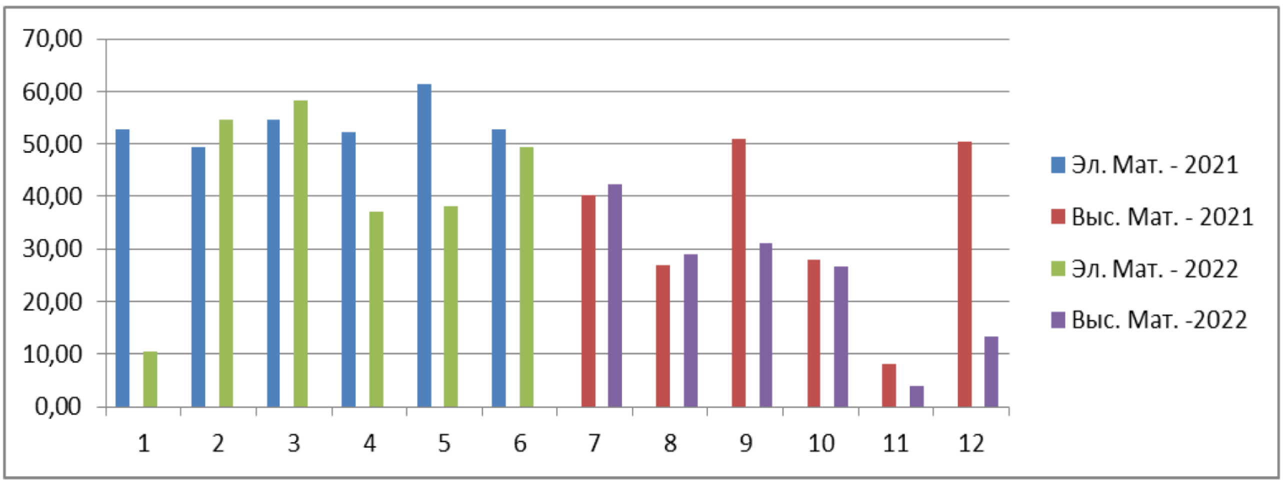


Диаграмма 1. Уровень трудности тестовых заданий (доля решивших, %), 2021–2022 гг.

Таблица 1

Уровень трудности тестовых заданий

Направление	Элементарная математика						Высшая математика					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Математика и физика	14,8	59,1	57,5	44,1	51,0	58,3	44,5	31,6	31,6	40,9	8,1	28,3
Информационные технологии	5,7	63,1	72,1	38,5	50,0	58,2	54,1	26,2	32,0	37,7	5,7	32,8
Инженерные направления	11,9	55,1	59,1	35,5	38,1	47,2	40,6	27,8	25,0	32,7	3,0	11,3
Экономика и управление	11,0	53,4	56,7	36,2	35,1	54,0	44,4	32,9	27,4	22,2	3,6	9,3
Биология и химия	10,3	45,9	44,1	41,2	25,9	35,9	38,8	22,9	25,3	29,4	5,3	11,2
Торговля и сфера услуг	0,0	52,0	60,7	34,5	32,3	48,9	39,7	32,8	23,6	24,5	1,8	4,4
Педагогика	16,4	56,2	57,5	37,0	35,6	45,2	39,7	20,6	30,1	32,9	0,0	9,6
ВСЕ СТУДЕНТЫ	10,5	54,7	58,2	37,2	38,1	49,5	42,2	28,9	26,6	31,0	3,8	13,4

Как и при проведении тестирования в 2021 г., в текущем году в тесты включались задания, составленные на основе содержания задачника «Алгебра и начала математического анализа, часть 2, 10–11 классы под редакцией А.Г. Мордковича (др. авторы: Л.О. Денищева, Т.А. Курешкова, Т.Г. Мишустина, П.В. Семенов, Е.Е. Тульчинская), Москва, 2009 г.», т.е. использовался учебный материал, который входил в школьную программу по математике и не содержал задач повышенной сложности. Вместе с этим для ряда заданий были использованы формулировки, отличающиеся от формулировок, приведенных в задачнике. Это вызвало сложности в выполнении заданий, что говорит о недостаточном понимании учащимися содержания этих заданий, т. е. при изучении соответствующего материала происходит в определенной степени «натаскивание» учащихся не на суть задачи, а на ее форму.

Поэтому результаты тестирования по всем разделам математики нельзя считать удовлетворительными. Так, наибольшая доля решивших задачи приходится на стереометрию и преобразование алгебраических и тригонометрических выражений и составляет всего около пятидесяти процентов.

Можно считать «провальной» ситуацию со знаниями школьников по разделам «Планиметрия» и «Предел функции». Также весьма низки показатели по разделам «Монотонность и экстремумы», «Определенный интеграл» и «Векторы».

Таким образом, при проведении дальнейших исследований уровня остаточных знаний необходимо обратить особое внимание этим разделам с тем, чтобы выявить дидактические единицы, требующие изменения подходов к их изучению.

Поскольку понятие предела является основополагающим для освоения разделов высшей математики, включаемых в школьный курс, а показатель остаточных знаний по этому разделу низкий, необходимо еще раз вернуться к вопросу: какие разделы высшей математики целесообразно изучать в школьной программе и, самое главное, как их изучать.

Еще в 2013 г. при разработке и утверждении Правительством Российской Федерации Концепции развития математического образования в Российской Федерации (Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 г. № 2506-р «Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации») многие математики обращали внимание на неудовлетворительное состояние изучения в школьном курсе математики геометрических разделов. Проведенное тестирование показывает, что ситуация еще ухудшилась. Для иллюстрации этого достаточно привести одно из заданий по планиметрии, с которым справилось незначительное количество учащихся:

Задание с развернутым ответом. Запишите полное решение задачи на дополнительном листе. Подпишите лист: Ф.И.О., группа, номер теста. Сдайте вместе с бланком ответов на проверку.

Боковая сторона равнобедренного треугольника с острым углом при вершине равна 25, а высота, проведенная к этой стороне, равна 24. Найти периметр треугольника.

В целом итоги тестирования полностью подтверждают прогноз ведущих ученых и специалистов сферы образования о том, что наибольшую сложность для учащихся представляет изучение практически всех элементов высшей математики. Поскольку на их детальную проработку и решение необходимого объема задач учебного времени выделяется недостаточно, то это приводит к быстрому снижению уровня остаточных знаний, а также умений и навыков в решении задач. Существенной причиной сложившейся ситуации является отсутствие эффективных методик преподавания данных разделов математики в общеобразовательной школе и недостаточно высокий уровень подготовки педагогических кадров по этим направлениям.

Вместе с этим сейчас дополнительно включены в школьный курс элементы теории вероятностей и математической статистики, и они отражены в ФГОС по общему образованию. Насколько нам известно, этому не предшествовала экспериментальная апробация в «массовой» школе ни новых учебных программ, ни учебно-методического обеспечения.

Такой подход к изменению содержания школьного курса математики на фоне результатов тестирования выглядит, мягко говоря, неоправданным.

Не вызывает сомнений, что вопрос о включении новых математических разделов или тем в школьный курс должен основываться на детальной разработке экспериментальных учебных программ и планов, учебно-методического обеспечения изучения соответствующих разделов или тем, определения их содержания в соответствии с уровнем возрастного психофизиологического развития школьников и последующей обязательной экспериментальной апробацией содержания и методик обучения в массовой школе на представительной выборке обучающихся.

Отметим также, что заметное снижение среднего балла ВТ по сравнению с ЕГЭ по всем направлениям подготовки свидетельствует о достаточно быстром снижении уровня остаточных знаний. Как и прежде, вызывают тревогу более низкие показатели на направлении «Педагогика».

Непосредственное сравнение показателей ЕГЭ и ВТ приведено в следующей диаграмме.

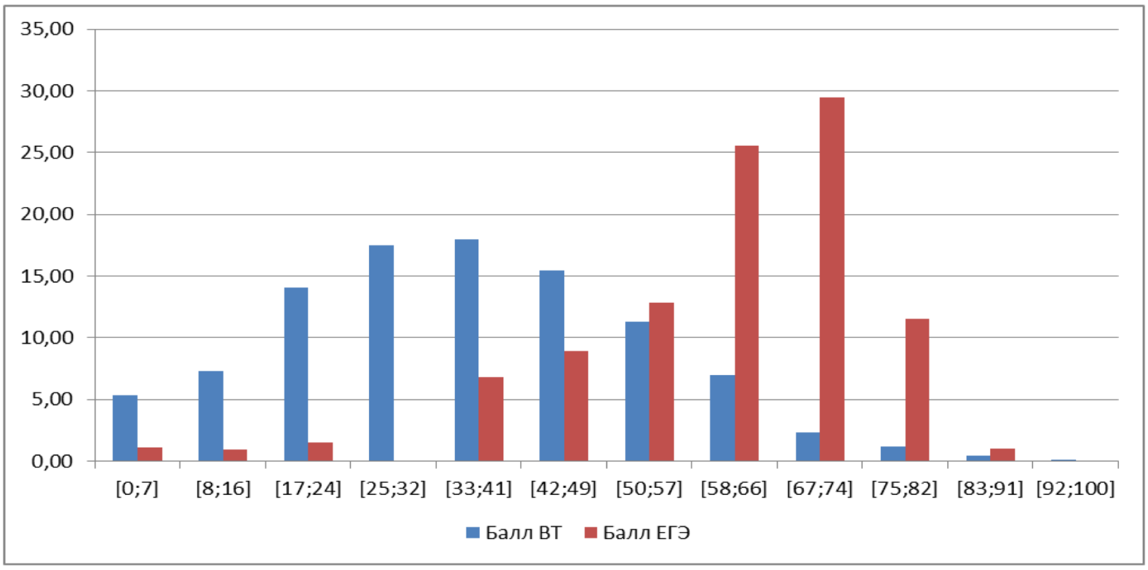


Диаграмма 2. Сравнение показателей ЕГЭ и ВТ

Понятно, что «пиковые» показатели ЕГЭ обусловлены отбором в вузы – в них поступают учащиеся, имеющие лучшие показатели по итогам ЕГЭ. Очевидно, что показатели ВТ существенно ниже показателей ЕГЭ.

Таблица 2

Сводные характеристики по направлениям

Направление	Количество	Средний балл ЕГЭ	Средний балл по части ВТ, %			
			Разверн. часть	Тест. часть	Эл. мат.	Выс. мат.
Математика и физика	247	62,22	14,78	41,37	47,47	30,84
Информационные технологии	122	69,88	5,74	42,77	47,95	31,42
Инженерные направления	921	61,08	11,94	34,12	41,15	23,40
Экономика и управление	365	62,73	10,96	34,10	41,05	23,29
Биология и химия	170	57,49	10,29	29,63	33,87	22,16
Торговля и сфера услуг	229	46,54	0,00	32,27	38,06	21,11
Педагогика	73	56,53	16,44	33,13	41,32	22,15
ВСЕ СТУДЕНТЫ	2127	60,66	10,48	34,86	41,35	24,31

Таблица 2 подтверждает тезис о том, что разделы учебной программы по высшей математике усвоены учащимися значительно хуже, чем разделы по элементарной математике. Также наибольшую сложность у школьников вызывает решение задач с развернутым ответом, многие школьники даже не приступали к решению таких задач. Скорее всего, это объясняется «нацеленностью» учащихся на различные (числовые, алгебраические) вычисления и неумение анализировать текстовые части заданий, непонимание условий, неумение формулировать выводы после поведения вычислений, т. е. неумение рассуждать.

Заключение

Одной из целей наших исследований является поиск путей освобождения содержания школьного курса математики от второстепенных деталей и концентрации учебного процесса на более глубоком усвоении базовых понятий и положений.

Необходимо вновь вернуться к вопросу создания в школах экспериментальных площадок и координирующей их деятельность инновационной площадки РАО на базе одного из вузов или краевого института развития образования. Без совместной работы ученых, вузовских преподавателей и школьных учителей невозможно эффективно решать стоящие задачи.

Отметим наиболее актуальные задачи по совершенствованию системы тестирования остаточных знаний:

– дальнейшее формирование понятия «остаточные знания» и разработка системы показателей, характеризующих «остаточные знания»;

– разработка методов и методик тестирования остаточных знаний и анализа его результатов, позволяющих выявлять недостатки методических систем, используемых в преподавании математики;

– детализация тестовых заданий, позволяющая выявлять дидактические единицы или их элементы, вызывающие наибольшие трудности в изучении (имеющие наиболее низкие показатели остаточных знаний в первую очередь по темам Предел функции, Определенный интеграл, Производная и Геометрический смысл производной, Планиметрия, Элементы стохастики).

Библиографический список

1. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д. О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике // Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе: материалы Международной научно-практической интернет-конференции. 19–25 апреля 2021 г. / под ред. Л.Л. Босовой, Д.И. Павлова [Электронное издание сетевого распространения]. Москва: МПГУ, 2021. С. 314–326.
2. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д. О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике // Известия РАО. 2021. № 3 (55). С. 105–119.
3. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В. О содержании школьного математического образования и тестировании остаточных знаний по математике // Педагогика. 2022. № 5. С. 57–68.

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СРЕДЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ «SCRATCH»

SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS IN THE SCRATCH PROGRAMMING ENVIRONMENT

Е.К. Каримов **E.K. Karimov**

Программное средство Scratch, математическое образование.
В статье раскрываются особенности обучения математике в условиях внедрения образовательных стандартов нового поколения. Рассматриваются различные аспекты применения среды Scratch в учебном процессе, а именно – как среды программирования, как мультимедийной системы и как сетевого сообщества. Статья раскрывает влияние среды Scratch на развитие алгоритмического мышления школьников и исследованию возможностей для решения математических задач.

Scratch software, mathematical education.
The article reveals the features of teaching mathematics in the context of the introduction of educational standards of a new generation. Various aspects of the Scratch environment application in the educational process are considered, namely, as a programming environment, as a multimedia system and as a network community. The article reveals the influence of the Scratch environment on the development of algorithmic thinking of schoolchildren and the study of opportunities for solving mathematical problems.

Вопросы, связанные с выбором педагогически плодотворных средств обучения, которые встраиваясь в учебный процесс, позволили бы повысить его эффективность, составляют основу проблемной области педагогических исследований. В условиях продолжающейся «компьютеризации образования» наряду с методическим компонентом организации учебной деятельности выделяют аппаратно-программную составляющую учебного процесса. К аппаратно-программному компоненту относится программное обеспечение учебного процесса, которое можно рассматривать как совокупность программных средств, используемых на различных этапах учебного процесса для обработки, передачи информации, ее закрепления, контроля за усвоением, для создания условий формирования знаний, мотивации учения. Согласно новой типовой учебной программе по учебному предмету «Информатика» для 5–9 классов уровня основного среднего образования по обновленному содержанию в 5 классе представлена игровая среда программирования Лого Scratch.

Множество ученых в своих исследованиях подчеркивают влияние на результаты познания инструментальных средств, в качестве которых можно рассматривать как органы чувств – внутренние информационные каналы человека, «датчики сознания», так и сложные технические приспособления. Начиная с последней трети XX в. роль таких инструментов, которые предоставляет нам общество, играют компьютеры, проникающие во все сферы человеческого бытия. То есть компьютер (прикладные программные средства с их образовательными возможностями) в рамках учебного процесса может рассматриваться не только как предмет изучения, а как инструмент, помогающий учиться, «орудие мышления», причем мышления деятельностного. Идея о том, что детям нужно вовремя давать хорошие «инструменты для думанья», органично привязывается к понятиям «инструментальных средств» или «артефактов», «культурных орудий», о которых представители так называемой «инструментальной» концепции Л.С. Выготский и Дж. Дьюи (John Dewey) говорили как об объектах, помогающих овладеть интеллектуальными операциями. Так и возможности цифровых технологий гораздо шире, чем транслирование, то есть не ограничиваются методами визуализации учебной информации.

Идея обучающих игр имеет свою давнюю историю. На сегодняшний день это находит отражение в понятии «геймификация образования». Разработчики Scratch убеждают, что можно запрещать компьютерные игры, а можно показать инструменты для создания собственных. При таком подходе дети не только используют готовые технологии, но и принимают участие в их создании, создавая собственные игровые, обучающие проекты, из потребителей превращаются в производителей. При этом компьютер – не предмет изучения, а лишь инструмент создания проекта, где на первый план выходит личностно значимая идея, положенная в его основу. И речь здесь идет не о компьютере как таковом, но о формировании при его посредстве новой образовательной культуры, благоприятствующей раскрытию всех способностей ученика к освоению любой академической дисциплины.

И в средах семейства Лого, управляя черепашкой, и в Scratch дети «обучают» (программируют действия) исполнителей алгоритмов, каким образом им реагировать на то или иное событие, взаимодействовать между собой, управляют их положением, движением, внешностью и т.д. При этом в игровой форме они на пропедевтическом уровне усваивают важные алгоритмические конструкции, математические понятия.

Так, например, многие Scratch-проекты предполагают перемещение спрайтов по сцене в заданную точку, поворот на угол, при этом ученики осваивают понятие угла, отрицательного числа (повернуть в направлении влево), случайного числа, работают с координатной плоскостью. Импортируя в проект готовый фон координатной сетки «xygrid» из библиотеки Scratch, можно написать скрипты, содержащие команды, по которым спрайт будет двигаться вдоль осей, сообщая при этом координаты своего местонахождения, ученик (пользователь) может задавать с клавиатуры координаты точки, в которую перейдет спрайт. Для создания эффекта анимации можно использовать смену костюмов спрайта. Например, у кота, что является своего рода логотипом языка Scratch, и при создании нового проекта используется в качестве спрайта по умолчанию, имеется два костюма. Промежутки времени, через которые происходит последовательная смена костюмов, задаются при помощи «ждать», при этом задаваемое количество секунд может быть дробным числом. В этом случае понятие дробных чисел, которое вводится в курсе математики в конце 5 класса, может формироваться в начальных классах с опережением. Если же эффект движения будет связан не с ходьбой, а с полетом объекта, понадобится имитация взмахов крыльев посредством организации смены костюмов и перемещение объекта случайным образом, а не строго по прямой линии. В этом случае будет использован генератор случайных чисел: внутри команды «плыть (…) секунд в точку x(…), y(…)» значения для координат задаем случайным образом с помощью команды «выдать случайное число от … до …».

В средах семейства Лого сложилось такое понятие, как «черепашья графика», или «геометрия черепахи», что отражает возможности Лого в отношении пропедевтической подготовки учащихся 5 классов по геометрии. Возможности Scratch-объектов нисколько не уступают в этом черепашке Лого. Scratch называют графическим диалектом Logo. На рисунке 1 изображены фрагменты скриптов, содержащих команды блока «перо», и в результате выполнения которых на сцене появляются такие геометрические фигуры, как треугольник, квадрат и пятиугольник.

Рис. 1. Фрагменты сценариев, следуя которым, управляемый объект рисует n-угольник (n=3,4,5)

Задавая различные значения переменной, отвечающей за число сторон, можно получать на экране изображения различных многоугольников. Для построения любого правильного многоугольника с заданной длиной стороны необходимо следовать алгоритму: «повторить n раз: вперед на s шагов, повернуть направо на угол, равный 360/n». Чем больше сторон у правильного многоугольника, тем больше он будет похож на окружность. Ученик может представить себя в роли спрайта и описать окружность по принципу «немного вперед – поворот, и так, пока не вернемся в исходную точку». Что соответствует идее С. Пейперта о диалектическом взаимодействии элементов геометрии тела с формальной геометрией, а значит – теории и практики, естественного и формального.

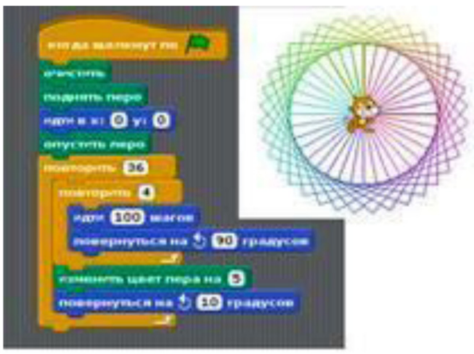


Рис. 2. Фигура, полученная комбинированием окружности и квадрата

На рисунке 2 представлен случай вложенного цикла. Внутренний цикл описывает алгоритм рисования n-угольника (квадрата). В соответствии с внешним циклом спрайт рисует окружность, поворачиваясь после каждого шага на 10° вправо. В результате на сцене появляется окружность, составленная из 36 квадратов со сторонами 100 шагов. Аналогично можно получить комбинации окружности с другими n-угольниками.

Возможности Scratch позволяют также работать с фрактальной графикой, что может служить пропедевтикой понятия «рекурсия», так как каждый фрагмент фрактальной кривой повторяется при уменьшении масштаба. Фрактал на рисунке 3 состоит из однотипных элементов – равносторонних треугольников, связанных между собой зависимостью каждого следующего элемента от координат предыдущего. Две крайние точки в основании треугольника со сторонами 200 шагов являются вершинами для двух других таких же треугольников. Три таких треугольника в совокупности составляют один большой треугольник со сторонами 400 шагов и внутри каждого из них две крайние точки в основании треугольника со сторонами 100 шагов являются вершинами для двух других таких же треугольников и так далее. В данном случае стороны самых маленьких треугольников составляют 6,25 шагов, глубина рекурсии – 7 вложений. В результате получаем состоящее из 7 уровней изображение треугольника Серпинского (рис. 3).

Создаваемые проекты могут быть различного характера: интерактивные мультимедийные презентации, демонстрационные ролики, программы-тренажеры, анимированные истории и т.д. Как правило, в подобных проектах требуется организовать диалог между спрайтами посредством передачи сигналов – сообщений, диалог пользователя с программой за счет команд блока «контроль» и «сенсоры», выступающих как средство обработки событий (щелчок мышью по спрайту, нажатие какой-либо клавиши клавиатуры). При этом возможно достичь как последовательного выполнения скриптов, так как и параллельных действий множества исполнителей.

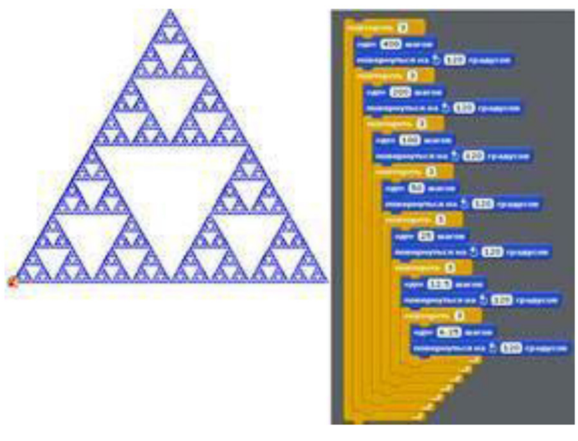


Рис. 3. Треугольник Серпинского

Ученик как автор проекта может выбрать спрайта из библиотеки Scratch, загрузить из файла или веб-сайта, или придумать свои объекты и нарисовать окружение для них. Для этого в Scratch предусмотрен встроенный графический редактор. Кроме того, проекты могут быть озвучены с помощью специальных команд из блока «звук». При этом также можно выбрать, загрузить готовую запись или же придумать, записать и обработать свой аудиофрагмент. Поэтому рассматривать среду Scratch только лишь как систему программирования было бы не совсем справедливым. Возможность работать с различными видами «медиаинформации» (текст, графика, звук, анимация) делает Scratch мультимедийной системой и дидактической основой для первоначального знакомства учащихся с цифровыми технологиями, инструментом организации «медиаурока», погружения в «медиакультуру» с целью адаптации личности к условиям динамичного информационного общества. Внутри конструктивистской образовательной парадигмы получило развитие социокультурное течение, делающее акцент на коммуникативной и культурологической функции медиа. Вокруг Scratch сложилось целое интернет-сообщество: работая вместе в сетевой версии Scratch, дети обмениваются идеями, находят непосредственное применение своим знаниям, при этом действуют принципы само- и взаимообучения.

Среди особенностей сетевой версии языка Scratch можно выделить встроенный аудиоредактор, возможность работать в графическом редакторе с векторной графикой, а также некоторые дополнения к блокам: например, новые команды блока «Сенсоры» для работы с видео. Появилась возможность создавать «новые блоки» и комментировать скрипты. Например, в случае «36-лепестковым цветком» (рис. 2) вместо вложенного цикла можно было бы создать процедуру «квадрат» как отдельный блок. А для программы, рисующей треугольник Серпинского (рис. 3), создать новый блок, представляющий собой рекурсивную процедуру с двумя числовыми параметрами: – уровень вложения, – длина стороны треугольника (число шагов). Исходим из того, что для получения изображения треугольника порядка нужно в углах правильного треугольника заданного размера нарисовать 3 треугольника порядка вдвое меньшего размера (рис. 4).

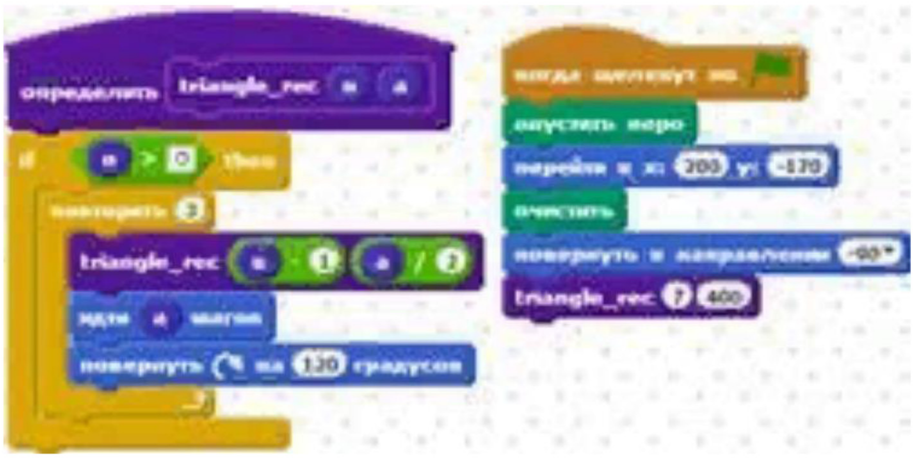


Рис. 4. Процедура triangle_rec, реализующая треугольник порядка n-1 со стороной a/2

Основная цель использования Scratch – развить у школьников творческие способности, логическое мышление, свободу в использовании информационных технологий. Посредством среды Scratch можно организовывать проектную деятельность учащихся. Разработка учебных проектов позволяет ученику почувствовать себя исследователем, а не просто получателем информации, которую требуется запомнить и суметь воспроизвести. Так, компьютерные технологии, в частности медиасредства становятся инструментом организации мыслительной деятельности ребенка, формирования культуры конструктивного познания, в основе которой идеи самоорганизации, саморазвития, самореализации личности учащегося, что соответствует целям компетентностного образования, положенного в основу образовательных стандартов нового поколения.

Библиографический список

1. Пейперт С. Переворот в сознании: Дети, компьютеры и плодотворные идеи: пер. с англ. / под ред. А.В. Беляевой, В.В. Леонаса. М.: Педагогика, 1989. 224 с.
2. Петренко В.Ф. Конструктивизм как новая парадигма в науках о человеке // Вопросы философии. 2011. № 6. С. 75–82.
3. Шаталова Н.П. Азбука конструктивного обучения: монография. Красноярск: Научно-инновационный центр, 2011. 204 с.
4. Resnick M. Scratch Programming for All. Magazine Communications of the ACM, November, 2009. P. 60–67.

СПУТНИКОВЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КАК ИСТОЧНИК УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10 КЛАССОВ

SATELLITE SYSTEMS AND THEIR MATHEMATICAL DESCRIPTION AS A SOURCE OF EDUCATIONAL AND RESEARCH PROBLEMS FOR STUDENTS OF 10 GRADES

С.В. Ларин **S.V. Larin**

Спутниковые системы, круговые орбиты, эллиптические орбиты, комплексные числа, многочлены.

В качестве материала для учебно-исследовательской деятельности учащихся в статье вводится понятие спутниковых систем на плоскости с круговыми и эллиптическими орбитами. Приведены анимационно-геометрические модели спутниковых систем и их математическое описание. В заключение кратко обсуждается роль и значение анимационных рисунков как технологической части цифровизации обучения математике.

Satellite systems, circular orbits, elliptical orbits, complex numbers, polynomials.

The article introduces the concept of satellite systems on a plane with circular and elliptical orbits. Animation-geometric models of satellite systems and their mathematical description are given. In conclusion, the role and significance of animated drawings as a technological part of the digitalization of mathematics education is briefly discussed.

Учитель может помочь заинтересованному школьнику, называющему математику своим любим предметом, встать на путь собственных учебно-научных исследований, осваивая по пути элементы компьютерных технологий в обучении. Представленный в статье материал базируется на минимальных знаниях о комплексных числах, геометрических и алгебраических заданиях эллипсов, а также знании формул параллельных переносов и вращений. При построении анимационных рисунков будем использовать свободно распространяемую программу GeoGebra. С ее анимационными возможностями можно познакомиться, например, по книге [1].

1. Спутниковая система с круговыми орбитами спутников

Спутниковой системой с круговыми орбитами назовем упорядоченную совокупность точек на плоскости $(F_0, F_1, ..., F_n)$, называемых спутниками, где спутник F_0 неподвижен, а для любого $t = 1,...,n$ спутник F_t вращается вокруг F_{t-1} по круговой орбите с заданной скоростью p_t (рис. 1). Математически она описывается многочленом $f(z) = a_0 + a_1 z^{p_1} + ... + a_n z^{p_n}$ с комплексными коэффициентами при условии, что комплексная переменная z удовлетворяет условию $|z| = 1$ ([2], [3]).

Рис. 1. Спутниковая система с круговыми орбитами

Приступая к построению спутниковой системы на координатной плоскости, строим единичную точку $E = (1,0)$, проводим единичную окружность и строим на ней точку Z, изображающую комплексную переменную. Строим вектор $\overrightarrow{OZ}$, который назовем «часовой стрелкой», она при анимации непрерывно вращается в направлении против часовой стрелки, отмеряя время. Задаем точками плоскости комплексные числа $a_0, a_1, ..., a_n$, ползунками задаем показатели степеней переменных $p_1, ..., p_n$ многочлена $f(Z) = a_0 + a_1 Z^{p_1} + ... + a_n Z^{p_n}$ (на анимационном рисунке 1 $n = 3$) и последовательно строим точки $F_0 = a_0$, $F_1 = F_0 + a_1 z^{p_1}$, …, $F_n = F_{n-1} + a_n z^{p_n}$. При анимации точки Z можно убедиться, что за один полный оборот «часовой стрелки» по единичной окружности спутник F_t, $t = 1,...,n$, совершит вокруг F_{t-1} по круговой орбите p_t оборотов.

2. Спутниковая система с эллиптическими орбитами спутников

Покажем на примере построение и математическое описание спутника S_1 и его эллиптической орбиты (рис. 2).

За основу берем построение на рисунке 1 «часовой стрелки» и спутников F_0, F_1, которые назовем фокусами будущей эллиптической орбиты. Строим точки, изображающие комплексные числа a_0 и a_1. Ползунками задаем параметры p_1 и q_1.

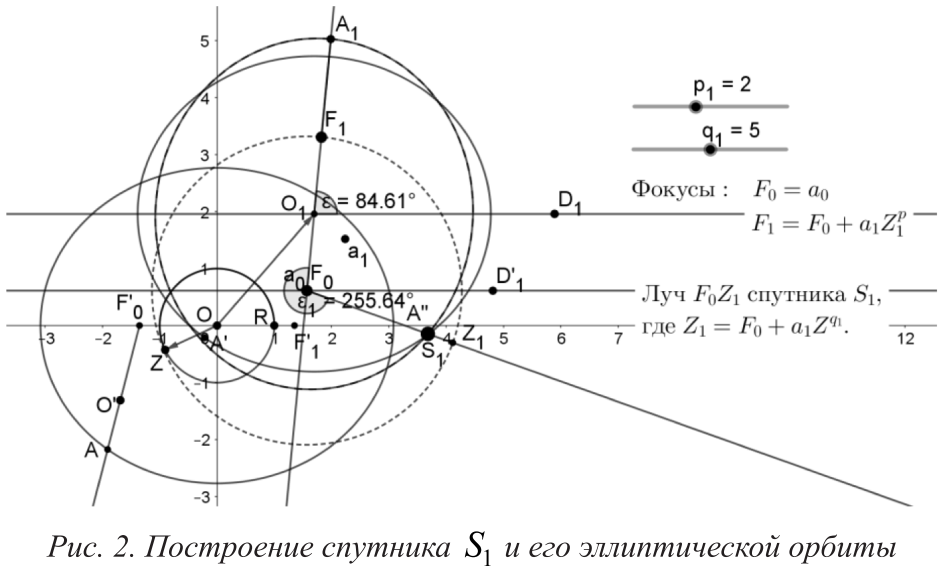


Рис. 2. Построение спутника S_1 и его эллиптической орбиты

Построение спутника S_1 и его эллиптической орбиты h.

1. Строим точки $F_0 = a_0$, $F_1 = F_0 + a_1 Z^{p_1}$, $A_1 \in F_0F_1$, $F_1A_1 = m_1$.

2. Строим эллипс h по фокусам F_0, F_1 и точке A_1.

3. Строим центр эллипса O_1 как середину отрезка F_0F_1.

4. Измеряем угол, характеризующий наклон оси эллипса к горизонтали, проходящей через точку O_1: $\angle D_1O_1A_1 = \varepsilon$.

5. Строим точку $Z_1 = F_0 + a_1 Z^{q_1}$, луч F_0Z_1 и точку пересечения луча с построенным эллипсом: $S_1 = F_0Z_1 \cap h$.

При включении анимации точки Z наблюдаем, как спутник S_1 вращается по эллиптической орбите h, а фокус F_1 вращается по круговой орбите вокруг фокуса F_0, совершая при этом p_1 оборотов за один оборот точки Z. Точка Z_1 вращается вокруг фокуса F_0 по круговой орбите, совершая при этом q_1 оборотов за один оборот точки Z. Вслед за ней спутник S_1 вращается по своей эллиптической орбите, совершая при этом q_1 оборотов за один оборот точки Z.

6. Измеряем угол, характеризующий наклон луча F_0Z_1 к горизонтали, проходящей через точку F_0: $\angle D_1'F_0Z_1 = \varepsilon_1$.

7. Фиксируем числовые характеристики спутника S_1 и его эллиптической орбиты:

$$T = (a_0, a_1, m_1, p_1, q_1, \varepsilon, \varepsilon_1).$$

Наметим путь математического описания координат спутника S_1 и его эллиптической орбиты через указанный набор чисел.

1. Обозначим $r_1 = |a_1|$. Находим большую полуось построенного эллипса $u = \frac{r_1}{2} + m_1$ и квадрат малой полуоси $v^2 = u^2 - \frac{r_1^2}{4}$. Записываем каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1$. Строим этот эллипс по уравнению, обозначив его через d_1.

2. Строим фокусы $F_0' = (-\frac{r_1}{2}, 0)$, $F_1' = (\frac{r_1}{2}, 0)$ эллипса d_1 и поворачиваем точку O вокруг фокуса F_0' на угол ε_1, получаем точку O'. Строим луч $F_0'O'$ и в пересечении с эллипсом d_1 получаем точку A – аналог спутника S_1 на эллипсе h.

3. Переносим эллипс d_1 и точку A на нем на вектор $\overrightarrow{OO_1}$ и получаем эллипс d_1' и точку A' на нем.

4. Поворачиваем эллипс d_1' и точку A' на нем вокруг точки O_1 и получаем эллипс d_1'' и точку A'' на нем. Отмечаем, что эллипс d_1'' совпадает с эллипсом h, а точка A'' эллипса d_1'' совпадает со спутником S_1.

5. Запись формул описанных преобразований эллипса d_1 и точки A на нем к эллипсу h и спутнику S_1 на нем указывает путь математического описания координат спутника S_1 и его орбиты через указанный выше набор числовых параметров T.

Анимационный рисунок 3 демонстрирует построение спутниковой системы с эллиптическими орбитами спутников, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Эллиптическая орбита каждого спутника S_t, $t = 1,...,n$, определяется заданием пары фокусов (F_{t-1}, F_t) и точкой эллипса M_t.

2. Спутник S_0 неподвижен и совпадает с фокусом F_0 орбиты первого спутника S_1, а каждый следующий фокус F_t вращается по круговой орбите вокруг фокуса F_{t-1} при $t = 1,...,n$, совершая при этом заданное число оборотов p_t за один оборот «часовой стрелки».

3. Спутник S_t, $t = 1,...,n$, совершает заданное число оборотов q_t по своей эллиптической орбите за один оборот «часовой стрелки».

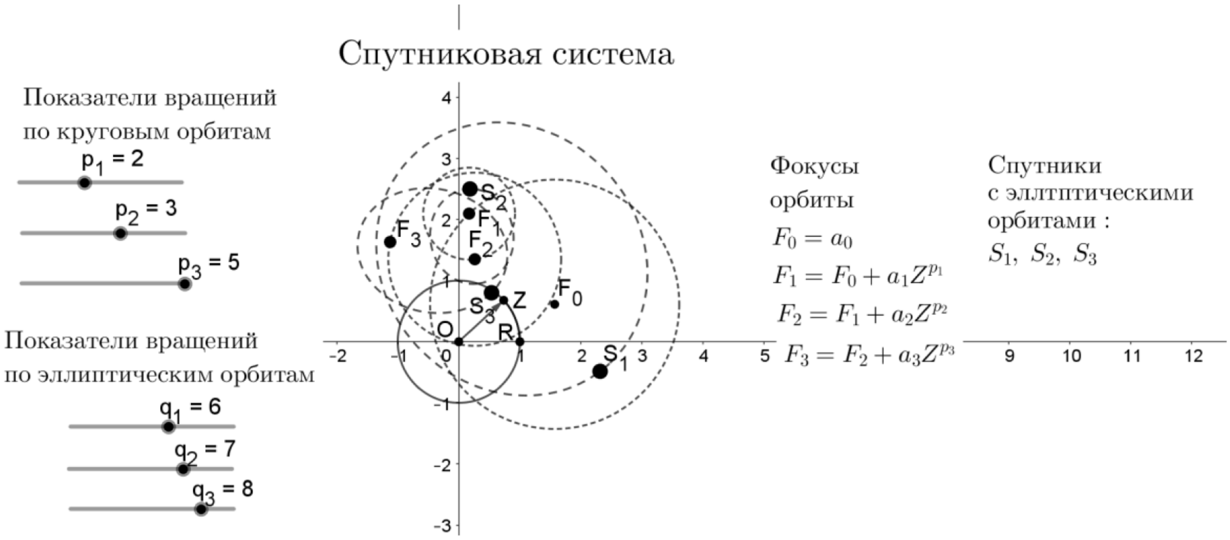


Рис. 3. Спутниковая система с эллиптическими орбитами спутников и круговыми орбитами фокусов

Возможны и другие модификации спутниковых систем. Например, рисунок 4 демонстрирует спутниковую систему, когда «нулевой» спутник S_0 неподвижен, а каждый следующий вращается по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится предыдущий спутник.

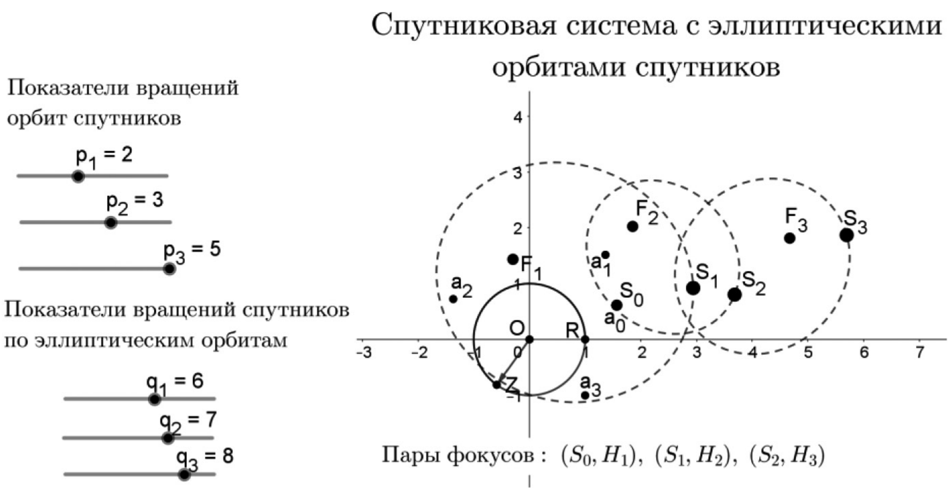


Рис. 4. Каждый спутник вращается по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится предыдущий спутник

В этой связи напомним, что в соответствии с первым законом Кеплера, каждая планета нашей Солнечной системы вращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

3. Методические аспекты. Используемые в статье анимационные рисунки органично входят в тематику построения и математического описания спутниковых систем. В общем плане анимационные рисунки, выполненные в среде GeoGebra, можно использовать для устранения вычислительных трудностей, поручая вычисления компьютеру, для визуализации математических понятий и утверждений, для реализации алгоритмов, для создания «хороших» примеров, чтобы ученик при их решении получил «хороший» ответ и испытал морально-эстетическое удовлетворение. Они поддерживают экспериментально-исследовательский стиль обучения математике. При создании тестов можно использовать возможности показать/скрыть объект анимационного рисунка, или показать его в нужный момент, определяемый условиями видимости. Самостоятельное изготовление анимационных рисунков учащимся под руководством учителя может стать темой его учебно-исследовательской работы.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2018. 233 с.
2. Ларин С.В. Спутниковые системы как анимационно-геометрические модели полиномов // Matematica and Informatics. Bulgarian Jurnal of Educational Recearch and Practics. Volume 63. Number 4. 2020. С. 441–452.
3. Ларин С.В. Роль и значение компьютерной анимации в школьной алгебре комплексных чисел // Информатика в школе. 2021. № 2 (165). С. 22–27.

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ КАК СРЕДСТВО ВИЗУАЛЬНОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ФОРМИРОВАНИЕ ИНТУИТИВНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРЕДЕЛЕ

COMPUTER ANIMATION AS A MEANS OF VISUAL SUPPORT FOR SOLVING PROBLEMS TO FORM AN INTUITIVE IDEA OF THE LIMIT

В.Р. Майер, Н.Р. Колмакова, А.Э. Салчак, Д.А. Макарова

V.R. Mayer, N.R. Kolmakova, A.E. Salchak, D.A. Makarova

Предельный переход, предел, задачи прикладной направленности, среда Живая математика, компьютерная анимация.

В статье продемонстрированы анимационные возможности программной среды Живая математика как эффективное средство компьютерного сопровождения решения задач, ориентированных на формирование у обучающихся основной школы интуитивного представления о пределе.

Variable value, dependence between values, the Geometer's Sketchpad software, formation of functional concepts.

The article demonstrates the computational, animation and graphic capabilities of the Geometery's Sketchpad software as an effective means of computer support for solving a special system of tasks of Professor R. A. Mayer on the formation of functional concepts among students of the basic school.

Изучение в школе основных понятий и методов математического анализа представляет как для учителей, так и для обучающихся серьезные трудности. Они группируются вокруг двух проблем: проблемы неформального введения основных понятий начал анализа и проблемы обучения применению этих понятий к решению задач прикладной направленности. Обучающиеся за весьма ограниченный промежуток времени, выделяемый в 10 классе на изучение начал анализа, не успевают освоиться с новыми для них идеями и методами и зачастую усваивают материал формально. Что касается учителей, то дефицит учебного времени не позволяет и им отработать содержательный смысл отдельных понятий анализа, которые так необходимы при решении прикладных задач. Эта причина также способствует тому, что понятия и методы математического анализа быстро забываются выпускниками школ.

В центре нашего внимания будет находиться учебное пособие [3]. Процитируем основную идею его авторов, которая сформулирована ими еще в тот период, когда нумерация классов соответствовала десятилетнему сроку обучения в школе. «Для того, чтобы заложенные в курсе анализа идеи могли быть сознательно усвоены учащимися и реализованы в их практической деятельности, надо соответствующие представления и навыки формировать заблаговременно, возможно, начиная с VI класса, а не вводить их в сжатом концентрированном виде на ограниченном количестве уроков, как это делается сейчас в IX классе» [3, с. 3–4]. Мы полностью разделяем эту идею и считаем, что ее можно с успехом реализовать и в современных условиях, используя графические и анимационные возможности информационных технологий.

В пособии [3] проработка основных понятий и методов начал анализа осуществляется в процессе решения специально составленных задач без искусственной формализации этих понятий. В общей сложности подобрано 178 задач, за небольшим исключением абсолютное большинство из них сопровождается статическими рисунками. При решении некоторых задач, связанных с громоздкими вычислениями, авторы предлагают обучающимся использовать микрокалькулятор, в отдельных задачах на движение процесс перемещения объекта для наглядности рекомендуется реализовать на экране компьютера, которые к 1989 году стали появляться в школах. С тех пор прошло более 30 лет. В современных условиях развития компьютерной техники и цифровизации образования у учителя появились новые возможности, в частности связанные с применением анимационных чертежей, которые позволяют не только наполнить каждый такой урок элементами исследования и динамизма, но и мотивировать обучающихся к активному участию в нем.

Настоящая статья является продолжением исследований, начатых в [2], ее основная цель – продемонстрировать возможность, заложенной в среду Живая математика [1], компьютерной анимации как средства визуального сопровождения решения задач на формирование интуитивного представления о пределе в 8–9 классах. Идея предельного перехода лежит в основе многих изучаемых в общеобразовательной школе математических понятий: длины окружности, площади круга, объема некоторых тел, бесконечно убывающей геометрической прогрессии, мгновенной скорости, касательной, производной и ряда других. Эта важная идея и основанный на ней метод могут быть использованы и при решении некоторых задач прикладного характера.

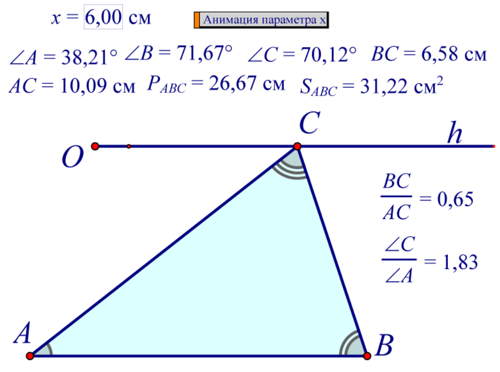
Понятие предела фигурировало во многих школьных учебниках, и особых трудностей, связанных с формированием у обучающихся соответствующих интуитивных представлений, как правило, не возникало. Проблемы появлялись лишь при попытках внедрить в практику школьного преподавания более строгое определение предела. Иногда они приводили к тому, что это понятие, да и сам термин полностью исключались из программы, как это произошло, например, в 1985 году [4]. Такой способ решения проблемы нельзя считать эффективным, поскольку, как отмечено в [3, с. 85], «предел и предельные переходы слишком глубоко и органично вплетены в ткань школьного курса математики, чтобы простым исключением термина “предел” можно было исправить сложившееся положение».

Мы убеждены, что с понятиями предельного перехода и предела обучающихся можно знакомить, работая не только с «математическими моделями реальных зависимостей» ([3, с. 86]), но и с их компьютерными анимационными аналогами. Первое знакомство обучающихся с понятиями предела и предельного перехода может начаться уже в 7 классе. Естественно, что рассматриваемые при этом примеры должны быть достаточно простыми и иметь преимущественно наглядно-геометрический и кинематический характер. Только сформировав интуитивное представление о пределе, можно в 9 классе приступить к раскрытию его арифметической природы.

В качестве несложных примеров, имеющих наглядно-геометрический характер, приведем следующие задачи из [3], которые можно предложить как на уроках алгебры, так и геометрии:

З а д а ч а 1. Вершина C треугольника ABC, основание которого AB остается неподвижным, равномерно движется по лучу h с началом в точке O, параллельному AB, как угодно далеко удаляясь от O. Как в этом бесконечном процессе будут меняться величины углов A, B и C треугольника, длины его сторон AC и BC, его периметр и площадь?

Каждого ученика желательно обеспечить на уроке доступом к персональному компьютеру. Учитель заранее готовит в одной из систем динамической математики анимационный чертеж (рис. 1), на котором построено изображение луча h с началом в точке O и треугольника ABC, вершина C которого принадлежит h. Расстояние между точками O и C регулируется параметром x, значение которого изменяется с помощью клавиш «+» или «-». Создается кнопка «Анимация параметра x». Все остальные действия и построения выполняются непосредственно учеником. Прежде всего, он может в режиме реального времени наблюдать за ходом процесса, о котором идет речь в условии задачи. Для этого достаточно нажать на кнопку «Анимация параметра x» (или подсветить параметр x, затем нажать на клавишу «+» и удерживать ее в таком состоянии).



x	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	AC	BC	P_{ABC}	S_{ABC}	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{\angle C}{\angle A}$
0,00 см	72,81°	37,74°	69,45°	6,54 см	10,20 см	26,74 см	31,22 см²	1,56	0,95
5,00 см	42,01°	63,83°	74,16°	9,33 см	6,96 см	26,29 см	31,22 см²	0,75	1,77
15,00 см	20,24°	137,99°	21,77°	18,05 см	9,33 см	37,38 см	31,22 см²	0,52	1,08
25,00 см	13,05°	159,76°	7,19°	27,65 см	18,05 см	55,69 см	31,22 см²	0,65	0,55
40,00 см	8,47°	168,94°	2,59°	42,39 см	32,54 см	84,93 см	31,22 см²	0,77	0,31
100,00 см	3,51°	176,11°	0,38°	102,12 см	92,14 см	204,27 см	31,22 см²	0,90	0,11
200,00 см	1,77°	178,14°	0,09°	202,03 см	192,03 см	404,06 см	31,22 см²	0,95	0,05
500,00 см	0,71°	179,27°	0,01°	501,97 см	491,97 см	1003,94 см	31,22 см²	0,98	0,02
1500,00 см	0,24°	179,76°	0,00°	1501,94 см	1491,94 см	3003,89 см	31,22 см²	0,99	0,01
3000,00 см	0,12°	179,88°	0,00°	3001,94 см	2991,94 см	6003,88 см	31,22 см²	1,00	0,00
6,00 см	38,21°	71,67°	70,12°	10,09 см	6,58 см	26,67 см	31,22 см²	0,65	1,83

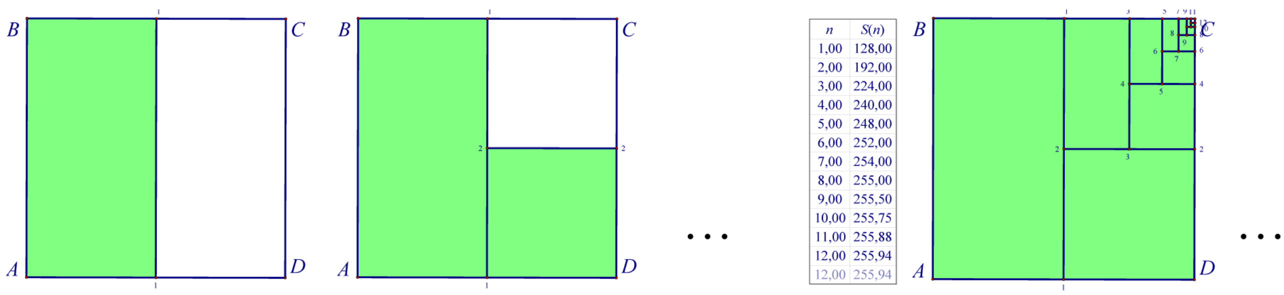
Рис. 1. Процесс неограниченного удаления вершины C от точки O

Чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос, ученик должен измерить и вывести на экран градусные меры всех углов треугольника ABC, длины сторон AC и BC, периметр и площадь треугольника (используются соответствующие команды меню Измерения). Далее создается таблица (меню Вычисления), в которую программа автоматически заносит информацию о величинах углов, сторон, периметра и площади треугольника ABC, соответствующих тем значениям параметра x, которые будут выбраны пользователем. В таблице ученик может создавать любое число строк и завершить этот процесс лишь тогда, когда ему станет понятным ответ на поставленный в задаче вопрос.

Учитывая, что $x = OC$, можно для характеристики движения C по лучу h ввести условную запись: $x \to \infty$, которая означает, что какое бы число мы ни назвали, расстояние от точки C до начала луча h со временем станет и в дальнейшем будет оставаться больше этого числа. Эту формулировку следует разъяснить, но ни в коем случае не требовать ее заучивания. Наблюдая за перемещением точки C по лучу h и соответствующими значениями длин отрезков и величин углов, которые зафиксированы в таблице, обучающиеся должны прийти к мысли, что в рассматриваемом процессе ($x \to \infty$) углы A и C будут неограниченно приближаться к нулю, а угол B к 180°. После этого можно ввести условную запись: $\angle A \to 0°$, $\angle B \to 180°$, $\angle C \to 0°$ при $x \to \infty$.

Установив характер изменения углов A, B и C, следует обратиться к вопросу об особенностях изменения длин сторон AC и BC, а также периметра и площади $\angle ABC$. Наблюдая за соответствующими изменениями, обучающиеся должны установить, что в данном процессе длины сторон AC и BC, а следовательно, и периметр треугольника ABC, неограниченно увеличиваются, что в символическом виде может быть записано так: при $x \to \infty$ $AC \to \infty$, $BC \to \infty$, $P_{ABC} \to \infty$. Завершая работу над задачей, можно ввести на неформальном уровне несколько понятий. В частности, обучающимся можно сообщить, что если в некотором процессе (например, при $x \to \infty$) значения переменной величины, например $A(x)$, неограниченно приближаются к числу P, то это обычно записывают в виде «$A(x) \to P$ при $x \to \infty$», а число P называют пределом переменной $A(x)$. К этому можно добавить, что величины, которые в рассматриваем процессе стремятся к нулю, называют бесконечно малыми величинами.

З а д а ч а 2. На рабочем поле среды Живая математика изображен квадрат со стороной a=16 см и рассматривается процесс, состоящий из этапов, зависящих от натурального n. На каждом этапе неокрашенная часть квадрата делится пополам прямою, параллельной одной из сторон квадрата, после чего одна из образовавшихся половин окрашивается (рис. 2). Площадь окрашенной части квадрата обозначим символом S(n). Найдите значения S(n) для некоторых n. Имеет ли S(n) предел при n → ∞ и если имеет, то чему он равен?



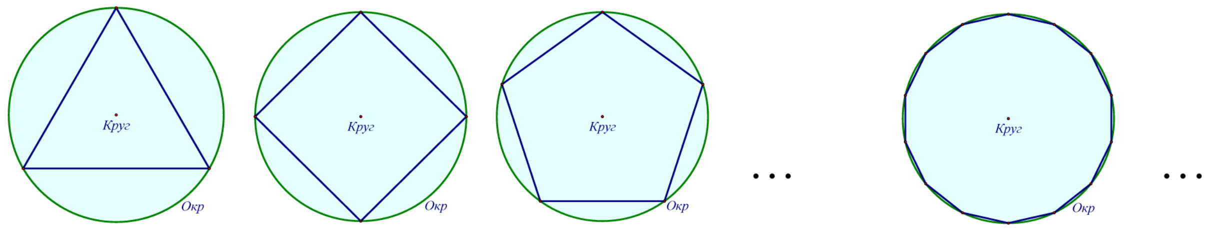
n	$S(n)$
1,00	128,00
2,00	192,00
3,00	224,00
4,00	240,00
5,00	248,00
6,00	252,00
7,00	254,00
8,00	255,00
9,00	255,50
10,00	255,75
11,00	255,88
12,00	255,94
12,00	255,94

Этап n=1 *Этап n=2* *Этап n=12*

Рис. 2. Процесс неограниченного заполнения квадрата

Для построения динамического чертежа учитель может воспользоваться командой Итерация меню Преобразования. Однако ученикам, пожелавшим самостоятельно построить чертеж, проще создать два собственных инструмента: первый – делит квадрат отрезком, соединяющим середины оснований, и окрашивает левую часть, второй – делит прямоугольник отрезком, соединяющим середины боковых сторон, и окрашивает нижнюю часть. Для каждого n находится площадь *S(n)* окрашенной части квадрата (меню Измерения), соответствующее значение заносится в таблицу. Таблица, да и сам чертеж позволяют с уверенностью предположить, что $S(n) \to 256$ см² при $n \to \infty$.

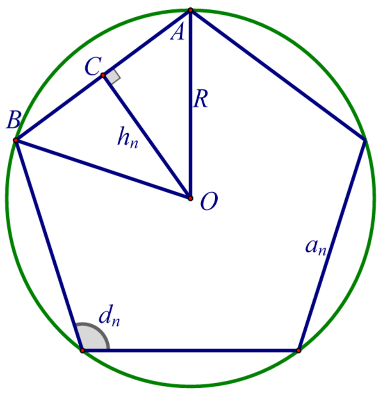
З а д а ч а 3. В окружность радиуса R = 5 см вписываются правильные многоугольники. Процесс заключается в последовательном и неограниченном переходе от правильного многоугольника с n сторонами к аналогичному многоугольнику с n+1 стороной. В этом процессе много переменных величин: величина внутреннего угла d_n, *сумма всех внутренних углов* T_n, *длина одной стороны* a_n, *периметр* P_n, *апофема* h_n, *площадь* S_n. *Установите, как в рассматриваемом процессе меняется каждая из этих величин. Какие из них имеют предел и если имеют, то чему он равен? Какие из рассматриваемых величин являются бесконечно малыми, какие – бесконечно большими?*



n = 3 *n = 4* *n = 5* *n = 14*

Рис. 3. Процесс построения правильных вписанных n-угольников

Для создания динамического чертежа задается параметр *n* – некоторое натуральное число, *n*≥3. Изображается центр окружности *O*, строится окружность радиуса *R*, на которой строится первая вершина *A* вписанного многоугольника с координатами *(0; R)*, если считать *O* началом координат (рис. 4). Затем точка *A* поворачивается вокруг O на угол *360°/n*, *A* соединяется со своим образом *B* отрезком, и так далее.



n	d_n	T_n	a_n	P_n	l(окр)	h_n	R	S_n	S(круга)
3,00	60,00°	180,00°	8,66 см	25,98 см	31,42 см	2,50 см	5,00 см	32,48 см²	78,54 см²
5,00	108,00°	540,00°	5,88 см	29,39 см	31,42 см	4,05 см	5,00 см	59,44 см²	78,54 см²
10,00	144,00°	1440,00°	3,09 см	30,90 см	31,42 см	4,76 см	5,00 см	73,47 см²	78,54 см²
20,00	162,00°	3240,00°	1,56 см	31,29 см	31,42 см	4,94 см	5,00 см	77,25 см²	78,54 см²
50,00	172,80°	8640,00°	0,63 см	31,40 см	31,42 см	4,99 см	5,00 см	78,33 см²	78,54 см²
100,00	176,40°	17640,00°	0,31 см	31,41 см	31,42 см	5,00 см	5,00 см	78,49 см²	78,54 см²
150,00	177,60°	26640,00°	0,21 см	31,41 см	31,42 см	5,00 см	5,00 см	78,52 см²	78,54 см²
500,00	179,28°	89640,00°	0,06 см	31,42 см	31,42 см	5,00 см	5,00 см	78,54 см²	78,54 см²
1000,00	179,64°	179640,00°	0,03 см	31,42 см	31,42 см	5,00 см	5,00 см	78,54 см²	78,54 см²
4000,00	179,91°	719640,00°	0,01 см	31,42 см	31,42 см	5,00 см	5,00 см	78,54 см²	78,54 см²
12,00	150,00°	1800,00°	2,59 см	31,06 см	31,42 см	4,83 см	5,00 см	75,00 см²	78,54 см²

$n \to \infty$ **$d_n \to 180°$** **$T_n \to \infty$** **$a_n \to 0$** **$P_n \to l$(окр)** **$h_n \to R$** **$S_n \to S$(круга)**

Рис. 4. Таблица значений исследуемых переменных и значения предполагаемых пределов

Обучающимся предлагается лишь для n, не превышающих 4, найти с помощью инструментов измерения среды Живая математика значения переменных, о которых идет речь в условии задачи. Для остальных правильных многоугольников требуемые значения удобно находить с помощью вычислительных возможностей среды (меню Вычисления). Например, величину d_n внутреннего угла можно подсчитать как сумму углов A и B треугольника ABO, которая будет равна $180^o – 360^o/n$. Сумма T_n внутренних углов многоугольника, очевидно, будет равна $n \cdot d_n$.

В задачах 1–3 требовалось установить, как в заданном процессе меняются значения тех или иных специально указанных величин. Опыт решения этих задач в школе показывает, что учащиеся справляются с ним без особого труда. Значительно больше проблем возникает тогда, когда требуется установить характер изменения не самих величин, а их отношений. Так, например, решая задачу 1, обучающиеся без труда устанавливают, что при $x \to \infty$ длины обеих боковых сторон AC и BC треугольника ABC растут неограниченно. В то же время просьба охарактеризовать поведение отношения этих сторон (AC/BC) ставит большинство из них в тупик. Особенно смущает их в этом случае то, что и числитель, и знаменатель в рассматриваемом процессе неограниченно растут. Многие из обучающихся считают, что в этом случае и сама дробь должна неограниченно расти.

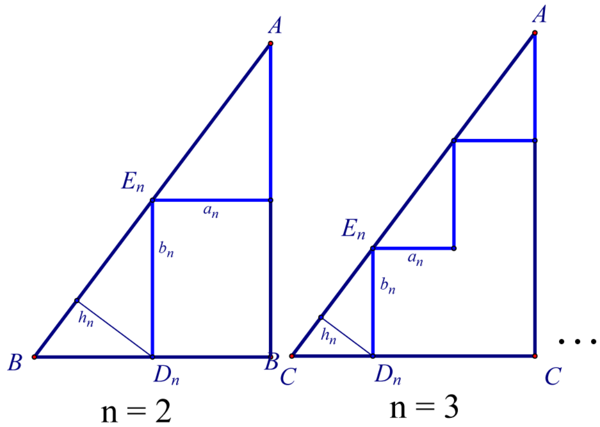
Отметим, что в рассмотренных задачах на формирование понятия предела и предельного перехода следует полностью полагаться на интуицию обучающихся. Вопрос об *обосновании* высказанных ими предположений о существовании и значении предела в этом случае даже не ставится. Разность между переменной и ее предполагаемым пределом, если и рассматривается, то без всякой связи с вопросом о доказательстве того, что $A(x) \to P$.

Если учитель хочет внести в этот процесс элемент доказательности, то надо, прежде всего, показать учащимся, что бесконтрольное следование интуиции может привести к ошибке. В этих целях можно использовать хорошо известные в методической литературе примеры, визуализация которых в среде Живая математика насыщает их динамизмом и анимацией. В качестве примера рассмотрим следующую задачу, анимационный чертеж для которой с помощью итерации или собственных инструментов строится без особого труда.

З а д а ч а 4. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = 6$ см и $AC = 8$ см. Его гипотенуза AB разделена на n равных частей длины c_n и через точки деления проведены прямые, параллельные катетам (рис. 5). Рассматривается ломаная с началом в вершине A и концом в точке D_n, принадлежащей BC. Процесс заключается в неограниченном увеличении числа точек деления AB. Как в этом процессе меняется длина l_n ломаной, имеет ли она предел и если имеет, то чему он равен? Будет ли ломаная неограниченно приближаться к отрезку AB? К чему стремятся величины a_n и b_n, представляющие собой длины звеньев ломаной, параллельных BC и AC?

Как правило, обучающиеся единодушны во мнении, что предел существует и равен длине гипотенузы, к которой неограниченно приближается ломаная. Только при анализе приведенных в таблице данных они обнаруживают, что l_n

отличается от суммы катетов на длину отрезка BD_n и поэтому $l_n = AC + BC - BD_n = 14 - BC/n$, откуда следует, что при неограниченном увеличении числа звеньев ломаной, т.е. при $n \to \infty$ ее длина неограниченно приближается к числу 14, т.е. к сумме длин катетов. Учащимся следует разъяснить, что этот результат не противоречит интуитивному представлению о неограниченном приближении ломаной к гипотенузе. Хотя точки ломаной в этом процессе действительно неограниченно приближаются к гипотенузе, сама ломаная при этом не выпрямляется, ее звенья остаются параллельными катетам.



n	a_n	b_n	h_n	l_n	AB
2,00	3,00 см	4,00 см	2,40 см	11,00 см	10,00 см
3,00	2,00 см	2,67 см	1,60 см	12,00 см	10,00 см
4,00	1,50 см	2,00 см	1,20 см	12,50 см	10,00 см
5,00	1,20 см	1,60 см	0,96 см	12,80 см	10,00 см
6,00	1,00 см	1,33 см	0,80 см	13,00 см	10,00 см
7,00	0,86 см	1,14 см	0,69 см	13,14 см	10,00 см
8,00	0,75 см	1,00 см	0,60 см	13,25 см	10,00 см
9,00	0,67 см	0,89 см	0,53 см	13,33 см	10,00 см
10,00	0,60 см	0,80 см	0,48 см	13,40 см	10,00 см
20,00	0,30 см	0,40 см	0,24 см	13,70 см	10,00 см
30,00	0,20 см	0,27 см	0,16 см	13,80 см	10,00 см
40,00	0,15 см	0,20 см	0,12 см	13,85 см	10,00 см
50,00	0,12 см	0,16 см	0,10 см	13,88 см	10,00 см
100,00	0,06 см	0,08 см	0,05 см	13,94 см	10,00 см
200,00	0,03 см	0,04 см	0,02 см	13,97 см	10,00 см
6,00	1,00 см	1,33 см	0,80 см	13,00 см	10,00 см

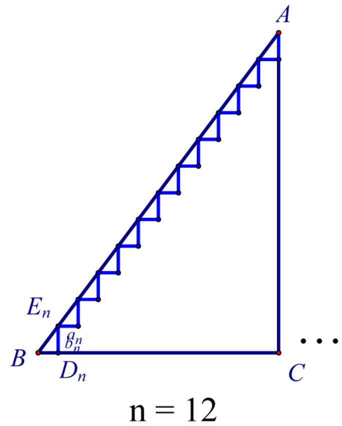


Рис. 5. Процесс неограниченного увеличения числа точек деления AB

Решение задач, подобных задаче 5, должно убедить обучающихся в том, что при нахождении предела одной интуиции мало, что установленный по интуиции предел должен быть подвергнут проверке, для чего проще всего рассмотреть абсолютную величину разности между переменной и ее предполагаемым пределом и показать, что она в ходе процесса стремится к нулю. Теперь, при желании, учитель может дать определение предела переменной $A(x)$, разумеется, свободное от какой-либо формализации. Возможным вариантом такого определения может служить следующее:

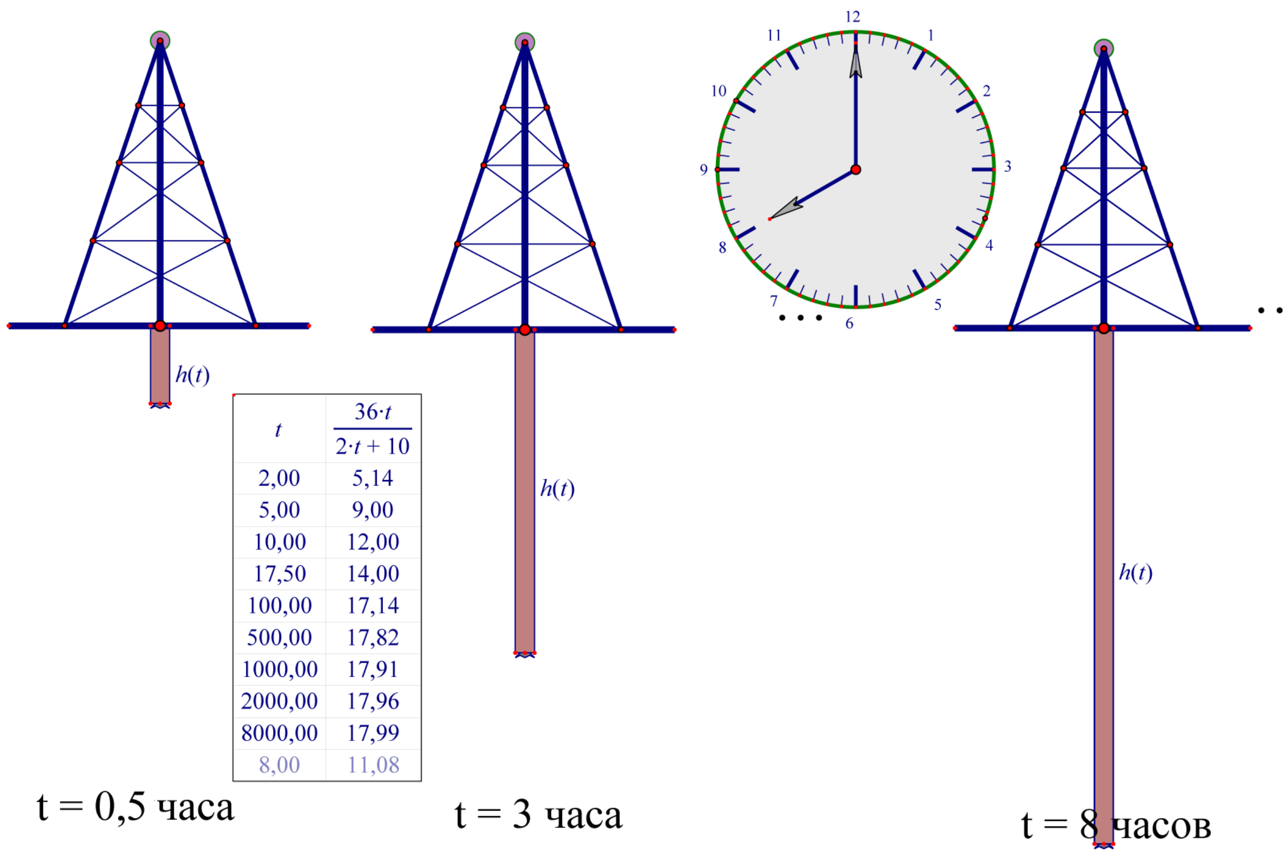
«Число P называется пределом переменной $A(x)$, если разность $P - A(x)$ (или $A(x) - P$) в ходе заданного процесса стремится к нулю» ([3]).

Возвращаясь к рассмотренным выше задачам, можно предложить обучающимся обосновать некоторые из сформулированных в них на интуитивной основе гипотез, связанных с существованием и величиной пределов. Так, например, в задаче 3 для доказательства того, что величина апофемы h_n правильного вписанного в окружность n-угольника (рис. 4) имеет предел, равный радиусу R, достаточно рассмотреть разность $R - h_n$ между предполагаемым пределом R и длиной апофемы h_n. По свойству $\triangle AOC$ $AO - OC < AC$ или $R - h_n < AC$. Величина $AC = a_n/2$ в рассматриваемом процессе стремится к нулю. Поэтому переменная величина h_n имеет предел, равный R.

Отличительной чертой рассмотренных выше задач является то, что в них разыскиваемые пределы видны «невооруженным глазом». Их отыскание не требует ни длинных расчетов, ни нудных алгебраических преобразований, ни утомительных дедуктивных рассуждений. И этим они хороши, так как сразу без отвлекающих деталей знакомят обучающих с основной идеей предела и предельного перехода.

Однако ограничиваться только такими задачами нельзя, ибо принятая в них чисто геометрическая трактовка понятия предела препятствует раскрытию его арифметической природы. Для того, чтобы предупредить это заблуждение, следует рассмотреть задачи, отчетливо раскрывающие арифметическую природу предела и предельного перехода. В качестве примера приведем следующую задачу прикладной направленности.

З а д а ч а 5. При бурении нефтяных скважин бур по мере вхождения в более плотные слои земной коры замедляет свое поступательное движение вниз. При одном из таких бурений было замечено, что глубина проходки h(t) в течение некоторого времени менялась в соответствии с формулой $h(t)=\dfrac{36t}{2t+10}$, *где зависимая переменная h(t) измеряется в метрах, а независимая переменная t – в часах (см. рисунок 6). Какой глубины достигнет скважина через 2 часа, 5 часов, 10 часов? Через сколько часов будет преодолена 14-метровая глубина? Можно ли при таком режиме проходки достичь 100-метровой глубины? Какой глубины достигнет бур после 100 часов бурения, после 1000 часов? Докажите, что при таком режиме скважина не может быть пробурена глубже, чем на 18 метров. Докажите, что в рассматриваемом процессе переменная h(t) имеет предел, равный 18.*



t	$\dfrac{36\cdot t}{2\cdot t+10}$
2,00	5,14
5,00	9,00
10,00	12,00
17,50	14,00
100,00	17,14
500,00	17,82
1000,00	17,91
2000,00	17,96
8000,00	17,99
8,00	11,08

Рис. 6. Процесс бурения нефтяной скважины

Поводя итог, отметим, что применение учащимися основной школы анимационных чертежей при решении прикладных задач на формирование интуитивного представления о пределе позволит им успешно усвоить не только понятие предела, но и другие понятия и методы математического анализа, изучаемые в старшей школе.

Библиографический список

1. Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов (составители: Аджемян Г.А. и др.). М.: ИНТ, 2013.
2. Майер В.Р., Колмакова Н.Р. Система задач Р.А. Майера по формированию функциональных понятий и ее поддержка в среде Живая математика // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2021. С. 106–112.
3. Майер Р.А., Колмакова Н.Р. Задачи прикладной направленности как средство формирования основных понятий и методов математического анализа в школе: учебное пособие. Красноярск: КГПИ, 1989. 136 с.
4. Программа по математике для средней общеобразовательной школы, 5–11 классы // Математика в школе. 1985. № 6.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДЫ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА ПРИ ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ «ЧТЕНИЮ» ПРОСТЕЙШИХ ГРАФИКОВ ЗАВИСИМОСТИ

USING THE LIVE MATHEMATICS ENVIRONMENT WHEN TEACHING SCHOOLCHILDREN TO "READ" THE SIMPLEST DEPENDENCY GRAPHS

Д.А. Макарова **D.A. Makarova**

Графики, среда Живая математика, простейшие графики зависимости, динамический чертеж, преобразование, функция, обучение.

В статье описаны преимущества использования системы динамической модели Живая математика при обучении школьников «чтению» простейших графиков зависимости. Продемонстрирован пример, предназначенный для использования на уроках алгебры при изучении преобразований графиков функций.

Graphs, Live Math environment, simplest dependency graphs, dynamic drawing, transformation, function, learning.

The article describes the advantages of using the Live Mathematics dynamic model system when teaching schoolchildren to «read» the simplest dependency graphs. An example is demonstrated intended for use in algebra lessons when studying transformations of graphs of functions.

Школьный курс математики является не наукой, а предметом, ведущая цель которого состоит в исследовании и изучении реальных ситуаций с использованием математических моделей. Первичная математическая модель, выступающая фундаментом школьной математики – это функция, ее свойства и графики. Такая модель позволяет описывать и изучать различные реальные или геометрические зависимости, а также способствует овладению элементарными методами исследования функций. Истинная ценность любого предмета проявляется в полной мере тогда, когда ее рассмотрение и изучение строится на реальных ситуациях. Поэтому немаловажно учитывать необходимость перевода действительности на математический язык.

Исследование становится более результативным, если математическую модель удается визуализировать анимационным компьютерным аналогом. Наглядные средства дают возможность активизировать познавательную деятельность и пробудить интерес у обучающихся к изучению. Исходя из вышеизложенного, появляется проблема в создании специальных материалов (дидактических, учебно-методических, демонстрационных) для изучения аспектов функциональной линии как на уроках, так и для реализации самостоятельной деятельности обучающихся.

На данный момент популярностью пользуется такая система динамической математики, как среда Живая математика. Авторы работ, описывающие возможности динамической математической среды Живая математика, выделяют общую тенденцию: система динамической математики положительно отражается на обучающихся, позволяет и помогает визуализировать объекты математики и самостоятельно выявлять их свойства [1].

Многие авторы научных публикаций исследуют и описывают учебно-методический комплект Живая математика [1–3]. Также все больше учителей математики применяют в обучении данную среду. Она обладает большим потенциалом в разработке компьютерных аналогов математических моделей, предлагая пользователю не только команды, встроенные в среду, но и возможность создавать свои собственные инструменты и преобразования. Используя на уроках Живую математику, у обучающихся появляется ряд возможностей, которые положительно сказываются на процессе обучения. Динамические модели, созданные в данной среде, позволяют:

– «оживить» чертежи и графики из школьных учебников, построить точный и четкий график;

– рассмотреть геометрический объект под разным углом, самостоятельно проверить его свойства, организовать исследовательскую деятельность;

– самостоятельно проследить закономерность и сделать вывод, как меняется график при том или ином преобразовании;

– самостоятельно сформулировать гипотезы и оценить их достоверность путем исследования информации;

– повысить уровень творческой работы в учебной деятельности [2].

В рамках данной статьи приведен пример, демонстрирующий изучение и исследование преобразований квадратичных функций при помощи формул и графиков с использованием среды Живая математика на уроках алгебры в 9 классе.

Изучение темы «Квадратичная функция» с использованием предлагаемых материалов построено на том, чтобы дать обучающимся возможность самостоятельно провести практический эксперимент, выстроить логическую цепочку рассуждений, сравнить полученные результаты и сформулировать по ним вывод.

Введение в тему начинается с повторения функциональных понятий, графика квадратичной функции и перечисления ее свойств (рис. 1).

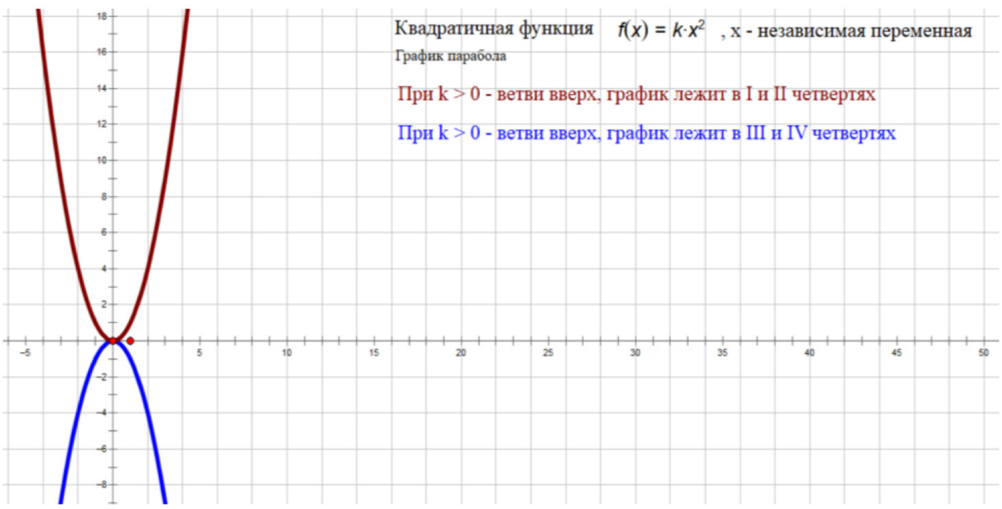


Рис. 1. Повторение по теме «Квадратичная функция»

После чего обучающимся дается возможность самостоятельно провести небольшое исследование, поэкспериментировать со значениями параметров, проанализировать получившиеся графики, высказать свои предположения (рис. 2). Обучающиеся учатся «читать» графики, отталкиваясь от собственных побуждений, отличать зависимость графиков от параметров.

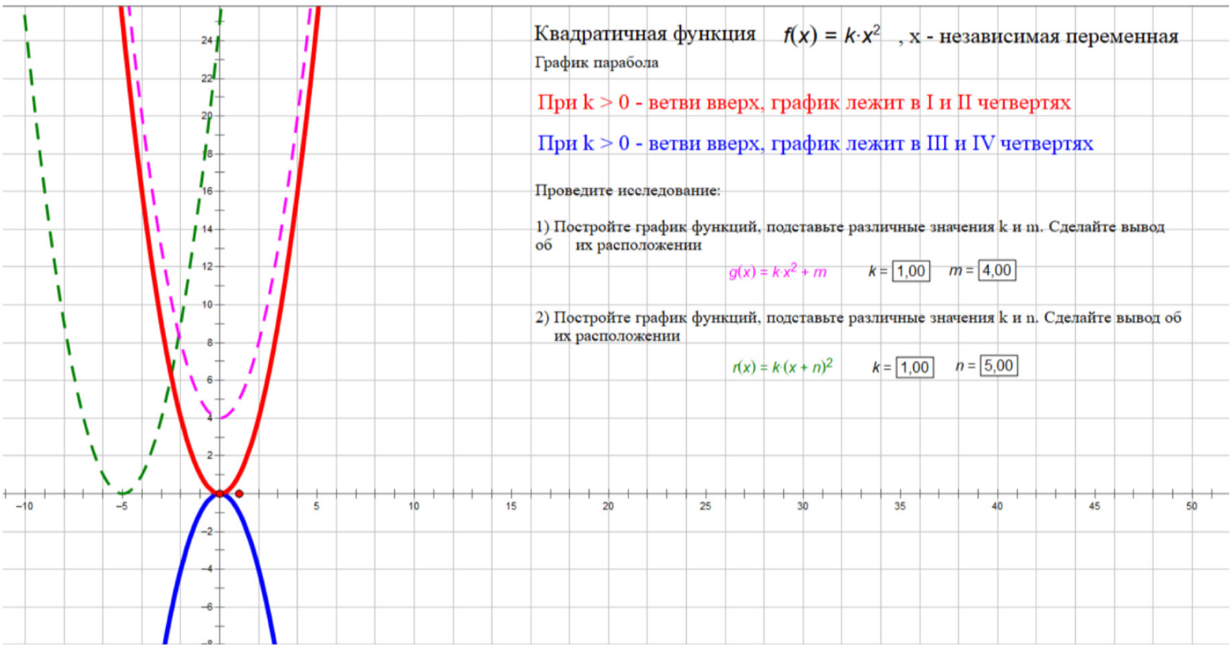


Рис. 2. Исследование преобразований

Таким образом, происходит подведение к преобразованиям функции, к понятию «движение» графика, которое учащиеся в дальнейшем смогут самостоятельно сформулировать. После чего обучающиеся путем экспериментов сделают выводы, по какой оси и на сколько единиц график квадратичной функции сдвигается в зависимости от параметров m и n (рис. 3). Итоговый вариант выводится на экран поэтапно.

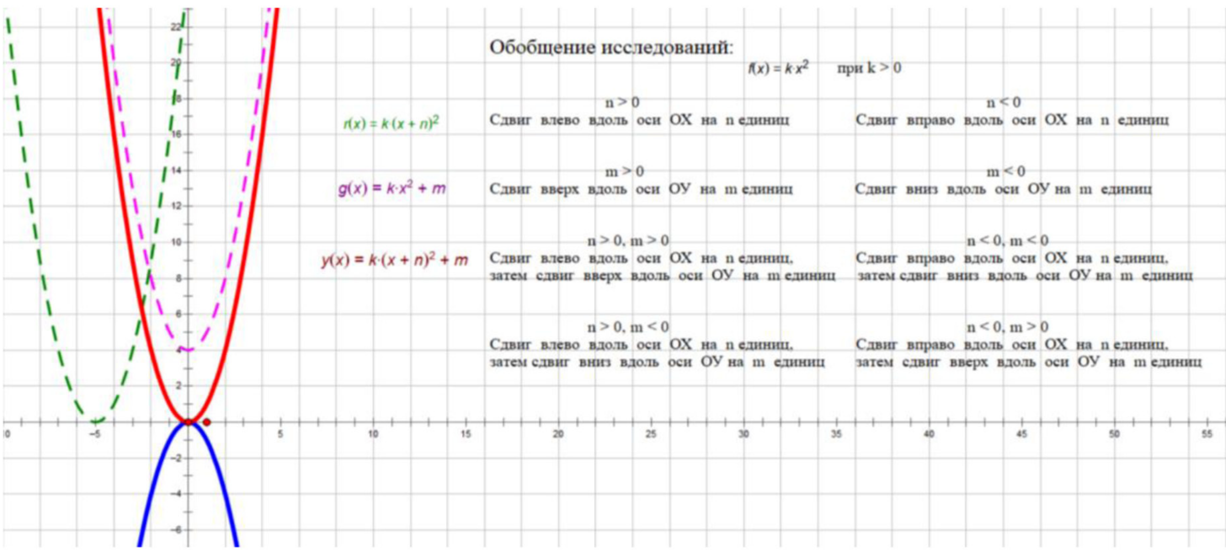


Рис. 3. Итоговое оформление страницы модели

Построение урока алгебры с предложенным изучением материала помогает создать в процессе обучения модели реальности, «оживить» преобразования и графики, сделать урок более динамичным, продуктивным и осознанным; позволяет обучающемуся самому поучаствовать в создании моделей и увидеть все ее свойства.

В процессе обучения функциональной линии важно сформировать у обучающихся умение «читать» графики зависимостей. Повысить эффективность и результативность деятельности для формирования такого умения можно с помощью применения разнообразных средств обучения. В условиях цифровизации образования к таким средствам, безусловно, относится динамическая среда Живая математика, которая способствует не только достижению поставленной цели, но и тому, чтобы процесс обучения стал интересным, познавательным и уникальным.

Библиографический список

1. Алексашов А.А. О цифровом подходе к изучению движения в 9 классе // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, Красноярск, 12–13 ноября 2020 года / Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 67–69.
2. Иванчук Н.В., Горощеня М.Д. Использование компьютерных динамических моделей на уроках геометрии в средней школе // Научные исследования и инновации. 2021. № 4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-kompyuternyh-dinamicheskih-modeley-na-urokah-geometrii-v-sredney-shkole (дата обращения: 02.11.2022).
3. Конюк О.Ю., Миронова М.Г. Элементы исследования на уроках математики. URL: https://soiro.ru/sites/default/files/elementy_issledovaniya_na_urokah_matematiki.pdf (дата обращения: 04.11.2022).
4. Живая Математика 5.0: сборник методических материалов (сост.: Г.А. Аджемян и др.). М.: ИНТ, 2013.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕЙМИФИКАЦИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ УЧЕБНОЙ МОТИВАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

USING GAMIFICATION ELEMENTS TO INCREASE LEARNING MOTIVATION OF STUDENTS WHEN DOING HOMEWORK

В.В. Мартынов **V.V. Martynov**

Учебная мотивация, уровни учебной мотивации, геймификация, Minecraft, домашнее задание, наглядная геометрия.

Рассматривается подход к постановке домашнего задания для обучающихся 5 класса в курсе изучения Наглядной геометрии с применением компьютерной и мобильной игры Minecraft с целью повышения уровня учебной мотивации. Реализуется данный подход на базе средней школы № 144, его применение повышает уровень учебной мотивации обучающихся, что делает учебный процесс более эффективным.

Educational motivation, levels of educational motivation, gamification, Minecraft, homework, visual geometry.

An approach to setting homework for grade 5 students in deepening the study of Geometry Observation using Minecraft computer and mobile games is considered in order to achieve a level of educational motivation. This approach is being implemented on the basis of secondary school No. 144, its application increases the level of educational motivation of students, which makes the educational process more efficient.

Мотивация. Одно небольшое слово, которое способно регулировать всю жизнедеятельность человека. Мотивация работать, мотивация учиться, мотивация написать статью… Продолжать можно до бесконечности. Но что же это такое «мотивация», почему она так важна, из-за чего множество педагогов как в России, так и за рубежом убеждено, что залог успешной учебной деятельности заключается в высоком уровне мотивации обучающихся?

Согласно большой психологической энциклопедии: «Мотивация – побуждения, вызывающие активность организма и определяющие ее направленность. Термин "Мотивация", взятый в широком смысле, используется во всех областях психологии, исследующих причины и механизмы целенаправленного поведения человека и животных» [1]. Таким образом, получается, что именно мотивация определяет направление деятельности человека.

Определяют и учебную мотивацию как частный вид мотивации. Например, в словаре-справочнике по возрастной и педагогической психологии М.В. Гамезо, А.В. Степаносова, Л.М. Хализева пишут: «Учебная мотивация – частный вид мотивации, включенный в деятельность учения, учебную деятельность» [2]. При этом выделяют следующие уровни учебной мотивации:

1. Высокий уровень школьной мотивации, учебной активности (у таких детей есть познавательный мотив, стремление наиболее успешно выполнять все предъявляемые школьные требования). Ученики четко следуют всем указаниям учителя, добросовестны и ответственны, сильно переживают, если получают неудовлетворительные отметки.
2. Хорошая школьная мотивация (учащиеся успешно справляются с учебной деятельностью). Подобный уровень мотивации является средней нормой.
3. Низкая школьная мотивация. Положительное отношение к школе, но школа привлекает таких детей внеучебной деятельностью. Дети такого уровня мотивации достаточно благополучно чувствуют себя в школе, чтобы общаться с друзьями, с учителями, но учебный процесс их мало привлекает.
4. Очень низкая школьная мотивация. Эти дети посещают школу неохотно, предпочитают пропускать занятия. На уроках часто занимаются посторонними делами, играми. Испытывают серьезные затруднения в учебной деятельности [3].

Таким образом, можно сделать вывод, что второй уровень школьной мотивации является средней нормой. Но обладают ли таким уровнем обучающиеся? К сожалению, далеко не всегда. Так, например, по результатам работы обучающихся на уроках, выполнения ими домашних заданий за весь период работы в школе № 144 нами был изучен уровень учебной мотивации обучающихся 5А, 5Б и 5И классов. Результаты приведены на круговых диаграммах (рис. 1).

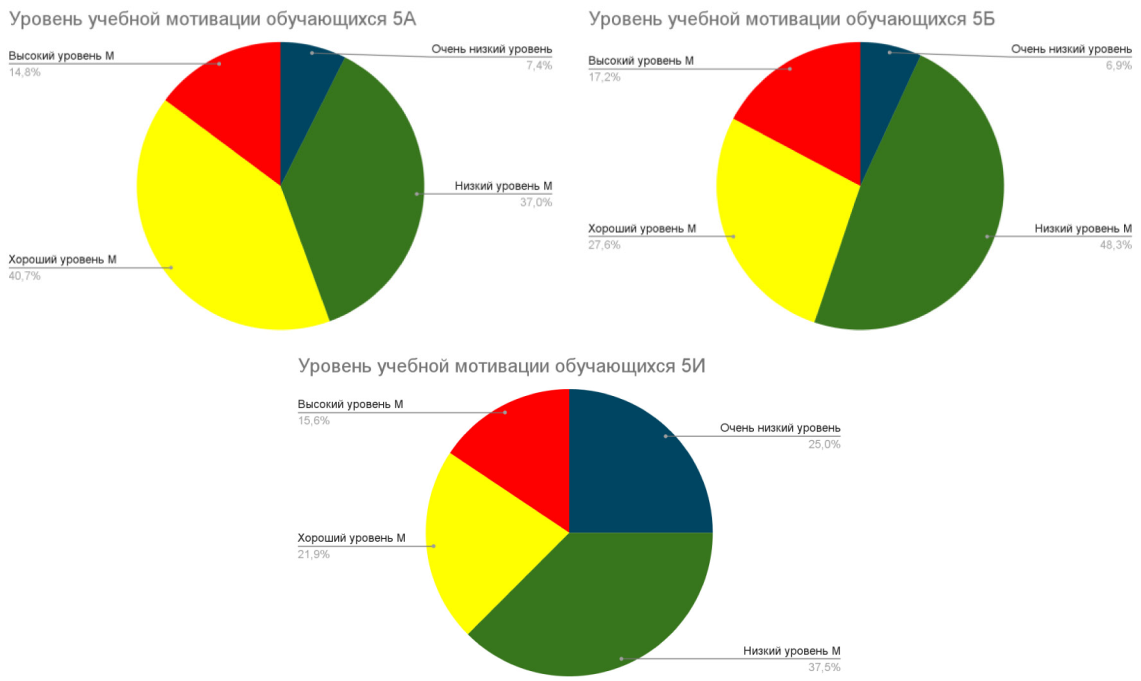


Рис 1. Уровень учебной мотивации в 5А, 5Б и 5И классов

Можно заметить, что уровень мотивации обучающихся в этих классах является недостаточным. Особенно в 5И, что приводит к тому, что ученики ленятся делать домашнее задание, списывают его с ГДЗ, на уроках постоянно отвлекаются и, как следствие, эффективность учебного процесса является низкой. Также можно заметить аномально большое количество обучающихся в 5И классе с очень низкой учебной мотивацией. На наш взгляд, очень большую роль сыграло то, что большинство обучающихся занимаются профессиональным спортом, в их представлении обучение им особо не нужно, оно не является для них интересным делом.

Для корректировки сложившейся ситуации был применен подход к постановке домашнего задания при изучении курса Наглядной геометрии с применением компьютерной и мобильной игры Minecraft.

Minecraft представляет собой игру в жанре «песочница» и напоминает конструктор: из квадратных блоков игрок создает дома, шахты, делает себе экипировку и выживает в процедурно сгенерированном мире (рис. 2).

Рис. 2. Снимок экрана в Minecraft

Так, например, по итогам урока на тему «Конструирование из Т» нами было сформулировано следующее вариативное задание:

1. Сделать конструкцию из букв «Т» в компьютерной игре Minecraft. Затем сделать скриншот и отправить его учителю в электронный журнал, можно распечатать его и принести на следующее занятие. Оценивается количество элементов, задумка и общая картина.

2. Сделать конструкцию из букв «Т» в тетради. Оценивается количество элементов, задумка и общая картина.

Через неделю были получены следующие результаты, которые для наглядности проиллюстрируем в диаграммах:

1. Процент мальчиков, выбравших делать задание в Minecraft, значительно превышает процент девочек, решивших выполнять такой вариант (рис. 3).

Рис. 3. Распределение мальчиков и девочек 5А, 5Б, 5И классов по выбору задания

2. Процент обучающихся с низкой мотивацией, решивших делать задание в Minecraft, превышает проценты обучающихся с другим уровнем мотивации, решивших выполнять такой вариант (рис. 4).

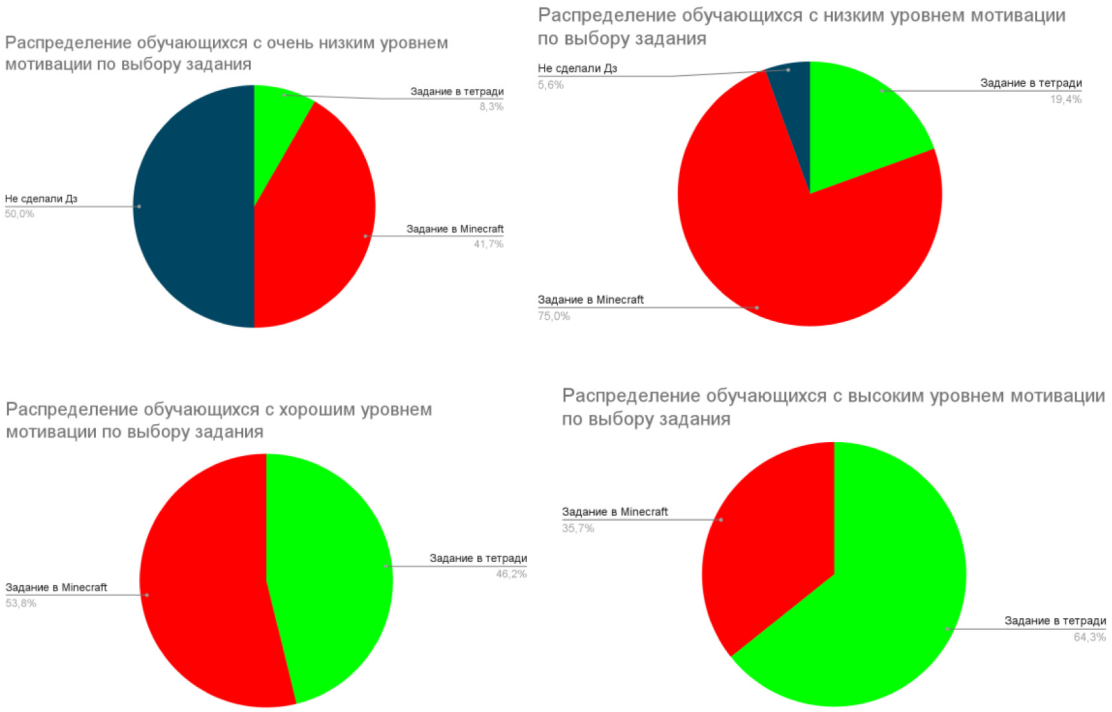


Рис. 4. Распределение обучающихся с разным уровнем мотивации по выбору задания

3. Также следует отметить, что обучающиеся с высоким уровнем мотивации больше предпочли традиционное задание.

4. Немаловажно отметить и тот факт, что самые интересные и продуманные задания были сделаны именно в Minecraft. Например, обучающимся с хорошим уровнем мотивации был представлен сценарий: «По задумке пришелец в робокостюме со своим дроном прилетел на новую планету. Черный дрон состоит из 13 деталей. Цветной робокостюм из 48» (рис. 5).

Выходили за формат и обучающиеся с другим уровнем мотивации, например, один из обучающихся с очень низким уровнем мотивации воодушевился и сделал целый видеоролик с названием «Паркур» (URL: https://disk.yandex.ru/i/RG7ZElMCdW9sPA). В данном видеоролике проходится трасса с встречающимися элементами в виде буквы «Т».

Рис. 5. Лучшая работа

5. Можно отметить, что общий уровень мотивации учеников при выполнении данной работы был выше обычного. Приведем примеры интересных работ, выполненных обучающимися с низким уровнем мотивации (рис. 6).

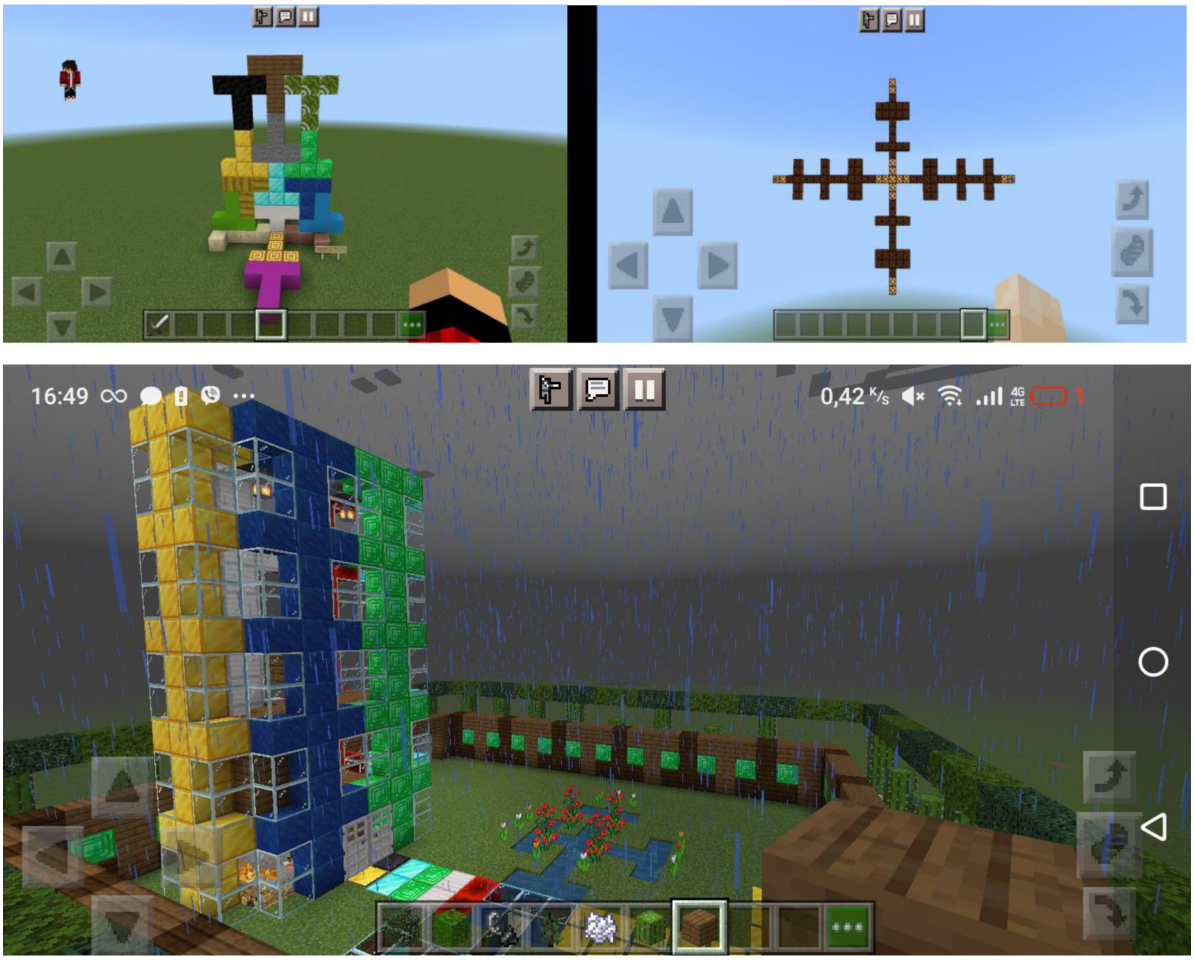


Рис. 6. Интересные работы, выполненные обучающимися с низким уровнем мотивации

Для наглядности сравнение изменения уровня проведем с помощью круговых диаграмм (рис. 7).

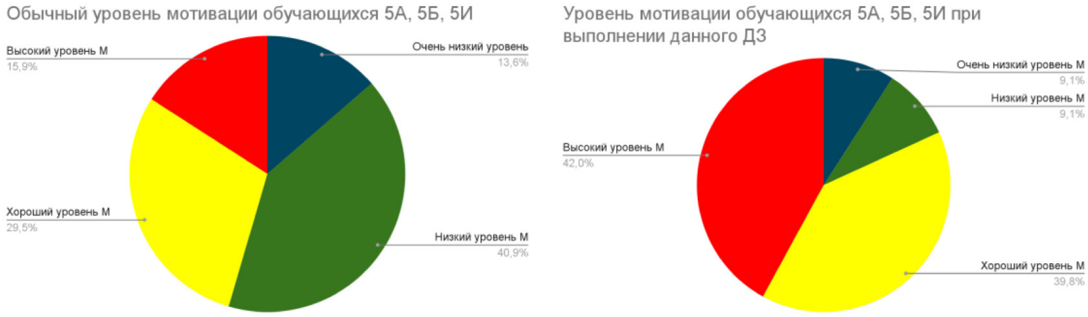


Рис. 7. Изменение уровня мотивации при выполнении домашнего задания

Видно, что уровень мотивации обучающихся при выполнении данного домашнего задания значительно увеличился. Немаловажным фактором в данном случае являлся и творческий характер данной работы. Задание было несложным, и многие обучающиеся выполняли его с большим желанием.

Подводя итог, отметим, что данная форма работы показала себя эффективной. Наибольшее влияние она оказала на мальчиков с низким уровнем мотивации. Их подход к выполнению такого рода заданий значительно отличался от обычного. Но важно и признать, что у такого подхода есть и свои трудности. В первую очередь они заключаются в том, что продумать задание или урок с применением элементов геймификации не так просто. Есть темы, которые хорошо подходят для этого, но их, к сожалению, не слишком много.

В дальнейшем нами планируется изучить возможность применения других игр в процессе обучения математики. Есть огромное количество симмуляторов и менеджментов, применение которых может быть оправдано при изучении некоторых тем школьного курса математики.

Библиографический список

1. Психологическая энциклопедия (дата обращения: 12.10.22). URL: https://rus-big-psyho.slovaronline.com
2. Словарь-справочник по возрастной и педагогической психологии / под ред. М.В. Гамезо. М.: Пед. об-во России, 2001. 127 с.
3. Учебная мотивация: сущность, источники, классификация, характеристика, функции (дата обращения: 12.10.22). URL: https://psyera.ru/uchebnaya-motivaciya-sushchnost-istochniki-klassifikaciya-harakteristika-funkcii_9648.htm

СЕТЕВОЙ ПРОЕКТ «ЦИФРОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ»[1]

THE NETWORK PROJECT "DIGITAL TOOLS"

Р.П. Овчинникова **R.P. Ovchinnikova**

Сетевой проект, интерактивная геометрическая среда, цифровой инструмент, личный инструмент ИГС, задачи на построение.

В статье описана идея сетевого проекта «Цифровые инструменты», реализуемого в Сетевой проектной школе, представлены задачи и методический аппарат проекта.

The networked project, dynamic geometry software, digital tool, personal DGS tool, tasks on the construction.

The article describes the idea of the network project "Digital Tools", implemented in a Network project school, presents the tasks and methodological apparatus of the project.

Цифровая трансформация погружает образование в цифровую среду, в различных областях экономики вводятся новые понятия «цифровая экономика», «цифровая трансформация», «цифровой продукт», «цифровой инструмент» и др. В образовательном процессе цифровизация направлена на обеспечение непрерывности процесса обучения и на его индивидуализацию, а основными средствами являются цифровые технологии и цифровые инструменты. Цифровизация должна активно внедряться в обучение математике благодаря использованию таких программных средств, как интерактивные геометрические среды (ИГС), позволяющие выполнять геометрические построения. Они позволяют осуществить деятельностный подход. Благодаря работе в такой среде, учащийся может сам сконструировать свое знание, создать что-то значимое для себя и интересное для окружающих.

Задачи на построение являются важной частью геометрии с древних времен до настоящего времени. Греки строили математику не на основе арифметики, а на основе геометрии. Основными объектами служили отрезки и прямоугольники. Все правила, теоремы и задачи формулировались в терминах отношений между длинами отрезков и площадями прямолинейных фигур. Геометрически выводились арифметические законы, формулы сокращенного умножения, решались задачи, связанные с решением квадратных уравнений. В настоящее время на смену традиционным инструментам решения задач на построение, циркулю и линейке, приходят цифровые инструменты (далее – просто инструменты).

ИГС (GeoGebra, Живая геометрия, Математический конструктор) содержат инструменты, которые могут быть активированы путем нажатия на соответствующую иконку. Кроме того, последовательность шагов построения объекта можно сгруппировать и сохранить в качестве нового инструмента. Этот инструмент

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-013-00730.

называют собственным. Собственные инструменты могут быть полезны для построения сложных геометрических конструкций с повторяющимися построениями, не входящими в стандартный набор инструментария ИГС. Также полезно, например, создавать инструменты для построения:

– фигур, часто встречающихся в формулировках задач: равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, параллелограмм, ромб, равнобедренная трапеция, прямоугольная трапеция, трапеция с перпендикулярными диагоналями, окружность, вписанная в треугольник;

– типичных ГМТ: множество точек, из которой отрезок виден под данным углом и др.

Созданные в ИГС новые инструменты можно запоминать, обозначать значком в виде пиктограммы и выводить его на панель инструментов. Ограничение набора инструментов, отображаемых на панели, позволяет создавать:

– *систему задач, сконструированную методом «снежного кома»* [2]. Данный метод предполагает при решении каждой задачи системы использование результата решения предыдущей задачи. Использование данного метода помогает учащимся понять суть дедуктивного построения курса геометрии, где понятия появляются постепенно, по мере их определения. В данном случае – конструирование инструмента и размещение его на панели инструментов. Далее учащимся разрешается пользоваться этим инструментом;

– *задачи на построение ограниченными средствами*: только циркулем, только линейкой, только двусторонней линейкой, определенным набором цифровых инструментов;

– *задачи на определение инструмента со скрытым названием,* решаемые на основе наблюдений за изменениями и инвариантами объекта, построенного с помощью данного инструмента. Такие задания можно отнести к типу «черный ящик», описанные В.Н. Дубровским [1] и А.В. Пантуевым [3];

– *задачи на проверку правильной работы инструмента*, сконструированного в ИГС;

– *личные инструменты* (группу инструментов) для построения какой-либо геометрической конструкции.

В рамках реализации проекта Российского фонда фундаментальных исследований «Сетевое наставничество в организации исследовательской деятельности одаренных обучающихся» Ассоциация педагогов, работающих с одаренными детьми (https://www.aprod-rf.com/sps), организовала работу Сетевой проектной школы (СПШ) для учащихся 7–10 классов. Целью деятельности СПШ является развитие навыков проектной и исследовательской деятельности обучающихся. На занятиях школы рассматриваются вопросы методологии исследовательской и проектной деятельности, организации научной коммуникации, работы с источниками информации, представления результатов проекта и др.

Один из проектов СПШ называется «Цифровые инструменты», который объединил в команду 20 учащихся и 4 учителей из Архангельска, Новодвинска и Сергиева Посада.

Цель проекта – выяснение роли личных инструментов ИГС в изучении геометрии и возможности их применения.

Задачи проекта:

а) определение значения личных инструментов ИГС в изучении геометрии;

б) изучение последовательности создания личного инструмента;

в) составление алгоритма создания личного инструмента;

г) доказательство соответствия созданных инструментов поставленной цели;

д) разработка правил построения личных инструментов, соответствующих математическим понятиям;

е) создание коллекции личных инструментов;

ж) создание пиктограмм к личным инструментам;

з) создание комплексов математических и прикладных задач, головоломок, конструкторов с использованием личных инструментов.

Формами организации деятельности учащихся являются телеконференции с модератором проекта, чат-обсуждения, веб-квесты, соревнования между участниками проекта. При организации деятельности используются метод проектов, исследовательский и проблемный методы, мозговой штурм. К видам деятельности обучающихся можно отнести: моделирование, работа с информационными источниками, обобщение, представление результатов работы. Средствами сетевого взаимодействия являются:

– *MS Teams* для консультаций и обсуждений,

– *Google Диск* для размещения в общем доступе видеозаписей занятий, презентаций,

– онлайн-сервис *MindMeister* для создания интеллект-карты проекта,

– *GeoGebra.org* для публикации разработанных ресурсов.

Библиографический список

1. Дубровский В.Н. «1С: Математический конструктор» и математический практикум в СУНЦ МГУ // Информатика и образование. 2016. № 7. С. 22–26.
2. Ковалева Г.И. Методика использования систем задач, сконструированных методом «Снежного кома», на уроках геометрии // Вестник ТГПУ. 2010. № 2. С. 78–82.
3. Пантуев А.В. «Черные ящики» в среде программы «Живая математика» // ИТО–2004. URL: http://www.ito.su/main.php?pid=26&fid=4689.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ-ПЕРВОКУРСНИКОВ ПО ТЕМЕ «ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ»

USE OF THE DYNAMIC ENVIRONMENT GEOGEBRA WHEN TRAINING FIRST-YEAR STUDENTS ON THE TOPICS “FUNCTION GRAPHS. ELEMENTARY GRAPH TRANSFORMATIONS”

С.К. Саая **S.K. Saaya**

Функциональная линия, обучение математике, студенты, график функции, анимация, динамическая среда GeoGebra.

В статье рассматривается вопрос об эффективном обучении студентов-первокурсников для изучения темы по графикам функций и их преобразований при использовании динамической среды GeoGebra. Изучается применение динамической среды GeoGebra при выполнении элементарных преобразований над графиками функций, воздействие данной среды на развитие знаний и умений решения задач, на развитие математического мышления.

***Functional line, teaching mathematics, students, function graph, animation, dynamic environment GeoGebra*.**

The article deals with the issue of effective teaching of first-year students to study the topic on graphs of functions and their transformations using the dynamic GeoGebra environment. We study the use of the GeoGebra dynamic environment when performing elementary transformations on function graphs, the impact of this environment for the development of knowledge and skills for solving problems and the development of mathematical thinking.

Функциональная линия занимает особое место в школьном курсе математики, с помощью которой объясняются многие разделы алгебры и начал анализа. Материалы данной линии изучают учащихся с 5-го по 11 класс. Одной из отличительных особенностей функциональной линии – установление различных связей процесса обучения. В ФГОС указана цель содержания раздела «Функция», на изучение которого уделяется особое внимание, в результате которого формируются знания о функции как математической модели для описания, исследования разных процессов. Они способствуют развитию умения использовать графический язык математики с применением математического средства для наглядности иллюстрации, их четкого понимания, а также описания и анализа реальных зависимостей.

Как известно, результатом освоения обучающихся основной образовательной программы является успешная сдача итоговой государственной аттестации в форме Единого государственного экзамена. В кодификаторе требований к уровню подготовки обучающихся указан код раздела под номером 3 «Функции».

Одним из контролирующих элементов, проверяющих заданиями экзамена, является график функции, элементарные преобразования графиков функции: сдвиг вдоль координатных осей, умножение на число (растяжение и сжатие), симметрия (отражение) относительно осей координат. Построение графика функции по координатам точек, любая точка плоскости представляет собой соответствие между аргументом и определенным по нему значением функции, что указывает на связь функциональной и числовой линий. Учащиеся выпускных классов, являясь абитуриентами, в будущем становятся студентами вузов, для которых значимы знания и умения для четкого построения графиков функции, выполнения элементарных преобразований над графиками функций. Применение информационных технологий, в том числе динамических математических программ, к примеру, динамической среды GeoGebra, при обучении математике будет способствовать визуальному восприятию математики при помощи анимации, развитию математического мышления и пространственного воображения.

Динамическая среда GeoGebra является одним из главных средств эффективного обучения студентов первого курса в высшем учебном заведении. Поэтому необходимо использовать данную среду не только для повторения разделов и тем на построение графиков элементарных и сложных функций, но и для успешного решения многих математических задач. Решение заданий на выполнение таких преобразований графика функции, как сдвиг вдоль координатных осей, умножение на число (растяжение и сжатие), симметрия (отражение) относительно осей координат, нередко вызывает у большинства студентов-первокурсников значительные затруднения. Основная причина затруднений – непонимание сущности отмеченных выше преобразований. Умение свободно выполнять соответствующие преобразования графиков функций предполагает большую самостоятельную работу и значительную мотивацию со стороны студента. Усвоенный с помощью GeoGebra алгоритм построения графика функций в дальнейшем помогает им решать многие задачи. А для некоторых студентов, как показал наш опыт работы на первом курсе, этот метод оказался единственно возможным для овладения идеей решения таких задач.

Проиллюстрируем некоторые динамические рисунки по выполнению элементарных преобразований графиков функций, например, для квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, кубической $y = (x-a)^3 + b$ и логарифмической $y = \left|\log_2(x-a)\right|$ функций (рис. 1–3) с числовыми параметрами a, b и c.

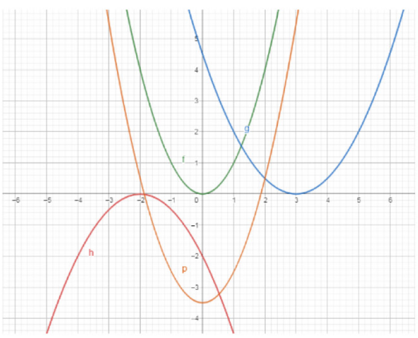


Рис. 1

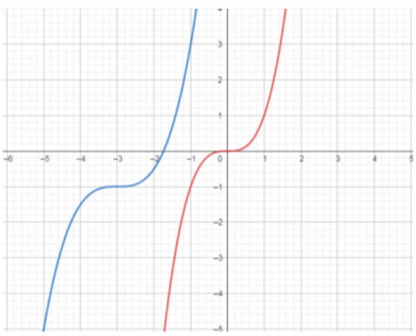


Рис. 2

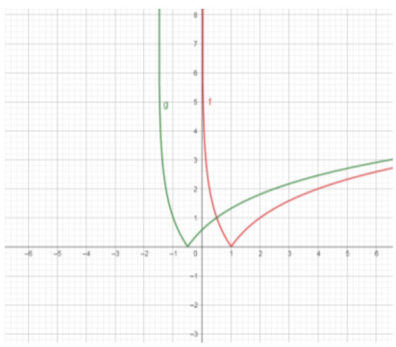


Рис. 3

Таким образом, динамическая среда GeoGebra является одним из важных педагогических инструментов для обучения студентов первого курса. Она помогает студентам понять суть полученных динамических рисунков и наглядно увидеть результат построения. После проведения самостоятельной и контрольной работ по данной теме с применением динамической среды GeoGebra можно сделать вывод о безукоризненном выполнении элементарных преобразований графиков функций практически всеми студентами. Результаты работ свидетельствуют о качественном усвоении материала данной темы. Кроме этого, большинство студентов было мотивировано на выполнение заданий, у каждого из них наблюдался явно повышенный интерес к изучению предложенной темы, желание провести как можно больше экспериментальных испытаний, связанных с построением графиков функций для различных значений параметров a, b и c. Все это свидетельствует о том, что использование среды GeoGebra способствует не только формированию функционального стиля мышления студентов-первокурсников, но и развитию у них исследовательских умений и навыков.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с.
2. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2022. 233 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

USING THE MEANS OF THE GEOGEBRA DYNAMIC ENVIRONMENT IN SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS

В.А. Самодурова, Г.М. Юшкова **V.A. Samodurova, G.M. Yushkova**

Динамическая среда, информационные технологии, GeoGebra, тригонометрия, тригонометрические функции, тригонометрические уравнения, графики функций, графический способ решения уравнений.

В данной статье рассматриваются методические аспекты решения тригонометрических уравнений с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra. Представлен опыт применения среды GeoGebra при решении тригонометрических уравнений и использования программы на этапах изучения тригонометрических функций.

Dynamic environment, information technology, GeoGebra, trigonometry, trigonometric functions, trigonometric equations, graphs of functions, graphical method of solving equations.

This article discusses the methodological aspects of solving trigonometric equations using the capabilities of the GeoGebra computer environment. The experience of using the GeoGebra environment in solving trigonometric equations and using the program at the stages of studying trigonometric functions is presented.

В применении компьютерных технологий в образовательном процессе никого сегодня убеждать нет необходимости. Информационные технологии очень быстро развиваются и постоянно совершенствуются. М.М. Поташник сказал: «…недопустимо в школе XXI века использовать неэффективные, устаревшие технологии обучения, изматывающие и ученика, и учителя, требующие больших временных затрат и не гарантирующие качество образования…» [1]. Именно одним из таких инструментов является компьютерная среда GeoGebra, которая предоставляет возможность создания динамических графиков и чертежей.

В старшей школе при изучении тригонометрии среда GeoGebra является очень актуальной. В 10 классе материал насыщенный, за короткий промежуток времени обучающимся необходимо усвоить большой объем информации.

В рамках изучения раздела тригонометрии обучающимся необходимо решать уравнения, одним из способов решения уравнений является графический. Для того чтобы обучающиеся решали уравнения данным способом успешно, они должны уметь качественно работать с графиками тригонометрических функций. В качестве примера представим алгоритм работы с тригонометрической функцией y=sin(x) в среде GeoGebra. Среда позволяет экономить время при построении графиков, обладает высокой степенью наглядности и может выступать средством для самопроверки обучающихся.

На первом этапе происходит знакомство и построение графика элементарной функции y=sin(x) (рис. 1).

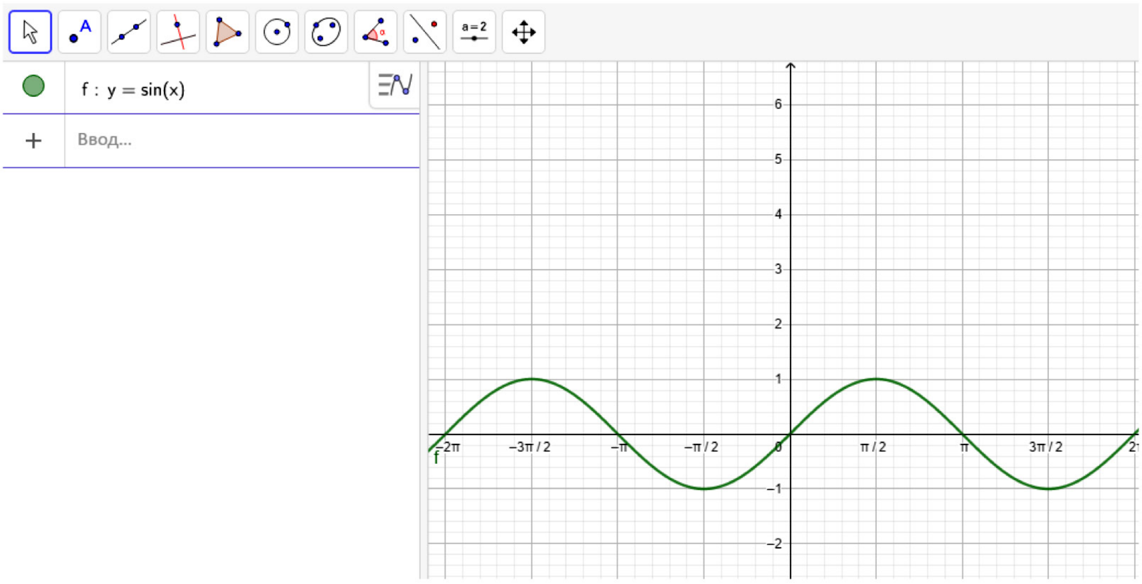


Рис. 1

На следующем этапе обучающиеся должны научиться преобразовывать график тригонометрической функции: сжатие, растяжение, смещение относительно оси абсцисс и оси ординат и т.д. Так, при построении графиков сложных функций используют параметры, что реализовано в среде GeoGebra через инструмент «ползунок». Изменяя параметры ползунка, получают преобразование графика.

На рисунке 2 представлены два графика, каждый из которых отображает сжатие или растяжение графика относительно осей Oy и Ox.

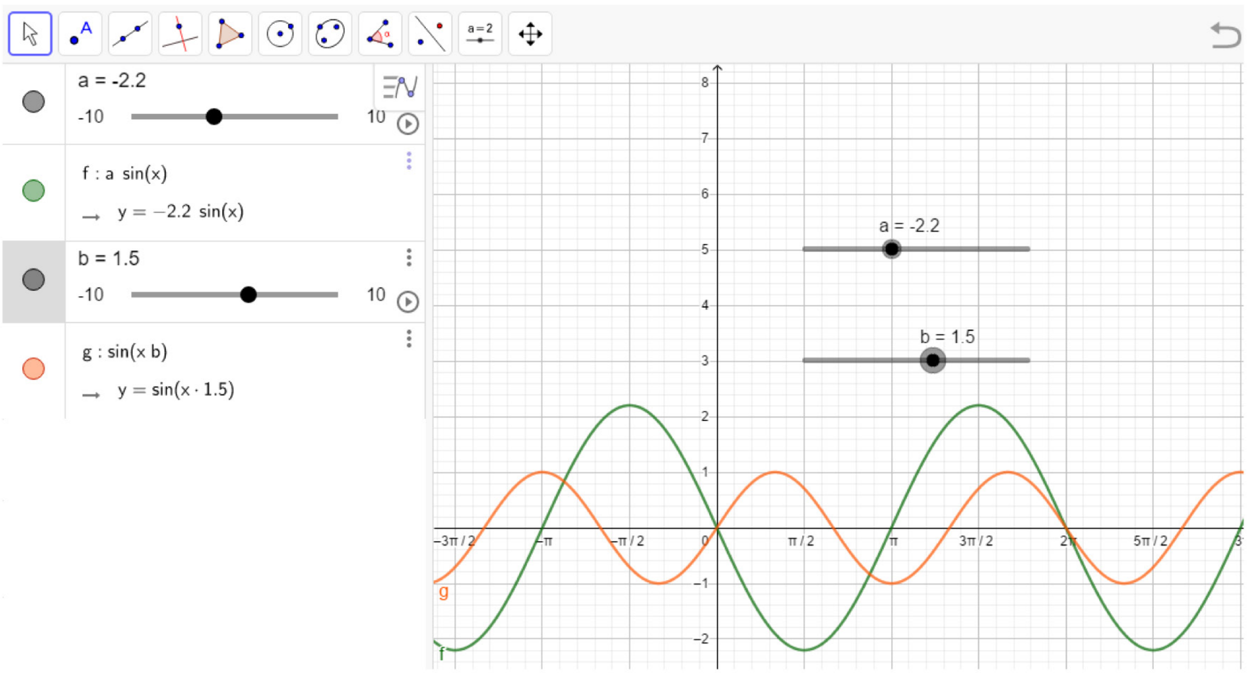


Рис. 2

На рисунке 3 продемонстрированы преобразования графиков функций $y = \sin(x + d)$ и $y = \sin(x) + c$ (рис. 3).

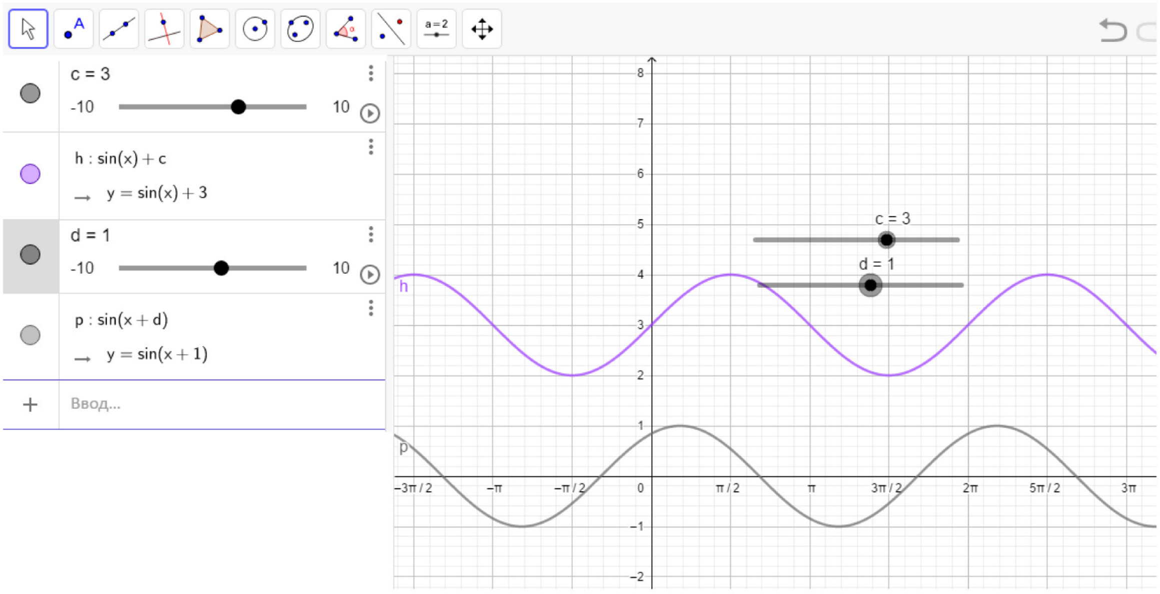


Рис. 3

Но при выполнении заданий чаще всего необходимо с одним графиком одновременно выполнить несколько преобразований, что продемонстрировано на рисунке 4.

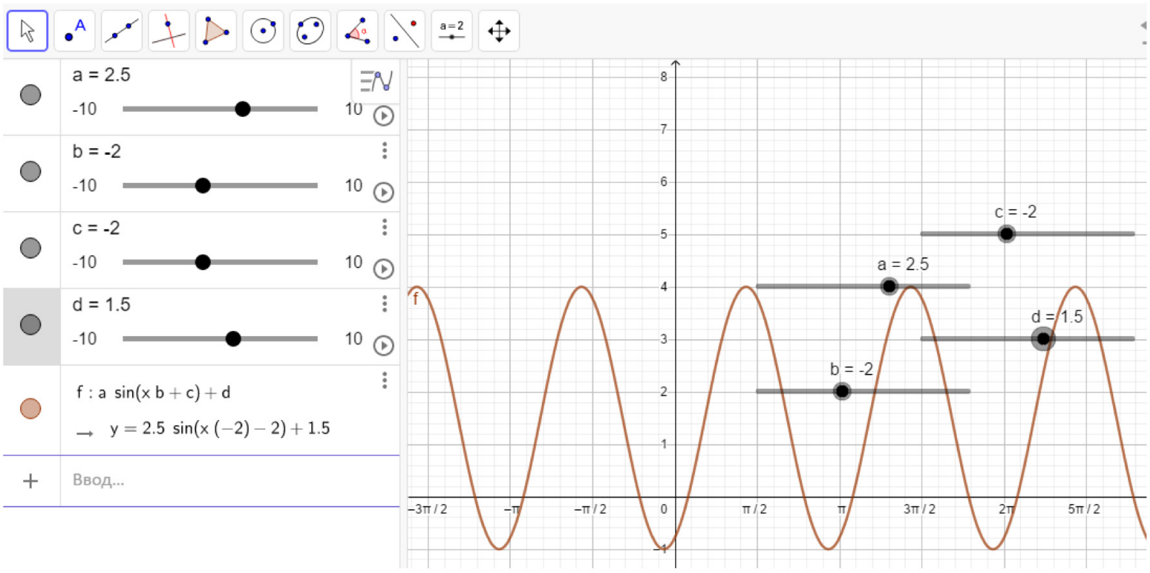


Рис. 4

Когда обучающиеся успешно овладеют навыками построения графиков тригонометрических функций, спектр заданий расширяется, и данные умения становятся необходимыми при решении тригонометрических уравнений графическим способом.

Рассмотрим пример, который предлагается решить обучающимся 10 класса в учебнике базового уровня А.Г. Мордковича: Решить уравнение графическим способом $-\sin(x) = \sqrt{x}$ [3]. На рисунке 5 показано, как можно успешно и наглядно решить данное задание с помощью среды GeoGebra.

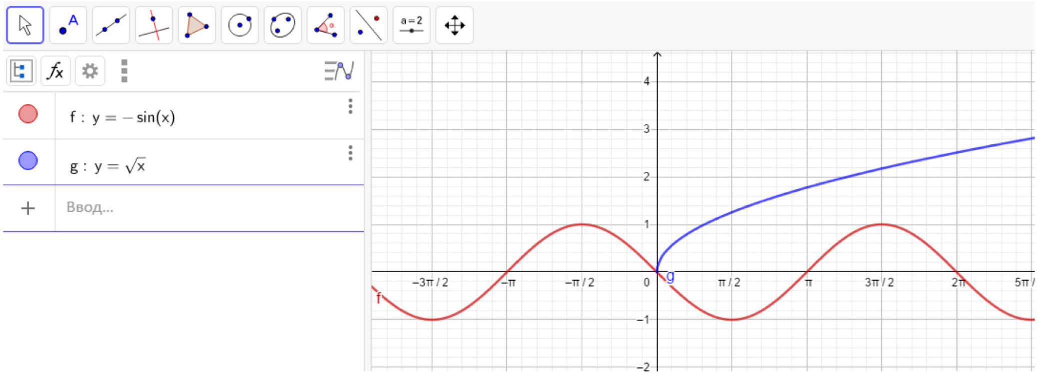


Рис. 5

На итоговой аттестации по математике в 11 классе при решении задания 12 профильного уровня обучающимся необходимо не только решить тригонометрическое уравнение, но и произвести отбор корней согласно заданному промежутку. Среда GeoGebra позволяет визуализировать процесс задания промежутка, что в дальнейшем может помочь выпускникам при выполнении задания. В качестве второго примера рассмотрим задание, в котором необходимо не только решить уравнение, но и выполнить отбор корней согласно промежутку: Найдите корни уравнения $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ графическим способом на заданном промежутке $[0;2\pi]$ [3]. На рисунке 6 наглядно представлено, какому именно промежутку должны принадлежать корни уравнения.

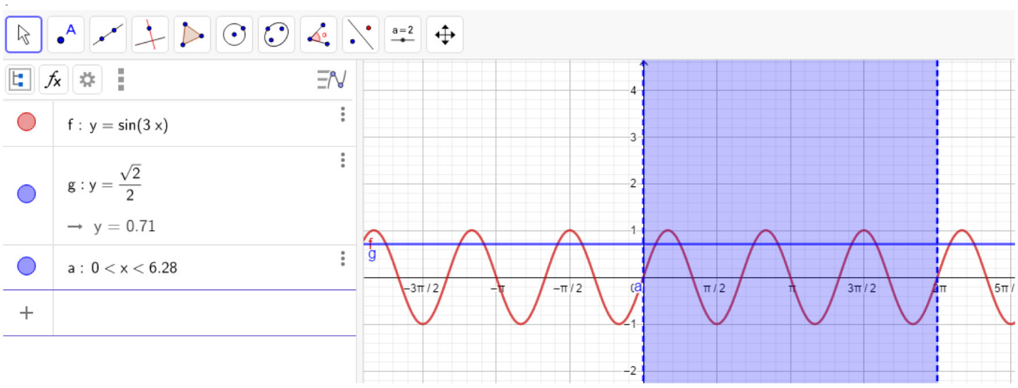


Рис. 6

Аналогичным образом можно построить работу и с остальными тригонометрическими функциями.

Таким образом, возможности компьютерной среды GeoGebra позволяют учителю достаточно эффективно организовать решение тригонометрических уравнений, а обучающимся помогают посмотреть на процесс обучения с другой стороны, дают возможность сделать этот процесс более современным и интересным.

Библиографический список

1. Ибрагимова С.Г. Применение информационных технологий на уроках. URL: https://infourok.ru/primenenie-informacionnyh-tehnologij-na-urokah-4040087.html (дата обращения: 01.11.2022).
2. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra: учеб. пособие для вузов. М.: Юрайт, 2018.
3. Мордкович А.Г. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных организаций (базовый уровень). М.: Мнемозина, 2020.

ПОСТРОЕНИЕ АНИМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В СРЕДЕ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

BUILDING ANIMATION MODELS IN THE GEOGEBRA ENVIRONMENT WHEN STUDYING DISCRETE OBJECTS IN A SCHOOL MATHEMATICS COURSE

В.Ю. Сиднева, М.А. Кейв **V.U. Sidneva, M.A. Keiv**

Компьютерная анимация, программное средство GeoGebra, математическое образование школьников, дискретная математика, комбинаторика, числовые последовательности, графы, модель.

Рассматривается подход к изучению дискретных объектов школьного курса математики с использованием компьютерной системы GeoGebra. В рамках подхода указаны примеры анимационных моделей для решения задач из разделов дискретной математики: числовые последовательности и рекуррентные соотношения, комбинаторика, графы и др. Применение представленных моделей в школьной практике позволит продемонстрировать возможности компьютерной системы GeoGebra, что способствует формированию ИКТ-компетенций у обучающихся.

Computer animation, GeoGebra software, mathematical education of schoolchildren, discrete mathematics, combinatorics, numerical sequences, graphs, model.

An approach to the study of discrete objects of the school mathematics course using the GeoGebra computer system is considered. Within the framework of the approach, animation models for solving problems from discrete mathematics sections are clearly illustrated: numerical sequences and recurrence relations, combinatorics, graphs, etc. The use of the presented models in school practice will demonstrate the capabilities of the GeoGebra computer system, which in turn contributes to the formation of ICT competencies among students.

Использование информационных технологий в обучении школьников математике является одним из приоритетных направлений совершенствования системы математического образования. Согласно требованиям новых образовательных стандартов предметные результаты в области «Математика» включают использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения математических задач [7].

Обучение школьников цифрового поколения (поколение Z) невозможно представить без использования компьютерных технологий. Актуальным становится использование в обучении математике различных компьютерных сред, так как их анимационные возможности представляют собой новую часть современной дидактики образования.

Анимационные рисунки (чертежи) делают математические понятия и утверждения наглядными, что способствует их пониманию и более успешному усвоению материала. Их можно использовать на разных этапах обучения: как наглядный дидактический материал при изучении нового материала, как инструмент для проведения обучающего эксперимента и как средство контроля учебных достижений обучающихся.

Одним из представителей таких программ является компьютерная среда GeoGebra. Данная среда предоставляет дополнительные возможности усиления экспериментальной и исследовательской составляющих обучения математике в школе.

Элементы дискретной математики входят в содержание математической подготовки школьников: комбинаторика, числовые последовательности и рекуррентные соотношения (прогрессии), элементы теории графов и др. На сегодняшний день знание теоретических основ и владение методами дискретной математики является неотъемлемой составляющей математической культуры. Обучающиеся, особо мотивированные на изучение математики, должны быть осведомлены и в области дискретной математики. Особое внимание следует уделить обучению элементам дискретной математики на этапе предпрофильной и профильной подготовки. Поиск и разработка специальных методик обучения элементам дискретной математики является одной из актуальных проблем школьного математического образования.

Цель статьи: описать подход к изучению дискретных объектов школьного курса математики с использованием компьютерной системы GeoGebra на этапе предпрофильной подготовки обучающихся 9 класса.

Анализ примерных программ по математике 9 класса позволил определить ряд следующих тем, в ходе изучения которых обучающиеся знакомятся с элементами дискретной математики: числовые последовательности и рекуррентные соотношения (прогрессии), комбинаторика [6]. В частности, в рамках выполнения индивидуального проекта обучающихся можно вовлечь в проектную деятельность по созданию анимационных моделей в компьютерной среде GeoGebra (таблица 1).

Таблица 1

Примеры задач по созданию анимационных моделей в компьютерной среде GeoGebra для обучающихся 9 класса

Примеры задач	Описание продукта (анимационной модели)
Задача о ханойской башне [2, с. 17]	Построение анимационной модели для перекладывания n колец: а) n=2; б) n=3; в) n=4. Вывод рекуррентного соотношения
Задача о разрезании пиццы [2, с. 21]	Построение анимационной модели для n прямых разрезов: а) n=2; б) n=3; в) n=4. Вывод рекуррентного соотношения
Задача о кроликах [1, с. 278]	Построение анимационной модели для периода от начала года до n-го месяца: а) n=1; б) n=2; в) n=3; г) n=4; д) n=5. Вывод рекуррентного соотношения
Комбинаторная задача [1, с. 226, № 23.5]	Построение анимационной модели дерева перебора возможных вариантов. Формулировка ответа
Комбинаторная задача [1, с. 248, № 25.10]	Построение анимационной модели полного графа. Формулировка ответа
Задача коммивояжера [6, с. 26]	Построение модели гамильтонового цикла минимального веса. Формулировка ответа

Построение в компьютерной среде GeoGebra анимационных моделей, указанных в таблице, основано на использовании инструмента «Ползунок», с помощью которого задается анимация и функции «Условия видимости объектов». В работах [3; 4] достаточно подробно описана технология построения подобных анимационных моделей.

Процесс построения анимационных моделей в компьютерной среде GeoGebra доступен обучающимся, имеющим минимальный опыт работы в данной среде, и очень увлекателен. В ходе проектирования таких моделей у обучающихся формируются не только основы ИКТ-компетенций, но и закладываются (развиваются) основы алгоритмического мышления, навыки программирования и творческие способности.

Библиографический список

1. Алгебра: 9 класс: учебник для углубленного изучения алгебры / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. М.: Вентана – Граф, 2019.
2. Грэхем Р. и др. Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Пер. с англ. М.: Мир, 1998.
3. Капач Ю.И. Решение задач на языке теории графов в компьютерной среде GeoGebra // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016. С. 33–36.
4. Кожуховская В.А. Моделирование решений комбинаторных задач в компьютерной среде GeoGebra // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016. С. 37–39.
5. Мудров В.И. Задача о коммивояжере. М.: Знание, 1969. С. 62.
6. Сборник примерных образовательных программ 2020. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17909721 (дата обращения: 07.09.2022).
7. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 2010. URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/ (дата обращения: 07.09.2022).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА С GEOGEBRA

EXPERIMENTAL MATHEMATICS WITH GEOGEBRA

М.Н. Сомова, О.М. Беличенко **M.N. Somova, O.M. Belichenko**

Экспериментальная математика, GeoGebra, исследовательские действия, гипотеза, компьютерный эксперимент, теоремы Наполеона.

Рассматривается подход к формированию у обучающихся навыков проведения компьютерных экспериментов. Обосновывается актуальность формирования указанных навыков. Приводится пример учебного занятия по проведению компьютерных экспериментов.

Experimental mathematics, GeoGebra, research actions, hypothesis, computer experiment, Napoleon's theorems.

An approach to the formation of students' skills in conducting computer experiments is considered. The relevance of the formation of these skills is substantiated. An example of a training session on conducting computer experiments is given.

Требованиями ФГОС ОО определена необходимость формирования у учащихся базовых исследовательских действий, таких как умение формулировать гипотезу, проводить эксперимент по установлению особенностей объекта изучения, самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного эксперимента [3]. В примерной основной образовательной программе основного общего образования математика рассматривается не только как основной предмет в овладении основами теоретического исследования, но и как область для формирования базовых исследовательских действий, умений проводить эксперименты, в том числе компьютерные [1]. Таким образом, государственными стандартами перед системой математического образования поставлена сложная задача формирования у обучающегося опыта экспериментальной математики. Для решения поставленной задачи необходимо создать условия обучения математике, которые будут способствовать развитию у обучающихся умений ставить и проводить математические эксперименты разных видов с использованием и компьютерных средств, умение делать выводы на основе проведенного математического эксперимента. Однако в школьном курсе не предусмотрены часы, отведенные на решение поставленных задач с использованием компьютерных технологий. Поставленная задача решается в рамках разработанной авторами дополнительной образовательной программы «Геометрия с GeoGebra» для инженерных классов, которая реализуется в 7 классах средней школы № 149 г. Красноярска. Из 34 часов, предусмотренных на реализацию программы, 10 часов отводится на тему «Эксперименты с GeoGebra» [2].

Выделяют следующие виды экспериментов, применяемых в ходе исследовательского обучения математике:

1. Конструктивный эксперимент: конструктивная проверка существования объекта исследования, оценка адекватности модели исходным данным, конструирование инструментов (средств) или объяснение механизмов их работы.

2. Иллюстративный эксперимент: визуализация утверждений как поддержка работы памяти или достижение понимания.

3. Разведочный эксперимент: использование модели для сбора экспериментальных данных, позволяющих выдвинуть гипотезы о свойствах и взаимосвязях объектов.

4. Контрольный эксперимент: контроль преобразований и вычислений, фальсификация, верификация гипотез.

5. Модифицирующий эксперимент: обнаружение ограниченности знаний, определение направления развития идеи, постановка новых задач [4].

Все эти виды математических экспериментов могут быть реализованы в динамической среде GeoGebra.

Приведем пример разведочного эксперимента по изучению теорем Наполеона и свойств треугольников Наполеона. Работа обучающихся проходит самостоятельно за компьютером. Обучающиеся получают рабочие листы, на которых расписаны этапы построения динамических чертежей. По результатам построений обучающиеся должны сформулировать гипотезу, подтвердить ее компьютерным экспериментом и записать формулировку соответствующей теоремы. Таким образом они учатся оформлять ход проведения эксперимента и отчет по результатам компьютерного эксперимента. Далее приведем пример рабочего листа.

Т е м а: ЭКСПЕРИМЕНТЫ С GEOGEBRA. ТЕОРЕМЫ НАПОЛЕОНА

ЭКСПЕРИМЕНТ 1

1. Постройте произвольный треугольник ABC.
2. На его сторонах постройте внешние правильные треугольники. Для наглядности измените их цвет.
3. Найдите центры правильных треугольников. Постройте треугольник с вершинами в найденных центрах. Для наглядности измените цвет треугольника. Полученный треугольник называется *внешний треугольник Наполеона.*
4. Найдите длины сторон полученного треугольника.
5. *Сформулируйте ГИПОТЕЗУ:*

Внешний треугольник Наполеона для треугольника ABC является ....

6. Динамически изменяя треугольник ABC, проверьте правильность гипотезы.

Вывод: гипотеза верна / неверна

На основании эксперимента сформулируйте ТЕОРЕМУ НАПОЛЕОНА:

Центры .... треугольников, построенных вовне на .... произвольного треугольника, образуют .... , который называется ....

ЭКСПЕРИМЕНТ 2

1. Постройте произвольный треугольник ABC.
2. На его сторонах постройте внутренние правильные треугольники. Для наглядности измените их цвет.

3. Найдите центры правильных треугольников. Постройте треугольник с вершинами в найденных центрах. Для наглядности измените цвет треугольника. Полученный треугольник называется .... треугольник Наполеона.

4. Найдите длины сторон полученного треугольника.

5. *Сформулируйте ГИПОТЕЗУ:*

.... треугольник Наполеона для треугольника ABC является ....

6. Динамически меняя форму треугольника ABC, проверьте правильность гипотезы.

Вывод: гипотеза ....

На основании эксперимента сформулируйте ВТОРУЮ ТЕОРЕМУ НАПОЛЕОНА:

Центры .... треугольников, построенных вовнутрь на ....произвольного треугольника, образуют .... , который называется ....

ЭКСПЕРИМЕНТ 3

1. Постройте произвольный треугольник ABC.

2. Постройте для него внешний и внутренний треугольники Наполеона. *Данный треугольник, внешний и внутренний треугольники Наполеона должны быть изображены разными цветами.*

3. С помощью инструмента 

найдите площади треугольника ABC, внешнего и внутреннего треугольников Наполеона.

4. Динамически изменяя треугольник ABC, установите связь межу площадями этих треугольников.

Сделайте ВЫВОД:

.... площадей внешнего и внутреннего треугольников Наполеона для треугольника ABC есть ....

ЭКСПЕРИМЕНТ 4

1. Постройте произвольный треугольник ABC.

2. Постройте для него внешний треугольник Наполеона.

3. Опишите окружности вокруг внешних правильных треугольников.

Что можно сказать о пересечении этих окружностей?

ВЫВОД:

Описанные окружности правильных треугольников, построенных вовне, ...

Эта точка называется ТОЧКА ФЕРМА-ТОРРИЧЕЛЛИ.

4. Найдите эту точку, обозначьте ее – точка T.

5. Найдите углы:

$\angle ATC =$

$\angle CTB =$

$\angle ATB =$

Сформулируйте свойство точки Ферма-Торричелли:

Если все углы треугольника АВС меньше 120º, то.. .

Отчетом по выполненной работе является заполненный рабочий лист и динамические чертежи, выполненные в среде GeoGebra (рис.).

На следующих занятиях учителем предлагается обобщить теоремы Наполеона для других видов многоугольников. В результате обучающиеся получают опыт опровержения некоторых гипотез и подтверждения гипотезы, которая выведет их к формулировке теоремы Тебо.

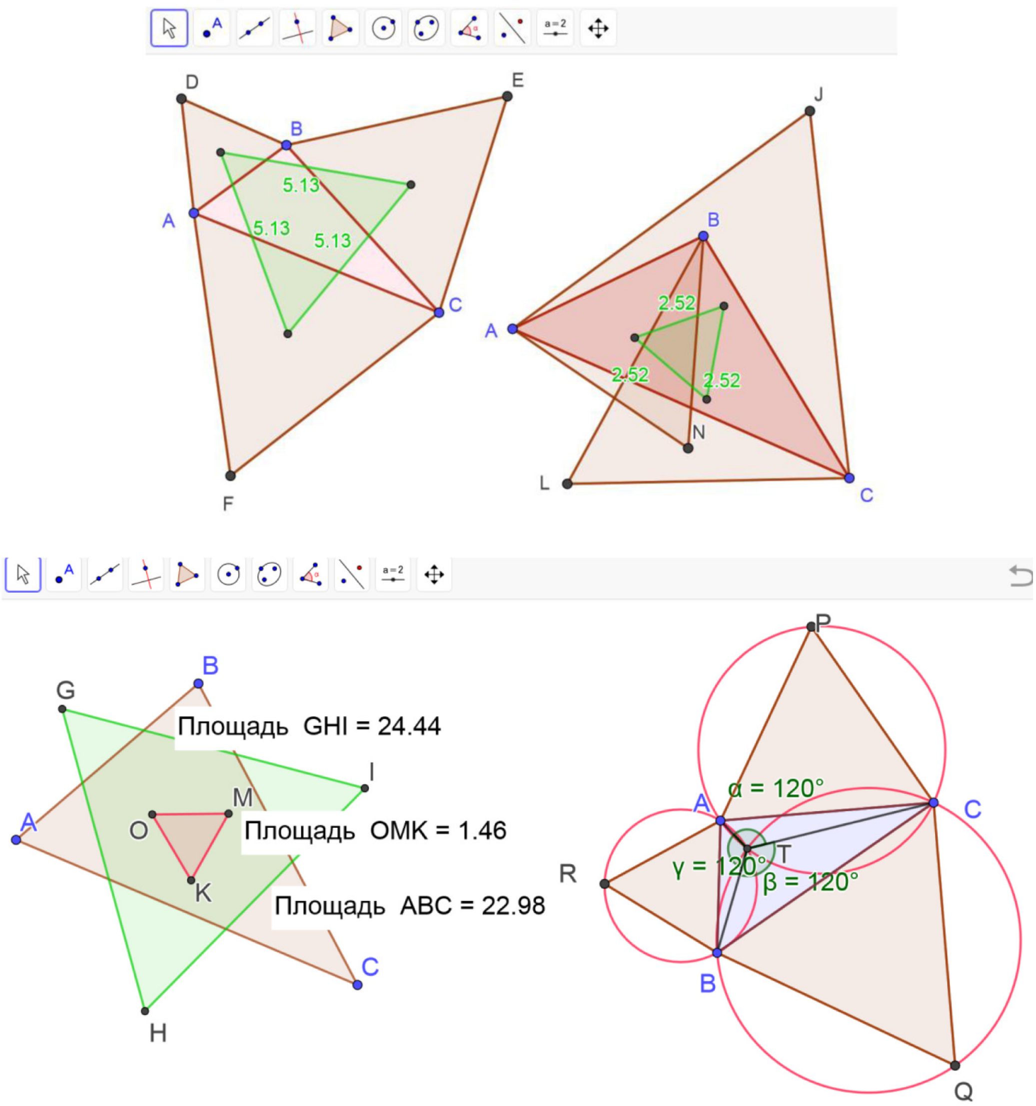


Рис. 1

В заключение отметим, что исследовательское обучение в стиле экспериментальной математики позволяет формировать у обучающихся умение обосновывать истинность геометрических утверждений с помощью полного компьютерного эксперимента на самостоятельно построенных чертежах. Но при этом важно сформировать у обучающихся понимание того, что экспериментально установленные и подтвержденные компьютерным экспериментом факты требуют теоретического доказательства.

Библиографический список

1. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. URL: https://fgosreestr.ru/ (дата обращения: 21.10.22).
2. Сомова М.Н., Беличенко О.М. Геометрия с GeoGebra // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Майера Роберта Адольфовича. Красноярск, 11–12 ноября 2021 г. [Электронный ресурс] / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2021.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-ooo/ (дата обращения: 21.10.22).
4. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. М.: Академия Естествознания, 2016. 300 с.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В СРЕДЕ PYTHON

VISUALIZATION OF REGRESSION MODELS IN THE PYTHON ENVIRONMENT

Э.Р. Торсунова **E.R. Torsunova**

Регрессионный анализ, математическая модель, Data Science, Python, визуализация данных, библиотеки Python, Visual Studio Code.

В статье рассматриваются возможности Python для визуализации регрессионных моделей. Приводится пример визуализации линейной, логарифмической, полиномиальной (третьей степени) парной регрессии средствами языка программирования Python. Описывается процесс написания кода с помощью функции regplot () и ее параметров logx, order.

Regression analysis, mathematical model, Data Science, Python, data visualization, Python libraries, Visual Studio Code.

The article discusses the possibilities of Python for visualizing regression models. An example of visualization of linear, logarithmic, polynomial (of the third degree) pairwise regression by means of the Python programming language is given. Describes how to write code using the regplot() function and its logx, order parameters.

В настоящее время в связи с цифровизацией экономики активно развивается новая междисциплинарная область – Data Science, предназначенная для сбора, анализа, обработки больших объемов данных. Специалист в этой сфере должен обладать не только знаниями математики, статистики, информатики, но и глубоко понимать предметную область, быть готовым применять различные данные и методы обработки для решения нестандартных задач.

Одним из способов обработки информации является ее визуализация. Наглядное представление данных обеспечивает эффективность их изучения, позволяет увидеть исследуемый объект или процесс в целом, способствует лучшему восприятию информации.

Большими возможностями визуализации данных обладает язык программирования Python. Python – объектно-ориентированный язык программирования, является одним из популярных средств разработки для решения практических задач в области математики, экономики, Data Science, Machine Learning и в других сферах.

Рассмотрим задачу визуализации модели линейной, логарифмической, полиномиальной (третьей степени) регрессии по представленным данным (таблица 1) [3]. Для решения данной задачи используются библиотеки matplotlib (библиотека двумерных числовых построений для анализа и визуализации данных), seaborn (библиотека для создания статистических графиков), pandas (библиотека для анализа данных) [2].

Таблица 1

Исходные данные для визуализации

№ города	Среднедушевой денежный доход, усл. ден. ед.	Среднедушевой оборот розничной торговли, усл. ден. ед.
1	3 357	2425
2	3 135	2 050
3	2 842	1 683
4	3 991	2 375
5	2 293	1 167
6	3 340	1 925
7	3 089	1 042
8	4 372	2 925
9	3 563	2 200
10	3 219	1 892
11	3 308	2 008
12	3 724	2 225
13	3 416	1 983
14	3 022	2 342
15	3 383	2 458
16	4 267	2 125

Для решения поставленной задачи создадим .csv файл, в котором будет храниться перечень необходимых нам данных (рис. 1).

date1.csv

```
namber,x,y
1,3357,2425
2,3135,2050
3,2842,1683
4,3991,2375
5,2293,1167
6,3340,1925
7,3089,1042
8,4372,2925
9,3563,2200
10,3219,1892
11,3308,2008
12,3724,2225
13,3416,1983
14,3022,2342
15,3383,2458
16,4267,2125
```

Рис. 1. .csv файл с данными

1. Визуализация модели линейной регрессии.

Создадим программу с помощью среды программирования Visual Studio Code (рис. 2).

```python
import seaborn as sns
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

csv = pd.read_csv('date1.csv', delimiter=',')

sns.regplot(x = "x", y = "y", data=csv)

plt.show()
```

Рис. 2. Программная реализация для линейной регрессии

Библиотеки seaborn и matplotlib импортируются с помощью Python Package Index в среду разработки.

Далее необходимо считать данные, записанные в файл date1.csv, для этого воспользуемся функцией read_csv из библиотеки pandas.

Для составления графика с линией регрессии и набора данных в библиотеке seaborn существует функция regplot. Зададим нужные нам параметры в функцию: оси *x* и *y* и набор данных csv, полученных из файла date1.csv.

Для отрисовки графика в окне необходимо воспользоваться функцией из библиотеки matplotlib под названием show().

В результате при запуске программы получим следующий график (рис. 3).

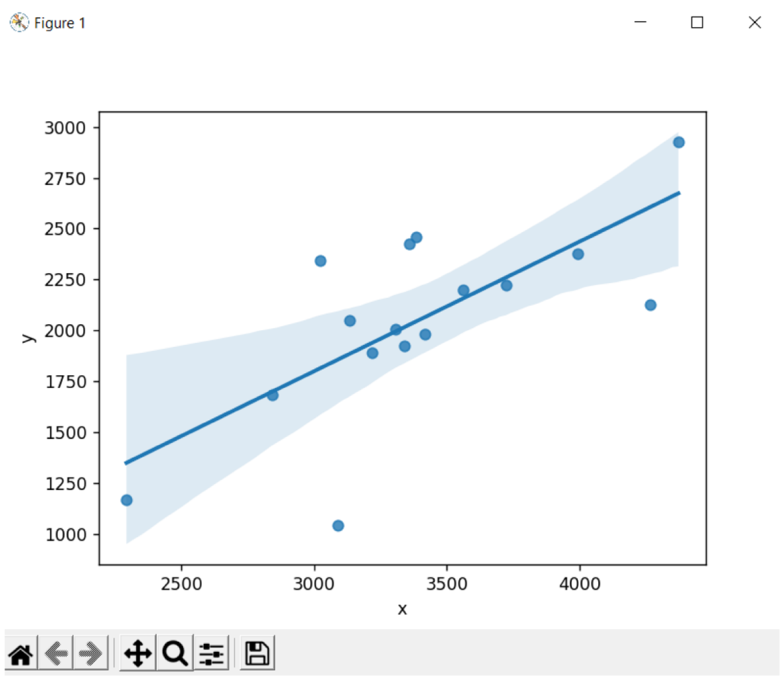


Рис. 3. График линейной регрессии

2. Визуализация модели логарифмической регрессии.

Воспользуемся параметром logx функции regplot (). Машинный код представлен на рисунке 4.

```
Program.py > ...
import seaborn as sns
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

csv = pd.read_csv('date1.csv', delimiter=',')
sns.regplot(x = "x", y = "y", logx= True, data=csv)
plt.ylim([0 , 3500])
plt.xlim([0, 5000])
plt.show()
```

Рис. 4. Программная реализация для логарифмической регрессии

На рисунке 5 приводится график логарифмической регрессии.

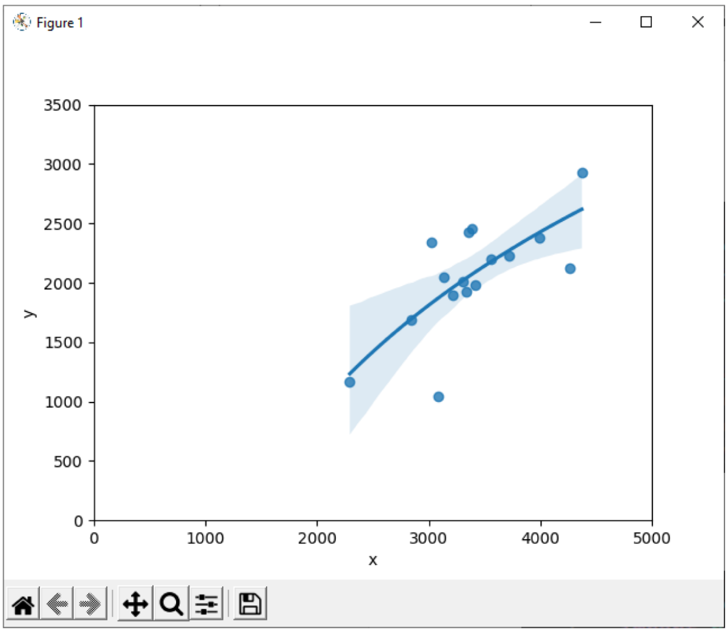


Рис. 5. График логарифмической регрессии

3. Визуализация модели полиномиальной (третьей степени) регрессии.

Воспользуемся параметром order функции regplot (). Программа на языке Python представлена на рисунке 6.

```
Program.py > ...
import seaborn as sns
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

csv = pd.read_csv('date1.csv', delimiter=',')
sns.regplot(x = "x", y = "y", order = 3, data=csv)
plt.ylim([0 , 3500])
plt.xlim([0, 5000])
plt.show()
```

Рис. 6. Программная реализация для полиномиальной (третьей степени) регрессии

Результат применения инструментов Python для построения полиномиальной (третьей степени) регрессии приведен на рисунке 7.

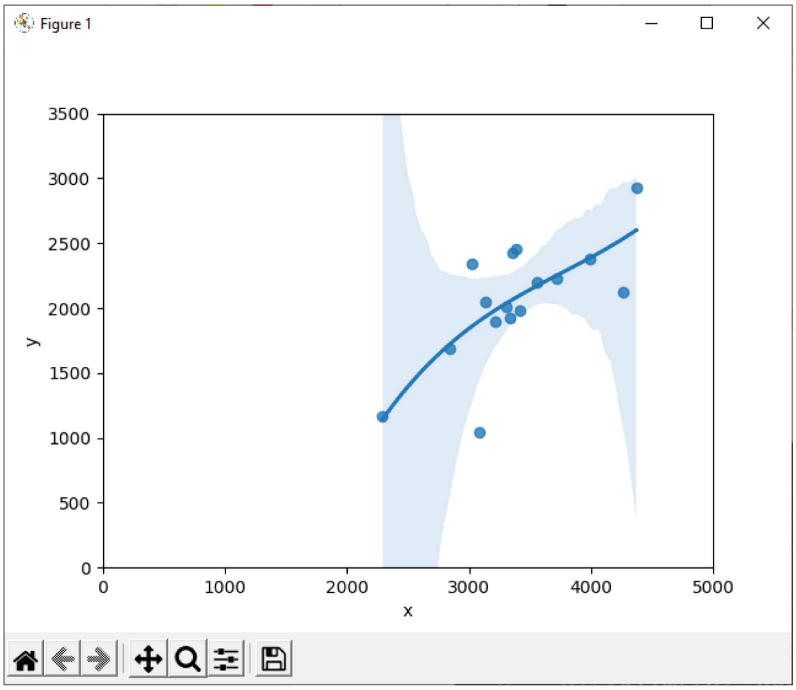


Рис. 7. График полиномиальной (третьей степени) регрессии

Применение инструментов Python позволяет визуализировать парные регрессионные модели. Полученная наглядная информация позволяет выбрать наилучшую модель регрессии. Выбор языка программирования Python обусловлен его популярностью в Data Science [1], наличием библиотек для графической визуализации, что упрощает создание программы для решения задач, относительной простотой синтаксиса языка, универсальностью. Представленные подходы могут быть полезны для преподавания математической статистики, математического моделирования, эконометрики в вузе.

Библиографический список

1. Абросимова М.А., Власова Л.С. Использование Python при работе с большими данными // Информационные технологии. Проблемы и решения. 2020. № 3 (12). С. 53–59.
2. Devpractice Team. Python. Визуализация данных. Matplotlib. Seaborn. Mayavi. – devpractice.ru. 2020. 412 с.
3. Торсунова Э.Р. Эконометрические задачи как средство развития цифровой компетентности студентов // VIII Педагогические чтения, посвященные памяти профессора С.И. Злобина: сборник материалов: в 2 томах, Пермь, 05–07 октября 2022 года / сост. А.И. Согрина. Пермь: Пермский институт Федеральной службы исполнения наказаний, 2022. С. 204–207.

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

THE USE OF DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES IN PREPARATION FOR THE UNIFIED STATE EXAM IN MATHEMATICS

О.Н. Троицкая **O.N.Troitskaya**

Цифровые образовательные ресурсы, интерактивные материалы, «1С: Математический конструктор», графики функций, дробно-рациональная функция.

В статье представлено описание методических особенностей использования интерактивных материалов, предлагаемых «1С: Математический конструктор», в процессе подготовки учащихся к сдаче Единого государственного экзамена по математике. Представлены примеры заданий, направленных на формирование у школьников умений выполнять действия с функциями и их графиками.

Digital educational resources, interactive materials, «1C: Mathematical Designer», graphs of functions, fractional-rational function.

The article presents a description of the methodological features of using interactive materials offered by «1C: Mathematical Designer» in the process of preparing students for the unified state exam in mathematics. Examples of tasks aimed at developing schoolchildren's skills to perform actions with functions and their schedules are presented.

Указ Президента РФ «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года» определил цифровую трансформацию как одну из национальных целей развития страны [3]. Изменения коснулись всех направлений деятельности общества, в том числе и образования. На первый план было выдвинуто достижение каждым обучаемым необходимых образовательных результатов за счет персонализации образовательного процесса на основе использования растущего потенциала цифровых технологий. Ведущие ИТ-компании в качестве приоритетных направлений своей деятельности определили разработку цифровых образовательных ресурсов. К их числу можно отнести интерактивные учебные материалы, предлагаемые фирмой «1С: Математический конструктор» [1]. На сайте в библиотеке материалов можно найти анимации, интерактивные рисунки, интерактивные задания, схемы, таблицы, плакаты для большинства школьных предметов (рисунок 1).

Актуальность данного материала обусловлена возможностью его применения в рамках как урочной, так и внеурочной деятельности, в частности в процессе подготовки учащихся старших классов к сдаче Единого государственного экзамена практически по каждому предмету. Особое значение имеет ЕГЭ по математике, так как данный экзамен является обязательным для всех учащихся. В 2022 году в содержание экзаменационной работы на профильном уровне было добавлено задание повышенного уровня сложности, проверяющее умение учащихся выполнять действия с функциями и их графиками. Речь идет о следующих типах функций: линейная, кусочно-линейная, квадратичная, дробно-рациональная, тригонометрические, показательные и логарифмические функции, а также их комбинации.

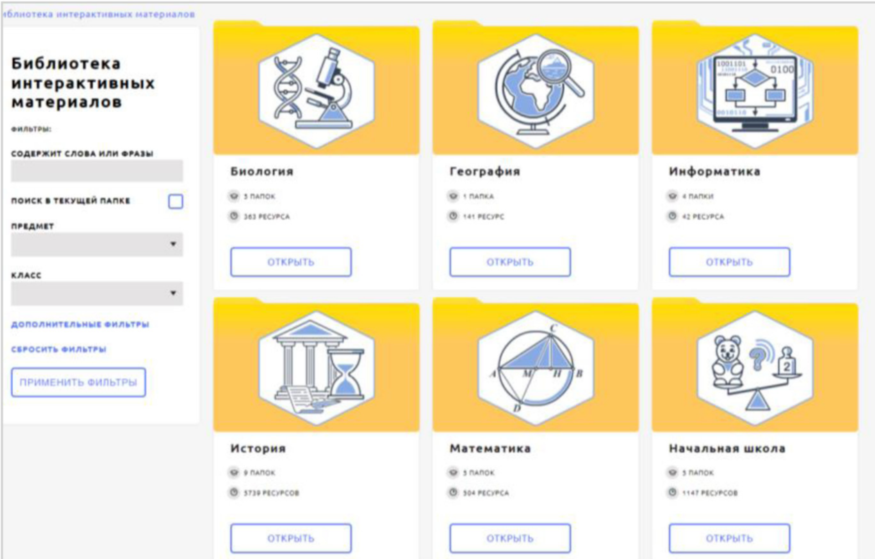


Рис. 1. Библиотека интерактивных материалов

Мы провели тестирование 75 одиннадцатиклассников, планирующих сдавать ЕГЭ по математике на профильном уровне. Им были предложены следующие задания (рисунок 2):

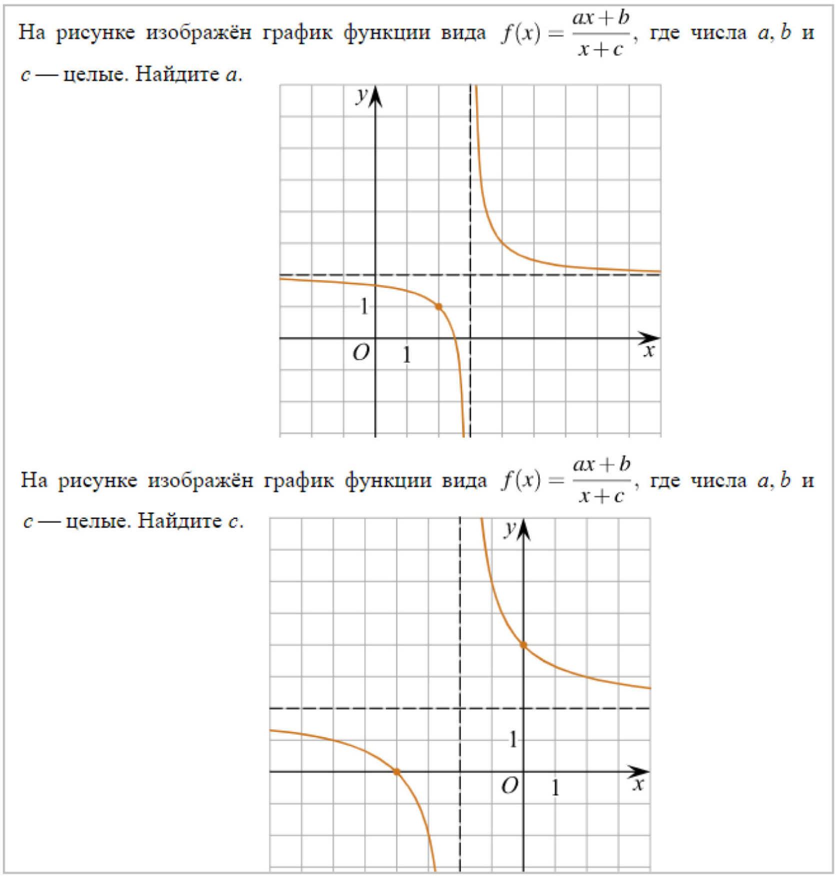


Рис. 2. Задания, предложенные учащимся в ходе тестирования

К сожалению, 11 % школьников отказались от выполнения данных заданий, 29 % не смогли правильно их решить. Типичными оказались следующие ошибки:

– неправильное составление уравнений асимптот графиков функций,

– при правильно составленных уравнениях асимптот графика неправильное определение значений *a*, *b* и *c*.

Опрос учащихся позволил установить, что основная причина состоит в том, что они не помнят свойства функций и особенности преобразования графиков функций. Поэтому учитель в процессе подготовки школьников к решению заданий данного типа может использовать цифровые образовательные ресурсы фирмы «1С: Математический конструктор» [2]. Речь идет об интерактивных исследованиях (рисунок 3).

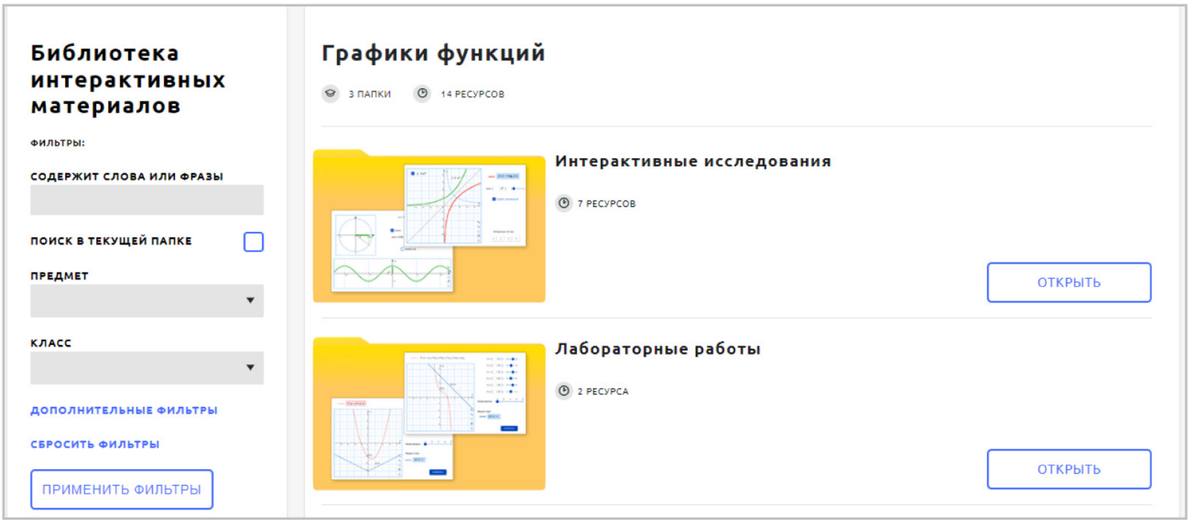


Рис. 3. Интерактивные исследования

Учитель предлагает учащимся провести исследования с дробно-рациональной функцией. Школьники указывают различные значения параметров *a*, *b*, *c*, *d* и наблюдают за изменениями расположения графика. Затем учитель может предложить поставить «галочку» около пункта «Асимптоты», и учащиеся увидят особенности расположения графика относительно асимптот (рисунок 4).

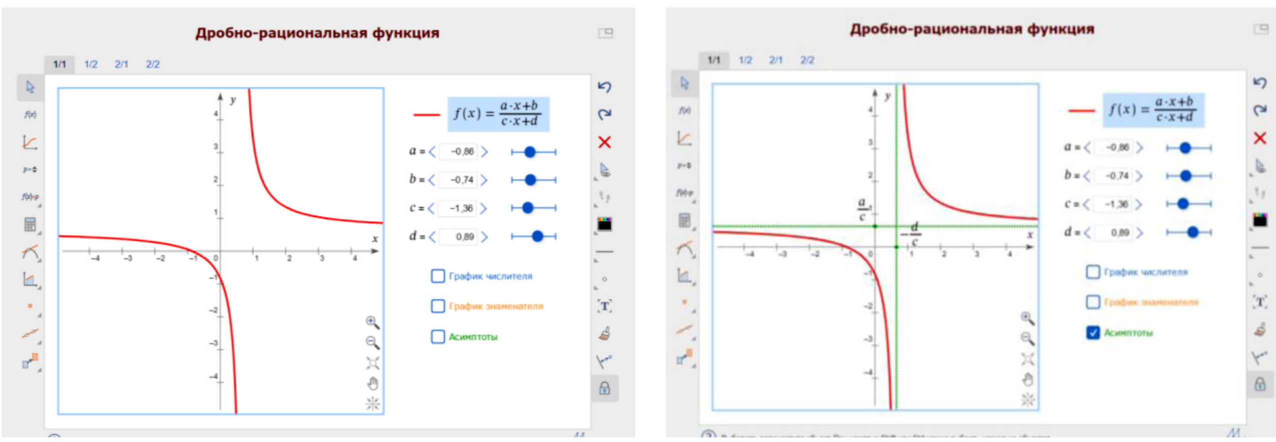


Рис. 4. Интерактивные исследования с дробно-рациональной функцией

Далее учащиеся зададут значение коэффициента при х в знаменателе, равное числу 1, и обнаружат, что для функции $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ уравнение вертикальной асимптоты принимает вид $x = -\frac{d}{1}$, $x = -d$, то есть $x + d = 0$. Это позволит им в дальнейшем решать успешно задания следующего вида (рисунок 5):

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, где числа a, b и c — целые. Найдите c.

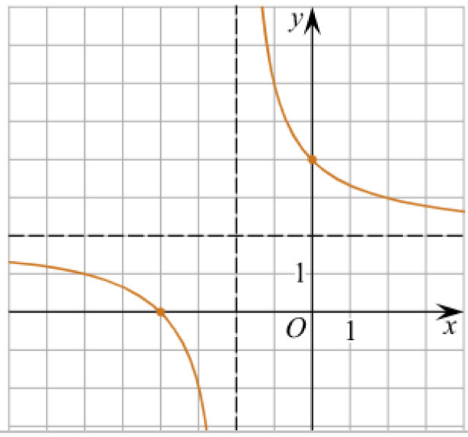


Рис. 5. Задание

В приведенном примере в соответствии с предложенным рисунком школьники установят, что прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой.

Преобразовав уравнение к виду $x + 2 = 0$, они ответят на вопрос задачи: $c = 2$.

Продолжая проводить исследования при значении коэффициента при x в знаменателе, равном 1, учащиеся выяснят, что для функции $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ уравнение горизонтальной асимптоты принимает вид $y = \frac{a}{1}$, т.е. $y = a$.

Возвращаясь к примеру, представленному на рисунке 5, они определят, что $a = 2$.

Затем учитель попросит учащихся определить значение последнего неизвестного параметра b. В процессе обсуждения они придут к выводу о том, что необходимо взять точку на графике функции и подставить ее координаты в полученное выражение для данной функции.

С целью формирования навыков решения заданий данного типа учитель может предложить школьникам решить серию заданий, представленных на сайте Федерального института педагогических измерений [4]. Осуществить самопроверку они смогут с помощью уже изученной виртуальной лаборатории.

Применение цифровых образовательных ресурсов, предлагаемых «1С: Математический конструктор», позволит не только успешно подготовить учащихся к решению заданий ЕГЭ по математике, но и сформировать у них представление о возможности использования программного обеспечения при решении математических задач.

Библиографический список

1. Библиотека интерактивных материалов. URL: https://urok.1c.ru/library/ (дата обращения: 14.10.2022).
2. Библиотека интерактивных материалов. Графики функций. URL: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/grafiki_funktsiy/ (дата обращения: 14.10.2022).
3. Указ Президента Российской Федерации 21.07.2020 г. № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года» URL: http://government.ru/docs/all/128943/ (дата обращения: 14.10.2022).
4. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» [сайт]. Москва, 2004. URL: https://fipi.ru (дата обращения: 14.10.2022).

ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ СТАРШЕКЛАССНИКОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ GGB

FORMATION OF FUNCTIONAL LITERACY HIGH SCHOOL STUDENTS USING GGB

Г.А. Троякова **G.A. Troyakova**

Математическое образование, функциональная грамотность, анимация, математическое мышление, интерактивная геометрическая среда GeoGebra.

В статье рассматривается проблема формирования функциональной грамотности и математического мышления школьников при использовании системы динамической математики GeoGebra. Исследуется вопрос о влиянии подвижных и оперативных представлений функций на формирование способностей решать задачи с функциями и развитие математического мышления.

Mathematical education, functional literacy, animation, mathematical thinking, interactive geometric environment GeoGebra.

The article deals with the problem of the formation of functional competence and mathematical thinking of schoolchildren using the GeoGebra system of dynamic mathematics. The question of the influence of mobile and operational representations of functions on the formation of abilities to solve problems with functions and the development of mathematical thinking is investigated.

Современное направление образования – формирование функциональной грамотности (приказ Рособнадзора № 590 и Минпросвещения России № 219 от 06.05.2019 «Об утверждении Методологии и критериев оценки качества общего образования в общеобразовательных организациях на основе практики международных исследований качества подготовки обучающихся»). Составляющие функциональной грамотности: читательская, математическая и естественно-научная грамотность. Нам интересна математическая грамотность не только как вид функциональной грамотности, но и как умение ориентироваться в окружающем мире, понимать явления окружающего мира и умение использовать ресурсы на благо человечества. Под математическим мышлением понимаем абстрактное теоретическое мышление, объекты которого лишены вещественности, которые можно интерпретировать произвольным образом с условием: сохранять заданные между объектами отношения.

Сегодня имеется много методической литературы, направленной на формирование математической грамотности. Ориентирована на 5–9 классы. Обратим внимание на понимание «функция и ее свойства» в старших классах, где данная тема изучается на новом уровне, обобщая знания, приобретенные в предшествующих классах.

Будем рассматривать функциональную грамотность как базовое образование, которым должен овладеть обучающийся для того, чтобы успешно взаимодействовать с окружающим его миром, уметь решать возникающие задачи, выстраивать социальные отношения, стремиться к дальнейшему самообразованию. И главным элементом здесь является понятие «базовое».

Само понятие «функция» в методике преподавания претерпевает разные подходы. Мы исходим из того, что под функцией понимается отношение между множествами Х и У, при котором каждому элементу множества Х соответствует не более одного элемента множества У.

Наша задача: как, не теряя предметных знаний, обеспечить достижение школьниками метапредметных результатов?

Работа с функциями через визуализацию в режиме GGB, наряду с другими методами изучения функций, способствует формированию не только базовых знаний, но и знаний более высокого уровня, ведущие к:

– пониманию, что у любой проблемы есть решение;

– умению раскладывать поиск решений проблем на последовательные этапы;

– формированию способности воспринимать неудачи и ошибки не как причину опускать руки, а как возможность развиваться.

Обратим внимание на коммуникативную составляющую формирования функциональной грамотности, что представляет собой особым образом спланированные этапы урока, вовлечение учащихся в активную учебную деятельность. Проектирование и корректировка деятельности учащихся для преодоления трудностей усвоения материала. Иначе предлагаются задачи и упражнения, способствующие усвоению новых понятий, формированию предметных знаний и умений; умение вести разговор на заданную тему; умение слушать собеседника и убеждать в правильности своих суждений при наличии культурных норм общения.

Сопровождение изучаемого материала динамическими рисунками позволяет решить проблему глубокого и ускоренного усвоения материала. Продемонстрируем элементы работы над свойствами функций при обобщенном повторении материала:

– область определения и область значений функции

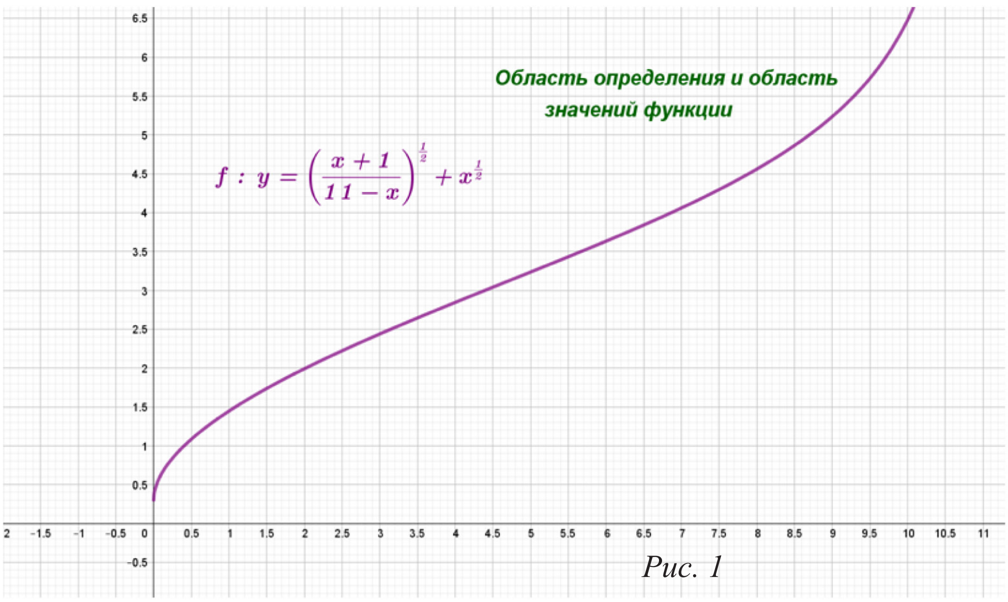
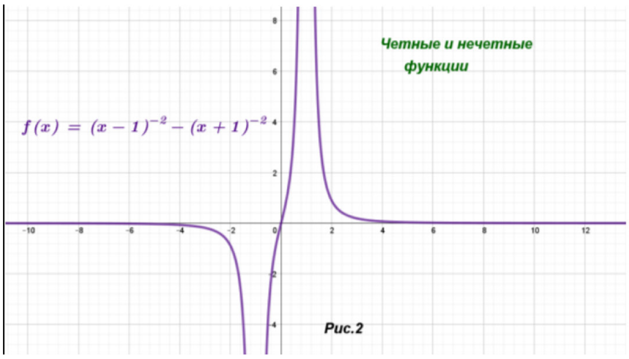


Рис. 1

– четные и нечетные функции (рис. 2–4):



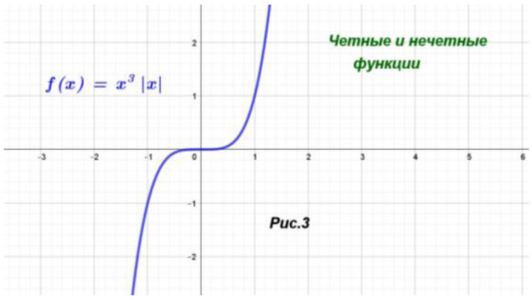
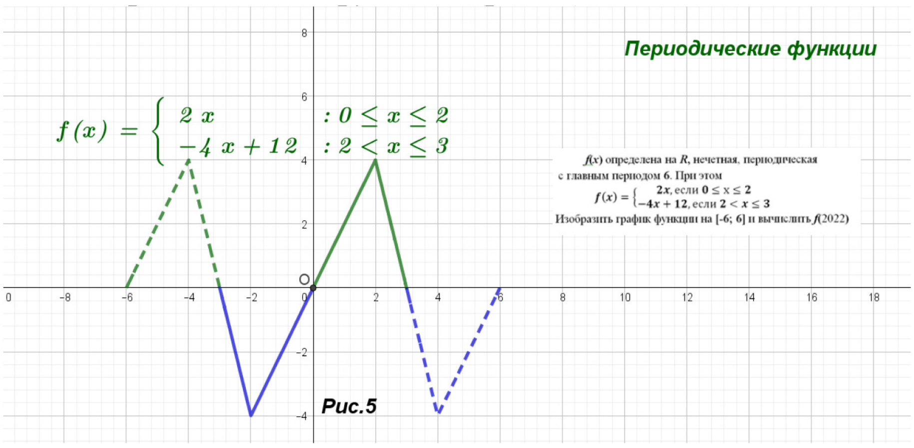
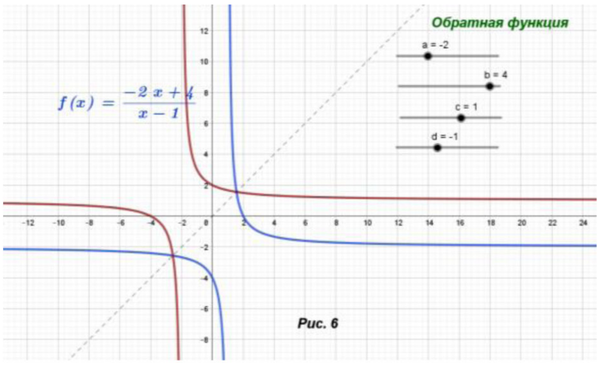


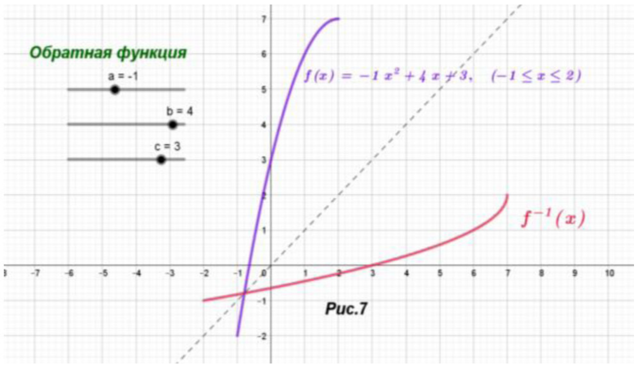
Рис. 4

– периодические функции (рис. 5)



– обратные функции (рис. 6–7)





– разные функции и констатация наблюдаемых свойств:

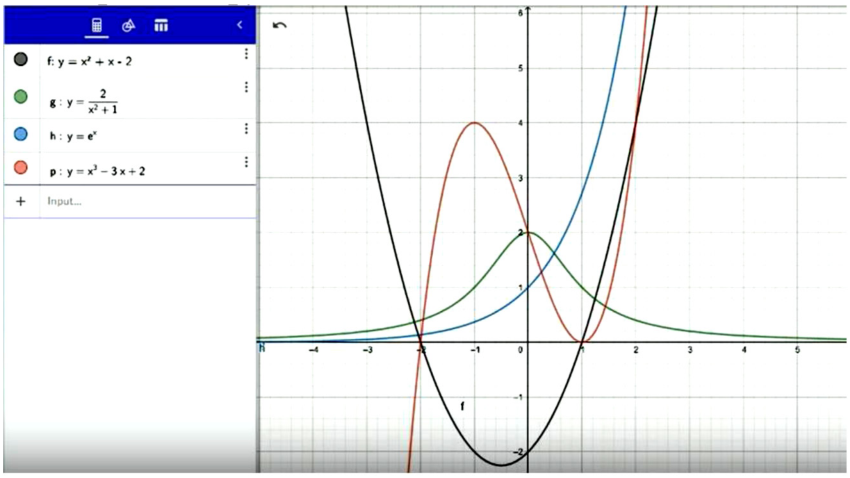


Рис. 8

Учащиеся работают с карточками, структура которых соответствует этапам элементарного исследования функции, представленным выше. Устанавливается сформированность компоненты математической грамотности методом активной оценки: а) воспроизведение математических фактов, методов и выполнение вычислений; б) установление связей и интеграции материала из разных математических тем, необходимых для решения поставленной задачи; в) математические размышления, требующие обобщения и интуиции.

Результаты контрольных мероприятий в формате тестов, самостоятельной и домашней работы свидетельствуют о хорошем понимании материала школьниками. При этом, несмотря на все усилия, 4 ученика часто демонстрируют парадоксальные результаты, свидетельствующие об их непонимании функциональных зависимостей. Особые проблемы наблюдаются при изучении периодических и обратимых функций.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ ГЕОМЕТРИИ НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА»

APPLICATION OF DYNAMIC MATHEMATICS PROGRAMS IN TEACHING GEOMETRY TO SCHOOLCHILDREN ON THE EXAMPLE OF THE TOPIC "TRIANGLE INEQUALITY"

И.В. Хотенко **I.V. Khotenko**

Образовательный процесс, практический эксперимент, неравенство треугольника, наглядность.

Обосновывается целесообразность и неизбежность вовлечения компьютерных технологий в процесс обучения школьников геометрии. Рассматривается важность возможности проведения наглядного математического эксперимента. Приведен разбор задачи по теме «Неравенство треугольника» с применением возможностей программы «Живая геометрия».

Educational process, practical experiment, triangle inequality, visibility.

The expediency and inevitability of involving computer technologies in the process of teaching geometry to schoolchildren is substantiated. The importance of the possibility of conducting a visual mathematical experiment is considered. The analysis of the problem on the topic «triangle inequality» using the capabilities of the program «Living Geometry» is given.

Компьютер уже не первое десятилетие применяется человеком в различных сферах деятельности, а в условиях пандемии коронавируса он и вовсе оказался незаменимым атрибутом осуществления образовательного процесса. Естественно, это не могло не отразиться на форме представления учащимся учебного материала. Моим основным рабочим инструментом выступила программа «Живая геометрия».

Очевидно, что решение практически каждой задачи по геометрии представляет собой мыслительный или практический эксперимент и предполагает наличие у того, кто ее решает, довольно развитого воображения, ведь зачастую возникает необходимость проведения дополнительных построений. В этом процессе целесообразно вовлечение программ динамической математики как на этапе объяснения, так и на этапе применения новых геометрических фактов. Ведь при традиционном способе решения геометрических задач обучаемый очень часто находит не все ее решения. Это является следствием того, что при анализе данных рассматриваются далеко не все возможные конфигурации, удовлетворяющие условию задачи. «Живой чертеж» позволяет не упустить ни один случай, поскольку на экране визуализируются все возможные типы геометрических фигур с различными значениями искомых элементов [2].

Рассмотрим позитивный опыт ее применения на примере изучения темы «Неравенство треугольника».

З а д а ч а. Постройте треугольник по трем сторонам. Всегда ли существует решение? [1] Иллюстрация общего решения выглядит довольно просто (рис. 1).

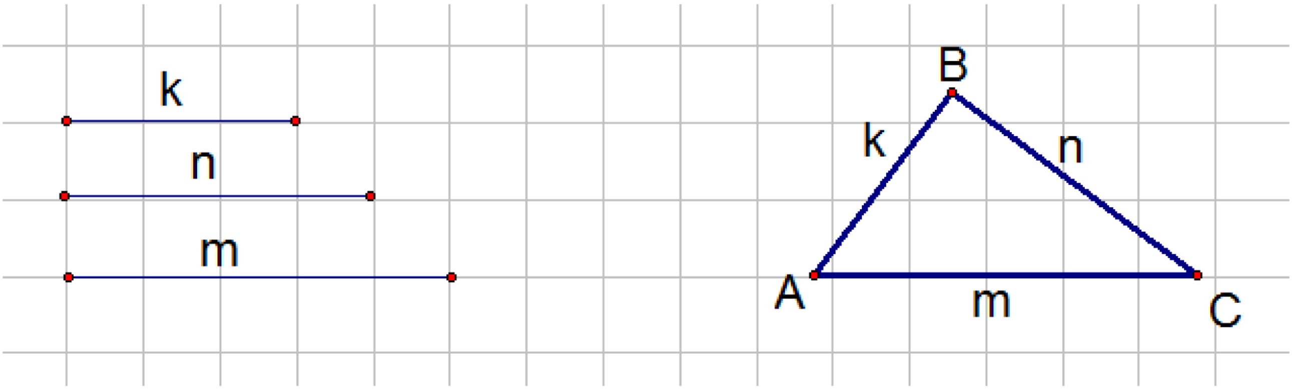


Рис. 1

Если начать менять величину хотя бы одного исходного элемента, то компьютерная модель треугольника ABC начнет довольно сильно изменяться, и в какой-то момент треугольник исчезает, что и становится свидетельством того, что искомая фигура существует не всегда.

Возможности программы «Живая геометрия» позволяют вычислять длины отрезков. Воспользуемся этим и выведем полученные данные в область чертежа. Кроме того, при помощи вкладки «измерения» вычислим суммы каждых двух сторон по отношению к третьей (рис. 2).

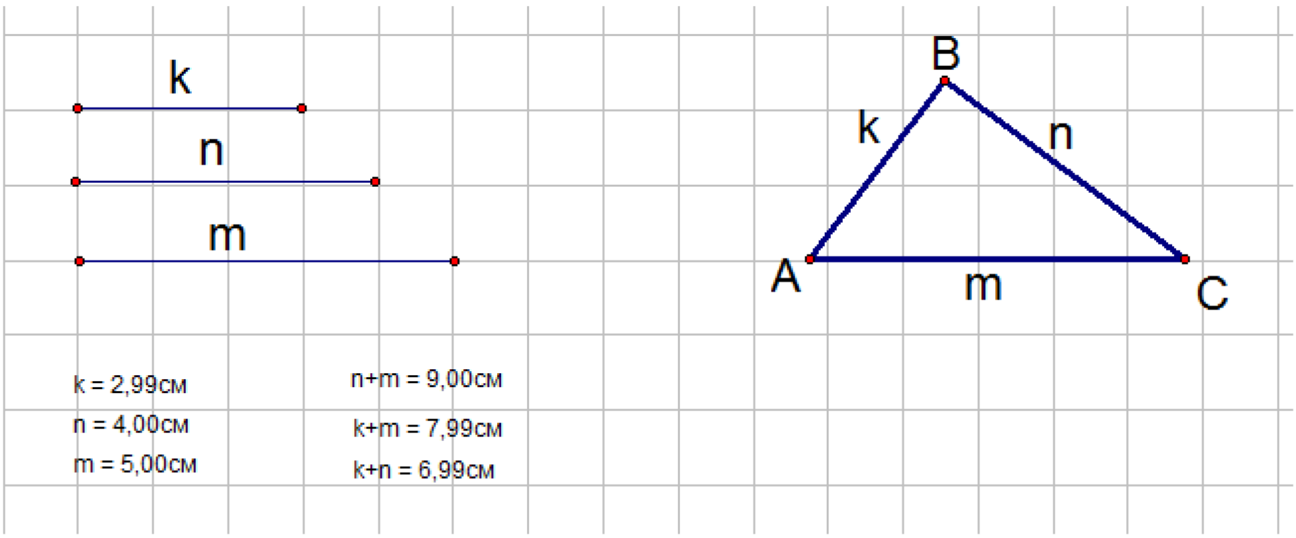


Рис. 2

Заметим, что каждая сторона меньше суммы двух других сторон треугольника. Теперь начнем экспериментировать с исходными данными и изменим, к примеру, величину стороны n (рис. 3).

Оценим полученный результат. Как только сторона m по своей длине превзошла сумму сторон k и n, треугольник перестал существовать. Аналогичные рассуждения проводим, изменив любую из оставшихся сторон.

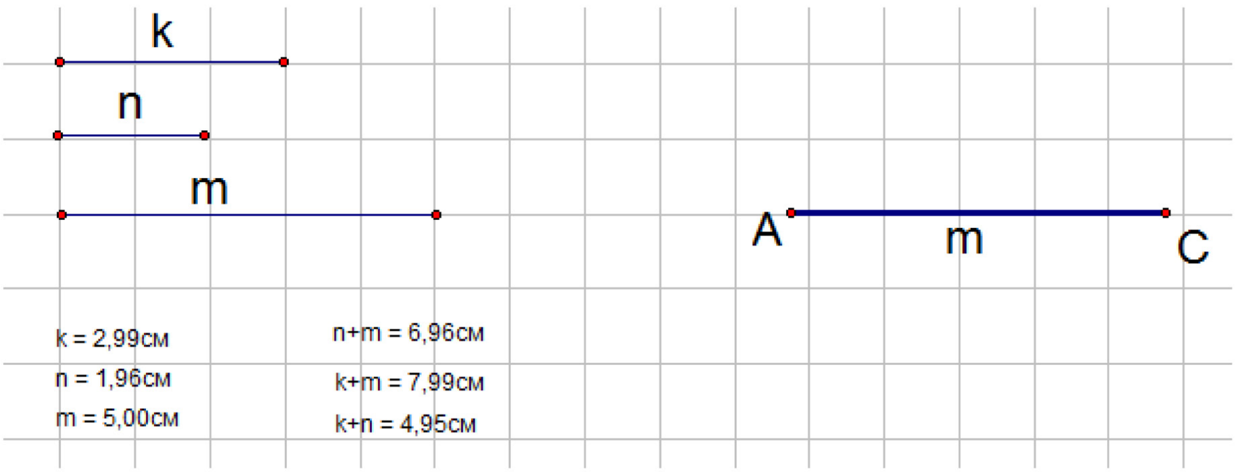


Рис. 3

Следует отметить, за счет наглядности и возможности хотя бы визуально увидеть происходящие с чертежом изменения ученики быстрее и осознаннее воспринимают тему «Неравенство треугольника» и эффективнее применяют ее при решении соответствующих задач.

Библиографический список

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 7–9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений М.: 2012.
2. Майер В.Р., Анциферова А.В., Апакина Т.В. Решение треугольников с параметрами. Компьютерное сопровождение. Красноярск, 2011.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ, ШКОЛЬНОЙ И НЕЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ ЭКСКУРСИЙ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ РАЗНЫХ ВОЗРАСТОВ ПО ЭКСПОНАТАМ ВИРТУАЛЬНОГО МУЗЕЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

FEATURES OF PREPARING EXCURSIONS FOR STUDENTS OF DIFFERENT AGES THROUGH THE EXHIBITS OF THE VIRTUAL MUSEUM OF ENTERTAINING MATHEMATICS

А.В. Дроздова **A.V. Drozdova**

Виртуальный музей занимательной математики, экспозиция, экспериментальная математика, системы динамической математики, GeoGebra.

В статье рассматривается пример подготовки экскурсии по виртуальному музею занимательной математики, разработанного силами школьников. На примере одного экспоната представлены возможные варианты использования динамических апплетов при проведении экскурсии для учащихся разных классов.

Virtual Museum of entertaining Mathematics, exposition, experimental mathematics, systems of dynamic mathematics, GeoGebra.

The article considers an example of preparing a tour of the virtual museum of entertaining mathematics, developed by schoolchildren. On the example of one exhibit, possible options for using dynamic applets when conducting excursions for students of different classes are presented.

Виртуальный музей занимательной математики [3] является совместной работой участников проекта «Музей занимательной математики» сетевой проектной школы (СПШ), организованной Ассоциацией педагогов, работающей с одаренными детьми [2], и участников кружка «Экспериментальная математика» [4]. Результаты работы СПШ представлены подробно в статье [5].

Виртуальная экскурсия отличается от реальной виртуальным отображением реально существующих объектов с целью создания условий для самостоятельного наблюдения, экспериментирования, сбора необходимых фактов [1].

Каждый экспонат виртуального музея занимательной математики включает в себя информационную справку, представляющую историю появления математического объекта или понятия, а также динамический апплет, созданный в GeoGebra, для возможности экспериментирования с моделью экспоната. На главной странице виртуального музея занимательной математики (рис. 1) можно увидеть шесть тематических разделов.

При проведении экскурсии для школьников разного возраста необходимо понимать, что каждый из них обладает определенным уровнем математической подготовки. Представим пример использования динамических апплетов при проведении экскурсии для учащихся разных возрастов.

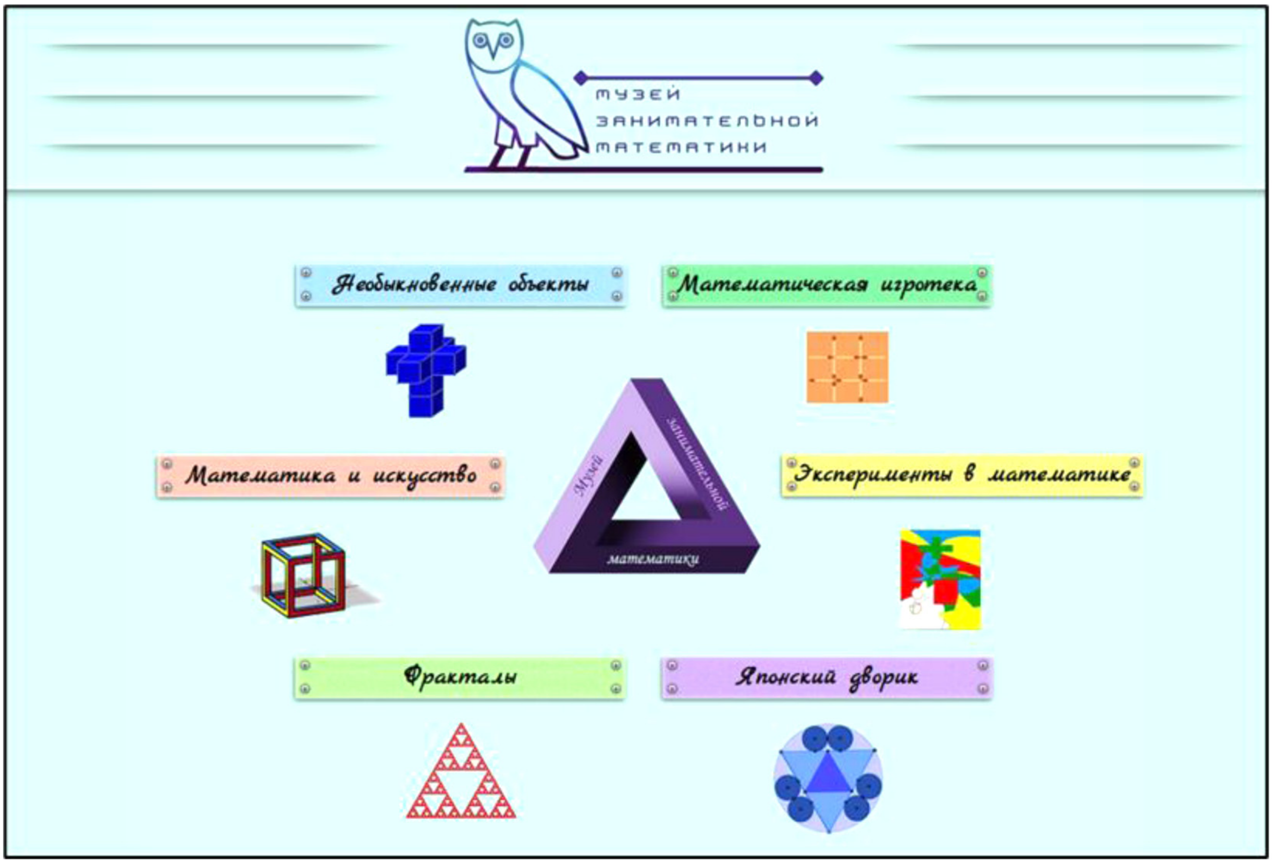


Рис. 1

В разделе «Необыкновенные объекты» мы можем увидеть экспонат – треугольник Рело. На сайте представлены историческая справка по экспонату (рис. 2), включающая необычные факты об объекте и применение его в жизни, а также четыре динамических листа, демонстрирующих построение и свойства треугольника Рело (рис. 3–6).

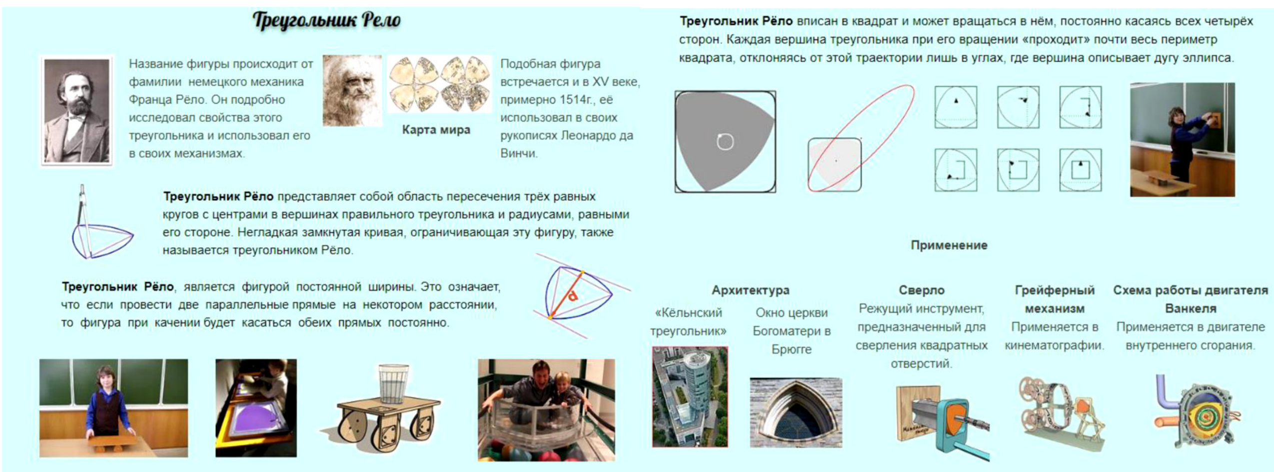


Рис. 2

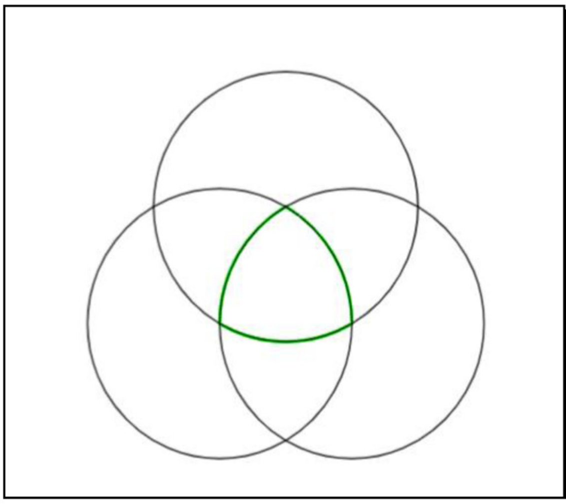


Рис. 3

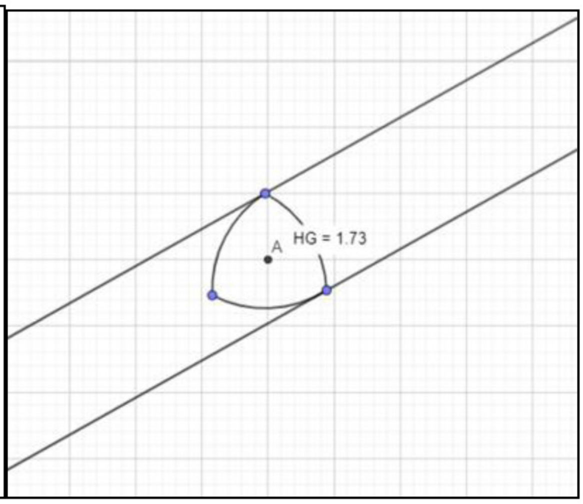


Рис. 4

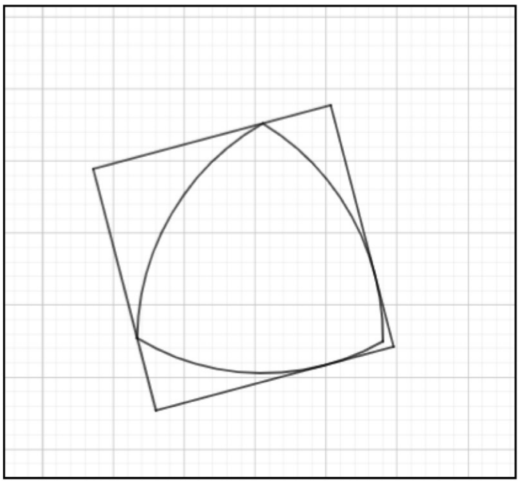


Рис. 5

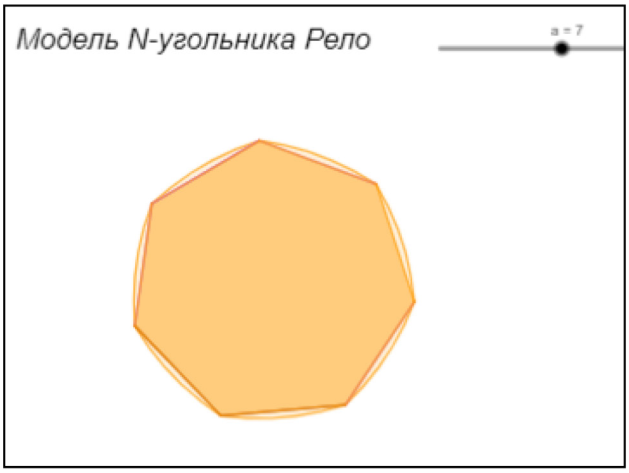


Рис. 6

Представление этого экспоната должно сопровождаться речью экскурсовода, так, например, для 5–6 классов мы можем описать его свойства таким образом:

– треугольник Рело можно построить, используя циркуль. Для этого нужно построить три равных круга, как показано на рисунке 3. Оказывается, этот треугольник может вращаться в квадрате, постоянно касаясь всех четырех сторон (рис. 5). Это свойство треугольника Рело используется в работе инструмента для сверления квадратных отверстий. Кроме того, существует не только треугольник Рело, но и подобные ему фигуры с такими же свойствами, но в этом случае они должны иметь нечетное количество вершин. Посмотрите на динамическую модель (рис. 6). Как мы можем назвать эти фигуры?

Для учащихся 7–8 классов, которые уже знакомы с правильным треугольником, окружностью и параллельными прямыми, мы можем конкретизировать определение:

– треугольник Рело представляет собой область пересечения трех равных кругов с центрами в вершинах правильного треугольника и радиусами, равными его стороне. Замкнутая кривая, ограничивающая эту фигуру, называется треугольником Рело (рис. 3). Эта необыкновенная фигура имеет свойство постоянной ширины, это означает, что если провести две параллельные прямые на некотором расстоянии, то фигура при качении будет касаться обеих прямых постоянно (рис. 4). Давайте проверим этот факт, сначала, проверим, действительно ли прямые параллельны. Для этого в GeoGebra есть инструмент «Отношение объектов».

При использовании инструмента «Отношение объектов» необходимо указать два объекта, после чего появится сообщение об их взаимном отношении (рис. 7). После этого можно проверить, что при качении треугольник Рело действительно касается прямых, а не пересекает их. Для этого можно использовать инструмент «Пересечение» и в динамике проверить касание дуг с прямыми (рис. 8–10).

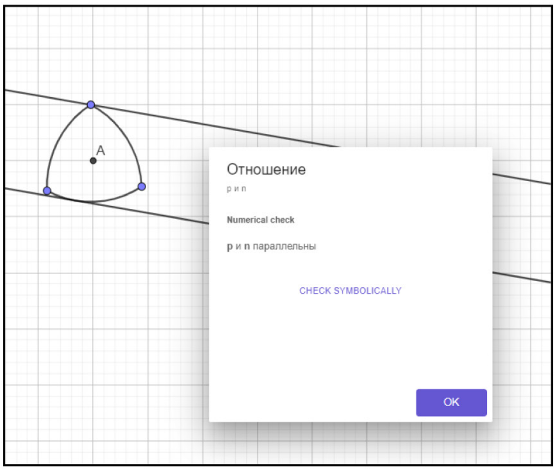


Рис. 7

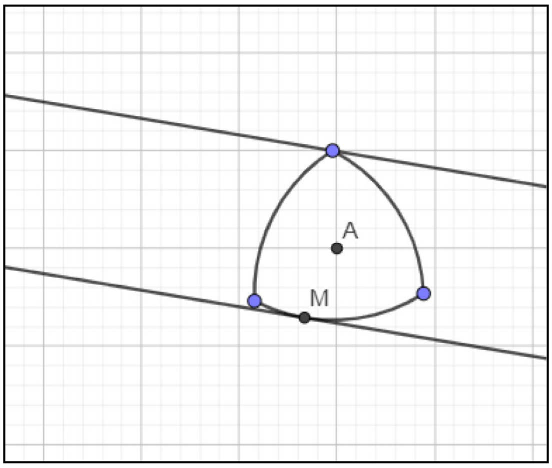


Рис. 8

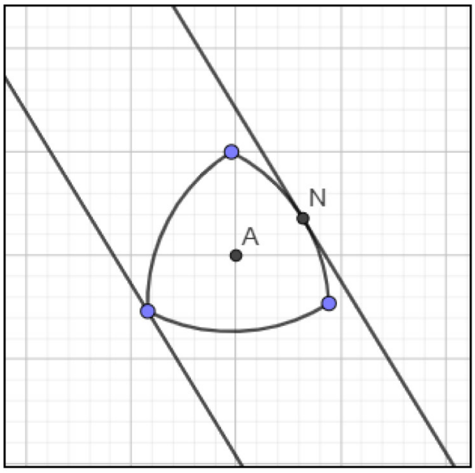


Рис. 9

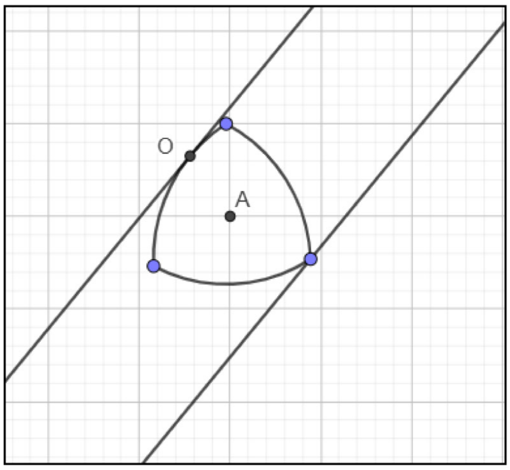


Рис. 10

Помимо этого свойства, учащимся 7–8 классов можно представить обобщение треугольника Рело на n-угольник, демонстрируя динамический апплет (рис. 6), предложив самим установить зависимость вида n-угольника Рело от количества вершин правильного многоугольника, на основе которого он построен, и предложить описать алгоритм построения одного из них и исследовать его свойства.

Учащимся 9 класса помимо вышесказанного мы можем предложить вывести площадь n-угольника Рело, а также провести дополнительное исследование модели, демонстрирующей траекторию вершин треугольника Рело или его центра при вращении в квадрате (рис. 11).

Рис. 11

В заключение хочется отметить, что виртуальный музей занимательной математики может быть использован в работе учителя математики любого класса, важно умело преподнести материал учащимся разных возрастов с учетом зоны ближайшего развития ребенка, оставляя ему возможность самостоятельно провести эксперимент и открыть неизвестный факт, и способствовать его желанию продолжить исследование в рамках индивидуальной проектной деятельности.

Библиографический список

1. Александрова Е.В. Виртуальная экскурсия как одна из эффективных форм организации учебного процесса на уроке литературы // Литература в школе. 2013. № 10. С. 22–24.
2. Официальный сайт Ассоциации педагогов, работающих с одаренными детьми. URL: https://www.aprod-rf.com/
3. Официальный сайт виртуального музея занимательной математики. URL: https://wargat11.wixsite.com/my-site
4. Официальный сайт кружка «Экспериментальная математика». URL: http://itprojects.narfu.ru/kruzhok-exp-mat/
5. Сергеева Т.Ф., Мамий Д.К., Пронина Н.А. Сетевая проектная школа как модель организации проектной и исследовательской деятельности с математически одаренными учащимися // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2021. № 4 (24). С. 60–67.

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО» КАК СРЕДСТВО ПОПУЛЯРИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИИ У ОБУЧАЮЩИХСЯ 10 КЛАССА

ELECTIVE COURSE “LOBACHEVSKY GEOMETRY” AS A MEANS OF POPULARIZING GEOMETRY AMONG STUDENTS OF THE 10TH GRADE

А.Ф. Жеребцова **A.F. Zherebtcova**

Геометрия Лобачевского, среда Живая математика, модель Кэли-Клейна, цифровое сопровождение.

В статье представлено место элективного курса «Геометрия Лобачевского» в современном математическом образовании. Дается обоснование, почему был выбран данный курс и кратко изложено его содержание. В статье представлены планируемые детали использования данного курса в общеобразовательной школе.

Lobachevsky geometry, Living Mathematics environment, Cayley-Klein model, digital support.

The article presents the place of the elective course «Lobachevsky Geometry» in modern mathematical education. A justification is given for why this course was chosen and its content is briefly outlined. The article presents the planned details of the use of this course in a secondary school.

Сегодня образование постоянно подвергается изменениям. Внедрение цифровизации в процесс обучения позволило разнообразить и облегчить работу образовательного процесса, но в то же время способствовало формированию у обучающихся критического мнения о важности и целесообразности изучения некоторых школьных дисциплин.

Например, необходимость изучения математики обучающиеся, начиная с 5 класса, постоянно подвергают сомнению. Развитие цифровых технологий только укрепило эту тенденцию, и данный предмет с каждым годом все меньше школьников изучают с интересом. Чаще всего математика воспринимается как предмет, необходимый для сдачи экзамена. Ее изучают, потому что это нужно, а не потому что это интересно.

По нашему глубокому убеждению, привлечь большее количество обучающихся в мир математики можно с помощью внеурочных занятий и элективных курсов. Данные курсы позволяют рассматривать разделы и темы математики, не входящие в школьный курс математики, а также способствуют привлечению большего количества обучающихся к популяризации математики в школах.

Элективный курс «Геометрия Лобачевского» был разработан не только с целью увлечь учащихся 10 класса красотами необычной геометрической теории, а также для того, чтобы популяризировать геометрию, первооткрывателем и разработчиком которой был российский ученый и педагог. Данный элективный курс будет реализовываться в профильных физико-математических и технологических классах, в которых математику изучают на профильном уровне.

Изучение курса начинается с основ проективной геометрии, которая возникла из потребности строить изображения фигур при центральном проектировании. На примерах решения задач, деловых играх, перевернутых уроках и проектов обучающиеся будут чувствовать себя «первооткрывателями» применения школьной геометрии в новой для них геометрической теории [2]. Так как не все обучающиеся во время обучения в школе получают художественное образование, то данная область геометрии станет нужным и, главное, интересным стартовым этапом изучения геометрии, отличной от школьной.

После знакомства с элементами проективной геометрии, которые потребуются для построения модели плоскости Лобачевского, несколько занятий элективного курса будет посвящено аксиоматическому методу. Это понятие для обучающихся не является новым. По крайней мере, не должно быть таковым. Ведь школьный курс геометрии – единственная дисциплина, в основе построения которой лежит аксиоматический метод. Однако в 7–9 классах он находится не в центре курса, а на втором, и даже более дальнем плане. И это не случайно. По возрастным и психофизиологическим особенностям обучающихся концентрировать на нем внимание не имеет смысла, т.к. понимание сути аксиоматического метода появляется у школьников лишь в 10–11 классах. И это в лучшем случае. Учитывая физико-математический профиль обучающихся элективного курса, мы сочли возможным обсудить с ними основные положения этого метода, рассмотреть требования к системам аксиом, в первую очередь непротиворечивость, независимость и полноту, обосновать критерии выполнения этих требований.

Закрепив основы, на которых стоит новая неевклидовая геометрия, обучающиеся переходят непосредственно к изучению самой геометрии Лобачевского. В элективном курсе рассматривается только планиметрия Лобачевского. Строится модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Поскольку система аксиом планиметрии Лобачевского является полной, то все модели этой системы аксиом имеют одну и ту же структуру, т.е. изоморфны. Это означает, что любое утверждение, которое справедливо на одной из ее моделей, выполняется и для любой другой модели, т.е. является верным утверждением (теоремой) в планиметрии Лобачевского. Модель Кэли-Клейна легко воспринимается обучающимися, она достаточно проста и наглядна. Доказательства всех необходимых утверждений и решение задач на данной модели будут сопровождаться динамическими чертежами, выполненными в среде Живая математика. Это позволит школьникам не только воспроизводить готовые решения по примеру учителя, но также самостоятельно выполнять решение задач и построение всех необходимых собственных инструментов решения, для более быстрого оформления построения чертежей [1].

Весь курс «Геометрии Лобачевского» будет строиться не только на классических уроках-лекциях и семинарах. Каждое занятие будет подстраиваться под наиболее интересную форму, что позволит обучающимся с увлечением заниматься новой геометрией, не испытывая дискомфорта или чувства «должности» посещать занятия по настоянию учителя. На протяжении всего курса будут применяться такие формы проведения занятий, как тематические дискуссии, деловые игры (на этапе изучения проективной геометрии), перевернутые уроки, мозговые штурмы и другие.

Подводя итог, отметим, что предлагаемый нами элективный курс позволит заинтересовать обучающихся в изучении как новых для них математических теорий, так и в проведении собственных исследований в области элементарной математики с использованием систем динамической математики.

Библиографический список

1. Жеребцова А.Ф., Майер В.Р. О Коллекции собственных инструментов для изучения основ геометрии Лобачевского в профильных математических классах на базе среды Живая математика // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Майера Роберта Адольфовича. Конференция включена в план научно-образовательных мероприятий, приуроченных к проведению 29-го Международного конгресса математиков в Санкт-Петербурге. Красноярск, 11–12 ноября 2021 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол. Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2021.
2. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к НЕЕВКЛИДОВОЙ: Вокруг абсолюта. М.: URSS. 2017. 160 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР ПРИ РЕШЕНИИ ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧ 10–11 КЛАССА

THE USE OF THREE-DIMENSIONAL MODELS OF GEOMETRIC SHAPES IN SOLVING SCHOOL PROBLEMS OF GRADES 10–11

Д.Э. Исаева **D.E. Isaeva**

Абстрактное мышление, геометрические задачи, трехмерные модели, обучающиеся, старшая школа, геометрические фигуры, решение задач.
В данной статье выбраны подходящие темы из школьного курса геометрии, при изучении которых возможно и рекомендовано применение трехмерных моделей геометрических фигур. Далее описана разработка модели вписанной пирамиды в куб. Даются методические рекомендации по использованию трехмерных моделей для учителя при организации процесса обучения.

Abstract thinking, geometric problems, three-dimensional models, students, high school, geometric shapes, problem solving.
In this article, suitable topics from the school geometry course are selected, in the study of which the use of three-dimensional models of geometric shapes is possible and recommended. The following describes the development of a model of an inscribed pyramid in a cube. Methodological recommendations on the use of three-dimensional models for teachers in the organization of the learning process are given.

Абстрактное мышление (от латинского «отвлечение») – это отвлечение от несущественных признаков предмета с целью выделения существенных признаков. Абстрагирование – это способ теоретического обобщения. Абстрагирование – это важное умение в познавательной деятельности человека. Умение абстрактно мыслить необходимо каждому человеку, вне зависимости того, в какой сфере он развивается. При решении геометрических задач человеку необходимо использовать абстракции и уметь системно мыслить.

Решение геометрических задач вызывает затруднение у большинства обучающихся. По результатам методического анализа по результатам Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня задания 14 и 15 выполнили 3,66 и 0,79 % обучающихся РФ соответственно, что показывает низкий уровень умения решать геометрические задачи [3].

Одной из причин неумения решать геометрические задачи в пространстве является то, что у многих детей не развито абстрактное мышление. Поэтому для развития данного типа мышления и для оказания помощи обучающимся при решении задач мы предлагаем использовать 3D-модели геометрических фигур для того, чтобы визуализировать задачу.

Изучение геометрических тел в пространстве в школьном курсе геометрии начинается в старшей школе, таким образом, необходимость в использовании трехмерных моделей геометрических фигур возникает только в 10 и 11 классах. В учебнике Л.С. Атанасяна по геометрии за 10–11 классы – это главы VI и VII. В перечисленных главах содержатся темы о цилиндре, конусе и шаре, а также они включают нахождение объемов данных тел. Использование трехмерных моделей геометрических фигур также будет нужным и необходимым при обучению различных сечений объемных тел, так как появится возможность увидеть, что появляется в результате сечения, если использовать компьютерные технологии [2].

Для построения 3D-моделей мы использовали программу Cabri 3D [1]. Данная программа проста в использовании и построении фигур. Возможности Cabri 3D огромны, ниже приведен пример построения, которое может использоваться на уроках геометрии в качестве наглядного пособия.

Построение вписанной пирамиды в куб

1. Строим куб, для этого в инструментах в кнопке *Правильные многогранники* выбираем куб. На плоскости ставим точку, далее тянем за точку, при этом зажав клавишу «Ctrl», до нужного размера.
2. Меняем с помощью инструмента Управления грани со сплошных на прозрачные.
3. Назовем получившийся куб, для этого с помощью инструмента Точки отмечаем все вершины куба, при этом называя их, нажимая нужную букву на клавиатуре. Получили куб ABCDA1B1C1D1.
4. В меню выбираем пирамиду и строим ее, вершина пирамиды совпадает с вершиной куба D1, а основание пирамиды с гранью куба, противолежащей вершине D1 (см. рис. 1).
5. С помощью инструмента Управления изменим грани пирамиды на сетчатые. С помощью инструмента Анимация можем задать вращение построенной модели, при этом можно менять скорость вращения, чтобы обучающиеся могли рассмотреть куб со всех сторон.
6. Далее с помощью инструмента Измерения вычисляем объем пирамиды и объем куба.

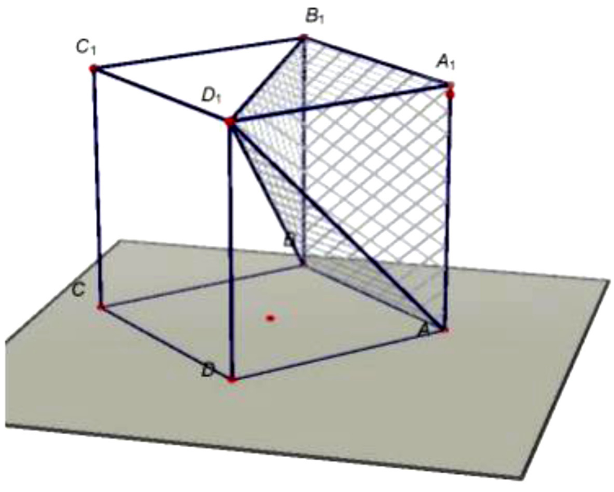


Рис. 1. Пирамида, вписанная в куб

Построение сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду

1. В меню выбираем построение отрезка: строим произвольный треугольник, последовательно откладывая отрезки, и измеряем длины сторон получившегося треугольника.

2. С помощью инструмента Управление тянем вершину треугольника, пока не получим равные длины сторон треугольника. Удаляем полученные измерения. Теперь найдем центр правильного треугольника, которым является пересечение медиан. С помощью нужной команды находим середины сторон треугольника, достаточно найти середины для двух сторон.

3. Строим медианы треугольника, соединяя с помощью инструмента Линии вершину треугольника и середину противоположной стороны. С помощью инструмента Точки отмечаем пересечения медиан, точка O является центром основания пирамиды.

4. Опускаем перпендикуляр к отрезку BO, отмечаем произвольно точку S на перпендикуляре.

5. Соединяем с помощью инструмента Линии точку S с каждой вершиной треугольника ABC. Правильная треугольная пирамида SABC построена (рис. 2).

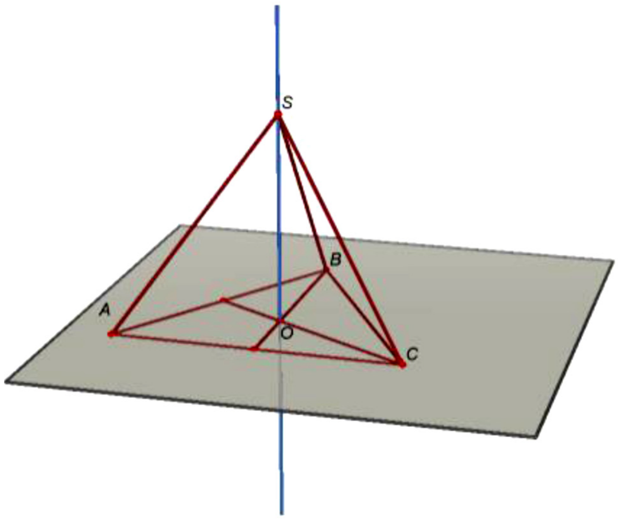


Рис. 2. Правильная треугольная пирамида

6. Скрываем перпендикуляр SO с помощью инструмента Управление. Строим апофему SM с помощью инструмента Линии, далее меняем цвет и стиль.

7. Отмечаем произвольную точку F на прямой SO с помощью инструмента Точки и строим параллельную прямую прямой BM, проходящую через точку F. Отмечаем точку D с помощью инструмента Точки. D – точка пересечения FD и SM.

8. Измеряем длину отрезков FD и FO. Затем с помощью инструмента Управление перемещаем точку F вниз или вверх до тех пор, пока длины отрезков FD и FO не станут равными. Скрываем измерения.

9. Строим сферу, вписанную в правильную треугольную пирамиду, используя кнопку *Поверхности*, по центру сферы F и радиусу FD.

10. С помощью инструмента Управление можно изменить стиль поверхности сферы и ее цвет, мы изменили цвет сферы;

Модель готова (рис. 3), с ее помощью можно решать многие задачи из курса стереометрии, а также задачи с ЕГЭ.

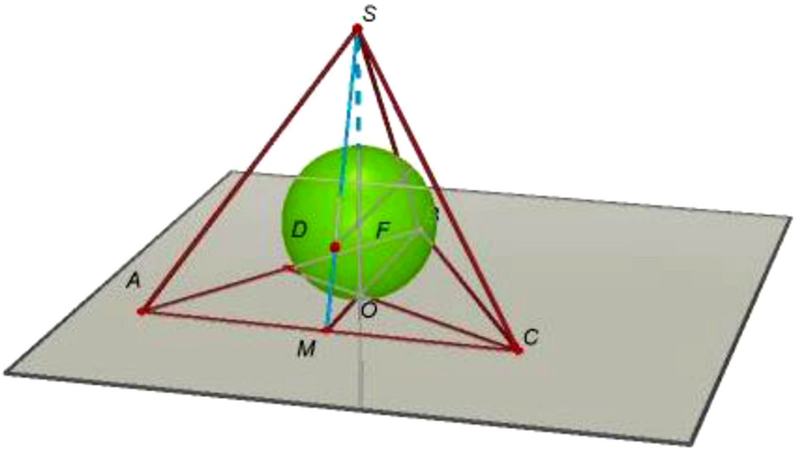


Рис. 3. Сфера, вписанная в правильную пирамиду

Включение трехмерных геометрических фигур на уроке при решении школьных задач по стереометрии не является распространенным методом решения. Соответственно, данный способ является новым и эффективным, по нашему мнению, для развития абстрактного мышления, а также интересным для обучающихся.

Такие модели могут быть использованы учителем не только на уроках геометрии, но и на факультативах по подготовке к ЕГЭ или в качестве внеучебной деятельности по математики.

Библиографический список

1. 3D-моделирование онлайн. URL: https://lumpics.ru/3d-modeling-online/, свободный (дата обращения: 08.10.2022).
2. Методические рекомендации для учителей, подготовлены на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике / сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов. Москва, 2019. 25 с.
3. Методический анализ результатов ЕГЭ по предмету «Математика (профильный уровень). URL: http://cmoko48.lipetsk.ru/gia/data/2020/gia-11/02_%CC%E0%F2%E5%EC%E0%F2%E8%EA%E0_%C5%C3%DD_2020.pdf

ПЛАТФОРМА GEOGEBRA CLASSROOM КАК СПОСОБ ОРГАНИЗАЦИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

GEOGEBRA CLASSROOM PLATFORM AS A WAY TO ORGANIZE LABORATORY WORKS IN MATHEMATICS LESSONS

А.А. Лариончикова **A.A. Larionchikova**

GeoGebra, платформа GeoGebra, GeoGebra Classroom platform, math labs, лабораторные работы по математике.

Одним из ведущих требований в современном обучении является использование компьютерных технологий. Цифровизация образования в современных условиях проявляется в интенсивности применения программного обеспечения информационных технологий, используемых в процессе обучения, где основная задача учителя заключается в необходимости освоения такой среды, в которой материал будет не только наглядным и запоминающимся, но и разнообразным по технике выполнения задач, направленным на модификацию учебной программы.

GeoGebra, GeoGebra Classroom platform, math labs.

One of the leading requirements in modern education is the use of computer technology. The digitalization of education in modern conditions is manifested in the intensity of the use of information technology software used in the learning process, where the main task of the teacher is the need to master such an environment in which the material will be not only visual and memorable, but also diverse in the technique of performing tasks, aimed at curriculum modification.

В условиях быстрого развития образовательных ресурсов особое место занимает математическая программа GeoGebra и ее внутренняя платформа GeoGebra Classroom.

GeoGebra Classroom – это виртуальная интерактивная платформа для организации лабораторных работ исследовательского типа, а также для дистанционного метода обучения на уроках математики, физики и других смежных дисциплин.

С помощью данной платформы учителя могут создавать интерактивные увлекательные задания для обучающихся. Одним из ведущих качеств использования GeoGebra является принцип визуализации математических объектов при построении и использовании анимационных рисунков. Платформа GeoGebra Classroom обладает дополнительными способностями создания заданий. GeoGebra Classroom включает в себя такие типы заданий, как «ответ в виде предложения» (рис. 1) и «выбери правильный ответ» (рис. 2), а также использование аплейна на интерактивной доске для построения рисунков обучающимся самостоятельно (рис. 3).

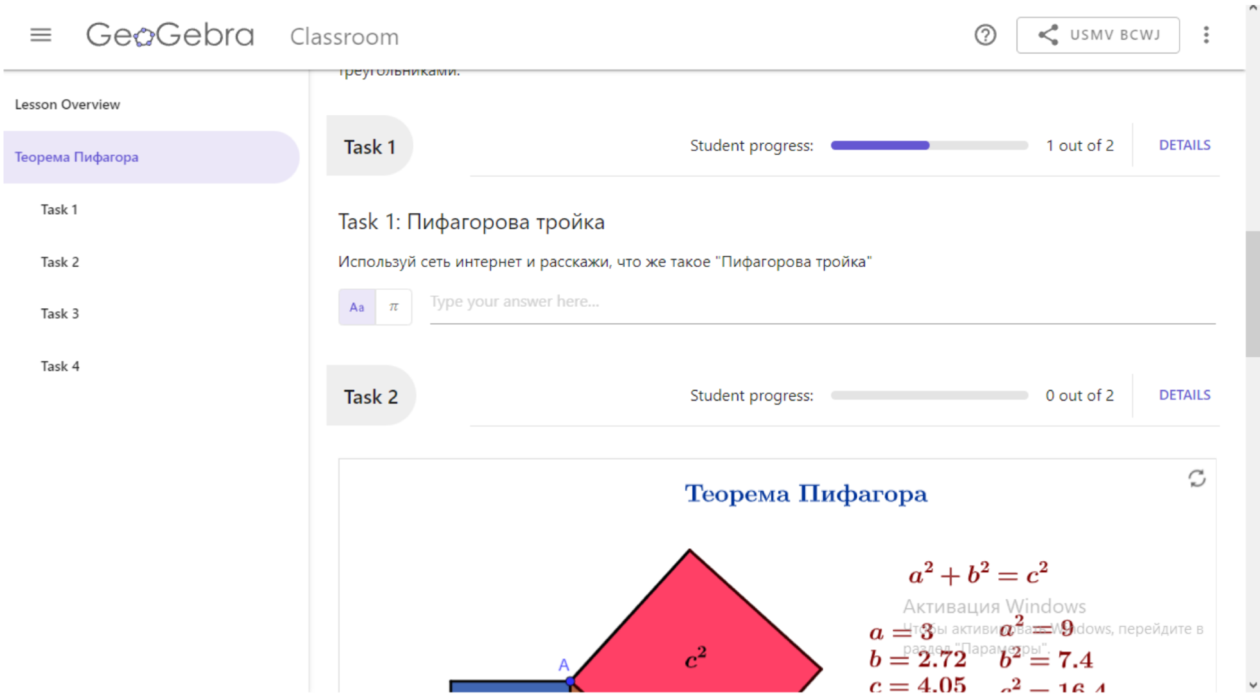


Рис. 1

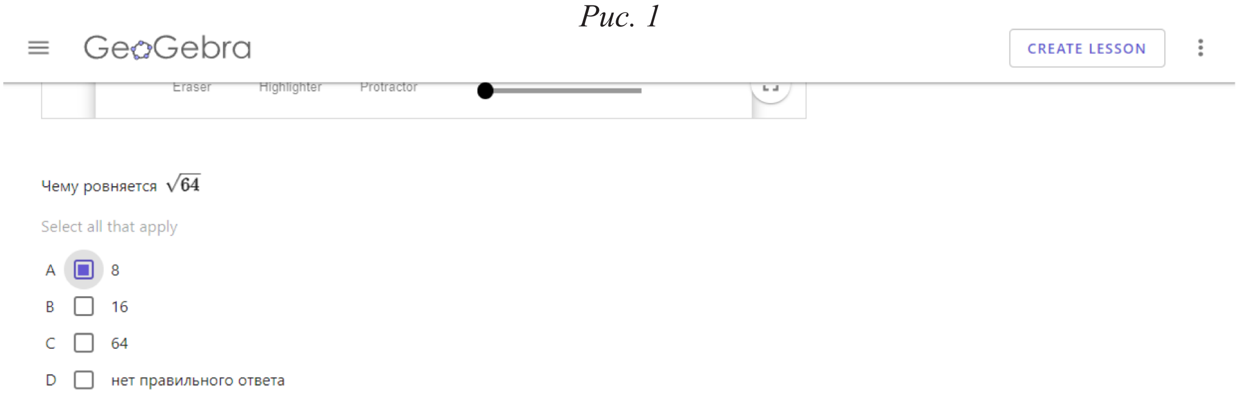


Рис. 2

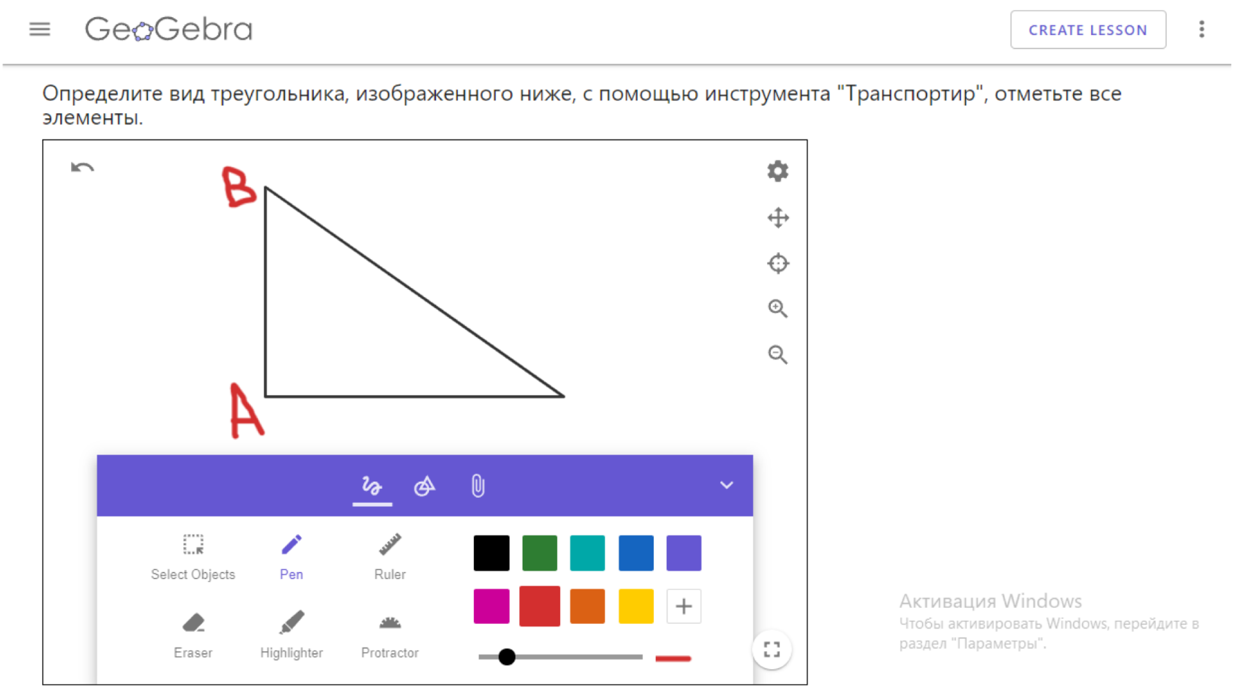


Рис. 3

Одной из важнейших функций платформы GeoGebra Classroom является просмотр в режиме реального времени прогресса учащихся, работающих над определенной задачей: какие задания обучающиеся начали или не начали выполнять и насколько успешно (рис. 4).

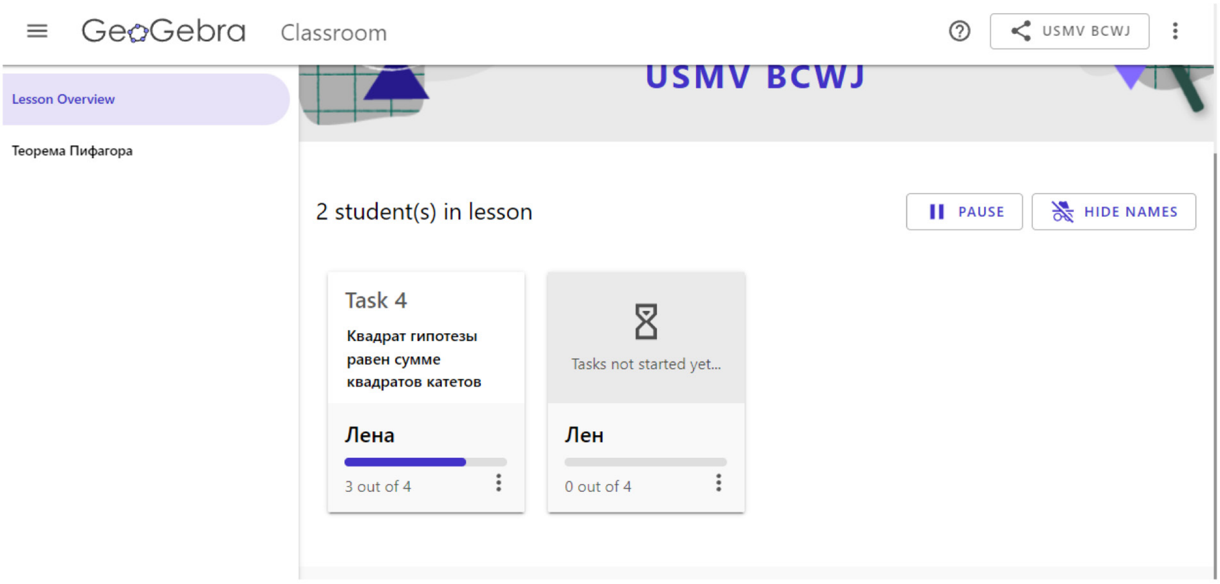


Рис. 4

Благодаря тому, что работа платформы осуществляется в режиме онлайн, задавать вопросы всему классу и мгновенно просматривать ответы обучающихся не представляет труда. При необходимости можно осуществлять интерактивное обсуждение между всеми обучающимися, отдельными группами или индивидуально с отдельным обучающимся в режиме онлайн.

Также платформа GeoGebra Classroom обладает возможностью встраивания в ресурс других интерактивных образовательных платформ (Prezi, LearningApp, интерактивный симулятор Phet и другие), что способствует большему разнообразию контента, используемого на уроке (рис. 5, 6).

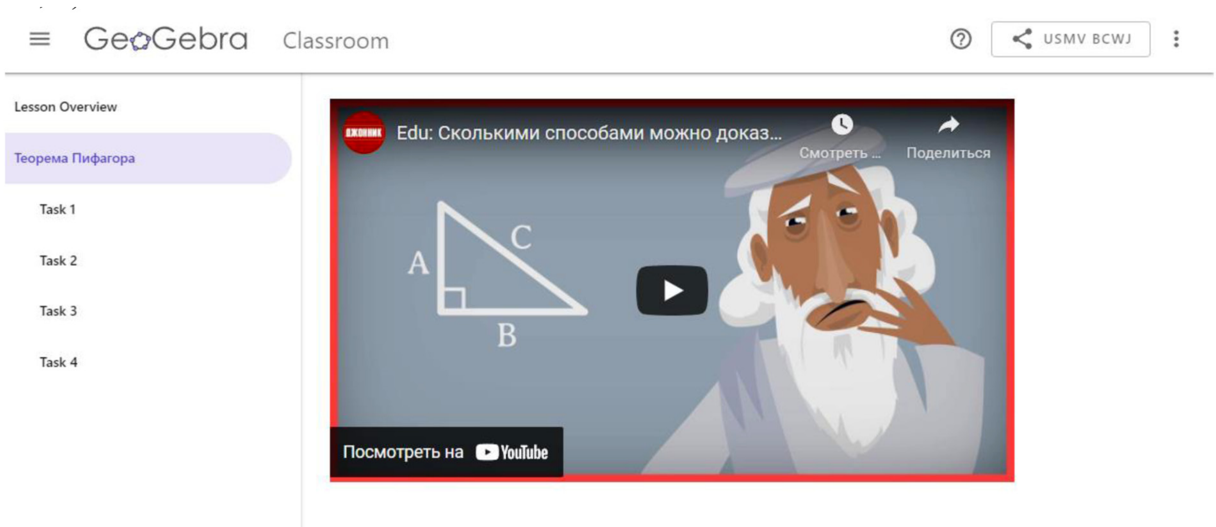


Рис. 5. Использование платформы YouTube

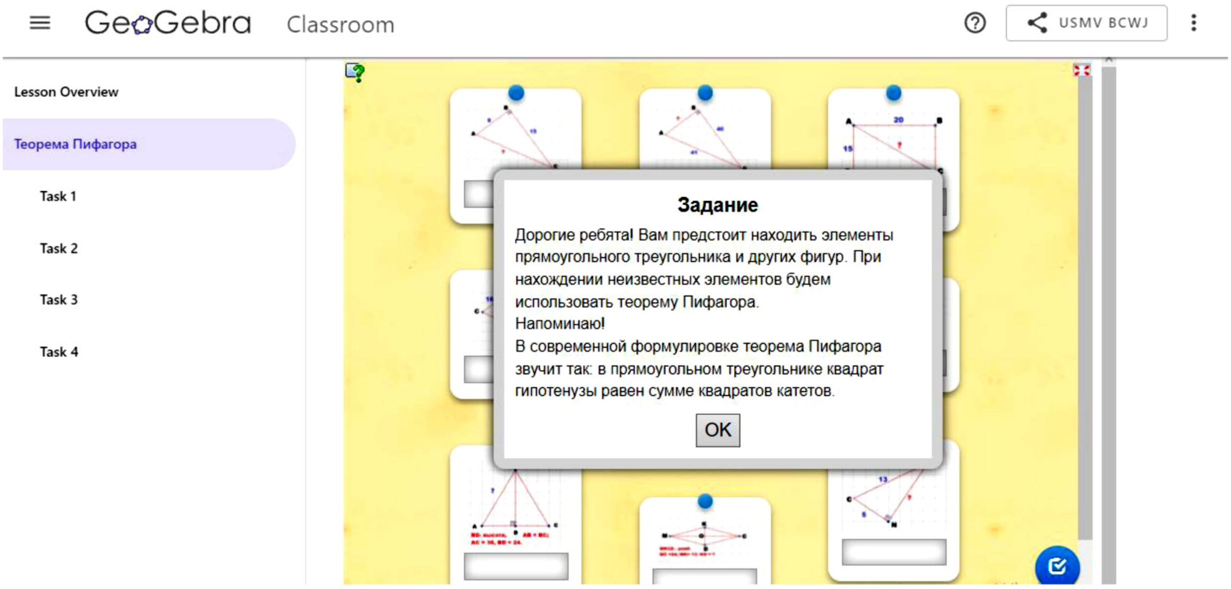


Рис. 6. Использование платформы LearningApps.org

Данный вид деятельности, организованный на платформе GeoGebra Classroom, позволяет реализовать разного рода интерактивные занятия, оперативно контролировать ход выполнения любых видов работ, в том числе лабораторных и практических как в очном, так и в дистанционном режиме. В плане применения платформы GeoGebra Classroom предполагается использовать «Альбом анимационных рисунков по алгебре 7 класса» вместе с учебным пособием «Алгебра 7 класса с анимационными рисунками» [2].

Библиографический список

1. GeoGebra. URL: http://www.geogebra.org/cms/ru/ (дата обращения: 20.04.2022).
2. Ларин С.В., Сарыглар С.В. Алгебра 7 класса с анимационными рисунками: учебное пособие для учителей математики и студентов физико-математических специальностей педагогических вузов. Кызыл: Издательство ТувГУ, 2022. 72 с.
3. Батайкина И.А. Виртуальные лабораторные работы // Символ науки. 2021. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/virtualnye-laboratornye-raboty-1 (дата обращения: 22.10.2022).

GEOGEBRA КАК ПЛАТФОРМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

GEOGEBRA AS A PLATFORM FOR SOLVING STEREOMETRIC PROBLEMS

С.А. Марина **S.A. Marina**

Платформа GeoGebra, познавательные универсальные учебные действия, УУД, стереометрия, сечения многогранников.
Рассматриваются возможности платформы GeoGebra для построения многогранников и их сечений как инструмент самопроверки и средство развития познавательных универсальных учебных действий обучающихся 10–11 классов.

GeoGebra platform, cognitive universal learning activities, DMS, stereometry, polyhedron sections.
The possibilities of the GeoGebra platform for constructing polyhedra and their sections are considered as a self-testing tool and a means of developing cognitive universal educational actions of students in grades 10–11.

Сегодня система образования кардинально поменяла свое направление. Если раньше она была ориентирована на получение предметных знаний, то сейчас трендом является формирование действий обучающихся, с помощью которых они смогут самостоятельно обновлять и совершенствовать свои знания на протяжении всей жизни.

По федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования 2021 года у обучающихся выделяются метапредметные результаты, которые разделяют на регулятивные, познавательные и коммуникативные универсальные учебные действия [3].

По мнению Л.И. Боженковой, познавательные универсальные учебные действия являются важным компонентом при обучении геометрии. К ним относятся общеучебные и логические учебные действия, которые необходимы при изучении понятий, доказательств теорем и решении задач [2].

А.Г. Асмолов в блок общеучебных познавательных действий относит: «анализ объектов с целью выделения существенных и несущественных признаков; синтез как восполнение недостающих компонентов; выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов; подведение под понятие; установление причинно-следственных связей; построение логической цепи рассуждений, а также доказательство; выдвижение гипотез и их обоснование» [1].

Средствами своего предмета учителю необходимо научить обучающихся мыслить системно и применять свои знания на практике. Также не стоит забывать о важности формирования творческого мышления с помощью анализа объектов. Это позволит совершенствовать умение решать задачу разными способами и средствами платформы GeoGebra реализовать их на уроке математики.

Возможности GeoGebra многогранны, начиная с моделирования, решения алгебраических и геометрических задач и заканчивая возможностью строить графики функций, находить наибольшее и наименьшее значение функции, пределы, производные, интегралы, построение геометрических фигур на плоскости и в пространстве, создание анимационных рисунков, и это не предел ее функциональности. Кроме того, данная программа позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать теоремы и свойства, устанавливать зависимости между геометрическими величинами.

Рассмотрим пример задания для обучающихся 11 класса по теме «Сечение многогранников» на соотношение между аналитической и графической моделями, выстраивание логической цепи рассуждений и подведение под понятие.

Задание. Составьте графическую модель параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его сечение плоскостью ABC_1. Какая фигура является сечением параллелепипеда?

Для построения 3D-модели параллелепипеда необходимо перейти в режим «3D-Calculator» (рис. 1).

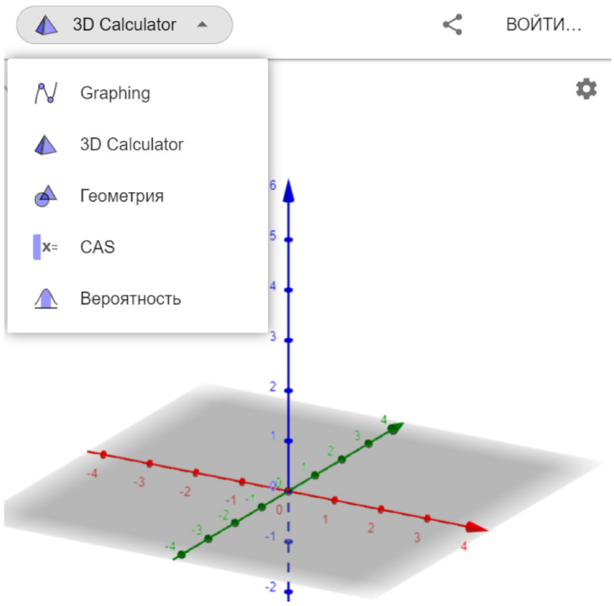


Рис. 1

Прямоугольный параллелепипед мы будем строить как прямую призму, в основании которой лежит прямоугольник. Выделим очередность действий:

1. Построим точку пересечения двух любых осей (используя инструмент «пересечение»), которая будет вершиной нашего параллелепипеда.

2. Построим по одной точке на каждой из осей (рис. 2).

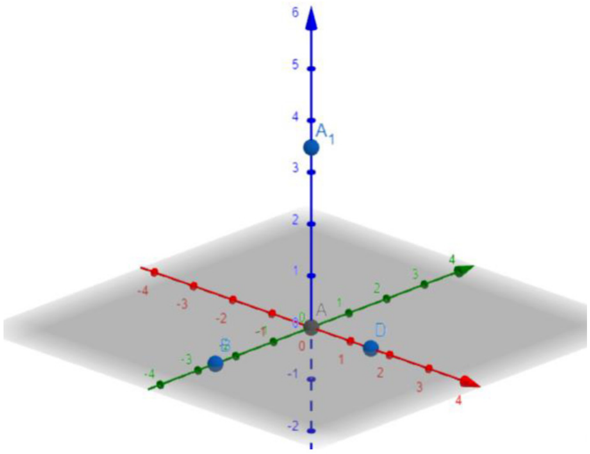


Рис. 2

3. Воспользуемся строкой «Ввод» и зададим координаты четвертой вершины основания параллелепипеда (рис. 3).

Абсцисса будет как у точки D, ордината как у точки B и аппликата координата будет нулевой. Набрав данную команду, нажимаем на клавишу «Enter». Точка D – недостающая точка основания параллелепипеда.

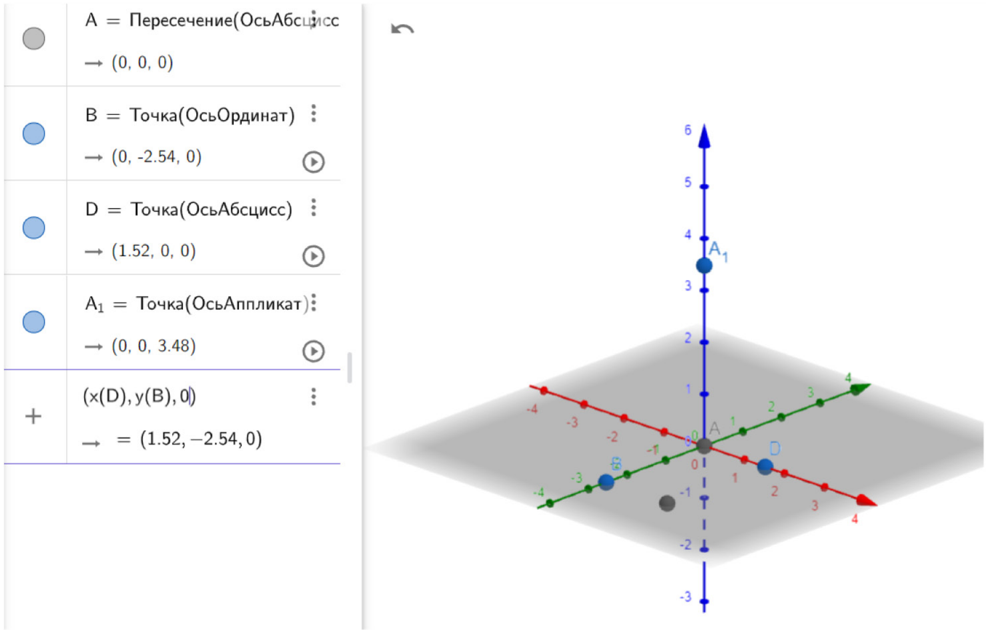


Рис. 3

4. Строим призму начиная с вершины A, чтобы боковым ребром был отрезок AA_1, тогда призма будет прямой (рис. 4).

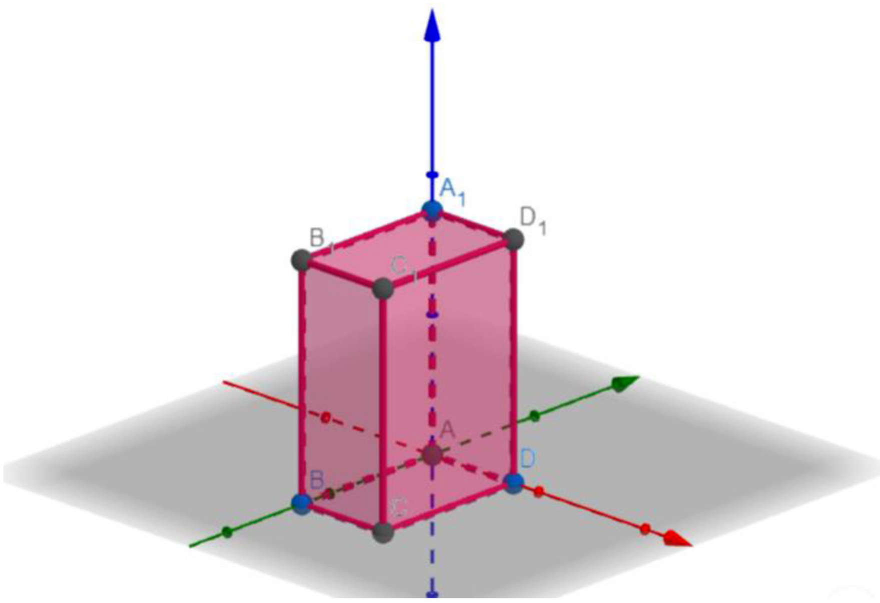


Рис. 4

Таким образом, мы получим параллелепипед.

Теперь перейдем к построению сечения плоскостью ABC_1, используя инструмент «Плоскость через 3 точки» (рис. 5).

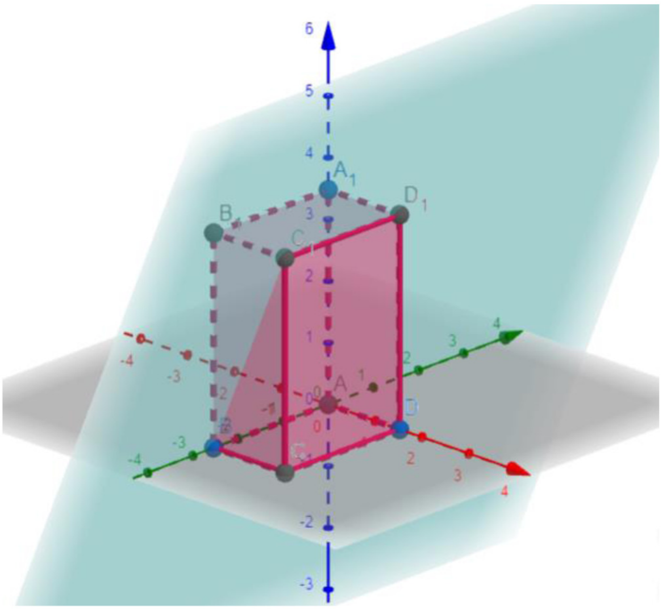


Рис. 5

Мы получим, что четырехугольник ABC_1D_1 и будет являться искомым сечением параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6).

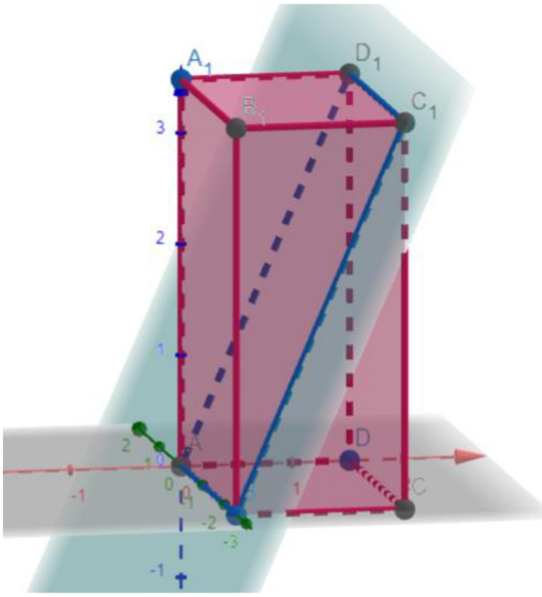


Рис. 6

Используя данную инструкцию построения многогранников и их сечений, можно осуществлять самопроверку построенных в тетради сечений, переход от аналитической модели к графической, анализируя условия задачи. Для отработки навыков построения сечений различными методами можно воспользоваться комплексом задач, разработанных Л. Гориной [3].

Образовательная ценность использования программного средства GeoGebra заключается в том, что: позволяет развивать пространственное мышление; стимулирует познавательную деятельность обучающихся; способствует развитию умения работать с различными видами информации.

Таким образом, в процессе решения геометрических задач с помощью средствам программы GeoGebra обучающиеся совершенствуют уровень владения познавательными универсальными учебными действиями.

Библиографический список

1. Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. и др. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли: пособие для учителя. 2-е изд. М.: Просвещение, 2011. 159 с.
2. Боженкова Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 205 с.
3. Горина Л. Построение сечений многогранников. 10 класс // Еженедельная учебно-методическая газета «Математика». Издательский дом «Первое сентября». 2004. № 6. С. 23–25.
4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. Утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от «31» мая 2021 г. № 1897. URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/ (дата обращения: 31.10.2022).

ПРИМЕНЕНИЕ МЕНТАЛЬНЫХ КАРТ В ИЗУЧЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

THE USE OF MENTAL MAPS IN THE STUDY OF LINEAR AND QUADRATIC EQUATIONS

Д.Р. Матюшкин **D.R. Matyushkin**

Ментальная карта, интеллект-карта, математика, этапы создания ментальных карт, квадратные уравнения, технология использования ментальных карт, контроль.

Статья посвящена технологии использования ментальных карт на уроках математики. Приведены их основные особенности и возможности.

Технология ментальных карт способствует развитию логического мышления, техники запоминания и усвоения информации в процессе обучения, умению обрабатывать поступающую информацию.

Mental map, intelligence map, mathematics, stages of creating mental maps, quadratic equations, technology of using mental maps, control.

The article is devoted to the technology of using mental maps in mathematics lessons. Their main features and capabilities are given.

The technology of mental maps promotes the development of logical thinking, the technique of memorizing and assimilating information in the learning process, the ability to process incoming information.

Изложение нового материала учителем, как правило, сочетается с применением средств наглядности: демонстрация схем, рисунков, применение карточек с дозированной помощью, с образцами решения задач; управление самостоятельной работой учащихся и т. д.

Суть этих приемов состоит в том, что в процессе учебной работы учитель использует иллюстрации, т. е. наглядное пояснение, или же демонстрирует то или иное учебное пособие, которые могут, с одной стороны, облегчать восприятие и осмысление изучаемого материала, а с другой – выступать в качестве источника новых знаний.

Например, сидя на уроках, дети привыкли записывать информацию в линейном виде. Обычно здесь используется текст с заголовками, списки, таблицы и схемы. Вещи, вроде бы, простые и логичные. Однако всем знакомо усилие, которое приходится прилагать, вчитываясь в конспект, даже сделанный самостоятельно.

Тогда многие учащиеся сталкиваются с некоторыми проблемами: записанное трудно запомнить и еще труднее восстановить в памяти, в таком конспекте трудно выделить главное, время при такой записи расходуется очень неэффективно.

Поэтому возникает вопрос, а как же лучше записывать информацию для того, чтобы она легко запоминалась, а сам процесс ее восприятия не утомлял.

Цель работы – обоснование применения технологии ментальных карт при обучении отдельным разделам школьной математики для визуализации модели знаний, тренажа и контроля.

Ментальная карта (интеллект-карта) – это графическое выражение процесса радиального мышления. Проще говоря, интеллект-карта – это инструмент, позволяющий эффективно структурировать информацию; мыслить, используя весь свой творческий и интеллектуальный потенциал.

Интеллект-карта, ментальная карта, диаграмма связей, карта мыслей (по-английски – mind map) – метод может называться по-разному, но это всегда визуальное представление информации, отражающее системные связи между целым и его частями. Такая диаграмма строится вокруг центральной идеи, концепции, темы или проблемы, от которой отходят «ветви» со связанными идеями. С помощью ментальных карт можно структурировать любой материал – от простого списка литературы до учебного плана.

Автором методики в ее современном виде и самого термина mind map считается британский психолог Тони Бьюзен, который показал интеллект-карту в телевизионном шоу в 1974 году. Однако корни подобного метода работы с информацией можно найти и в III веке нашей эры: греческий философ-неоплатоник Порфирий использовал графическую древовидную схему в комментарии к «Категориям» Аристотеля.

При построении ментальной карты активизируются различные способности нашего мышления. При составлении ветвей и ключевых слов мы используем иерархии, для картинок – визуализации и ассоциативное мышление, в целом используется пространственно-образное мышление. Все это активизирует память и позволяет запомнить как структуру данных, так и их важные аспекты, поэтому использование ментальных карт улучшает запоминание информации примерно на 32 %.

Так как мы используем различные способности мышления для построения ментальных карт, такие как творчество, логика, воображение, все они развиваются и улучшаются в процессе.

Поскольку ментальные карты отображают всю картину в целом, это позволяет установить все взаимосвязи между объектами, даже если изначально они были не так очевидны. В свою очередь, это приводит к появлению новой точки зрения на информацию, а также новых идей и мыслей. Структура и логика данных становятся более «прозрачными», легкими для понимания и запоминания.

Суть методики создания ментальных карт заключается в следующем. Выделяется главная мысль – центральное понятие. От основной мысли отходят отдельные идеи, задачи, мысли, раскрывающие ее суть. Все последующие ветки – уровни могут делиться на более мелкие, независимое количество раз на усмотрение автора карты. Самое главное, что все они позволяют раскрыть центральное понятие целиком. Нет объемного текста, заумных фраз, излагаемая информация лаконична и понятна. Исследователи считают основной спецификой ментальной карты ее внешний вид, передающий информацию в виде логической цепочки мыслей. Следовательно, работа с информацией, представленной на ментальной карте, не будет вызывать дискомфорта, а наоборот, интересна и продуктивна.

При разработке алгоритма по составлению ментальных карт за основу мы взяли методику Тони Бьюзена, дополнив ее своими рекомендациями.

В отличие от Тони Бьюзена, допускаем оформлять первый уровень групп в рамках или рисунках. Он рекомендует использовать только ветви. Но порой это неудобно. А оформление в рамки, а лучше в рисунки удобнее, но потом уже никаких рамок и кружочков, иначе получится сплошная рамочная схема, и будет уже невозможно с ней работать – это уже не ментальная карта.

При использовании большого количества ветвей удобно выделять области в отдельный цвет. Это помогает сразу выделить целые блоки.

Тони Бьюзен призывает использовать только одно слово при подписи ветвей. Но порой школьнику сложно определить ветвь одним словом, поэтому и фраза может быть использована. Более того, в школьном процессе иногда надо именно выучить фразы целиком.

Перед нами стоит задача научить учащихся составлять ментальные карты самостоятельно. Для этого предложим учащимся поэтапный алгоритм их составления.

1 этап: Изучение темы.

Изучая тему, определяем главное, ключевое слово, которое показывает смысл темы. Выделяем понятия, раскрывающие центральную идею, ветви первого, второго, третьего и т.д. уровней. Самое главное раскрыть тему максимально полно.

2 этап: Создание ментальной карты.

Центральное понятие расположить в центре.

Построение уровней. В зависимости от важности излагаемого материала, шрифт текста и размер линий может изменяться. Такой подход поможет выделить главные мысли и визуально разнообразить карту.

Для акцентирования внимания на отдельных элементах можно использовать рисунки, геометрические фигуры, которые ассоциируются с основной идеей.

Если возникает необходимость, рисуются дополнительные отрезки, соединяющие разные понятия на различных ветках.

При составлении карты используется максимальное количество цветов с учетом значений цветов и скорости их психологического восприятия. Чаще остальных используются 8 основных цветов. Приведем их в таблице 1.

Таблица 1

Описание значения разных цветов

Цвет	Значение	Скорость восприятия
Красный	Быстро воспринимающийся цвет. Максимально фокусирует внимание. Сообщает об опасности	Высокая
Синий	Строгий, деловой цвет. Настраивает на эффективную продолжительную работу	Средняя
Зеленый	Цвет свободы. Расслабляющий цвет. Воспринимается позитивно	Низкая
Желтый	Цвет энергии, цвет лидерства. Раздражающий цвет	Высокая
Коричневый	Цвет стабильности, уверенности	Низкая
Оранжевый	Цвет энтузиазма, новшества. Привлекает внимание	Высокая
Голубой	Фоновый цвет. Обозначает свободу	Низкая
Черный	Ограничивающий цвет. Подходит для написания текста, создания границ	Средняя

3 этап: Проверка. Карту можно считать законченной, если она выглядит цельной и крепкой. Это обозначает, что ее составитель разобрался в теме или проблеме. Для оценивания ментальной карты предложим следующие критерии (таблица 2).

Таблица 2

Критерии оценивания ментальной карты

Критерии
Наглядность (наличие центрального понятия и читаемость ментальной карты)
Логичность построения (цепочка связей выстроена логически на всех уровнях)
Запоминаемость (материал, представленный в ментальной карте, легко доступен к запоминанию; в зависимости от важности, материал выделен соответствующими цветами)
Информативность (материал представлен полностью)
Функциональность (возможность использования ментальной карты в последующих темах)
Креативность (при составлении использовались картинки, изображения; сочетание разнообразных геометрических фигур и форм; различные стили написания текста)
Раскрытие темы (насколько хорошо представленный материал отображает указанную тему)

Рассмотрим пример по составлению ментальной карты согласно этапам предложенной методики.

Ментальная карта по теме «Квадратные уравнения».

1 этап: Изучение темы.

Центральное понятие – решение квадратных уравнений.

2 этап: Создание ментальной карты.

При создании ментальной карты используем программу Mindomo.

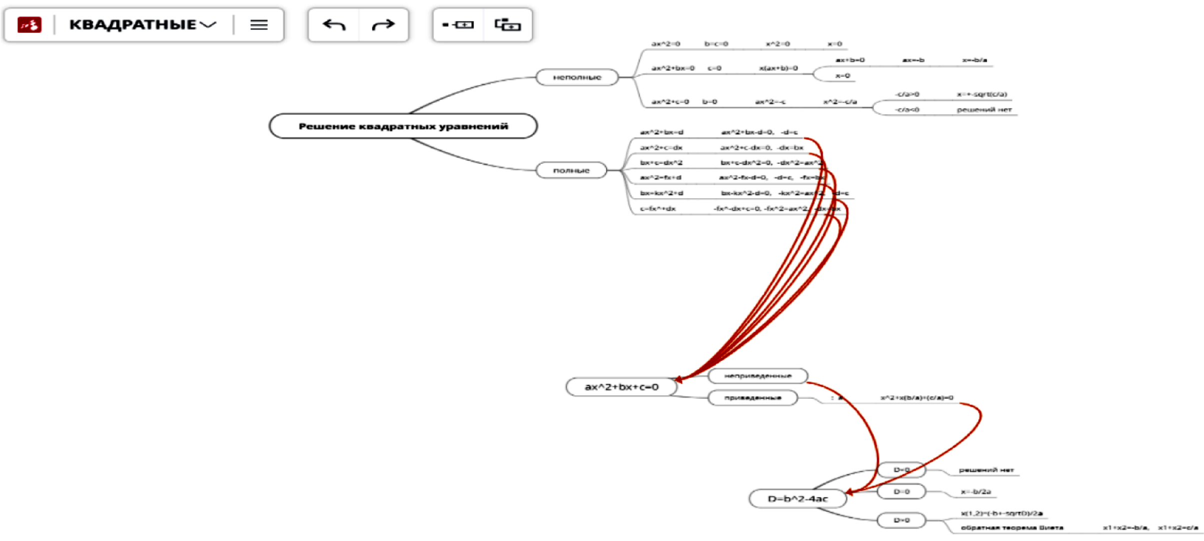


Рис. 1. Ментальная карта «Квадратные уравнения»

3 этап: Проверка.

Вывод по анализу данной ментальной карты представим в виде табл. 3.

Таблица 3

Анализ ментальной карты по теме «Квадратные уравнения»

Критерии	Плюсы	Минусы
Наглядность	Карта читаема, не перегружена цветами	
Логичность построения	Прослеживается логика в построении связей	
Запоминаемость	Материал доступен к запоминанию	
Информативность	Материал представлен в полном объеме	
Функциональность	Карта может использоваться в качестве справочного материала	
Креативность	Прослеживается индивидуальный подход в составлении карты	
Раскрытие темы	Представлены все этапы решения квадратных уравнений, тема раскрыта	

Аналогичным образом составляются, анализируются и применяются ментальные карты при изучении линейных уравнений.

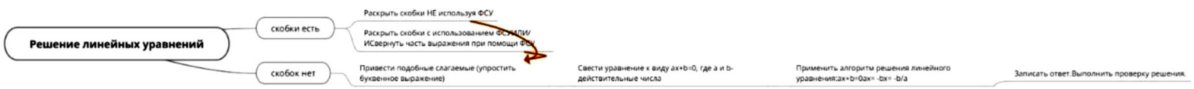


Рис. 2. Ментальная карта «Линейные уравнения»

Таким образом, применение технологии ментальных карт при обучении учащихся отдельным разделам школьной математики (линейные и квадратные уравнения) позволяют визуализировать модель знаний, тренаж и контроль, а также осуществлять структуризацию процесса усвоения и хранения учебной информации.

Выражаю благодарность профессору Н.И. Паку за научное руководство при написании статьи.

Библиографический список

1. Абылкасова Г.Е. Применение интеллект-карт как одной из форм информационных технологий в процессе обучения учащихся в средней школе // Теория и практика современного научного знания: проблемы, прогнозы, решения: сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции. 2017. С. 33–34.
2. Бершадская Е.А. Метод интеллект-карт как инструмент визуализации когнитивных процессов учащихся // Инструментальная дидактика и дидактический дизайн: теория, технология и практика многофункциональной визуализации знаний: материалы Первой Всероссийской научно-практической конференции, Москва–Уфа, 28 января 2013 г. Москва: БГПУ им. М. Акмулы, 2013. С. 290–295.
3. Бьюзен Т., Бьюзен Б. Супермышление / пер. с англ. Е.А. Самсонов. 2-е изд. Минск: Попурри, 2003. 304 с.
4. Воробьева В.М. Эффективное использование метода интеллект-карт на уроках: методическое пособие. М.: ТемоЦентр, 2013. 46 с.
5. Костюкевич Е.Ф. Использование метода интеллект-карт в образовательном процессе // Современные образовательные технологии в мировом учебно-воспитательном пространстве. 2016. № 3. С. 83–89.
6. Свалова Т.А., Мамонтова М.Ю. Интеллект-карта как средство формирующего оценивания знаний //Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ. Екатеринбург, 2016. С. 86–96.
7. Трухан И.А., Трухан Д.А. Визуализация учебной информации в обучении математике, ее значение и роль // Успехи современного естествознания. 2013. № 10. С. 113–115. URL: http://natural-sciences.ru/ru/article/view?id=32992/ (дата обращения: 23.10.2022).

ИТОГИ ПРОВЕДЕНИЯ VIII ТУРНИРА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

RESULTS OF THE VIII EXPERIMENTAL MATHEMATICS TOURNAMENT

Ю.В. Никиченко **Y.V. Nikichenko**

Турнир по экспериментальной математике, экспериментальная математика, системы динамической математики, GeoGebra.

В данной статье представлены результаты проведения VIII турнира по экспериментальной математике для учащихся 5–9 классов, приведены решения и типичные ошибки, допускаемые учащимися 7 класса при решении заданий турнира.

Experimental Mathematics Tournament, Experimental Mathematics, systems of dynamic mathematics, GeoGebra.

This article presents the results of the VIII experimental Mathematics tournament for 5th–9th grade students, provides solutions and typical mistakes made by 7th grade students when solving tournament tasks.

На базе Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова 12 февраля 2022 года состоялся VIII Международный турнир по экспериментальной математике для учащихся 5–9 классов. Данный турнир проводится ежегодно с целью повышения у учащихся интереса к математике и развитию творческих способностей в области экспериментальной математики. Участниками турнира в этом году стали 445 учеников 5–9 классов общеобразовательных школ Казахстана и России. География турнира с каждым годом становится шире: Москва, Петропавловск-Камчатский, Арсеньев, Новосибирск, Нальчик, Иннополис, Подольск, Архангельск, Северодвинск, Вельск и другие. С положением о турнире, заданиями, решениями и критериями оценки можно познакомиться на официальном сайте [1].

Участники могли участвовать индивидуально в режиме онлайн, а также очно на базах представителей турнира (школах, подавших заявки на проведение турнира). Задания, предложенные участникам, были составлены таким образом, чтобы было возможно проверить полный комплекс универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора, описанного в статье [2].

Рассмотрим примеры решений заданий турнира учащимися 7 классов.

Задание 1. Как разрезать круг тремя прямыми так, чтобы разделить его на а) 4 части; б) 5 частей? Какие возможны варианты? Представьте результаты экспериментов в виде рисунков. Опишите, где лежат точки пересечения прямых в разных вариантах относительно круга.

Баллы	Критерии (7 класс)
2	За каждый правильный ответ с описанием положения точек пересечения прямых относительно круга – 2 балла, без описания – 1 балл.

Решение

а) на 4 части (некоторые варианты решения представлены на рис. 1.)

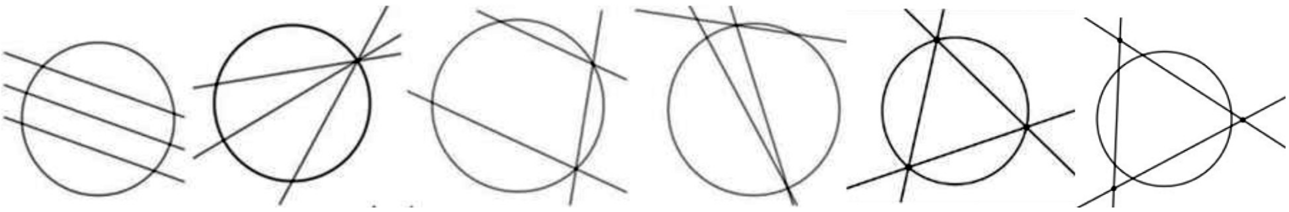


Рис. 1

– нет точек пересечения прямых (все три прямые параллельны);

– одна точка пересечения лежит на окружности;

– две точки пересечения прямых лежат на окружности, но при это две прямые параллельны;

– две точки пересечения лежат на окружности, одна – вне окружности;

– все три точки пересечения лежат на окружности;

– все три точки пересечения лежат вне круга;

б) на 5 частей (возможные варианты представлены на рис. 2):

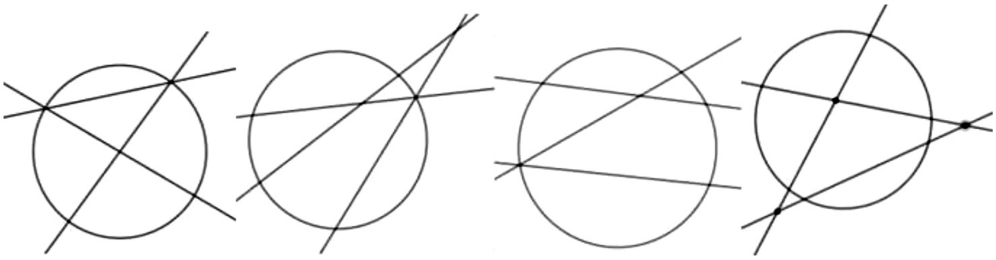


Рис. 2

– две точки пересечения на окружности и одна внутри круга;

– одна точка пересечения внутри круга, одна точка пересечения лежит на окружности, одна точка пересечения вне круга;

– одна точка пересечения внутри круга, одна на окружности, две прямые параллельны;

– одна точка пересечения внутри круга, две точки пересечения вне круга.

Приведем пример решения одного из участников (рис. 3 и 4), который представил наибольшее количество решений.

Представленное решение показывает, что учащийся видит, что количество решений зависит от того, сколько точек пересечения в каждом случае лежит на окружности, но все же рассматривает не всевозможные варианты.

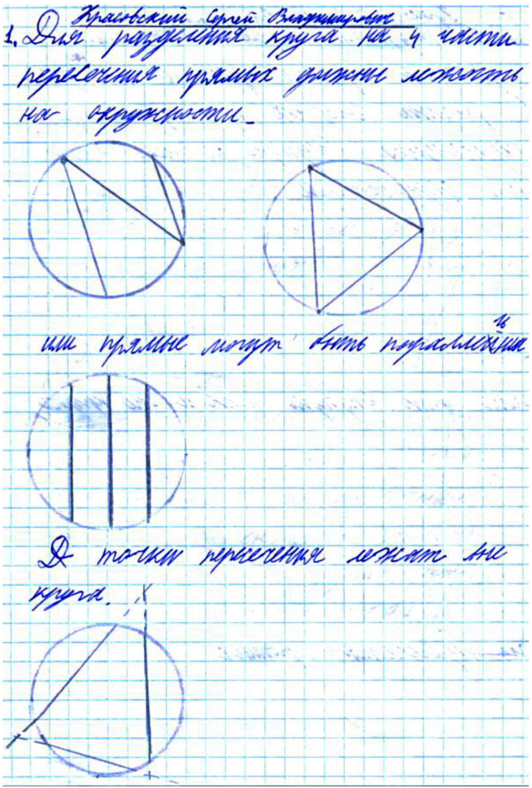


Рис. 3

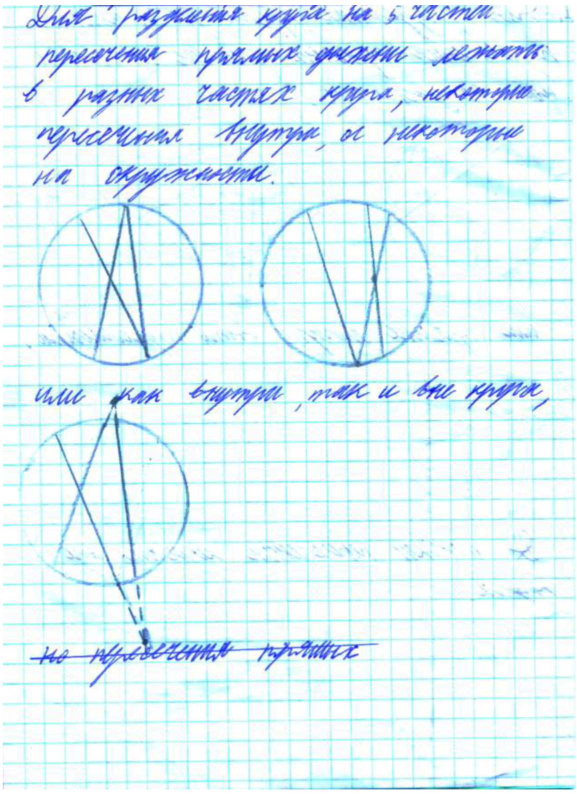


Рис. 4

Многие участники ограничивались одним случаем для каждого пункта задания (рис. 5). Некоторые строили отрезки, возможно, поэтому и не могли увидеть другие возможности (рис. 6).

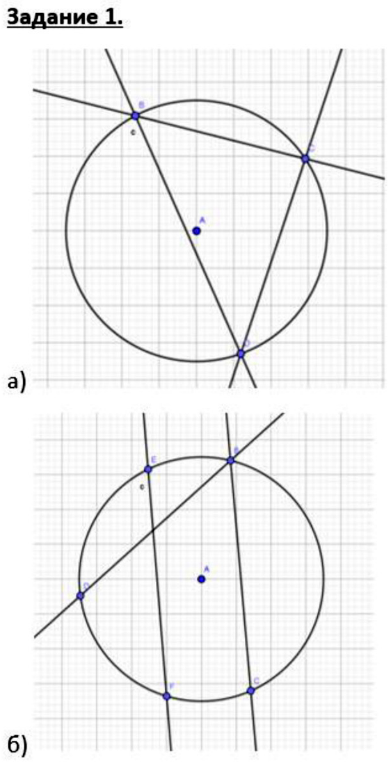


Рис. 5

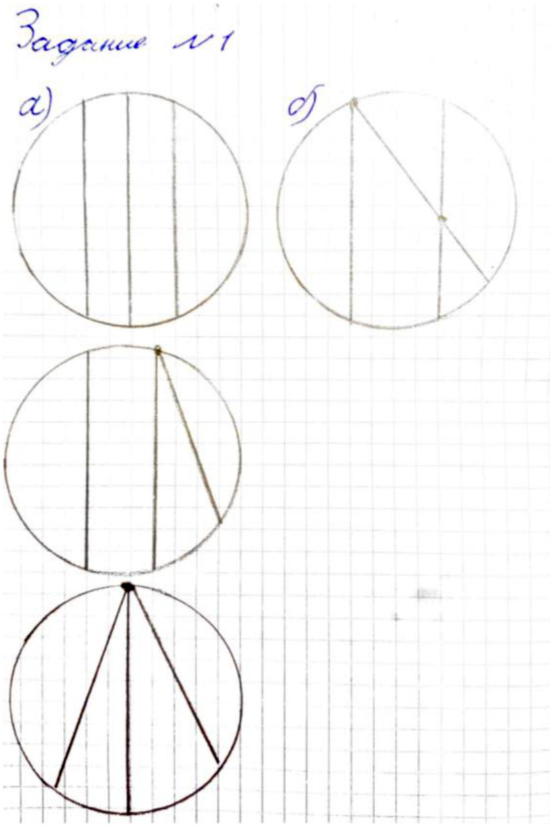


Рис. 6

Задание 2. Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке 7 изображен пример пути, проходящего по 14 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать самый длинный путь. Представьте результат в виде рисунка.

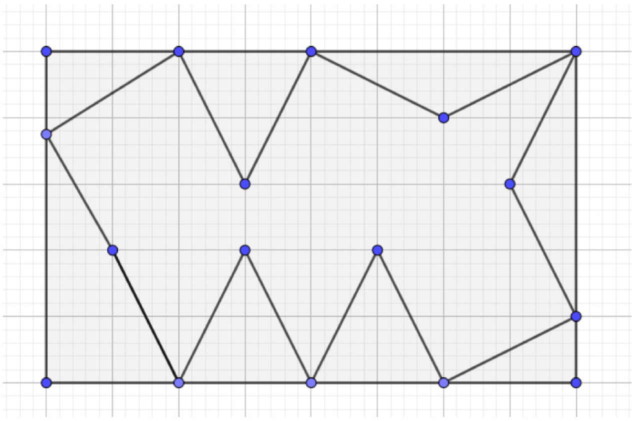


Рис. 7

Решение. Если разделить прямоугольник 5×8 на единичные квадраты, то получим сетку, состоящую из 54 узлов (рисунок 8). Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке, каждое звено пути должно связывать узлы двух цветов. Отсюда делаем вывод, что для того, чтобы путь закончился в том узле, с которого он начался, необходимо, чтобы количество узлов было нечетным, а количество звеньев (диагоналей) четным.

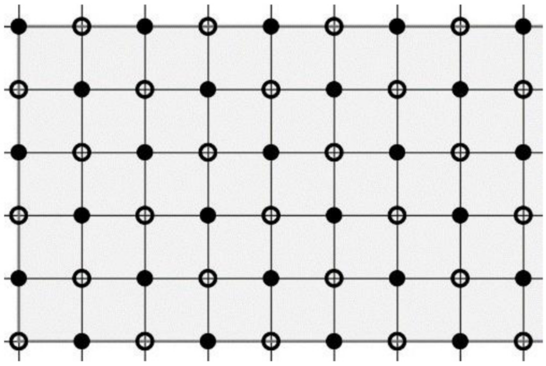


Рис. 8

Общее количество диагоналей прямоугольников 1×2 в заданном будет равно 134 (рис. 9).

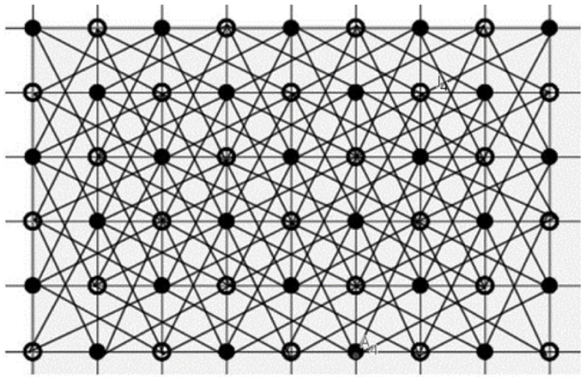


Рис. 9

Самый длинный путь, найденный участниками турнира, включал 24 диагонали. Он представлен на рисунке 10.

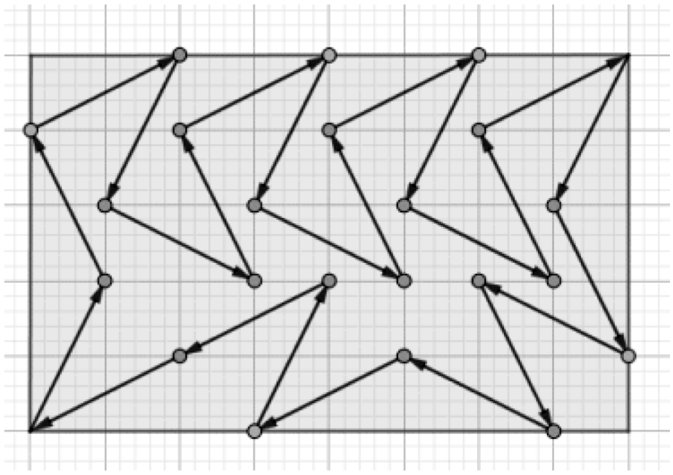


Рис. 10

В связи с этим мы использовали следующие критерии:

Баллы	Критерии (7 класс)
3	Представлен вариант замкнутого пути, состоящий из отрезков, идущих по 18 диагоналям прямоугольников 1 × 2
5	Представлен вариант замкнутого пути, состоящий из отрезков, идущих по 20 диагоналям прямоугольников 1 × 2
7	Представлен вариант замкнутого пути, состоящий из отрезков, идущих по 22 диагоналям прямоугольников 1 × 2
10	Представлен вариант замкнутого пути, состоящий из отрезков, идущих по 24 диагоналям прямоугольников 1 × 2

Большинство учащихся представили решения, построенные на клетчатой бумаге (рис. 11). Те, кто использовал GeoGebra (рис. 12), получили более длинный путь, благодаря возможности исправить свой ход.

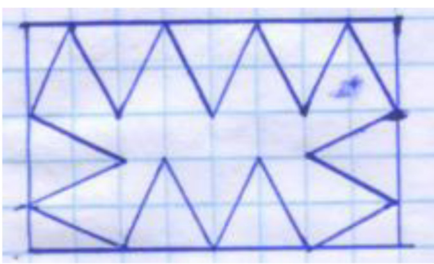


Рис. 11

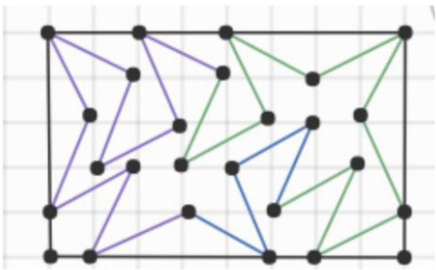


Рис. 12

Задание 3. Ученики 7 класса хотят изготовить своими руками праздничные колпачки (рис. 13) из рулонной бумаги. Выкройка представлена на рисунке 14. Какую наименьшую ширину может иметь рулон бумаги, если колпачки планируется изготавливать одинаковые для обхвата головы 54 см? (ответ дать с точностью до целых). ***Примечание:*** *$C = 2\pi R$, C – длина окружности, R – радиус окружности, $\pi \approx 3$ –число.*

Рис. 13

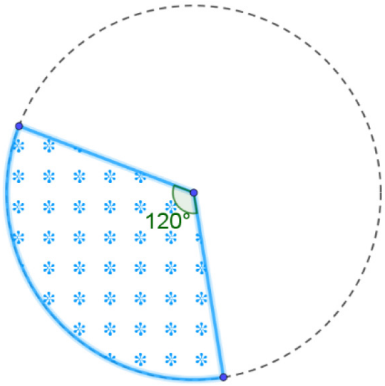


Рис. 14

Баллы	Критерии (7 класс)
1	Представлен рисунок выкройки, но радиус рассчитан неверно
5	Представлены рисунок выкройки, радиус найден верно, но не сделан вывод о ширине рулона бумаги или допущена вычислительная ошибка
10	Представлено верное решение

Решение

По рисунку 14 видно, что выкройка занимает $\frac{1}{3}$ часть круга, так как $120° = \frac{1}{3} \times 360°$. Обхват головы равен 54 см и составляет третью часть окружности, тогда длина всей окружности C = 54×3.

Формула длины окружности: $C=2\pi R$, тогда $2\pi R = 54\times3$. Выразим радиус $R = \frac{54\times3}{2\pi}$ =27 см.

Получаем сектор круга с радиусом 27 см, поэтому для изготовления колпачков по этой выкройке (рис. 15) необходим рулон бумаги с шириной 27 см.

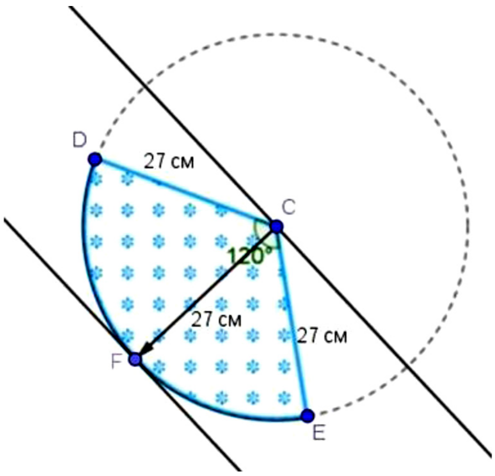
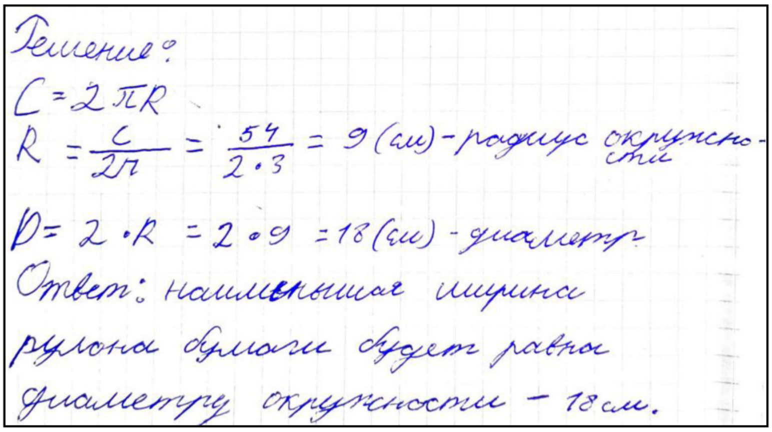


Рис. 15

Ответ: 27 см.

Наиболее частой ошибкой участников было неправильное определение длины окружности (рис. 16), они не учитывали, что в условии задания был представлен рисунок с выкройкой.



Решение:

$C = 2\pi R$

$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{54}{2 \cdot 3} = 9$ (см) – радиус окружности

$D = 2 \cdot R = 2 \cdot 9 = 18$ (см) – диаметр

Ответ: наименьшая ширина рулона бумаги будет равна диаметру окружности – 18 см.

Рис. 16

Задание 4. Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек. Рассмотрите на рисунке 17 пример паркета, состоящего из правильных шестиугольников и правильных треугольников. Найдите повторяющуюся часть изображения и создайте инструмент GeoGebra для быстрого построения такого паркета любого размера. Проверьте его работу воссозданием такого же рисунка.

Примечание: для построения правильных шестиугольников и треугольников используйте инструмент «Правильный многоугольник».

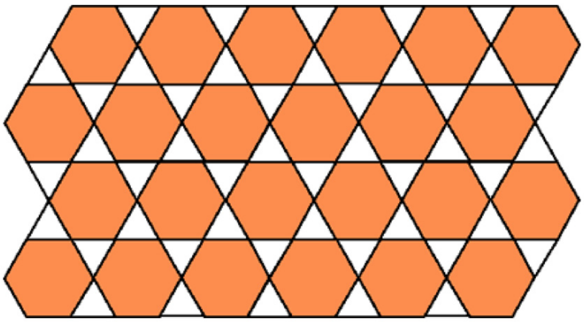


Рис. 17

Баллы	Критерии (7 класс)
1	Построен орнамент, который представлен на рисунке, но построения являются динамически не устойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки)
5	Правильно построен орнамент, показана повторяющаяся часть орнамента, но не создан инструмент или он создан, но работает неправильно
10	Правильно построен орнамент. Правильно создан инструмент для его построения

Решение

Орнамент, представленный на рисунке 17, составлен из правильных шестиугольников и двух равносторонних треугольников. Такой орнамент можно составить с помощью фигуры (рис. 18) или (рис. 19).

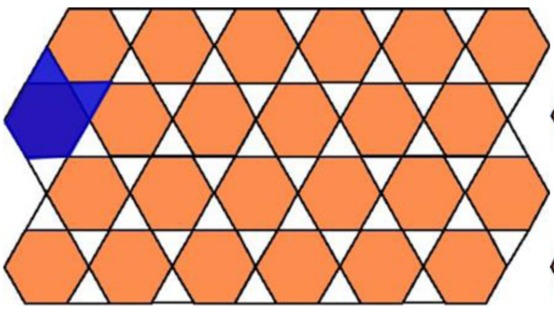


Рис. 18

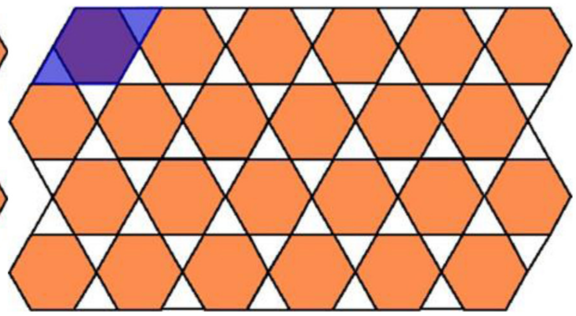


Рис. 19

Представим один из вариантов создания инструмента:

Строим правильный шестиугольник ABCDEF с использованием инструмента «Правильный многоугольник» (рис. 20).

Строим два правильных треугольника на сторонах CD и AF правильного шестиугольника.

Создаем новый инструмент – элемент орнамента. Входящие объекты: точки A и B, выходящие: правильный шестиугольник, два треугольника и вершины треугольников C, D, G, H и F.

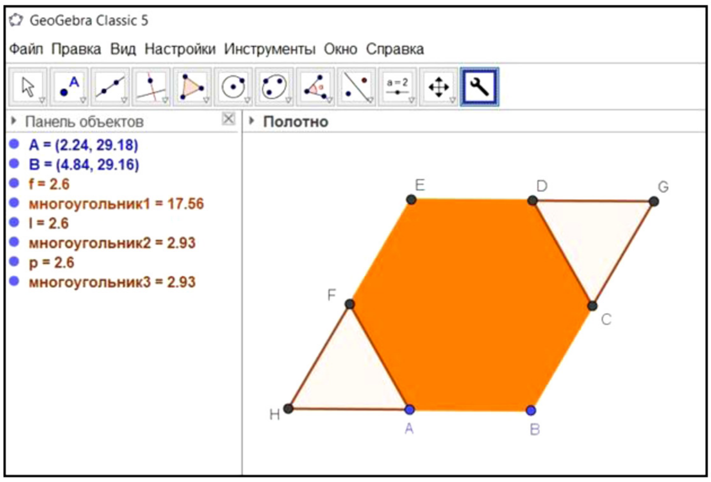


Рис. 20

Основной целью данного задания было создание собственного инструмента для построения орнамента. Большая часть участников справились с заданием, используя фигуру на рисунке 18.

В задании 5 предлагалось описать эксперимент для решения исследовательской задачи о бильярде.

Задание 5. Стол для игры в мини-бильярд имеет форму равностороннего треугольника со стороной 6 дм (рисунок 21). Шар, находящийся в точке A – середине стороны треугольника после удара кия, движется по прямой и первый раз отражается от соседнего борта в точке B, так, что AB=3 дм. В следующий раз он отражается от борта в точку D.

а) Найдите расстояние между точками A и D.

б) На динамическом чертеже отметьте точку, в которой окажется этот шарик через 2022 отскока от борта после начала движения.

Примечание: Отскок бильярдного шара от бортов подчиняется закону «угол падения равен углу отражения» (рис. 22).

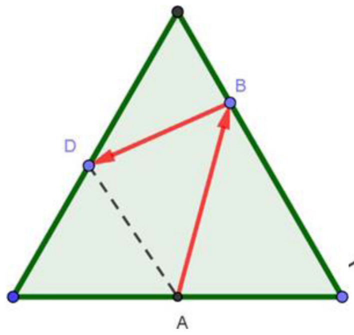


Рис. 21

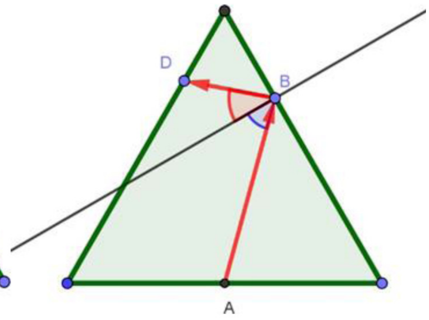


Рис. 22

Баллы	Критерии (7 класс)
5	Построена компьютерная модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента, сделан вывод, но он неверный
10	Построена компьютерная модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента, выполнен верно пункт а или пункт б
20	Построена компьютерная модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента, выполнены оба пункта

Решение

а) Так как A – середина стороны CE равностороннего треугольника CFE со стороной 6 дм (рис. 23), то CA=AE=3 дм.

Пункт 1. Рассмотрим Δ ABE: AB = 3 дм по условию, AE = 3 дм, значит, треугольник ABE – равнобедренный, AB=AE. Из этого следует, что углы при основании равнобедренного Δ ABE с основанием BE равны, $\angle$ ABE = $\angle$ AEB = 60º.

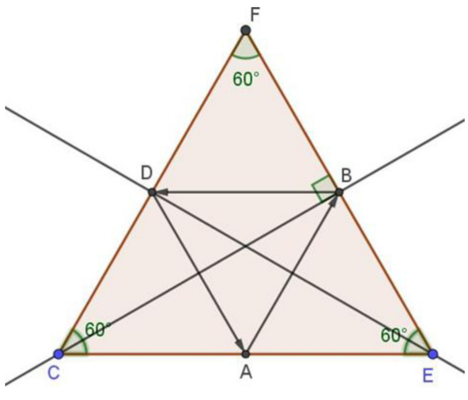


Рис. 23

$\angle BAE = 180^o - 2 \times 60^o = 60^o$

Значит, Δ ABE – равносторонний, откуда BE = 3 дм. Следовательно, точка B – середина стороны FE. $\angle$ ABC = 90° − 60° = 30°.

Пункт 2. По условию отскок бильярдного шара от бортов подчиняется закону «угол падения равен углу отражения», значит, $\angle$ ABC = $\angle$ CBD = 30°.

$\angle DBF = 90° - 30° = 60°$.

$\angle DBF = \angle DFB = 60°$,

$\angle FDB = 180° - 2 \times 60° = 60°$.

Значит, △ FBD – равносторонний, DF = BD = FB =3 дм. Следовательно, точка D – середина стороны CF.

Пункт 3. △ CDA – равносторонний (доказательство аналогично пункту 1). Из этого следует, что AD = 3 дм.

б) Так как 2022 ÷ 3 = 674 (2022 кратно 3), то шар окажется в точке A.

Ответ: а) AD=3 дм; б) в точке A, так как 2022 делится на 3.

Многие участники смогли установить экспериментально, что точки A и D совпадут, но обоснование было неполным или схематичным (рис. 24, 25).

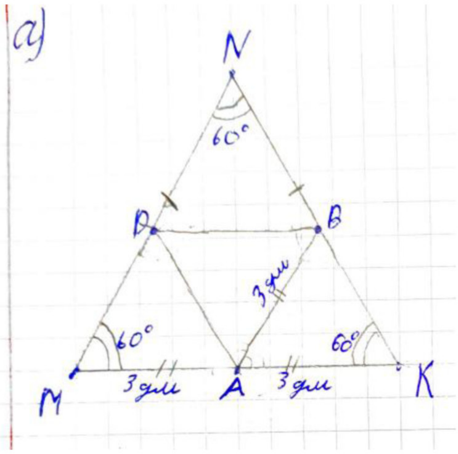


Рис. 24

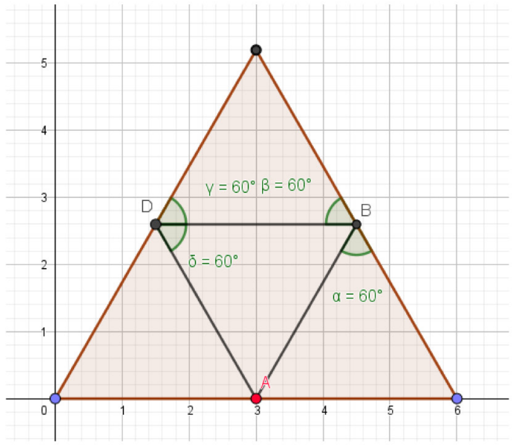


Рис. 25

Задание 6. Изменяя чертеж к задаче № 5, составьте как можно больше новых задач.

Баллы	Критерии (7 класс)
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но ее формулировка полная и корректная
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа

Самым распространенным развитием идеи задачи было именно изменение числовых данных в условии задачи (рис. 26).

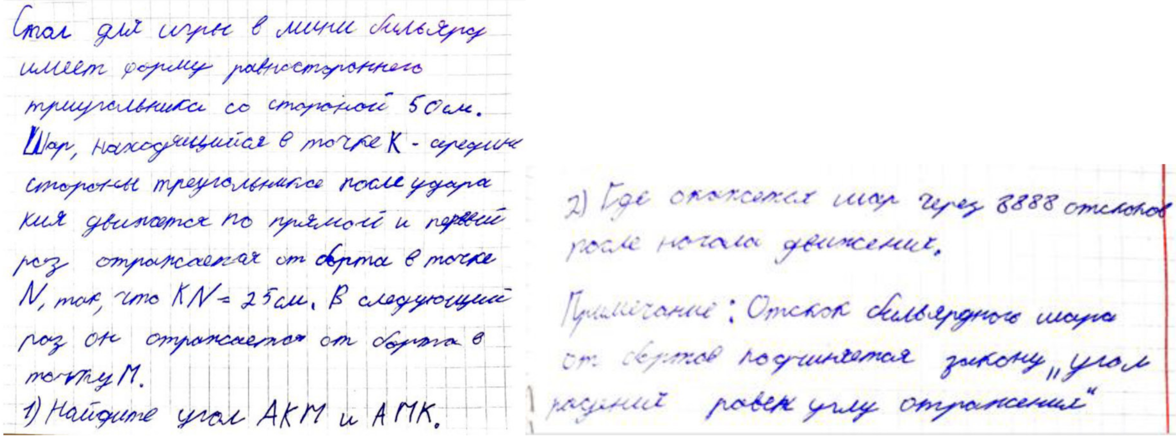


Рис. 26

Но некоторые участники смогли сформулировать новые задачи путем логического преобразования условия:

1) Стол для игры в мини-бильярд имеет форму равностороннего треугольника со стороной 6 дм. Шар, находящийся в точке A, середине стола, после удара кия движется по прямой и первый раз отражается от соседнего борта в точке B, так, что AB = 2 дм. В следующий раз он отражается от борта в точку D. Найдите расстояние между точками A и D.

2) Стол для игры в мини-бильярд имеет форму квадрата со стороной 6 дм. Шар, находящийся в точке A, середине стороны квадрата, после удара кия движется по прямой и первый раз отражается от соседнего борта в точке B, середину другой стороны квадрата. В следующий раз он отражается от борта в точку D. Найдите расстояние между точками A и D.

Анализ работ участников турнира показал, что школьники, использующие системы динамической математики при решении заданий, показали наиболее высокий уровень сформированности универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора.

Библиографический список

1. Официальный сайт турнира по экспериментальной математике. URL: https://it-projects.narfu.ru/turnir/
2. Павлова М.А., Шабанова М.В. Формирование универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора у учащихся основной школы // Информационные технологии в математике и математическом образовании: сборник научных трудов VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием / отв. ред. В.Р. Майер; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. 2017. С. 17–33.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОЕКТ «ВИРТУАЛЬНЫЙ КОНСТРУКТОР “МОЗАИКА ПЕНРОУЗА”»[1]

RESEARCH PROJECT «VIRTUAL DESIGNER “PENROSE MOSAIC”»

Р.П. Овчинникова, А.П. Тебенькова **R.P. Ovchinnikova, A.P. Tebenkova**

Исследовательская деятельность учащихся, исследовательский проект, GeoGebra, цифровой инструмент, виртуальный конструктор, мозаика Пенроуза.

В статье рассматриваются вопросы, связанные с использованием интерактивной геометрической среды GeoGebra при организации исследовательской и проектной деятельности учащихся. Описаны этапы разработки группой учащихся сетевого исследовательского проекта по созданию виртуального конструктора «Мозаика Пенроуза».

Student research activity, research project, GeoGebra, digital tool, virtual constructor, Penrose mosaic.

The article discusses issues related to the use of the interactive geometric environment GeoGebra in the organization of research and project activities of students. The stages of development by a group of students of a network research project to create a virtual designer «Penrose Mosaic» are described.

В соответствии с требованиями новых ФГОС программа основного общего образования должна обеспечивать формирование компетенций учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыков участия в различных формах организации учебно-исследовательской и проектной деятельности; формирование и развитие компетенций обучающихся в области использования ИКТ, культуры пользования ИКТ [1, п. 32.2]. В перечень универсальных учебных коммуникативных действий в новых ФГОС включено публичное представление результатов выполненного исследования, проекта [там же, п. 43.2]. Среди требований, предъявляемых к условиям реализации программ образования, выделено использование современных образовательных технологий, направленных на развитие различных форм наставничества [там же, п. 35.2].

С целью поддержки проектной и исследовательской деятельности школьников в школах организовывается проектно-исследовательская деятельность учащихся на всех уровнях общего образования. В начальных классах обучающиеся начинают учиться писать проекты под руководством учителя и при помощи родителей, на уровне основного общего образования учащиеся пишут проекты под руководством учителей-предметников. По желанию, учащиеся представляют свои проекты и исследовательские работы на школьном этапе областного конкурса проектов. Лучшие работы участвуют в городском или районном этапе, а затем и в областной научной конференции.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 20-013-00730).

Выполнение учащимися проектных заданий и исследовательских работ по математике на высоком технологическом уровне поддерживают интерактивные геометрические среды «Живая математика», «Математический конструктор», GeoGebra. Примеры применения ИГС для создания виртуальных аналогов головоломок, механизмов описаны в работах [3; 4], с виртуальными моделями можно ознакомиться на сайте geogebra.org.

Представим часть общего исследовательского проекта «Цифровые инструменты», выполненного группой учащихся 7 класса, которые проходили обучение в сетевой проектной школе (https://aprod-rf.ru/sps), организованной в рамках реализации проекта Российского фонда фундаментальных исследований «Сетевое наставничество в организации исследовательской деятельности одаренных обучающихся» на сайте Ассоциации педагогов, работающих с одаренными детьми.

Перед группой учащихся были поставлены следующие задачи:

1) освоить технологию создания собственных инструментов на примере равнобедренного треугольника в ИГС GeoGebra;
2) создать собственный инструмент «равнобедренный треугольник»;
3) найти геометрические фигуры и конструкции, состоящие из равнобедренных треугольников;
4) составить различные алгоритмы построения дельтоида;
5) построить собственный инструмент «дельтоид» с использованием созданного инструмента «равнобедренный треугольник»;
6) проанализировать источники информации по теме «Мозаика Пенроуза»;
7) разработать собственные инструменты «Змей» (выпуклый дельтоид с углами 72° и 144°) и «Дротик» (невыпуклый дельтоид с углами 36°, 72° и 216°);
8) создать в GeoGebra виртуальный конструктор «Мозаика Пенроуза».

Опишем выполнение учащимися трех последних задач.

Мозаика Пенроуза – узор, собранный из многоугольных плиток определенной формы, связанной с правильным пятиугольником, которым можно замостить бесконечную плоскость без пробелов. Данная мозаика была изобретена английским математиком Роджером Пенроузом в 1973–1974 годах как решение математической проблемы непериодичного замощения плоскости.

Существует три типа мозаики Пенроуза (рис. 1):

1 тип – исходная мозаика Пенроуза. Она строится из плиток шести видов: три из них имеют форму правильного пятиугольника (они различаются между собой правилами сочетаний), четвертая – пятиконечной звезды, пятая – «лодочки» (звезды без двух лучей) и ромба. Позже Пенроуз придумал, как сделать мозаику еще проще, уменьшив количество плиток до двух;

2 тип – мозаика, состоящая из ромбов двух видов с равными сторонами и разными углами. Один из них имеет острый угол 36° («узкий ромб»), другой – 72° («широкий ромб»);

3 тип – мозаика, собранная из двух видов дельтоидов: выпуклого с углами в 72°, 72°, 72° и 144° («змея») и невыпуклого дельтоида с углами в 36°, 72°, 36° и 216° («дротика»).

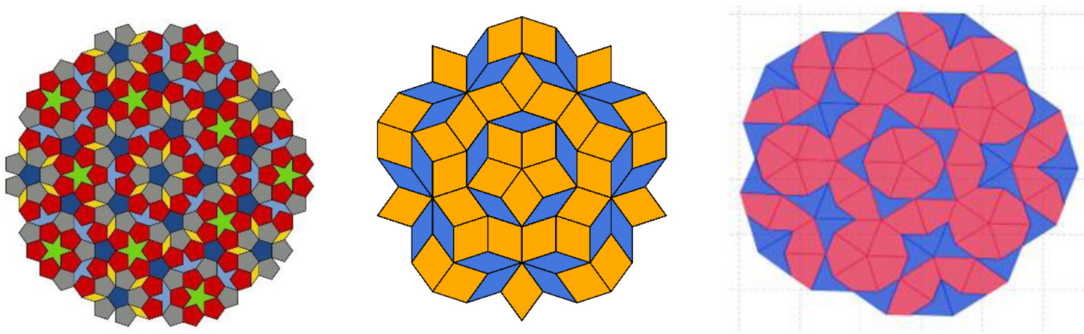


Рис. 1. Три типа мозаик Пенроуза

Будучи любителем занимательной математики и хорошим предпринимателем, Пенроуз свое изобретение положил в основу коммерческой игры-головоломки и воздерживался от его публикации, пока не получил на него патент. М. Гарднер пишет: «Чтобы в полной мере оценить красоту и загадочность мозаики Пенроуза, необходимо изготовить набор, состоящий по меньшей мере из 100 змеев и 60 наконечников. Число змеев находится к числу наконечников в отношении, равном золотому сечению» [2].

Командой проекта было решено создать виртуальную головоломку-конструктор «Мозаика Пенроуза» 3-го типа с использованием интерактивной геометрической среды GeoGebra. Для создания виртуальной головоломки-конструктора требуется создать собственные инструменты: два вида дельтоидов «змей» и «дротик». И тогда будет получен набор из неограниченного количества требуемых фигур.

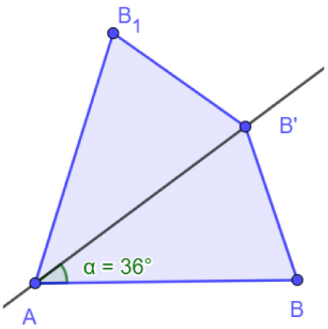
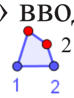


Рис. 2. Построение дельтоида «змей»

Для создания собственного инструмента «змей» было выполнено построение дельтоида с углами в 72°, 72°, 72° и 144° (рис. 2). Опишем один из алгоритмов:

1. Строим точки А и В – вершины дельтоида.
2. Отложим от луча *AB* угол 36° против часовой стрелки. Получим точку B_1.
3. Через точки *A* и *B′* строим прямую – ось симметрии дельтоида.
4. Отображаем точку В относительно прямой *AB′*. Получим точку B_1.
5. Строим многоугольник $ABB'B_1$. Получаем дельтоид «змей».

Для создания инструмента выполняем следующие шаги:

6. Скрываем все обозначения объектов, угол и прямую. Выделяем все элементы чертежа.
7. Открываем вкладку Инструменты → Создать инструмент.
8. В выходных объектах выбираем четырехугольник, все отрезки (стороны четырехугольника) и вершины B_1 и *B′*.
9. Входными объектами инструмента являются точки *A* и *B*.
10. В закладке «Имя и значок» вводим имя инструмента «Змей_1» и выбираем заранее заготовленный значок 

[2].

[2] Синий цвет точек соответствует входным данным, красный – выходным, числа 1 и 2 – последовательности выбора исходных точек.

Инструмент «Змей_1» должен появиться на панели инструментов. Если этого не произошло, то открываем вкладку Инструменты ® Настройка и перетаскиваем созданный инструмент на панель инструментов.

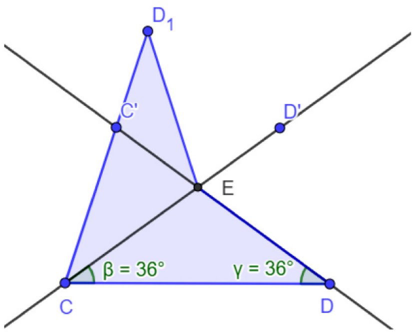


Рис. 3. Построение дельтоида «дротик»

Алгоритм создания собственного инструмента «дротик» – дельтоида с углами в 36°, 72°, 36° и 216° (рис. 3) состоит из следующих шагов:

1. Построим точки C и D – вершины дельтоида.
2. Отложим угол 36° от луча DC по часовой стрелке, от луча CD – против. Получим точки C' и D'.
3. Через точки C и D' строим прямую CD'' – ось симметрии дельтоида.
4. Через точки D и C' строим прямую, отмечаем точку E как пересечение прямых CD' и DC'.
5. Отображаем точку D относительно прямой CD'. Получим точку D_1.
6. Строим многоугольник $CDED_1$. Получаем дельтоид «дротик».

Заметим, что проектной командой было найдено несколько способов построения данных фигур.

Этим набором инструментов можно было бы и ограничиться, но тогда при выкладывании мозаики приходилось бы каждый раз аккуратно совмещать вершины и стороны дельтоидов, как в конструкторе, созданном Джоном Голденом (рис. 4).

Может показаться, что эта головоломка очень проста в выполнении, ведь начинать построение мозаики Пенроуза можно с укладки змея или дротика вокруг одной вершины. Далее узор следует радиально расширять, но при этом приходится постоянно выбирать фигуру – змея или дротик. Иногда выбор очевиден, но бывают случаи, когда подходят обе фигуры. Выбрав одну из них, может оказаться, что дальше невозможно пристроить к мозаике ни змея, ни дротик. В этом случае следует вернуться назад и изменить выбранную фигуру. Чтобы упростить головоломку, английский математик Джон Конвей предложил нарисовать две дуги разного цвета на каждой фигуре, указывающие на возможные комбинации выбора фигуры: две стороны могут соприкасаться только в том случае, если концы дуг совпадают. Это предложение осуществлено в конструкторе Криса Камбре (рис. 5).

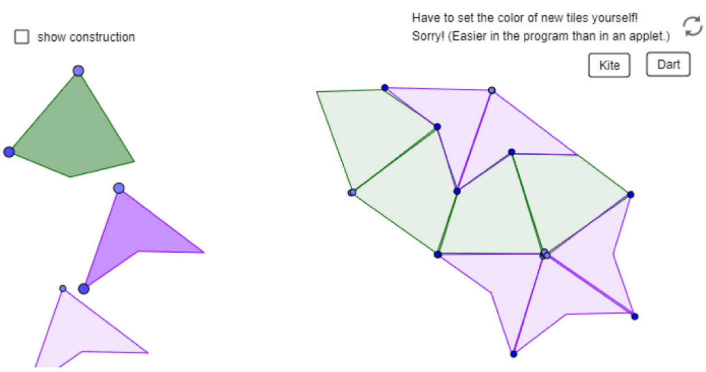


Рис. 4. Конструктор Д. Голдена (https://www.geogebra.org/m/YG8YDHy4)

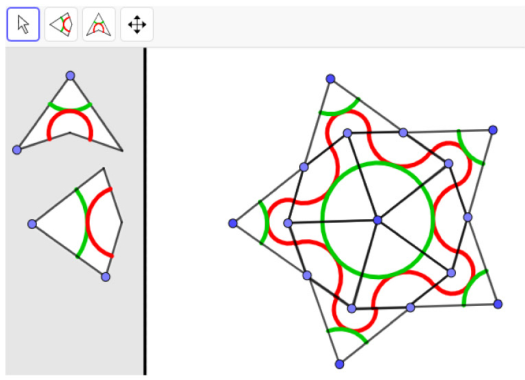


Рис. 5. Конструктор К. Камбре (https://www.geogebra.org/m/rbunw6sn)

Проанализировав различные конструкторы, опубликованные на сайте geogebra.org., командой проекта было решено создать виртуальный конструктор «Мозаика Пенроуза», обладающий следующими свойствами:

– увеличение набора инструментов с двух до восьми для того, чтобы не совмещать стороны фигур, а производить «сцепление» дельтоидов с целью получения жесткой конструкции мозаики;

– разная окраска змеев и дротиков;

– дополнение области для построения мозаики областью для навигации по заданиям и кратких указаний по выполнению заданий.

Рис. 6. Линейка инструментов головоломки-конструктора

Опишем возможности разработанного виртуального конструктора. После запуска конструктора на экране появляются два полотна. Область 1 предназначена для построения мозаики. Исключением является первый раздел, в котором на полотне 1 представлена краткая историческая справка о мозаике Пенроуза (рис. 7).

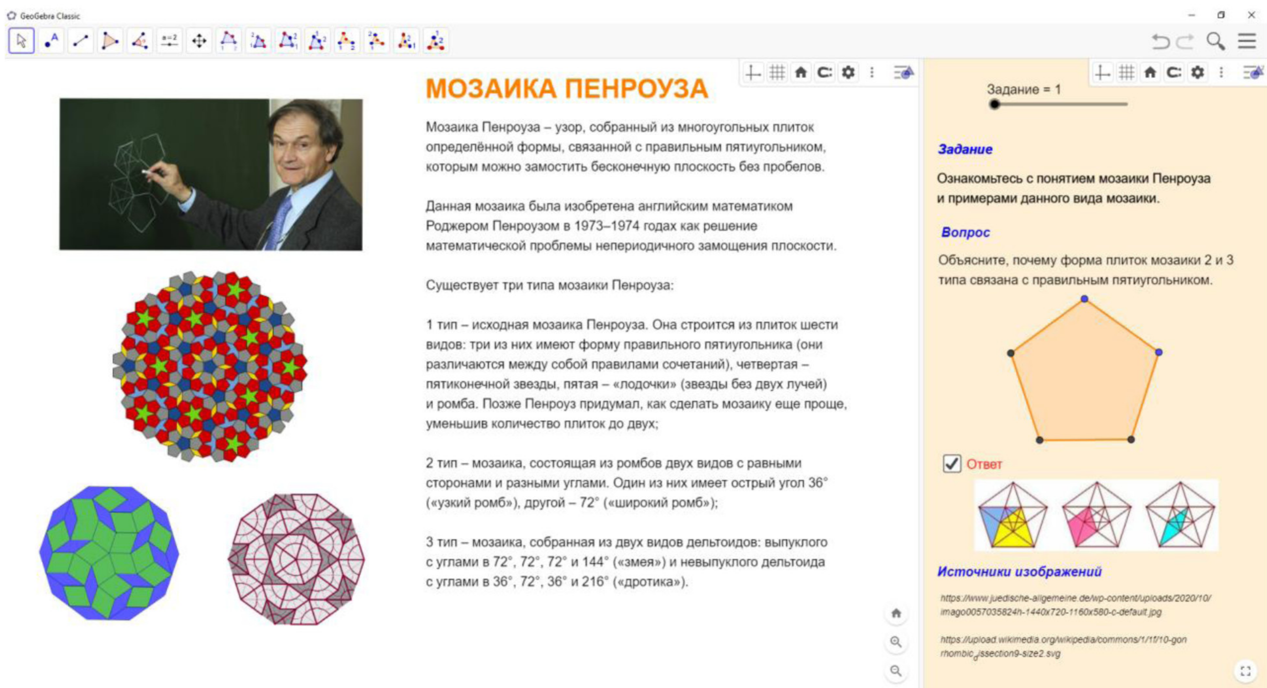


Рис. 7. Виртуальный конструктор «Мозаика Пенроуза»

Область 2 служит для навигации по ресурсу и содержит краткие указания для выполнения заданий. Навигация осуществляется посредством ползунка «Задание». Изначально ползунок находится в положении Задания 1. Ниже расположено первое задание для учащихся, в котором им предлагают ознакомиться с понятием мозаики Пенроуза и тремя примерами данного вида мозаики. Далее следует вопрос: учащимся нужно объяснить, почему форма плиток мозаики 2 и 3 типа связана с правильным пятиугольником. Объяснение предполагается выполнить с помощью построения. В случае затруднения имеется ответ в виде рисунка, который появляется при выставлении «флажка».

Второе и последующие задания связаны непосредственно с заданиями на создание мозаики: «Используя линейку инструментов на главной панели, создайте мозаику, состоящую из плиток двух видов: змеев и дротиков». Там же сформулированы правила соединения плиток:

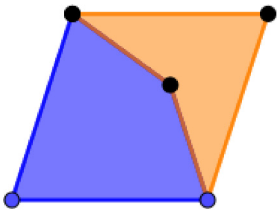


Рис. 8. Запрещенное соединение змея и дротика

1. Фигуры соединяются друг с другом с помощью синих вершин.
2. Змей и дротик не должны соединяться так, чтобы вместе они образовывали ромб (рис. 8).
3. Данными фигурами требуется замостить плоскость без пробелов.

Виртуальный конструктор, созданный проектной командой, может быть доработан следующим образом:

– создание новых страниц ресурса с инструментами, на которых изображены дуги двух цветов, которые выполняют роль подсказки при выкладывании мозаики (рис. 5);

– добавление заданий на выкладывание узора, начиная с определенной фигуры: «солнца» (соединения пяти «змеев» в одной вершине), «звезды» (соединения пяти «дротиков» в одной вершине) и других фигур;

– разработка инструментария и задания на создание мозаики 1 и 2 типов.

Кроме того, командой планируется разработать по данной теме экспонат для виртуального музея занимательной математики, открывающемся на базе интеллектуального центра САФУ имени М.В. Ломоносова. Ребята надеются, что посетители музея будут с удовольствием решать задачи на выкладывание мозаики Пенроуза с использованием разработанного ими виртуального конструктора.

Библиографический список

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (утвержден приказом Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287) // Реестр примерных основных общеобразовательных программ. URL: https://fgosreestr.ru/uploads/files/-238eb2e61e443460b65a83a2242abd57.pdf (дата обращения: 10.10.2022).
2. Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам / Пер. с англ. М.: Мир, 1993. 416 с.
3. Корельская А.В., Овчинникова Р.П. Динамическая модель пантографа как средство изучения темы «Подобие» // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VI Всероссийской науч.-метод. конф. с межд. уч. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2017. С. 209–217.
4. Майер В.Р., Майер В.В. Компьютерные Танграмы // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IV Всероссийской науч.-метод. конф. с межд. уч. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2015. С. 65–70.

ПЕРВЫЙ КОНКУРС ЭКСПОНАТОВ ДЛЯ МУЗЕЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ: ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

THE FIRST COMPETITION OF EXHIBITS FOR THE MUSEUM OF ENTERTAINING MATHEMATICS: RESULTS AND PROSPECTS

М.А. Павлова **M.A. Pavlova**

Музей занимательной математики, креативная математика, математический экспонат, популяризация математики.

В статье представлены итоги и возможные перспективы первого открытого конкурса «Экспонат для музея занимательной математики», который впервые состоялся в 2022 году на базе Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова.

Museum of Entertaining Mathematics, creative mathematics, mathematical exhibit, popularization of mathematics.

The article presents the results and possible prospects of the first open competition «Exhibit for the Museum of Entertaining Mathematics», which was first held in 2022 on the basis of the Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov.

Конкурс «Экспонат для музея занимательной математики» для обучающихся общеобразовательных школ и организаций среднего профессионального образования является одним из мероприятий проекта «Сетевая образовательная площадка "Креативная математика – от прототипа до объекта музейной экспозиции"», поддержанного Президентским фондом культурных инициатив [1].

Главная цель конкурса – повышение мотивации подрастающей молодежи к изучению математики за счет вовлечения их в деятельность популяризации достижений математики.

Задачи конкурса:

– формирование у учащихся креативного мышления и качеств популяризаторов науки, практических навыков, лежащих в основе научно-технического творчества, изобретательства и популяризации науки;

– формирование у учащихся исследовательских умений и междисциплинарных научных подходов для реализации идей популяризации науки;

– выявление, развитие и поддержка учащихся, проявляющих склонности и способности к математическому творчеству;

– развитие нового направления внеклассной и внешкольной работы по математике – создание школьных музеев занимательной науки силами учащихся.

Конкурс проводится в два этапа: заочный тур (предварительный) и очный тур (основной). В ходе предварительного этапа конкурсная комиссия осуществляет проверку работ по мере их поступления на соответствие конкурсным требованиям. Главной задачей конкурсной комиссии является отбор прототипов экспонатов, рекомендуемых к доработке с последующим включением в коллекции музеев занимательных наук (школьных, региональных, федеральных), а также учащихся, рекомендуемых в кандидаты молодежного движения популяризаторов математики.

На конкурс принимаются прототипы экспонатов, включающие:

– эскиз постера, рассказывающего об истории представляемого математического открытия и его роли в математике и ее приложениях, задачу и инструкцию по использованию предлагаемого интерактивного оборудования;

– прототип интерактивного оборудования для математических игр и/или экспериментов посетителей музея, представленный фотографиями, видео и/или электронным ресурсом.

Первый открытый конкурс «Экспонат для музея занимательной математики» был проведен на базе Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Всего было зарегистрировано 76 обучающихся образовательных организаций г. Архангельска, Архангельской области, г. Санкт-Петербурга и г. Арсеньева (Приморский край). Очный тур состоялся 29 октября 2022 года на базе высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем САФУ в форме выставки со свободным доступом. Учащиеся 1–11 классов представили более 50 прототипов математических экспонатов, участники из Архангельской области и других регионов РФ представили свои работы на видео.

Представленные на конкурс прототипы экспонатов были представлены в следующих тематиках:

– великие ученые-математики;
– эксперименты в математике;
– необыкновенные математические объекты;
– математика и искусство;
– математическая игротека;
– национальный колорит математики.

Представители конкурсной комиссии оценивали экспонаты по единому чек-листу, где предметом оценки был не только экспонат, но и мини-экскурсия, представленная автором. В оценке экспонатов участвовали не только комиссия, но и посетители выставки голосованием за понравившиеся экспонаты. Лучшие работы будут положены в основу экспонатов для реального музея занимательной математики, открытие которого планируется в марте 2023 года на базе Интеллектуального центра САФУ, где предполагается организация различных образовательных мероприятий для школьников в форме кружков, мастер-классов, квестов, лекториев, а также ежегодное проведение конкурса «Экспонат для музея занимательной математики».

В дальнейшем видится перспективным создание интерактивных экспозиций по межпредметным областям математика–биология, математика–физика и другие, а также расширение географии участников мероприятия путем привлечения школьников и студентов из других регионов России.

Положение конкурса и его результаты представлены на сайте [2].

Библиографический список

1. Страница проекта «Сетевая образовательная площадка «Креативная математика – от прототипа до объекта музейной экспозиции». URL: https://narfu.ru/tochka-kipeniya/ano-rts-siti/proekty/creative-math/
2. Официальный сайт конкурса «Экспонат для музея занимательной математики». URL: https://it-projects.narfu.ru/eksponat/

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПАРАМЕТРОВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

APPLICATION OF DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES IN THE STUDY OF PARAMETERS IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

И.Е. Пивцайкина **I.E. Pivtsaikina**

Цифровые образовательные ресурсы, образовательные сайты, параметры, графический калькулятор – Desmos, график функции.

В статье рассматривается подход к изучению темы «Параметры» в школьном курсе математики с использованием цифровых образовательных ресурсов. При решении задач используется один из современных и бесплатных графических калькуляторов – Desmos, который помогает строить графики функций, наносить точки и передвигать их в нужном направлении.

Digital educational resources, educational websites, parameters, graphing calculator – Desmos, function graph.

The article discusses the approach to the study of the topic «Parameters» in the school course of mathematics using digital educational resources. When solving problems, one of the modern and free graphical calculators, Desmos, is used, which helps to plot function graphs, plot points and move them in the right direction.

С каждым годом цифровые образовательные ресурсы все больше набирают обороты. Практически все школы оснащены компьютерными классами, интерактивными досками и проекторами. Поэтому у учителей становится больше возможностей применять на уроках современные технологии, что позволяет при обучении создать информационную обстановку и заинтересовать детей. Компьютеры становятся посредниками между учителем и обучающимся. Они позволяют сделать обучение интересным, ярким, наглядным, а также предоставляют возможность выстроить учебный процесс с учетом индивидуальных особенностей каждого ребенка. С помощью цифровых ресурсов ученик может самостоятельно изучать темы и выстраивать свой путь обучения с учетом всех факторов.

Что же такое цифровой образовательный ресурс?

Компьютеры работают с информацией, представленной в виде чисел, т.е. информацией в числовом виде. Отсюда цифровой, значит представленный в виде последовательности цифр. С такой информацией мы давно уже имеем дело, это могут быть и цифровые фотографии, и цифровое видео и многое другое. Образовательный, т.е. содействующий получению знаний. Ресурс – средство, к которому обращаются в необходимом случае [2].

Таким образом, цифровые образовательные ресурсы – средство, представленное в цифровом виде и служащее получению образования.

Однако это определение не дает никакой конкретики. При изучении методической литературы было обнаружено большое разнообразие определений понятия «цифровые образовательные ресурсы», но одно из самых полных и понятных было определение, данное Л.Л. Босовой «Цифровые образовательные ресурсы (ЦОР) – необходимые для организации учебного процесса и представленные в цифровой форме ресурсы, а именно: фотографии, видеофрагменты, статические и динамические модели, ролевые игры, объекты виртуальной реальности и интерактивного моделирования, картографические материалы, звукозаписи, символьные объекты и деловая графика, текстовые документы и иные учебные материалы, отобранные в соответствии с содержанием конкретного учебника, "привязанные" к плану урока и снабженные необходимыми методическими рекомендациями» [1].

В последние годы в системе общего среднего образования развернуты и активно ведутся работы по внедрению технологий электронного, виртуального образования, которое осуществляется в следующих направлениях: внедрение технологий дистанционного обучения, система тестирования, создание внутренних локальных сетей, сайтов, обеспечение доступа в Интернет, а также предпринимаются попытки развития открытых образовательных ресурсов.

Использование ЦОР на уроках математики предоставляет достаточно широкие возможности для организации занятий, выстроенных как в традиционных, так и инновационных формах. В настоящее время много различных образовательных сайтов, направленных на изучение тем по математике и подготовке к экзаменам, например:

– Квант (http://kvant.mccme.ru/);
– Единая коллекция ЦОР (http://school-collection.edu.ru/);
– Математика (https://mathematics.ru/);
– Математика. Школа. Будущее (http://www.shevkin.ru/podgotovka-k-ege/);
– Средняя математическая интернет-школа (http://www.bymath.net/);
– Проект «Распечатай и реши» (https://www.time4math.ru/ege);
– Решу ЕГЭ (https://ege.sdamgia.ru/);
– Российская электронная школа (https://resh.edu.ru/);
– Фоксфорд (https://foxford.ru/);
– ЕГЭ-студия (https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/);
– Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» (https://zadachi.mccme.ru/);
– UCHi.RU (https://uchi.ru/signin/main/new);
– Графический калькулятор – Desmos (https://www.desmos.com/).

Эти сайты помогают учителю не только проводить уроки, но и подталкивают учеников самостоятельно готовиться к экзаменам.

При сдаче ОГЭ и ЕГЭ по математике задачи с параметрами представляют наибольшую трудность для учащихся. Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению уравнений, содержащих параметр. Параметры играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры школьника. Уметь решать задания с параметрами – это значит хорошо знать все разделы школьного курса математики.

В настоящее время очень мало школ включают этот раздел в школьный курс математики, так как это требует углубленного изучения тем и дополнительных часов в предмете. Несмотря на это, изучение параметров набирает популярность, так как эти задания можно встретить не только на ЕГЭ профильного уровня, но и на ОГЭ во второй части. Параметрические задания решаются на экзаменах реже всех. Решаемость этого задания на ЕГЭ профильного уровня в 2020 году составила 2,4 %. Наибольшие затруднения возникают из-за непонимания логики задачи и анализа условия; неумения искать ключевые факты и делать необходимые обоснования; неумения применять свойства функций и строить графики, использовать геометрические интерпретации.

Чтобы учащиеся успешно сдавали экзамены, этот раздел необходимо включать в темы алгебры 7 класса. Начинать вводить параметры необходимо с линейных уравнений, а закреплять уже в системе линейных уравнений. Следующий этап изучения параметров – изучение квадратных уравнений и линейных неравенств в 8 классе. Заключающий этап в основном общем образовании уже приходится на 9 класс, где идет закрепление изученного материала и добавляются квадратные неравенства, корни и модули.

Для решения задач с параметрами необходимо: овладеть навыками решения уравнений и неравенств; знать различные преобразования выражений и уметь использовать их на практике; уметь строить логическую цепочку рассуждений. Углубленное изучение этой темы не только поможет систематизировать все полученные знания, но и будет способствовать успешной сдаче экзаменов.

Как же ЦОР помогут при изучении такой сложной темы? Один из самых популярных сайтов при решении задач с параметром является «Графический калькулятор – Desmos». Он наглядно показывает, как строятся графики, помогает найти точки максимума/минимума, точки пересечения графиков функций между собой или с осями координат и т.д.

Примером послужит задание из ЕГЭ:

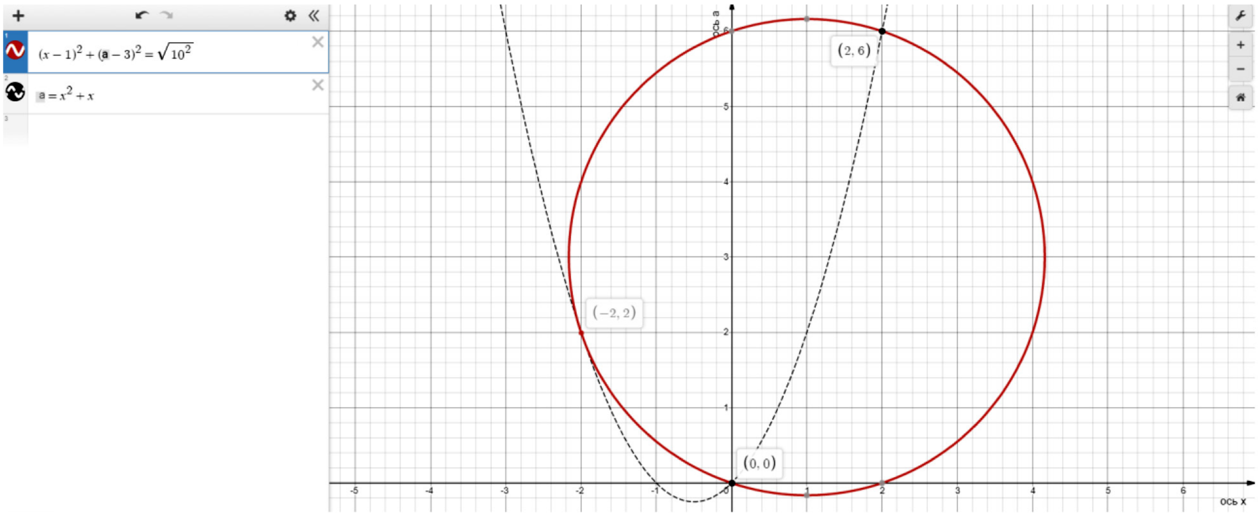
Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-2x+a^2-6a}{x^2+x-a} = 0$ имеет ровно два различных решения.

Один из способов решения такого задания – это графический способ.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + a^2 - 6a = 0 \\ x^2 + x - a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + a^2 - 6a + 9 = 10 \\ a \neq x^2 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (a-3)^2 = \sqrt{10^2} \\ a \neq x^2 + x \end{cases}$$



При $a < 3-\sqrt{10}$ – нет решений

$a = 3-\sqrt{10}$ – 1 решение

$3-\sqrt{10} < a < 0$ – 2 решения

$a = 0$ – 1 решение

$0 < a < 2$ – 2 решения

$a = 2$ – 1 решение

$2 < a < 6$ – 2 решения

$a = 6$ – 1 решение

$6 < a < 3+\sqrt{10}$ – 2 решения

$a = 3+\sqrt{10}$ – 1 решение

$a > 3+\sqrt{10}$ – нет решений

$a \epsilon \left(3-\sqrt{10};\, 0\right) \cup (0;\, 2) \cup (2;6) \cup \left(6;3+\sqrt{10}\right)$

Ответ: $\left(3-\sqrt{10};\, 0\right) \cup (0;\, 2) \cup (2;6) \cup \left(6;3+\sqrt{10}\right)$

Таким образом, применение цифровых образовательных ресурсов при изучении параметров не отменяет сложившуюся традиционную систему обучения, а, наоборот, помогает учителям и ученикам углубленно изучать эту тему в школьном курсе математики и не только. Их всесторонне продуманное применение позволит и в дальнейшем повышать эффективность уроков.

Библиографический список

1. Босова Л.Л. Цифровые образовательные ресурсы для пропедевтического курса информатики и ИКТ // Информатика и образование. 2009. № 2. С. 32–47.
2. Общий толковый словарь. URL: http://tolkslovar.ru/r5528.html

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

MODEL OF FORMATION OF MATHEMATICAL LITERACY OF STUDENTS

К.П. Писаренко **K.P. Pisarenko**

Математическая грамотность, модель обучения, математическое образование, функциональная грамотность, математика, обучение математике.

В статье предлагается методика формирования у обучающихся математической грамотности. В статье описана структурно-содержательная модель формирования математической грамотности, в которой выделены и описаны компоненты модели формирования математической грамотности: мотивационно-целевой, содержательный, технологический, коррекционно-оценочный.

Mathematical literacy, learning model, mathematical education, functional literacy, mathematics, teaching mathematics.

The article proposes a methodology for the formation of mathematical literacy among students. The article describes a structural-content model of the formation of mathematical literacy, in which the components of the model of the formation of mathematical literacy are identified and described: motivational-targeted, meaningful, technological, correctional-evaluative.

В педагогической науке моделирование как метод познания широко распространено и используется на всех этапах педагогических исследований. Вопросы моделирования в педагогических исследованиях освещаются в работах С.И. Архангельского, Н.В. Кузьминой, Ю.Н. Кулюткина и др.

Наиболее распространенным типом модели является структурная модель, в основе которой лежат сущностные связи и отношения между важнейшими компонентами определенной системы.

В основу проектирования модели процесса обучения нами были заложены следующие принципы:

1) Соответствие целям математической подготовки обучающихся общеобразовательной школы.

2) Соответствие логике деятельности.

3) Полнота.

4) Динамичность [6].

На основе выделенных принципов моделирования нами была разработана структурно-содержательная модель формирования математической грамотности обучающихся. Понятие «структура» обозначает взаимосвязь всех компонентов процесса обучения математике, их устройство. Понятие «содержание» включает основные компоненты модели.

Разработанная структурно-содержательная модель процесса обучения математике представляет собой педагогическую систему, включающую взаимосвязанные компоненты: мотивационно-целевой, содержательный, технологический и коррекционно-оценочный. Структурные компоненты модели раскрывают внутреннюю организацию процесса обучения математике и обеспечивают взаимодействие между основными элементами данного процесса. Каждый из компонентов модели, имея свои функции, специфическое содержание и методические особенности, призван решать определенную часть общей педагогической задачи – описать организацию и содержание процесса обучения математике обучающихся общеобразовательной школы.

Мотивационно-целевой компонент модели включает систему целей, обусловленных социальным заказом, задач обучения математике, определенных в ФГОС СОО, а также систему ценностей и мотивов обучающихся, сформированность которых оказывает положительное влияние на достижение математической грамотности обучающихся. Данный системообразующий компонент выступает по отношению к остальным компонентам в качестве управляющей инстанции; служит основным фактором, влияющим на разработку их содержательной стороны.

Содержательный компонент определяет содержание процесса обучения математике путем обеспечения целостности процесса обучения. Содержательный компонент отражает требования к заданиям, структуру и типы заданий, используемых для формирования математической грамотности обучающихся.

Данный компонент является ядром, над которым надстраиваются формы, методы, методические приемы и средства организации учебной деятельности работников организаций.

Содержательный компонент развивается за счет углубления и систематизации знаний и умений в предметной области «Математика», актуализации его содержательных связей с другими предметами и жизненными ситуациями, что оказывает значительное влияние на развитие математической грамотности обучающихся.

Изменение содержательной стороны процесса обучения математике объективно ведет за собой необходимость изменения подходов и к самой организации этого процесса, взаимодействия субъектов в этом процессе и т.д., т.е. требуются изменения технологических шагов. Это обусловило выделение следующего структурного компонента – технологического, который регулирует организацию процесса обучения математике и включает систему активных методов, форм и средств обучения, посредством которых происходит взаимодействие субъектов процесса и методическое обеспечение данного процесса. *Технологический компонент* структурно-содержательной модели формирования математической грамотности обучающихся средствами предметной области «Математика» включает в себя систему форм, методов и средств процесса обучения, благодаря которым происходит достижение поставленных целей. Также технологический компонент определяет этапы и педагогические условия формирования математической грамотности. Под методом обучения будем понимать способ организации взаимодействия педагога и обучающихся, целью которого является передача и усвоение знаний, умений и навыков, направленных на достижение целей обучения [2]. При формировании ключевых навыков XXI века целесообразно использовать такие методы обучения, как: проблемный метод, метод проектов, практико-ориентированные задачи в обучении.

Одним из наиболее эффективных методов формирования математической грамотности является проблемный метод. Данный метод подразумевает такую организацию учебного процесса, при которой педагог намеренно создает проблемную ситуацию, в ходе решения которой обучающиеся развивают способность использования математических знаний для решения проблемных ситуаций [3].

Использование проблемного метода на уроках математики позволяет развивать не только находчивость, сообразительность, но и способность к нестандартным решениям, возможность находить применение уже имеющимся знаниям и умениям. В ходе данной учебной деятельности обучающиеся проводят анализ, обобщение, сравнение явлений, синтез фактов и в конечном итоге находят решение возникшей проблемы.

Таким образом, проблемный метод обучения гарантирует качественное изучение материала, развивает навык анализа, синтеза, обобщения и сравнения информации, которые необходимы для успешной жизнедеятельности в современном обществе.

Метод проектов является одним из качественных методов формирования способности обучающихся решать жизненные задачи, используя математические знания. Данный метод обучения будем рассматривать как способ организации образовательной деятельности, который основан на взаимодействии, сотрудничестве и сотворчестве учителя и обучающихся, направленный на достижение намеченной цели [2]. Данный метод предполагает самостоятельный или групповой поиск необходимой информации, синтез и анализ полученных данных, формирование конечного результата в виде готового «продукта» (презентация, доклад, макет и т.д.). Во время работы над проектом обучающимся предлагаются задачи, схожие с жизненными, что побуждает их к активной работе и непосредственно формирует математическую грамотность. Таким образом, данный метод обучения способствует формированию у обучающихся таких важных качеств, как владение логическими действиями.

В процессе формирования математической грамотности обучающихся целесообразно использовать следующие формы обучения: работа в группах, учебные исследования и самостоятельная работа.

Работа в группах позволяет обучающимся в ходе диалога находить совместное решение задачи. Не каждый ребенок может сразу научиться интерпретировать условия задачи на язык математики, но работая в группе обучающиеся совместно рассуждают и приходят к верному преобразованию информации на математический язык. При этом они формируют способность к применению своих математических знаний на решение уже преобразованной задачи. При такой форме работы обучающийся учится анализировать, сравнивать, сопоставлять информацию, предложенную в задании, и те знания, которыми он обладает.

Учебные исследования необходимы для формирования математической грамотности, т.к. в ходе исследований у обучающихся формируются такие навыки, как: владение логическими действиями, умение оперировать математическим аппаратом, умение анализировать, обобщать и использовать информацию, полученную в ходе исследования.

Для формирования умения выбирать, сравнивать и оценивать стратегию решения задачи, а также умения анализировать проделанную работу целесообразно использовать самостоятельную работу. В ходе выполнения самостоятельной работы у обучающегося нет возможности надеяться на кого-то другого, необходимо использовать свои умения, поэтому именно в ходе самостоятельной работы наиболее эффективно формируются элементы математической грамотности.

Контрольно-оценочный компонент структурно-содержательной модели позволяет определить уровень эффективности моделируемого процесса обучения, провести диагностику изменений, происходящих в процессе развития математической грамотности, проводить мониторинг степени усвоения обучающимися учебного материала, анализ эффективности осуществленной деятельности, а также дает возможность корректировать при необходимости математических знаний, умений и навыков. Данный компонент включает в себя уровни и средства оценки сформированности математической грамотности.

Образовательным результатом выступает способность человека мыслить математически, формулировать, применять и интерпретировать математику для решения задач в разнообразных практических контекстах.

Структурно-содержательная модель развития математической грамотности обучающихся старших классов представлена на рис.

Главная цель данной модели обучения – развитие у обучающихся способности применять математические знания в ходе решения приближенных к реальным жизненным ситуациям задач (практико-ориентированных задач), а также развитие логических действий, которые необходимы для решения таких задач. Для того чтобы предложенная нами модель стала эффективной, следует наполнить каждый компонент содержанием, который будет направлен на достижение поставленных результатов обучения, поэтому следующим шагом нашего исследования станет разработка рекомендаций по проектированию содержательного компонента процесса обучения математике и описание методических рекомендаций по применению заданий, направленных на формирование математической грамотности обучающихся средствами предметной области «Математика».

Рис. Модель формирования математической грамотности

Библиографический список

1. Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. М.: Высшая школа, 1980. 368 с.
2. Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий. М.: Просвещение, 2019.
3. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие. Ростов н/Д: Феникс, 2015. 252 с.
4. Кузьмина Н.В. Понятие «педагогическая система» и критерии ее оценки // Методы системного педагогического исследования. Л., 1980. С. 34–41.
5. Кулюткин Ю.Н. Моделирование педагогических ситуаций. М.: Педагогика, 1981. 120 с.
6. Тумашева О.В., Берсенева О.В. Обучение математике с позиции системно-деятельностного подхода: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2016. 280 с.

РАЗБОРЧИВАЯ НЕВЕСТА, ИЛИ ДИНАМИЧЕСКИЙ БАНК

A PICKY BRIDE OR A DYNAMIC BANK

Т.Р. Салихов **T.R. Salikhov**

Вероятность, метод динамического программирования, динамический банк, оптимальная стратегия.

Как из множества кредитных организаций-поставщиков, предлагающих идентичные продукты и услуги, выбрать наилучшую? Заемщик должен сначала пропустить первую часть предложений банков (*367 из 1000*), только запоминая их для будущего сравнения, а далее принимать предложение, обладающее тем свойством, что оно лучше всех предыдущих. При этом вероятность получить самое лучшее предложение равная *0,368*. **Если при выборе кредита использовать теорию оптимальной остановки случайных процессов, то в кредит жить будет выгодно даже перед банком.**

Probability, dynamic programming method, dynamic bank, optimal strategy.

How to choose the best one from the many credit organizations-suppliers offering identical products and services? The borrower must first skip the first part of the banks' offers (367 out of 1000), only remembering them for future comparison, and then the borrower must accept an offer that has the property that it is better than all the previous ones. At the same time, the probability of getting the best offer is equal to 0.368. If the theory of optimal stopping of random processes is used when choosing a loan, then it will be profitable to live on credit even with a bank.

Жизнь в кредит в России становится все более популярной. Любой житейский вопрос можно решить при помощи заемных денег. Захотел купить новую бытовую технику? Приходишь в магазин и тут же оформляешь кредит. Решил сменить автомобиль? Прямо в салоне кредитный инспектор готов предоставить вам необходимую сумму. Нужны деньги на неотложные нужды: ремонт, отдых, образование…? Банкиры с радостью предоставят свои деньги в ваше распоряжение.

Неужели развитие потребительского кредитования положительно влияет на развитие экономики в целом? Можно сказать, что это ее главная стимулирующая сила, которая заставляет производство развиваться, торговлю – процветать, а банки – получать свою прибыль.

В экономике России банки относятся к числу наиболее быстро и эффективно развивающихся рыночных структур, которые предлагают в качестве кредитов самый ликвидный в мире товар – деньги. Однако в настоящее время, во время кризисного этапа, Россия лишилась части кредитных институтов и банковских активов, при этом свыше половины банков стали убыточными. Вопрос анализа функционирования банков стоит достаточно остро и особенно актуальным является применение математических моделей.

Проблема: потенциальный клиент ищет банк-организацию для кредитного запроса. Цель клиента: взять кредит в том банке, который предложит максимально выгодные условия займа, удовлетворяющие запросам и возможностям клиента. В связи с этим возникает вопрос, как действовать клиенту, чтобы получить наиболее выгодный кредит? [1, с. 137–140].

Гипотеза: если при выборе кредита использовать теорию оптимальной остановки случайных процессов, то в кредит жить будет выгодно даже перед банком. **Цель:** найти оптимальную стратегию потенциального клиента при выборе поставщика кредитного продукта.

Задачи: 1. Проанализировать решение задачи Мартина Гарднера «Разборчивая невеста». **2.** Познакомиться с принципами динамического программирования. **3.** Узнать, что такое динамический банк. **4.** Сформулировать задачу нахождения оптимальной стратегии для клиента при выборе поставщика кредитного продукта. **5.** Предложить принцип стратегии выбора потенциального банка для кредитного запроса.

Предположим, что некоторый клиент ищет кредитную организацию. Будем считать, что все банки образуют упорядоченное множество. Клиент со всеми банками знакомится в случайном порядке и во все банки подает заявление с просьбой о предоставлении ему кредитных услуг. Цель клиента: взять кредит в том банке, который, ознакомившись с его заявлением, предложит максимально выгодные условия займа, удовлетворяющие пожеланиям клиента по сумме кредита, длительности погашения, величине процентной ставки, удобству пользования услугами… В каждом банке заемщик решает, устраивают его условия, предложенные банком, или нет. Если устраивают, то клиент подписывает кредитный договор, и на этом поиск предложений заканчивается. Если нет, то банк после предварительно написанного клиентом заявления и затем поступившего отказа данного клиента больше не рассматривает. Поиск банков при этом продолжается. Соответственно, если, в конце концов, клиент не определится с выбором, то будем считать, что он проиграл, поскольку не достиг желаемого. В связи с этим возникает ***вопрос, как действовать клиенту, чтобы получить наиболее выгодный кредит?***

Примем количество кредитных организаций за n. Пусть клиент находится на шаге t. Нам нужно знать вероятность победы в случае выбора банка в момент t, то есть вероятность того, что он и выставляемое им предложение лучше всех. Обозначим эту вероятность за g_t. Также необходимо знание величины вероятности того, что он, в конце концов, получит самое хорошее предложение от банка при условии, что он пропустит первых t претендентов и дальше будет пользоваться оптимальной стратегией. Обозначим эту вероятность за h_t. Зная эти две величины для любого t, мы можем понять оптимальную стратегию заемщика: если на шаге t предложение не лучше всех предыдущих, то его нужно отвергнуть, если же оно действительно лучшее среди первых t, то нужно сравнивать g_t и h_t. Если больше g_t, то нужно остановиться на предложении t, если больше h_t, то нужно его отвергнуть и перейти к следующему предложению.

Теперь посчитаем g_t и h_t. Начнем считать с конца. Если на шаге n последний банк оказался лучше всех предыдущих, то вероятность того, что он действительно предложит самые выгодные условия, равна единице. Шаг $n–1$. Определим вероятность проигрыша в том случае, если клиент выберет именно этот вариант. Это будет вероятность того, что последний, n-й вариант окажется лучшим. Так как банки и их предложения равновероятно разбросаны по списку, значит, все эти вероятности равны $1/n$ и поэтому вероятность победы равна $g_{n-1} = 1 - 1/n = (n - 1)/n$. Пользуясь методом математической индукции, можно доказать, что $g_t = t/n$.

Таблица вероятностей победителя

g_t			$\frac{n-2}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	1
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Теперь рассмотрим h_t вероятность заемщика победить, то есть в конце концов получить кредит на более выгодных условиях, если он дойдет до шага t и пропустит вариант, который ему на этом шаге встретится, а далее будет действовать по оптимальной стратегии. Иными словами, это вероятность победить, оптимально действуя, начиная с шага $t+1$.

Таблица вероятностей заемщика

h_t			$\frac{(n-2)+(n-1)}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n}$	0
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Изобразим графики функций g_t и h_t. По одной оси отложим t – время, номер шага, а по другой p – вероятность, которая принимает значения от 0 до 1. При построении учтем линейность g_t и монотонность h_t.

Построенные графики двух функций пересекутся. Обозначим абсциссу точки пересечения за T (функции определены только в целых точках, но T не обязательно быть целым). Вспомним стратегию: если на шаге t вероятность h_t больше g_t, то продолжать независимо от предложения; если h_t не превосходит g_t, то останавливаться в случае, когда текущее предложение лучше всех предыдущих. Если t_1 – последнее число перед T, то тогда стратегия, как видно из рисунка, преображается в следующую: пропустить первые t_1 предложений, только просмотрев их для будущего сравнения с остальными, а дальше остановиться на первом лучшем среди предыдущих.

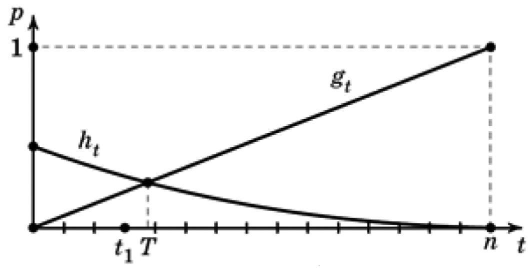


Рис. 1

Вернемся к неточности при построении графика. Сравним, например h_1 и h_2. Скорее всего, t_1 заведомо больше двух, а значит, и больше единицы. Поэтому на шаге 1 и на шаге 2 стратегия одна и та же: ждать шага t_1, а текущее предложение пропустить. Отсюда и вероятность победы в этих случаях одинакова и совпадает с $h_{t1.}$ Таком образом, можно заключить, что до момента t_1 функция h_t остается постоянной (рис. 2, приложение 4).

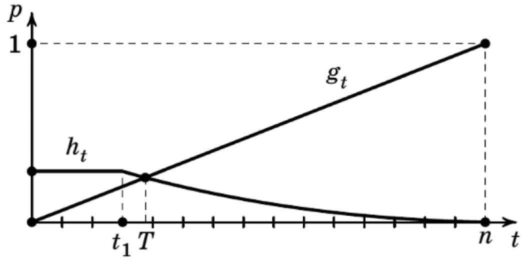


Рис. 2

Для достижения цели осталось посчитать h_t и t_1. Делать это также удобнее с конца, причем в силу высказанного будем считать h_t только для $t \geq t_1$. Как уже отмечалось, $h_n=0$. Далее рассмотрим h_{n-1}. Это вероятность того, что заемщик получит лучшее предложение, если пропустит $(n–1)$-ое. Но это произойдет в единственном случае – если последнее окажется лучше всех. Вероятность этого, как уже упомянуть выше, равна $1/n$. Предположим, что заемщик отверг предложение с номером $(n–2)$ и дальше действует по оптимальной стратегии. Тогда возможны два варианта: $(n–1)$-ое является лучшим среди первых $(n–1)$ предложений (вероятность равна $1/(n–1)$) и $(n–1)$-ое не является лучшим среди первых $(n–1)$ предложений (вероятность равна $(n–2)/(n–1)$). В первом случае очевидно, что нужно соглашаться на последнее предложение, это соответствует оптимальной стратегии, причем вероятность победы равна $g_{n-1}=(n–1)/n$. Во втором случае заемщик должен автоматически отказать кредитору, и тогда шансы на победу равны $h_{n-1}=1/n$.

По формуле полной вероятности получаем, что

$$h_{n-2}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-2)+(n-1)}{n(n-1)}.$$

Для того чтобы сформулировать гипотезу насчет общего вида h_t, сравним h_t и g_t, то есть понаблюдаем за величиной h_t/g_t. Если она больше 1, то h_t больше g_t, и, соответственно, наоборот. В результате исследования нами было доказано, что

$$h_t=\frac{t}{n}\cdot\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right).$$

Для окончательного решения задачи нужно сравнить h_t и g_t. Так же, как и выше, сравним h_t / g_t с единицей, воспользовавшись формулой общего вида. Для $t \geq t_1$ имеет место формула $\frac{h_t}{g_t}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}$.

Соответственно, для того чтобы найти t_1, необходимо, постоянно уменьшая t, складывать $1/t$, начиная с $t=n–1$, пока сумма не станет больше 1; t, при котором это произойдет и есть t_1.

Вывод: Например, если $n=5$ (количество рассматриваемых банков), то $1/4+1/3<1$, а $1/4+1/3+1/2>1$. Стратегия такая: первый банк пропустить, второй пропустить, а дальше, начиная с третьего, брать в кредит в первом попавшемся банке, кредитные условия которого лучше двух предыдущих.

В городе С*** зарегистрировано 75 банков [8].

Значит, $n=75$. Для нахождения t просчитаем накапливаемые суммы $1/74$, $1/74+1/73$, $1/74+1/73+1/72$, $1/74+1/73+1/72+1/71$ ..., используя электронные таблицы Microsoft Excel. Замечаем, что накапливаемая сумма достигает значения, большего 1 при $t=28$. Значит, начиная с 28-го предложения, клиенту необходимо принимать первое удачное предложение, которое, на его взгляд, предлагает максимально выгодные условия займа.

В 1963 году впервые задачу такого типа сформулировал М. Гарднер. Спустя несколько лет Е.Б. Дынкин упростил решение данной задачи, доказав, что $t=n/e$ [4, с. 18]. При этом $h_t = g_t = t/n = 1/e$. То есть вероятность успеха, который мы искали с самого начала, равен $1/e$ или 0,368.

Вывод: «Невеста-девушка смышляла жениха…». Принцесса должна сначала пропустить первую $1/e$ часть женихов (в случае $n=1000$ это примерно *368* человек), только запоминая их для будущего сравнения, а дальше она должна брать в мужья первого же, который обладает тем свойством, что он лучше всех своих предшественников. При этом вероятность получить самого лучшего жениха из всех n претендентов равна примерно *0,368*.

Полученное значение *0,368* проверим-подтвердим, используя среду программирования Pascal. **Вывод:** оптимальная вероятность *0,368* найдена правильно.

Ответ на сформированную изначально задачу выглядит следующим образом: заемщик должен сначала пропустить первую часть предложений, только запоминая их для будущего сравнения, а далее он должен принимать первое предложение, обладающее тем свойством, что оно лучше всех предыдущих. При этом вероятность получить самое лучшее предложение равна 0,368 [5, с. 95–96].

Заключение

Цель данной исследовательской работы: найти оптимальную стратегию потенциального клиента при выборе поставщика кредитного продукта. Для этого была выдвинута гипотеза: если при выборе кредита использовать теорию оптимальной остановки случайных процессов, то в кредит жить будет выгодно даже перед банком.

На основе метода динамического программирования и теории оптимальной остановки случайных процессов с помощью метода, доказанного М. Гарднером, была решена актуальная задача потребительского рынка, применимая непосредственно к банковской тематике и кредитной политике.

Ответ на сформулированную изначально задачу, как из множества кредитных организаций-поставщиков, предлагающих идентичные продукты и услуги, выбрать наилучшую, выглядит следующим образом: заемщик должен сначала пропустить первую часть предложений банков (*367 из 1000*), только запоминая их для будущего сравнения, а далее заемщик должен принимать предложение, обладающее тем свойством, что оно лучше всех предыдущих. При этом вероятность получить самое лучшее предложение равна *0,368*.

Учитывая, что в городе С*** зарегистрировано 75 банков, была предложена стратегия выбора потенциального банка для кредитного запроса: заемщик должен пропустить 27 предложений, и, начиная с 28-го предложения, клиенту необходимо принимать первое удачное предложение, которое, на его взгляд, предлагает максимально выгодные условия займа.

Для нахождения вероятностей и обоснования стратегии выбора потенциального были использованы методы математической индукции и алгебраических численных вычислений. Перечисленные методы были реализованы с помощью табличного процессора MS Excel и среды программирования PascalABC.

После окончания школы я планирую поступать в вуз на экономический факультет, поэтому **задача на будущее**: проанализировать метод выбора потенциального банка для кредитного запроса и рассмотреть его эффективность и полезность при необходимости совершения выбора из имеющихся единообразных альтернатив, образующих упорядоченное множество.

Библиографический список

1. Пинчук Е.В. Выбор кредитных продуктов в конкурентной банковской среде // Сборник научных статей аспирантов СПбГИЭУ. Современные проблемы экономики, социологии и права. 2012. Выпуск 6.
2. Пинчук Е.В. Проблематика банковской деятельности и возможные пути решения, формализованные на основе классической теории игр // Сборник научных статей аспирантов СПбГИЭУ. 2010. Выпуск 8.
3. Крылов И.А. Разборчивая невеста. URL: https://www.litmir.me/br/?b=279911
4. Гусейн-Заде С.М. Разборчивая невеста // Библиотека «Математическое просвещение». М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2003. Выпуск 25.
5. Динамическое программирование для начинающих. URL: https://tproger.ru/articles/dynprog-starters/
6. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
7. Гильфердинг Р. Финансовый капитал. М., 1959.
8. Зарегистрированные банки г. Сургут. URL: https://www.banki.ru/credit-master/?utm_source=google&utm_medium=cpc&utm_term=%D0%BA%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D1%82&utm_campaign=pk&source=go_cpc_1802144116_351352061700_kwd-1029919643&gclid=EAIaIQobChMI7eLHqrjr7QIVASF7Ch3GWwv3EAAYASAAEgL_gPD_BwE#purposeamountperiod

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

INFORMATION TECHNOLOGIES IN PROJECT ACTIVITIES AS A MEANS OF DEVELOPING MATHEMATICAL LITERACY OF SCHOOLCHILDREN

Т.С. Ширикова, Т.А. Быц **T.S. Shirikova, T.A. Bус**

Проектная деятельность, метод проектов, информационные технологии, математическая функциональная грамотность, электронные таблицы, практико-ориентированные задачи.

Формирование функциональной математической грамотности школьников – приоритетная задача образования. В статье рассматривается один из подходов решения данной проблемы путем организации проектной деятельности. Обучающие в рамках проектов сами придумывают задачи из окружающей действительности и решают их. При этом формируется понимание в потребности получения знаний и соответствующая мотивация.

Project activity, project method, information technology, mathematical functional literacy, spreadsheets, practice-oriented tasks.

The formation of functional mathematical literacy of schoolchildren is a priority task of education. The article discusses one of the approaches to solving this problem by organizing project activities. Within the framework of projects, students themselves come up with tasks from the surrounding reality and solve them. At the same time, an understanding of the need for knowledge and the corresponding motivation is formed.

Современное обучение должно основываться на интересах и потребностях обучающихся и на личном опыте. Основным принципом обучения должно быть то, что знания не могут быть приобретены, переданы, а являются результатом собственной деятельности учащегося. В таком случае актуальным является метод проектов, поскольку в его основе лежит развитие познавательных, творческих навыков школьников, критического мышления, умений самостоятельно ставить задачи и находить пути решения, ориентируясь в информационном пространстве.

В связи с этим возникла идея формирования математической функциональной грамотности в школе, используя проектную деятельность. Развитие математической функциональной грамотности в школе – приоритетная задача образования. Математическая грамотность, по мнению Г.В. Дорофеева, должна обеспечивать «простейшие потребности человека в его повседневной жизни», т.е. «магазинные» расчеты, расчет налогов, тарифов, скидок и штрафов и пр., а также использование математической терминологии и символики в естественном языке. Организация проектной деятельности со школьниками позволит добиться результатов в развитии математической грамотности. Во-первых, это связано с тем, что при работе над проектом они будут не только сами искать материал для задачи из окружающей действительности, обрабатывать его, но и формулировать – придумывать задачи, потом искать пути их решения, учитывая оптимальные ходы, эффективность и другие составляющие. Во-вторых, в процессе проектной деятельности ученики овладевают новыми знаниями, обогащают свой жизненный опыт, получают возможность практического применения своих интеллектуальных, организаторских способностей, развивают свои коммуникативные способности, овладевают общеучебными умениями. Освоение материала и сам процесс работы над проектом становятся средствами, которые обеспечивают переход от обучения учащихся к их самообразованию.

Не стоит забывать, что изменение подходов к контрольно-оценочной системе, связанное с введением новых заданий в ОГЭ, требуют необходимости дополнительных форм подготовки обучающихся. На фоне роста неуспешности обучающихся в решении задач 1–5 ОГЭ по математике приходит понимание того, что традиционные методики не совершенны, не всегда эффективны для достижения хороших результатов.

Мы считаем, что использование метода проектов наиболее эффективно для формирования математической функциональной грамотности школьников, поскольку формируется понимание в потребности получения знаний и соответствующая мотивация. Проектная деятельность представляет собой такой вид учебной деятельности, при котором происходит наиболее качественное усвоение материала, в то время как традиционное обучение приводит лишь к стихийному формированию структуры учебной деятельности, проектная деятельность самим своим содержанием и качественными особенностями ставит ученика перед необходимостью полного усвоения всех структурных компонентов учебной деятельности.

Для организации проектной деятельности по формированию функциональной математической грамотности мы предлагаем организовать курс внеурочной деятельности, в рамках которого школьники, работая совместно, будут создавать проекты. Тема проекта – выбор обучающихся, но должна быть интересна и актуальна для всех. Однако учителю требуется подготовить ребят, представив примерные темы возможных проектов. Например,

1. Что делать, если нужен ремонт школьного коридора?
2. Как приготовить ужин на 4 человек всего на 400 рублей? Оптимизация «магазинных» расходов.
3. Какие налоги платят мои родители и как их можно снизить?
4. Мы едем классом в город Казань! Расчет оптимальной стоимости туристической поездки.
5. Как купить себе компьютер в кредит?

После того как школьники определятся с темой проекта, учитель предлагает составить цепочку задач, решение которых позволит достигнуть цели проекта.

Так, например, при работе над проектом «Что делать, если нужен ремонт школьного коридора?» возможны следующие задачи:

1. Размеры школьного коридора 5 м х 3,5 м. Нужно застелить пол досками толщиной 5 см и длиной 2 м. Сколько потребуется кубометров досок, если на обрезки следует добавить 5 % нужного количества?

2. Для настилки полов в коридоре применяются пластмассовые плитки. Сколько плиток размером 15 см х 15 см потребуется для пола в 50 кв. м? Сколько будут весить такие плитки, если 1 кв. м этих плиток весит 2 кг?

3. Для настилки полов применяется линолеум. Сколько рулонов такого линолеума нужно израсходовать, чтобы настелить пол в зале длиной 16,25 м и шириной 1,5 м, если длина рулона 30 м и ширина 1,5 м. В каком направлении экономнее укладывать линолеум?

4. Стены коридора отделывают квадратными плитками со сторонами 15 см. Определите общее число таких плиток, необходимых для отделки коридора длиной 2,4 м, шириной 1,8 м и высотой 0,3 м, если в коридоре есть двери высотой 1,8 м и шириной 0,8 м.

Следует отметить, что работа над проектом предполагает проанализировать большой объем информации и без цифровых технологий не удастся ее обработать, а в дальнейшем использовать. Наиболее удачным средством в данной деятельности являются возможности электронных таблиц EXCEL. Спектр возможностей таких таблиц огромен, от создания простых таблиц, построения диаграмм и графиков, до решения сложных вычислительных задач и моделирования различных процессов. Школьники уже в 8 классе в курсе Информатики знакомятся с EXCEL, поэтому использование электронных таблиц в работе над проектом окажет существенную помощь и поможет решить ряд задач.

Покажем на примере проекта «Что делать, если нужен ремонт школьного коридора?», как оптимизировать работу учащихся с большим объемом информации. Проект посвящен изучению вопроса, какие затраты необходимы для ремонта школьного коридора, какие строительные материалы необходимы и какие строительно-малярные работы необходимо выполнить.

При подготовке проекта требуется:

– спрогнозировать специальные ситуации (подбор экологически безопасных материалов, не травмоопасных, простых в уходе; изучить санитарные нормы и требования к окраске, которые необходимо соблюдать; какие виды строительно-малярных работ необходимы и сколько они стоят; выполнить необходимые расчеты);

– разработать специальные цепочки задач;

– акцентировать внимание школьников на механизмы и способы решения поставленных задач (возможно, побеседовать с замдиректора по хозяйственной части школы; сходить в строительный магазин и поинтересоваться наличием материалов, способами их доставки и ценами; рассмотреть возможность воспользоваться интернет-закупками стройматериалов и пр.).

Работая над вычислительными задачами, школьники используют таблицы EXCEL. Например, в EXCEL можно подготовить таблицу с видами материалов, их ценой и количеством; подготовить таблицу с видами работ, объемом работ и их стоимостью и т.п.). Покажем на примере одной задачи проекта «Что делать, если нужен ремонт школьного коридора?»

Задача: По результатам анализа сайтов строительных материалов составьте таблицу с информацией о наличии и стоимости материалов, необходимых для ремонта школьного коридора. Найдите оптимальный вариант краски для стен по цене и качеству. При выборе материала учитывайте, что стены могут быть окрашены только в голубой, зеленый, светло-желтый и розовый цвет. Краска не должна быть токсичной и удовлетворять санитарным требованиям. Исходные данные для задачи: коридор школы имеет размеры 10 метров в длину, 2 м в ширину, высота потолка 3 м (рис.).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Название краски	Цвет	Объем 1 банки (кг)	Цена 1 банки(руб.)	Расход краски на 1 м2	Площадь поверхности (м2)	Количество (банок)	Стоимость
2	Текс Стройтекс	белая	14	912	6-8 м2 /кг			
3								
4								
5								
6								
7								

Рис. Таблица к задаче

Указание: Определите и занесите в таблицу формулы для подсчета общей стоимости и количества банок с краской, сделайте вывод об оптимальности использования краски для ремонта коридора школы.

Благодаря такой организации работы над проектом обучающиеся глубже понимают роль математики в жизни: отбор числовых данных при составлении заданий, связанных с реальными жизненными ситуациями, умение извлечь информацию, проанализировать ее, оценить, создать математическую модель (задачу) по реальной действительности и решить ее. Совместная работа содействует воспитанию коммуникативных навыков, воспитанию любви к труду. Дети учатся самостоятельности и лучше усваивают учебный материал.

Библиографический список

1. Ившина Г.В., Исмагилова К.К. Развитие математической культуры средствами информационных и коммуникационных технологий в обучении студентов гуманитарного профиля: монография. Казань, 2010.
2. Тяглова Е.Г., Васильева Р.Л. Формирование математической грамотности учащихся на уроках математики посредством заданий, представленных в контексте реальных жизненных ситуаций // Нижегородское образование. 2020. № 2. С. 72–78.
3. Открытый банк заданий ОГЭ. URL: http://oge.fipi.ru/os/xmodules/qprint/index.php?proj=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0 .

ИГРЫ С ДИНАМИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ НА ЗАНЯТИЯХ КРУЖКА «ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5–6 КЛАССОВ

GAMES WITH DYNAMIC MODELS IN THE ELECTIVE CLASSES «EXPERIMENTAL MATHEMATICS» FOR STUDENTS 5–6 GRADES

Т.А. Яковлева **T.A. Yakovleva**

Динамические модели, экспериментальная математика, системы динамической математики, GeoGebra.

В статье рассматривается пример игры с динамическими моделями на занятиях кружка «Экспериментальная математика» для учащихся 5–6 классов.

Dynamic models, experimental mathematics, systems of dynamic mathematics, GeoGebra.

The article considers an example of a game with dynamic models in the elective classes «Experimental Mathematics» for students of 5–6 grades.

Кружок «Экспериментальная математика» для учащихся 5–6 классов должен решить две образовательные задачи: пропедевтика изучения геометрии и подготовка учащихся к использованию систем динамической математики (на примере GeoGebra) в учебной геометрической деятельности.

Представим пример включения учащихся в игровую деятельность по построению динамической модели часов с помощью GeoGebra. Учащиеся совместно с учителем строят модель согласно следующему алгоритму:

1) Выбираем в панели инструментов «Окружность по центру и радиусу» (рис. 1).

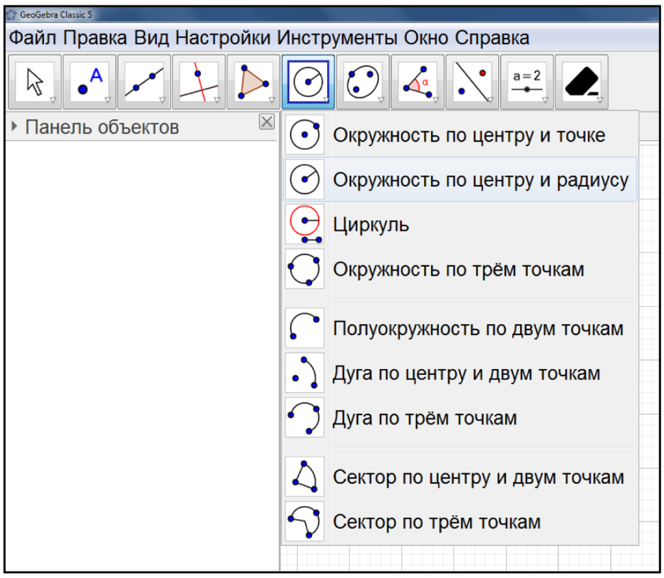


Рис. 1

2) Далее задаем радиус окружности произвольно, например 7 (рис. 2).

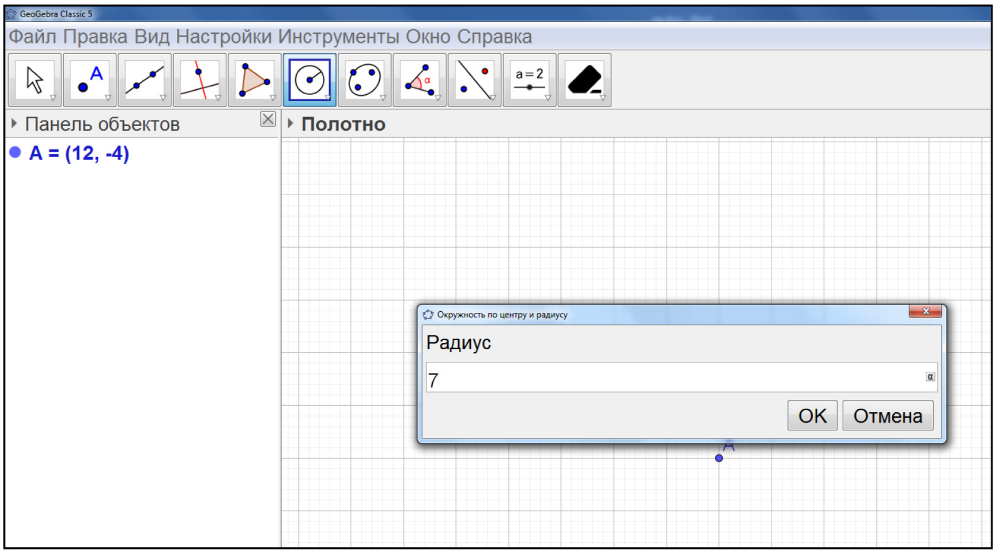


Рис. 2

3) С помощью инструмента «Текст» поставим числа на циферблате (рис. 3).

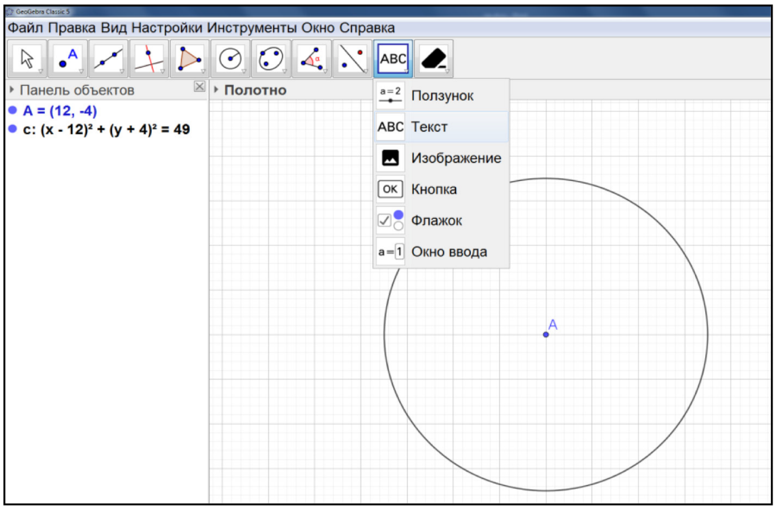


Рис. 3

4) Получился циферблат часов (рис. 4).

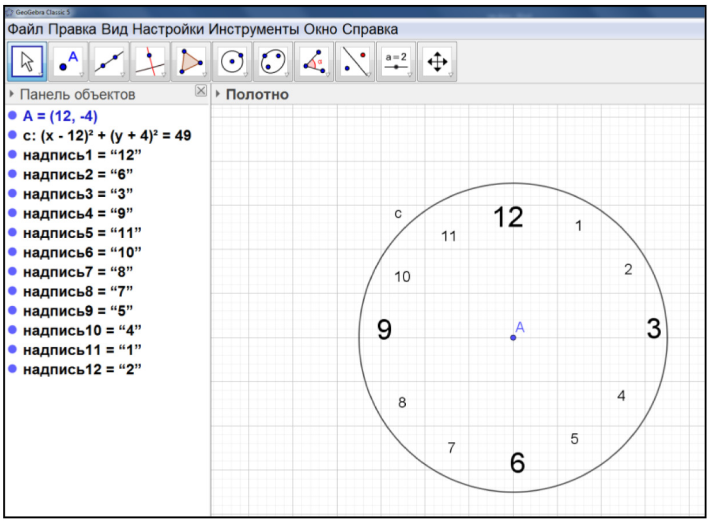


Рис. 4

5) Чтобы построить стрелку часов, выбираем инструмент «Вектор» (рис. 5).

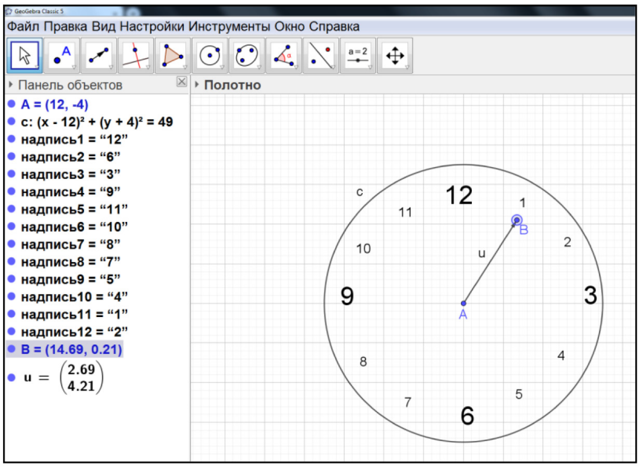


Рис. 5

6) Чтобы заставить стрелку наших часов двигаться, нам понадобится инструмент «Ползунок» (рис. 6).

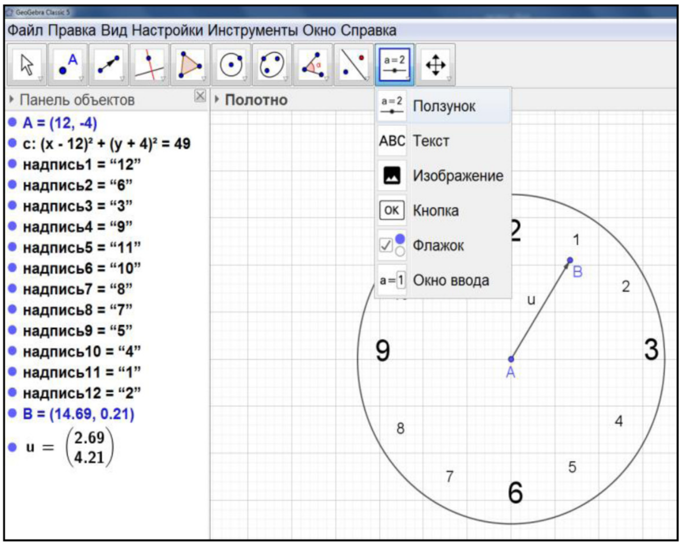


Рис. 6

7) Выбираем угловой ползунок «Угол» с именем α и задаем интервал от 0° до 360° и шагом 1°, нажимаем ОК (рис. 7).

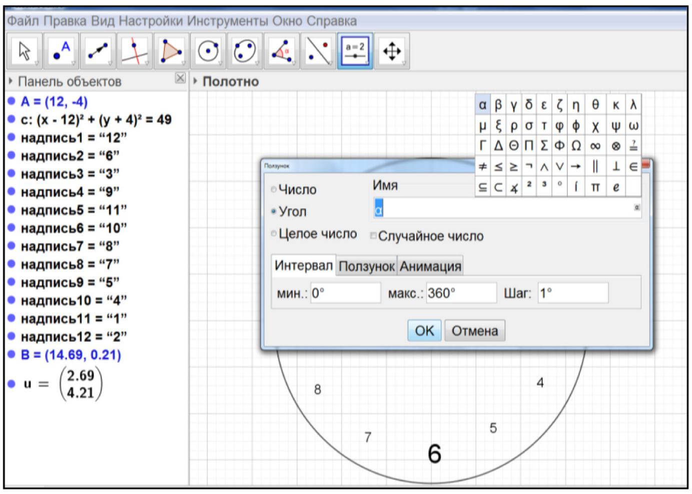


Рис. 7

8) Используем инструмент «Поворот вокруг точки» (рис. 8).

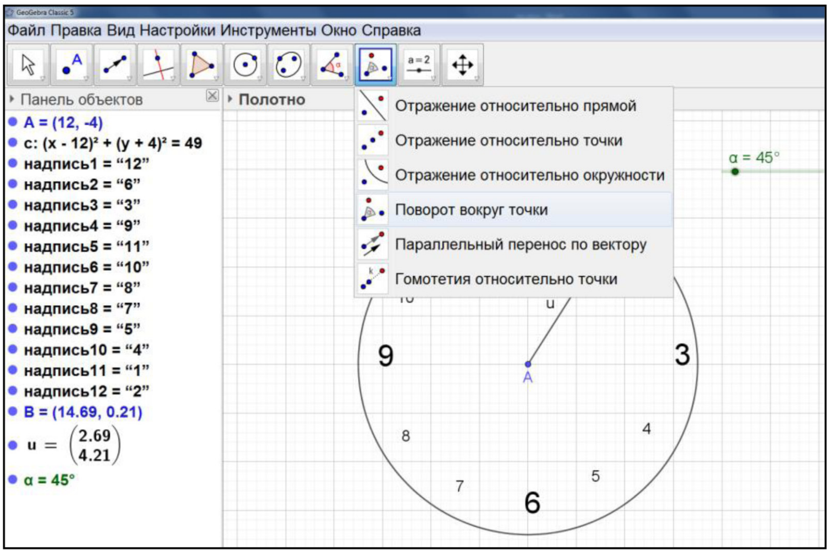


Рис. 8

9) Задаем угол α по часовой стрелке, нажимаем ОК (рис. 9).

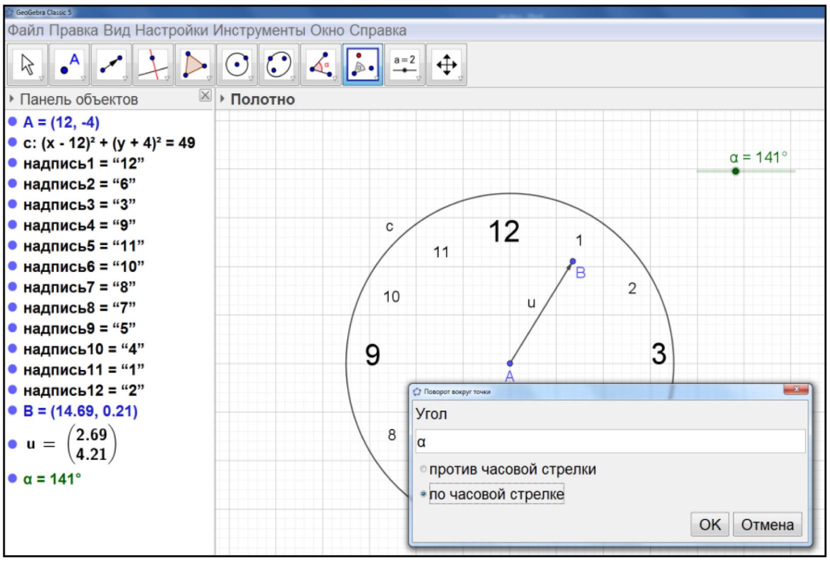


Рис. 9

10) Получаем вектор u1’, который и будет двигаться вокруг точки А (рис. 10).

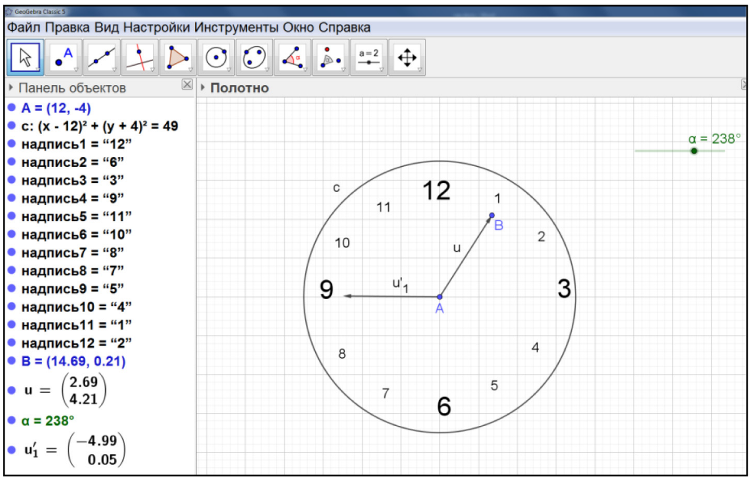


Рис. 10

11) Вектор u скроем, выбрав свойство «Показывать объект» (рис. 11).

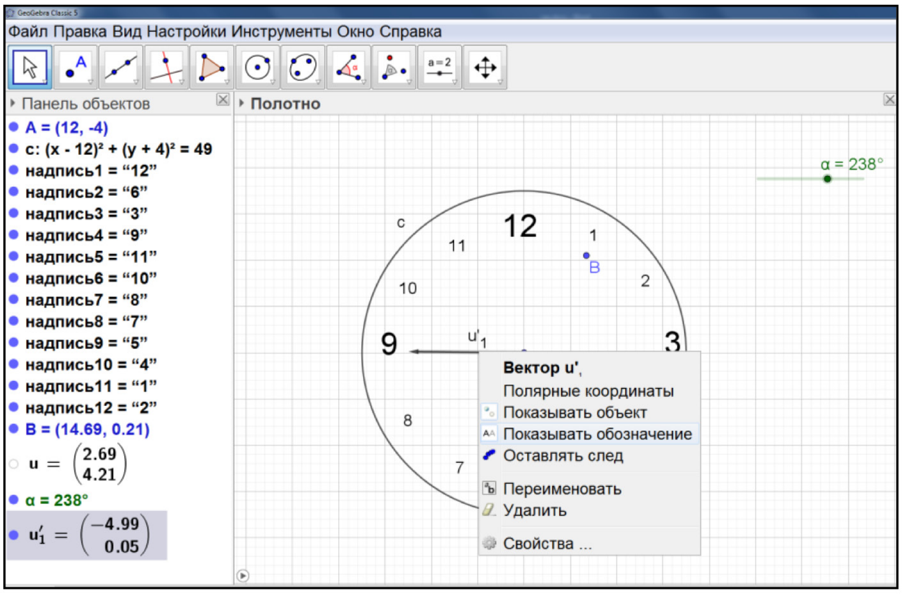


Рис. 11

12) Чтобы стрелка вращалась всегда вокруг точки А по часовой стрелке, в свойствах ползунка в разделе «Анимация» выбираем «Увеличение» (рис. 12).

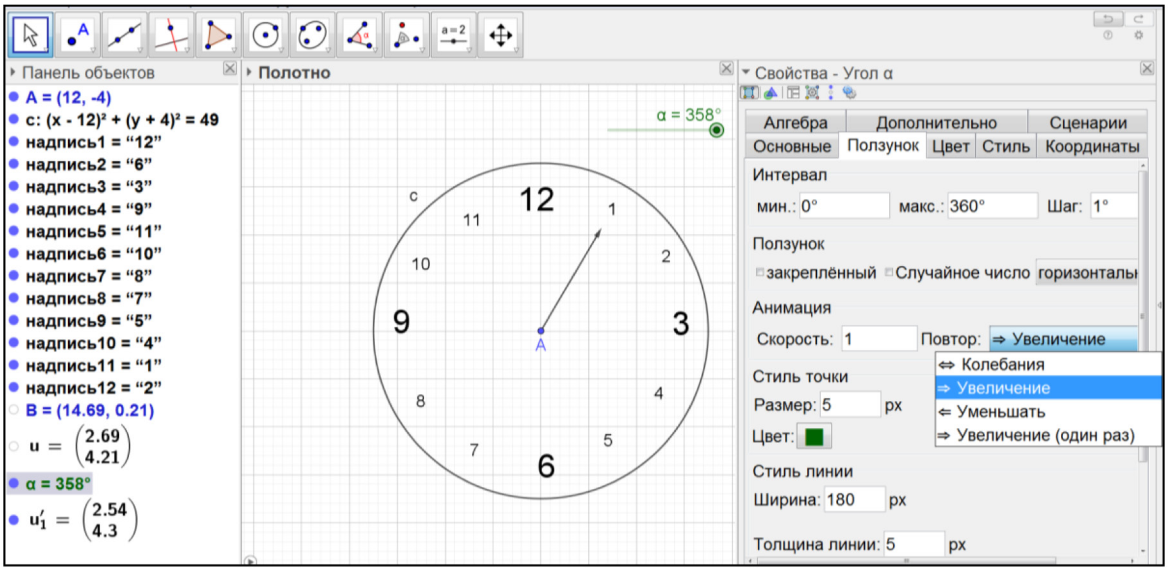


Рис. 12

Мы полагаем, что включение учащихся 5–6 классов в игровую деятельность с динамическими моделями снимет трудности привлечения GeoGebra в качестве средства учебной геометрической деятельности в рамках систематического курса геометрии, а также обеспечит их готовность к рациональному использованию этого средства.

Резолюция XI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании»

Конференция была посвящена 90-летию КГПУ им. В.П. Астафьева.

Заслушав и обсудив пленарные и секционные доклады, участники конференции отмечают, что в настоящее время в высших учебных заведениях и школах страны при обучении математике успешно используются информационные технологии. Математические кафедры и кафедры информатики совместно с учителями, аспирантами и студентами ведут исследования и создают программные средства для применения их при обучении математике в школе и вузе. Эти средства далеко не всегда доходят до адресата, не все учителя и преподаватели, получившие доступ к ним, имеют возможность использовать их в учебном процессе.

В связи с этим конференция считает целесообразным:

1. На базе кванториумов и технопарков педагогических университетов страны организовать постоянно действующие семинары для преподавателей и учителей математики по обмену опытом в области применения информационных технологий в математическом образовании.
2. Поддержать инициативу Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (г. Архангельск) по созданию виртуальных музеев занимательной математики, привлекать к подготовке экспонатов для таких музеев школьников, студентов, учителей и преподавателей вузов.
3. В практике преподавания математики в школе придерживаться исследовательского стиля обучения, активнее использовать информационные технологии, позволяющие включить компьютерный эксперимент как средство учебно-научного исследования, выдвижения гипотез, проверки утверждений, поиска решения.

11.11.2022 Организационный комитет конференции

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛИКУЛОВА Фазилат Эльмурад кизи – студент, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: fazilat1alik@gmail.com

АНТИПОВА Ирина Августовна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности, Сибирский федеральный университет; e-mail: iantipova@sfu-kras.ru

БАРКОВИЧ Оксана Аркадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент БГПУ им. М. Танка, Республика Беларусь; e-mail: barkovich@bspu.by

БЕЗУМОВА Ольга Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования САФУ им. М.В. Ломоносова; e-mail: o.bezumova@narfu.ru

БЕЛИЧЕНКО Оксана Михайловна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева; e-mail: oksanabelichenko4@mail.ru

БРОННИКОВА Лариса Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент, АлтГПУ;
e-mail: anastasiya_g-98@mail.ru

БОРТНИКОВА Юлия Владимировна – студентка 2 курса, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет; e-mail: jull02@mail.ru

БОЧКАРЕВА Даниэла Владимировна – аспирант, КГПУ им. В.П. Астафьева; преподаватель ГБПОУ НСО «НППК», Новосибирск; e-mail: danaloro13@gmail.com

БУШУЕВА Наталья Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, e-mail: nbushueva@sfu-kras.ru

БЫЦ Татьяна Алексеевна – магистрант, САФУ имени М.В. Ломоносова; e-mail: byc.t@edu.narfu.ru

ВЕБЕР Валентина Викторовна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики Шелаевской СОШ; e-mail: veber.valentina2033@yandex.ru

ГАГЕЛЬГАНС Ксения Владимировна – аспирант, Сибирский федеральный университет; e-mail: Ksenija.sidorova2017@yandex.ru

ГАСАНОВА Айсун Рамил кызы – студентка 5 курса, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: aysungs19@gmail.com

ГИМАТДИНОВА Галия Нурулловна – учитель математики, муниципальное автономное общеобразовательное учреждение «Средняя школа № 150 имени Героя Советского Союза В.С. Молокова», Красноярск; e-mail: frenchwomen_2014@mail.ru

ГОЛОВЕНКО Мария Вадимовна – студент, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики гимназии № 7, Красноярск; e-mail: golovmaria22@gmail.com

ГРЕЦКАЯ Анастасия Николаевна – магистр, АлтГПУ; e-mail: anastasiya_g-98@mail.ru

ГУРИНА Нина Юрьевна – студент 5 курса, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, Челябинск; e-mail: gurina_nina@bk.ru

ДАУТОВА Светлана Викторовна – учитель математики, ММБОУ «СОШ 18», г. Октябрьский, Республика Башкортостан; e-mail: malshakova.ylia@yandex.ru

ДРОЗДОВА Анна Владиславовна – студентка 5 курса направления подготовки «Педагогическое образование», Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем; e-mail: drozdovaanya2000@mail.ru

ДУРАКОВ Борис Константинович – кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой ВМ 2, Сибирский федеральный университет; e-mail: bkdurakov@gmail.com

ЖЕРЕБЦОВА Анастасия Федоровна – студент, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: stenka97@mail.ru

ИСАЕВА Диана Эдуардовна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: diana_isaev00@mail.ru

КАРИМОВ Ерканат Камысбаевич – учитель математики, КГУ «Общеобразовательная школа имени Ы.Алтынсарина отдела образования Амангельдинского района», Республика Казахстан, Костанайская область, Амангельдинский район; e-mail: eroha89kz@mail.ru

КЕЙВ Мария Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mkejv@yandex.ru

КЛЕШКОВА Екатерина Андреевна – аспирант, Сибирский федеральный университет;
e-mail: ekleshkova@gmail.com

КОЛМАКОВА Наталья Робертовна – кандидат педагогических наук, доцент; e-mail: kolmakovanr@yandex.ru

КРАВЦОВА Ольга Вадимовна – кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский федеральный университет; e-mail: okravtsova@sfu-kras.ru

ЛАРИН Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: larin_serg@mail.ru

ЛАРИОНЧИКОВА Анна Аркадьевна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МБОУ «Салбинская СОШ»; e-mail: lar2298@bk.ru

ЛЫТКИНА Лидия Ивановна – доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева; Красноярск; e-mail: lytkina@yandex.ru

МАЙЕР Валерий Робертович – доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mavr49@mail.ru

МАКАРОВА Дарья Александровна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: darua98@mail.ru

МАРИНА Светлана Анатольевна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; преподаватель СПО;
e-mail: marinasveta@mail.ru

МАРТЫНОВ Василий Васильевич – магистрант 1 курса, КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: Vasya007.1997@yandex.ru

МАТЮШКИН Дмитрий Романович – студент 3 курса бакалавриата, КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: dima.matyushkin2002@mail.ru

МЕЛЬНИКОВА Ирина Витальевна – кандидат технических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: mullar.iv@mail.ru

МЕЩЕРЯКОВА Елена Евгеньевна – студентка 2 курса, ЮУрГГПУ; e-mail: meshcheryakova383@gmail.com

НИКИЧЕНКО Юлия Владиславовна – студентка 5 курса направления подготовки «Педагогическое образование», Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем; e-mail: nikichenko_yulia@mail.ru

НИКУЛИНА Дарья Андреевна – магистрант 1 курса направления подготовки «Педагогическое образование, магистерская программа «Математическое образование», Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: dashanikulina1998@yandex.ru

ОВЧИННИКОВА Илона Владимировна – магистрант, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: blumenil@bk.ru

ОВЧИННИКОВА Раиса Петровна – старший преподаватель кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, САФУ им. М.В. Ломоносова; e-mail: r.ovchinnikova@narfu.ru

ПАВЛОВА Мария Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, САФУ им. М.В. Ломоносова; e-mail: m.pavlova@narfu.ru

ПАРАЩУК Иван Александрович – аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: ivan-ia-95@mail.ru

ПИВЦАЙКИНА Ирина Евгеньевна – магистрант, ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»; e-mail: nice.kokareva@inbox.ru

ПИСАРЕНКО Ксения Павловна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МБОУ «Элитовская СОШ», п. Элита Емельяновского р-на; e-mail: xenia1997@mail.ru

ПОДУФАЛОВ Николай Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии образования; e-mail: londont@yandex.ru

ПУХОВА Юлия Игоревна – учитель математики, МАОУ «Гимназия № 17», Пермь;
e-mail: malshakova.ylia@yandex.ru

РЫБАКОВА Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: ryba-kr@yandex.ru

СААЯ Сылдыс Казараковна – старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математики, ТувГУ, Кызыл; e-mail: saaya@list.ru

САЛИХОВ Тахир Ришатович – ученик 9 класса, МБОУ Нижнесортымская СОШ, Сургутский район, Ханты-Мансийский АО-Югра, Тюменская область; e-mail: margo2012@mail.ru

САЛЧАК Ай-Кыс Эдуартовна – аспирант, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: msase94@mail.ru

САМОДУРОВА Валентина Анатольевна – учитель математики и информатики МБОУ «Балахтинская СШ № 1 им. Героя Советского Союза Ф.Л. Каткова», п. Балахта; e-mail: kozhukhovskaya93@mail.ru

СЕМЁНОВА Дарья Владиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский федеральный университет; e-mail: DVSemenova@sfu-kras.ru

СЕНАШОВ Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН; e-mail: sen1112home@mail.ru

СИДНЕВА Виктория Юрьевна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: viktoriyasidneva@mail.ru

СОМОВА Марина Николаевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева; e-mail: somova.marina@mail.ru

ТЕБЕНЬКОВА Анна Петровна – магистрант, САФУ имени М.В. Ломоносова; e-mail: tebenkova.a@edu.narfu.ru

ТОРСУНОВА Элина Рафаэльевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры гуманитарных, математических и естественнонаучных дисциплин Пермского филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Пермского филиала Волжского государственного университета водного транспорта; e-mail: etorsunova@mail.ru

ТРОИЦКАЯ Ольга Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой экспериментальной математики и информатизации образования, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: o.troitskaya@narfu.ru

ТРОЯКОВА Галина Александровна – доцент кафедры математики и методики преподавания математики, ТувГУ; учитель математики ГЛРТ, Кызыл; e-mail: tga.52@mail.ru

ХОРЬЯКОВА Юлия Александровна – аспирант 1 курса, СФУ, Красноярск; e-mail: xoryakova1998@gmail.com

ХОТЕНКО Ирина Валерьевна – учитель математики, МАОУ СШ № 150, Красноярск; e-mail: Angirinas@mail.ru

ШЕВЕЛЁВА Ирина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский федеральный университет; e-mail: isheveleva@sfu-kras.ru

ШИРИКОВА Татьяна Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, САФУ имени М.В. Ломоносова; e-mail: t.shirikova@narfu.ru

ЮШКОВА Галина Михайловна – учитель математики и информатики, МБОУ «Балахтинская СШ № 1 им. Героя Советского Союза Ф.Л. Каткова», п. Балахта; e-mail: galinayushkowa@yandex.ru

ЯКОВЛЕВА Таисья Александровна – магистрант 1 курса направления подготовки «Педагогическое образование», магистерская программа «Математическое образование», Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем; e-mail: yakovleva.t@edu.narfu.ru

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В МАТЕМАТИКЕ
И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы XI Всероссийской с международным участием
научно-методической конференции,
посвященной 90-летию КГПУ им. В.П. Астафьева

Красноярск, 10–11 ноября 2022 г.

Электронное издание

Редактор *А.П. Малахова*
Корректор *М.А. Исакова*
Верстка *Н.С. Хасаншина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 23.11.22.
Формат 60х84 1/8.
Усл. печ. л. 28,5