

## Содержание

Введение.....	3
Параграф 1. УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ .....	10
Параграф 2. УСРЕДНЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПЛОСКОСТИ $(x, y)$ .....	22
Заключение.....	26
Библиографический список.....	27

## ВВЕДЕНИЕ

Данная работа представляет собой исследование движения заряженных частиц в однородном магнитном поле, зависящее от времени случайным образом по специальному закону.

**Объект исследования** – движение нерелятивистских заряженных частиц в меняющихся во времени электрическом и магнитном полях.

**Предмет исследования** - анализ поведения нерелятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле со случайными во времени переключениями, моделируемыми марковским дихотомическим процессом (случайный телеграфный сигнал).

**Цель данной работы** - изучить влияние случайного переменного во времени магнитного поля на движение заряженной частицы, получить точное аналитическое решение для статистических характеристик движения частицы.

**Для достижения поставленной цели дипломной работы необходимо решить следующие задачи:**

1. Ознакомиться с необходимой литературой;
2. Произвести математические расчеты, с помощью которых определить статистические характеристики движения нерелятивистской заряженной частицы в магнитном поле со случайными переключениями, моделируемыми марковским дихотомическим процессом (случайный телеграфный сигнал);
3. Сравнить полученные характеристики и траекторию движения заряженной частицы в магнитном поле со случайными переключениями с результатами известной задачи о ларморовской процессии частицы в постоянном магнитном поле.

Применение законов классической физики Ньютона и Максвелла к движению заряженных частиц на протяжении многих лет привлекает внимание специалистов разных областей физики (см., например, [1-4] и цитированную там литературу).

В 1907 г. Штермер начал изучать траектории заряженных частиц в поле магнитного диполя. Полученные им результаты позднее применялись в

исследованиях космических лучей и траекторий заряженных частиц космического происхождения в магнитном поле Земли. Классическую теорию движения заряженных частиц использовали также в своих ранних работах по теории строения атома Томсон, Резерфорд, Бор и др. среди многочисленных технических применений динамики заряженных частиц можно отметить проектирование и изучение электронных ламп [1].

В 1908 г. Хейл обнаружил существование сильных магнитных полей в области солнечных пятен. Именно с этого времени астрономы и астрофизики начинают интересоваться поведением ионизованного вещества в магнитном поле [1].

Систематическое и активное изучение движения заряженных частиц в электромагнитных полях возник во второй половине XX века в связи с развитием атомной физики и физики атомного ядра. Появилась потребность в частицах с высокими энергиями, которые наблюдались в недостаточном количестве в спектрах космических лучах.

С начала 50-х годов начали появляться, так называемые ускорители заряженных частиц, в которых стало возможным получать энергии сравнимые с энергиями из космоса. За счет разгона в ускорителях практически все частицы становятся релятивистскими.

Ускорители заряженных частиц – это установки, в которых частицам сообщается большая кинетическая энергия, которая достигает в отдельных случаях нескольких Бэв (биллион электрон-вольт) (для электронов) и даже десятков Бэв (биллион электрон-вольт) (для протонов) [5-8]. К настоящему времени на Большом адронном коллайдере, для пучка протонов, достигнут новый рекорд энергии 4 тераэлектронвольта.

Роль ускорителей, как орудий экспериментального исследования в современной физике, весьма велика, поскольку развитие ядерной физики и физики элементарных частиц связано в основном с изучением взаимодействия различных частиц большой энергии с атомными ядрами и между собой [5-8].

Большое количество разнообразных ядерных реакций, изученных на ускорителях, позволило существенно расширить и уточнить наши представления об атомном ядре. Ведется изучение так называемых «звезд» - явлений расщепления ядра на несколько осколков под действием частиц большой энергии [5-8].

Главное значение ускорителей состоит в том, что они являются мощным средством на пути решения наиболее важной и сложной задачи современной физики – проблемы природы, взаимодействия и взаимных превращений элементарных частиц, в частности, проблем ядерных сил [5-8].

Весьма многое могут дать (и уже дали) ускорители в смысле изучения структуры элементарных частиц, например электрической структуры протона. Помимо научного значения в широком смысле слова, ускорители имеют и немаловажное прикладное значение. Сюда относится, в частности, применение их в целях изготовления искусственных радиоактивных препаратов для медицинских, биологических, химических исследований (метод меченых атомов). В медицине так же находит себе применение терапия опухолей жесткими рентгеновскими лучами и быстрыми электронами. Имеются еще некоторые частные применения ускорителей, например применение быстрых электронов для стерилизации пищевых продуктов [5-8].

Область применения частиц больших энергий, получаемых на ускорителях, продолжает расширяться [5-8].

Но, конечно, основное применение ускорителей – это различные физические исследования в области ядерной физики и физики элементарных частиц, где с каждым новым порядком энергии, которую удается достичь на ускорителях, открывается новый круг явлений и закономерностей [5-8].

Как уже говорилось выше, ускорителями заряженных частиц называются устройства, в которых под действием электрических и магнитных полей создаются и управляются пучки высокоэнергетичных заряженных частиц (электронов, протонов, мезонов и т.д.) [5-8].

Любой ускоритель характеризуется типом ускоряемых частиц, разбросом частиц по энергиям и интенсивностью пучка [5-8].

### **Ускорители бывают:**

- непрерывные (равномерный во времени пучок);
- импульсные (в них частицы ускоряются порциями – импульсами).

### **По форме траектории и механизму ускорения частиц ускорители**

**делятся на:**

1. линейные,
2. циклические.

**В линейных ускорителях** траектории движения частиц близки к прямым линиям, **в циклических** траектория частиц являются окружности или спирали [5-8].

#### 1. Линейные ускорители

1) **Линейный ускоритель.** Ускоритель частиц осуществляется электрическим полем, создаваемым, например, высоковольтным генератором Ван-де-Граафа. Заряженная частица проходит поле однократно: заряд  $q$ , проходя разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , приобретает кинетическую энергию  $K = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Таким способом частицы ускоряются до  $\approx 10\text{МэВ}$ . Их дальнейшее ускорение с помощью источников постоянного напряжения невозможно из-за утечки зарядов, пробоев и т.д. [5-8].

2) **Линейный резонансный ускоритель.** Ускорение заряженных частиц осуществляется переменным электрическим полем сверхвысокой частоты, синхронно изменяющимся с движением частиц. Таким способом протоны ускоряются до энергий порядка десятков мегаэлектронвольт, электроны – до десятков гигаэлектронвольт [5-8].

#### 2. Циклические ускорители

1) **Циклотрон** – циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов). Между полюсами сильного электромагнита помещается вакуумная камера, в которой находятся два электрода в виде полых металлических полуцилиндров, или дуантов. К дуантам приложено переменное

электрическое поле. Магнитное поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно плоскости дуантов. В циклотронах заряженная частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  ускоряется до скоростей, при которых релятивистский эффект увеличения массы частицы практически не проявляется. Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий примерно 20 МэВ. Дальнейшее их ускорение в циклотроне *ограничивается релятивистским возрастанием массы со скоростью*, что приводит к увеличению периода обращения (он пропорционален массе) и синхронизм нарушается. Поэтому циклотрон совершенно неприменим для ускорения электронов (при  $E = 0,5 \text{ МэВ}$ ,  $m = 2m_0$ , при  $E = 10 \text{ МэВ}$   $m = 28m_0$ ) [5-8].

2) Микротрон (электронный циклотрон) – циклический резонансный ускоритель, в котором, как и в циклотроне, и магнитное поле, и частота ускоряющего поля постоянны во времени, но резонансное условие в процессе ускорения все же сохраняется за счет изменения кратности ускорения  $q$ . Частица обращается в микротроне в однородном магнитном поле, многократно проходя ускоряющий резонатор. В резонаторе она получает такой прирост энергии, что ее период обращения изменяется на величину, равную или кратную периоду ускоряющего напряжения. Причем, если частица с самого начала вошла в резонанс с ускоряющим полем, этот резонанс сохраняется, несмотря на изменение периода обращения. В микротроне действует механизм автофазировки, так что частицы, близкие к равновесной орбите, также будут ускоряться [5-8].

3) Фазотрон (синхроциклотрон) – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (например, протонов, ионов,  $\alpha$ -частиц), в котором управляющее магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля медленно изменяется с периодом. Движение частиц в фазотроне, как и в циклотроне, происходит по раскручивающейся спирали. Частицы в фазотроне ускоряются до энергий примерно равных 1 ГэВ (ограничения здесь определяются размерами фазотрона, так как с ростом скорости частиц растет радиус их орбиты) [5-8].

4) Синхротрон – циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов, в котором управляющее магнитное поле изменяется во времени, а частота ускоряющего электрического поля постоянна. Электроны в разных синхротронах ускоряются до энергий 5– 10 ГэВ [5-8].

5) Синхрофазотрон – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов), в котором объединяются свойства фазотрона и синхротрона. Здесь управляющее магнитное поле и частота ускоряющего электрического поля одновременно изменяются во времени так, чтобы радиус равновесной орбиты частиц оставался постоянным [5-8].

6) Бетатрон – единственный циклический ускоритель (электронов) нерезонансного типа, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем. Электродвижущая сила индукции, создаваемая переменным магнитным полем, может существовать и в отсутствие проводников [5-8].

В циклических ускорителях с постоянным во времени полем возможен также так называемый *стохастический метод*. Принципиальной особенностью его является использование некоторого вероятностного механизма ускорения. Частица при этом совершает движение, подобное тому, которое совершает броуновская частица в жидкости, проходя от одной стенки сосуда до другой [2], [9-10].

Отметим, что стохастический режим может оказаться полезным и в комбинации с другими методами ускорения, например для облегчения условий инжекции, в фазотроне, для преодоления критической энергии и т.п. [2], [9-10]

Стохастический режим может быть также использован для накопления частиц на определенной орбите путем соответствующего выбора спектра [2], [9-10].

Красивым и сравнительно простым проявлением локальной неустойчивости является стохастический механизм ускорения заряженных частиц. Данный механизм был впервые предложен **Энрико Ферми** для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах [9-10].

Его идея заключалась в том, что при столкновении заряженных частиц с беспорядочно движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве частица должна в среднем ускоряться. Если рассматривать магнитное облако, как гигантскую частицу большой массы, то причину ускорения можно понять следующим образом. При единичных атаках столкновения частица приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движется ли облако навстречу частице или от нее. Так как скорости тел, с которыми сталкивается частица, распределены хаотически, следовательно, можно говорить о том, что число тел, движущихся в одном и том же направлении, примерно равно числу тел, которые движутся в обратном направлении [9-10].

Отсюда вывод, столкновений будет больше с теми телами, скорости которых направлена навстречу частице, так как частица встречает их чаще. А это значит, что частица будет чаще приобретать энергию, чем отдавать ее, отсюда возникает эффективное ускорение частиц, **называемое ускорением Ферми** [9-10].

Некоторые оценки магнитной индукции и ларморовских частот приведены в таблице 1.

Таблица 1

Частица	Среда	$B, Tл$	$\omega, Гц$
Протон	Циклотрон	1,8	$1,724 * 10^8$
	Фазотрон	1,6	$1,533 * 10^8$
	Синхрофазотрон	1,3	$1,246 * 10^8$
Электрон	Бетатрон	0,6	$1,055 * 10^{11}$
	Синхротрон	1,2	$2,109 * 10^{11}$
	Синхротрон	1,3	$2,286 * 10^{11}$
	Межзвездная среда	$10^{-10}$	$1,4 * 10^6$



# 1. УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим однородное магнитное поле

$$\vec{B} = (0, 0, B(t)), \quad (1.1)$$

которое изменяется случайно во времени и направлено вдоль оси  $z$  прямоугольной системы координат. Переменное во времени поле порождает в соответствии с законом индукции вихревое электрическое поле. Из системы уравнений Максвелла имеем

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

или с учетом (1.1)

$$\text{rot}\vec{E} = -\vec{k}\dot{B}, \quad (1.3)$$

где  $\vec{k}$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . Предполагаем так же, что нет никаких пространственных зарядов  $\sigma$ , так, что

$$\text{div}\vec{E} = 0.$$

Последнее соотношение, а также уравнение (1.3) выполняется, если поле задать в виде

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}(\vec{k} \times \vec{r}), \quad (1.4)$$

где  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$  - радиус- вектор точки наблюдения, а  $(\vec{k} \times \vec{r})$  – векторное произведение векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{r}$  [1], [11-15]. Выпишем уравнение движения для заряженной частицы с зарядом  $q$ , на которую действует сила Лоренца электромагнитного поля (1.1), (1.4). Имеем (в системе СИ) [1], [11-15]

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{2}(\vec{k} \times \dot{\vec{r}})\omega_g + (\vec{k} \times \dot{\vec{r}})\omega_g = 0 \quad (1.5)$$

Здесь через

$$\omega_g(t) = qB(t)/m \quad (1.6)$$

обозначена гирочастота (или Ларморовская частота) вращения нерелятивистской заряженной частицы вокруг силовых линий магнитного поля, и  $m$   $q$ - масса и заряд частицы соответственно [16-17].

Так как вектор поля  $\vec{B}$  направлен по оси  $z$ , следовательно, проекция ускорения на ось  $z$  равна нулю:  $\frac{dv_z}{dt} = 0$

Последнее уравнение, очевидно, определяет равномерное и прямолинейное движение частицы вдоль оси  $z$

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t,$$

где обозначено  $z_0$ - начальное положение частицы,  $v_{z0}$  — начальная скорость частицы, та что

$$v_z(t) = v_{z0} = \text{const } \forall t.$$

Для компонент  $x$  и  $y$  системы (1.5), если ввести переменную  $\xi = x + iy$ , где  $i$  — мнимая единица получаем

$$\ddot{\xi} + i\omega_g \dot{\xi} + \frac{1}{2}i\dot{\omega}_g \xi = 0. \quad (1.7)$$

Произведем замену переменной в уравнении (1.7)

$$\xi = w e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt} \quad (1.8)$$

Вычислим производные  $\dot{\xi}$  и  $\ddot{\xi}$

В результате:

$$\dot{\xi} = \dot{w} e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt} - \frac{i}{2} \omega_g w e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = & \ddot{w} e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt} - \frac{i}{2} \dot{\omega}_g w e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt} - \frac{i}{2} \dot{\omega}_g w e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt} - \\ & - \frac{i}{2} \omega_g \dot{w} e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt} + \left(-\frac{i}{2} \omega_g\right)^2 w e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя полученные выражения для  $\xi$ ,  $\dot{\xi}$ ,  $\ddot{\xi}$  в уравнение (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \ddot{w} - \frac{i}{2} \omega_g \dot{w} - \frac{i}{2} \dot{\omega}_g w - \frac{i}{2} \omega_g \dot{w} + \left(\frac{i}{2} \omega_g\right)^2 w + \\ + i\omega_g \left(\dot{w} - \frac{i}{2} \omega_g w\right) + \frac{1}{2} i \dot{\omega}_g w = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

или окончательно

$$\ddot{w} + \omega_g^2(t)w = 0, \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) совпадает с уравнением гармонического осциллятора, у которого возвращающая сила изменяется со временем. Решение уравнения (1.12) для произвольной функции  $\omega_g(t)$  представляет сложную задачу и не

решается в аналитическом виде [1]. При частных видах функции  $\omega_g(t)$  аналитические решения известны см., например, [1],[18-19]. Так, например, если  $\omega_g(t) = \omega_{g0} \cos(\omega t)$  уравнение (1.12) сводится к известному уравнению Матье.

Далее примем  $V(t) \equiv V_0 \alpha(t)$ , где  $\alpha(t) = \pm 1$  - Марковский дихотомический процесс - простейший представитель случайных телеграфных процессов. Он представляет собой случайную функцию времени  $\alpha(t)$ , которая принимает попеременно постоянные значения  $+1$  и  $-1$ ; скачки от одного значения к другому происходят случайно и независимо со средней частотой  $\nu$ . Состояния  $\pm 1$  равновероятны. Реализация дихотомического процесса показана (см. Рис. 1) [20-21].

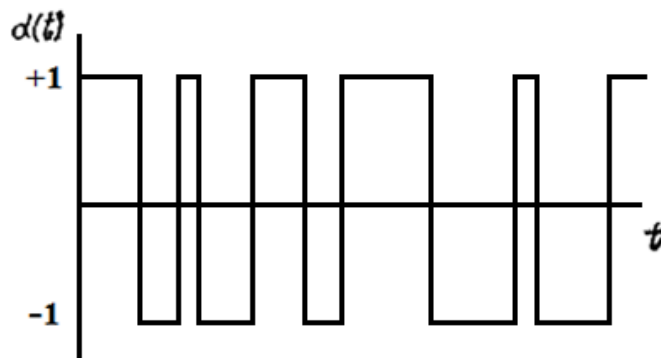


Рис. 1. Реализация дихотомического процесса.

Для рассматриваемого процесса  $\langle \alpha(t) \rangle = 0$ , корреляционной функции экспоненциально спадает со временем

$$K(t) = \langle (\alpha(t) - \langle \alpha \rangle)(\alpha(0) - \langle \alpha \rangle) \rangle = \sigma^2 \exp[-\nu|t|],$$

В рассматриваемом нами случае следует положить  $\sigma^2 = 1$ .

Из выражения для корреляционной функции процесса видно, что время спада корреляции процесса  $\alpha(t)$  совпадает с «периодом» флуктуаций  $\nu^{-1}$ , т.е. память о предыдущем для процесса  $\alpha(t)$  практически забывается на одном периоде [20-21].

Из уравнения (1.12) следует, что  $\alpha^2(t) \equiv 1 \forall t$ , а значит

$$\ddot{w} + \omega_{g0}^2 w = 0, \tag{1.13}$$

где  $\omega_{g0} = \frac{qB_0}{m}$ .

Так, что уравнение (1.13) не содержит случайного слагаемого и является дифференциальным уравнением в обыкновенных производных. При постоянной частоте  $\omega_{g0}$  (1.13) описывает одну из главных моделей колебательных процессов – модель гармонического осциллятора. Решение уравнения (1.13) хорошо известно и имеет вид

$$w(t) = C_1 \cos \omega_g t + C_2 \sin \omega_g t, \quad (1.14)$$

где  $C_1$  и  $C_2$ - постоянные, определяемые из начальных условий.

Нас будет интересовать закон движения в плоскости  $(x, y)$ . Квадрат радиуса орбиты определяется выражением

$$\xi \xi^* = x^2 + y^2, \quad (1.15)$$

где  $\xi^* = x - iy$  комплексно сопряженная  $\xi$  функция. Так как

$$\xi(t) = w(t) e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt}$$

$$\xi^*(t) = w(t) e^{\frac{i}{2} \int_0^t \omega_g(t) dt}$$

Из уравнения (1.15) следует

$$\xi \xi^* = x^2(t) + y^2(t) = w^2(t), \quad (1.16)$$

Интересно, что для выбранной модели магнитного поля в уравнение орбиты  $x^2 + y^2$  в плоскости  $(x, y)$ , не входит зависимость от флуктуаций поля, которая входит исключительно в виде фазового множителя  $e^{-\frac{i}{2} \int_0^t \alpha(t) dt}$ . Радиус орбиты  $|w(t)| \equiv R(t)$ .

Определим явный вид зависимости  $R(t)$ . Из (1.16)

$$x^2(t) + y^2(t) = (C_1 \cos \omega_{g0} t + C_2 \sin \omega_{g0} t)^2, \quad (1.17)$$

Примем в начальный момент времени  $t = 0$  для координат частицы

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0,$$

аналогично для компонент скорости в начальный момент времени

$$v_x(0) = v_{x0}, v_y(0) = v_{y0}.$$

Как видно из (1.17), радиус орбиты в плоскости  $(x, y)$  меняется по периодическому закону с частотой  $\omega_{g0}$ .

Из выражения (1.17), при  $t = 0$  получаем выражение

$$x_0^2 + y_0^2 = C_1^2 \Rightarrow C_1^2 \equiv R_0^2 \quad (1.18)$$

Для определения второй постоянной, продифференцируем обе части (1.17) по времени, получаем

$$\begin{aligned} & 2xv_x + 2yv_y = \\ & = 2(C_1 \cos \omega_{g0}t + C_2 \sin \omega_{g0}t) * (-C_1 \omega_{g0} \sin \omega_{g0}t + C_2 \omega_{g0} \cos \omega_{g0}t). \end{aligned}$$

При  $t = 0$  последнее уравнение принимает вид

$$2x_0v_{x0} + 2y_0v_{y0} = 2C_1 * C_2 \omega_{g0},$$

Выражаем  $C_2$ ,

$$C_2 = \frac{x_0v_{x0} + y_0v_{y0}}{\omega_{g0}(x_0^2 + y_0^2)}.$$

Подставляем значения  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение (1.14), учитываем то, что

$|w(t)| \equiv R(t)$  получаем уравнение для радиуса орбиты в виде

$$R(t) = \left| R_0 \cos \omega_{g0} t + \frac{x_0v_{x0} + y_0v_{y0}}{\omega_{g0}R_0} \sin \omega_{g0} t \right|. \quad (1.19)$$

Таким образом, показано, что в однородном магнитном поле со случайными переключениями движение заряженной частицы в плоскости  $(x, y)$  происходит по окружности, радиус которой меняется периодически с гирочастотой  $\omega_{g0}$ .

Обсудим полученный результат (1.19). Примем начальные условия

$$x_0, y_0 = 1, v_{x0}, v_{y0} = 1.$$

Для того чтобы визуализировать наше решение воспользуемся помощью пакета прикладных математических программ Scilab 5.5.2. Заносим в программу, выбранные нами произвольные начальные условия  $x_0, y_0 = 1, v_{x0}, v_{y0} = 1, R_0 = \sqrt{2}$ . Задаем определенный промежуток времени, частоту. Затем, заносим выведенное нами уравнение для радиуса орбиты (1.19) в программу. Для того чтобы получить рисунок траектории движения заряженной частицы в формате 3d необходимо выбрать полярные координаты для  $x, y$ . В результате получаем рисунок траектории движения заряженной частицы в магнитном поле в формате 3d.

На рисунках представлены траектории движения заряженных частиц на плоскости  $(x, y)$  при разных значениях времен  $t$ .

На рисунках (2.а, вид сбоку) и (2.в, вид сверху) изображена траектория движения заряженной частицы на временах меньше ларморовского периода  $T = \frac{2\pi}{\omega_{g0}}$ , т.е.  $t < T$ . Из рисунка видно, что частица совершает вращательное движение, двигаясь по спирали (из-за равномерного движения по оси  $z$ ). Из-за того, что выбранное нами время движения частицы меньше Ларморовского периода, частица не успевает совершить полный оборот.

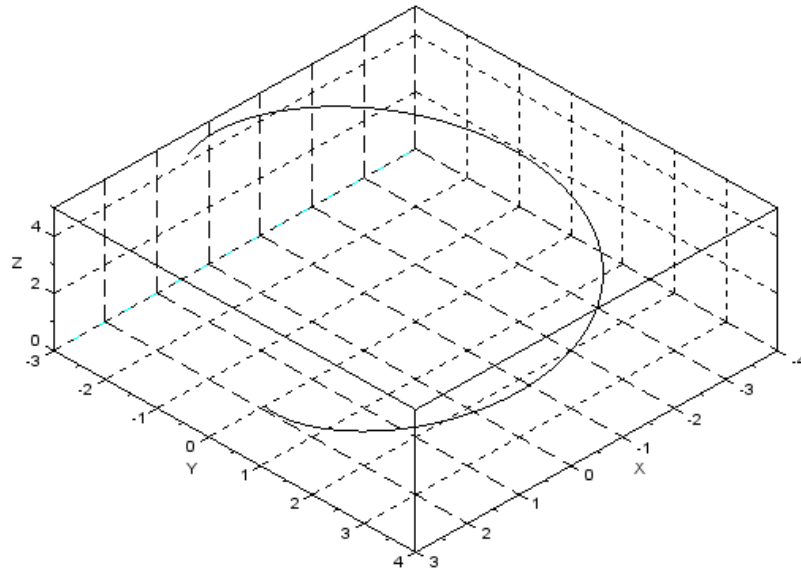


Рис. 2.а, вид сбоку. Траектория движения заряженной частицы при временах меньших ларморовского периода  $t < T$

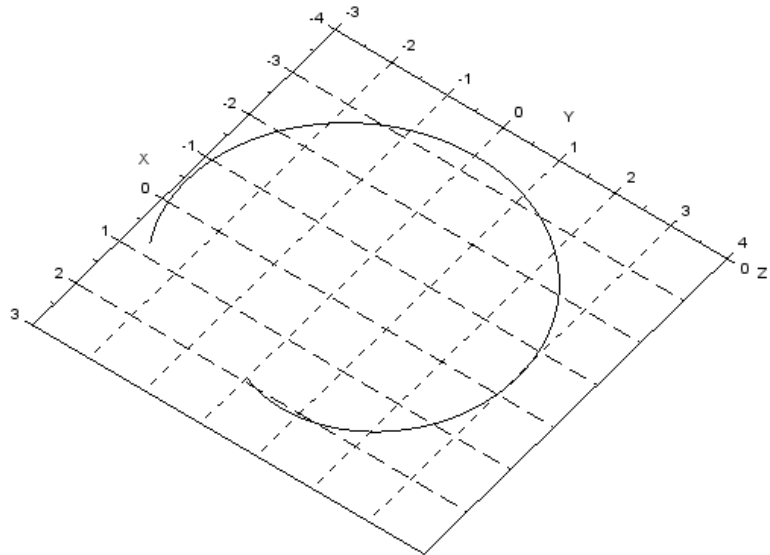


Рис. 2.в, вид сверху. Траектория движения заряженной частицы при временах меньших ларморовского периода  $t < T$

На рисунке (3.а, вид сбоку) и (3.в, вид сверху) изображена траектория движения заряженной частицы при временах порядка ларморовского периода  $t \sim T$  ( $t = 0,74$ ).

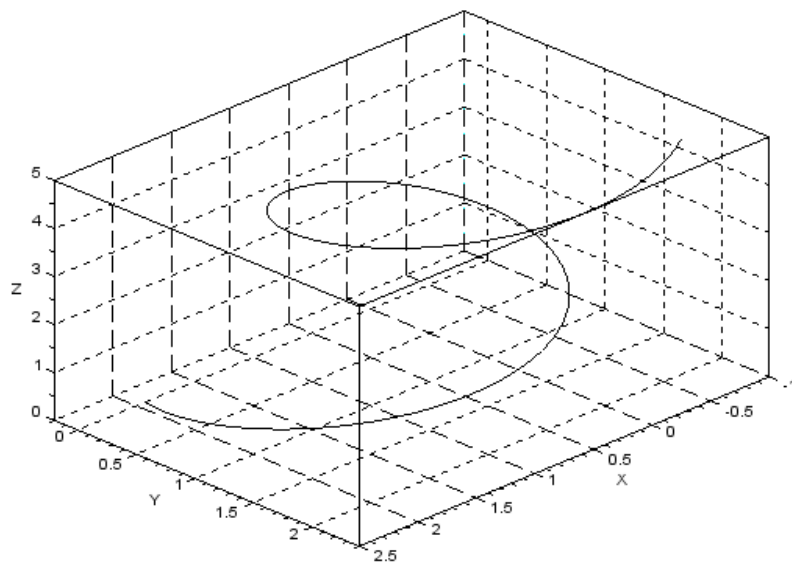


Рис. 3. а, вид сбоку. Траектория движения заряженной частицы при временах порядка ларморовского периода  $t \sim T$

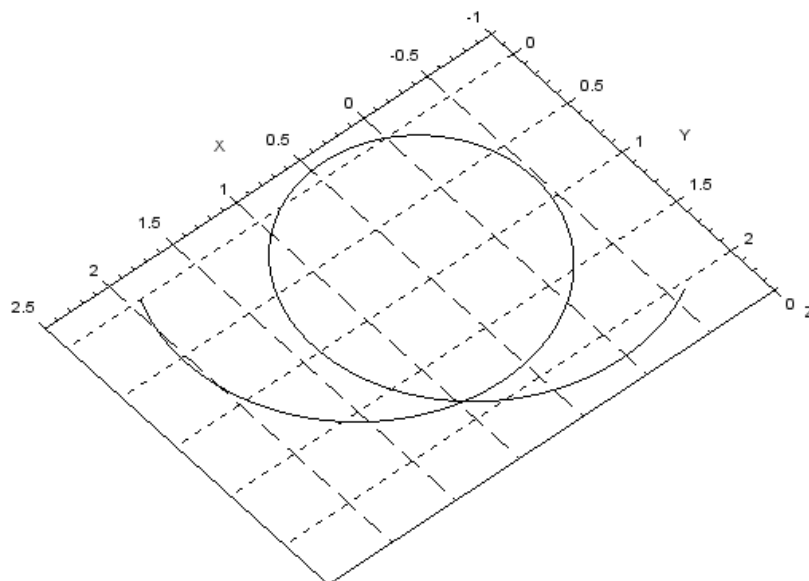


Рис. 3. в, вид сверху. Траектория движения заряженной частицы при временах порядка ларморовского периода  $t \sim T$

На рисунке (4.а, вид сбоку) и (4.в, вид сверху) изображена траектория движения заряженной частицы при временах намного больше ларморовского периода  $t \gg T$  (в 5 раз). На данных рисунках, так же отчетливо видно, что частица совершает передвижение по спирали. На рисунке (4.в, вид сверху) видно, что частица движется по так называемым «лепесткам цветка».

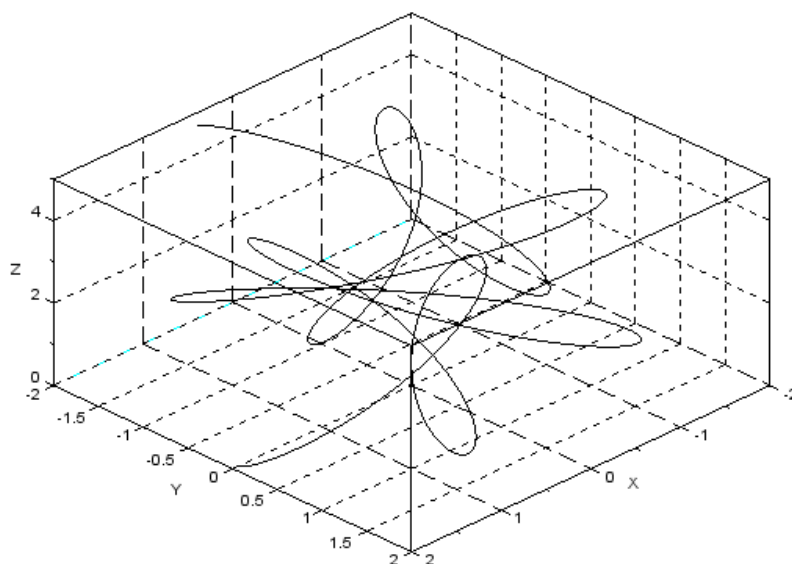


Рис. 4. а, вид сбоку. Траектория движения заряженной частицы при временах намного больше ларморовского периода  $t \gg T$



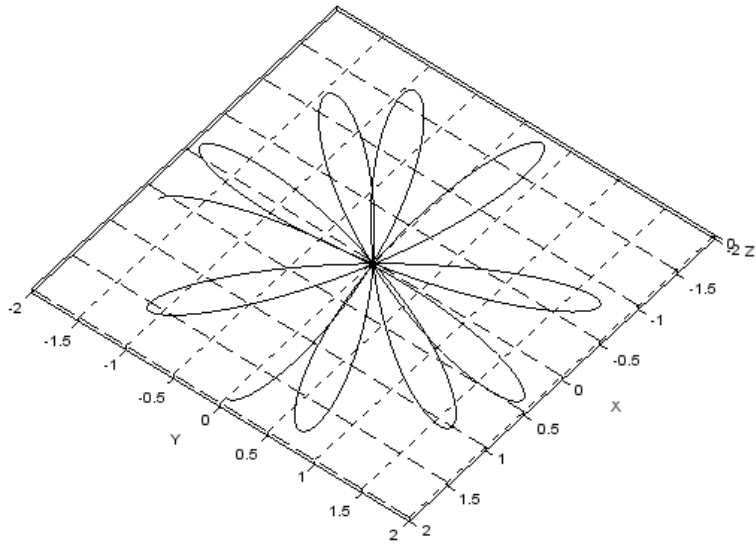


Рис. 4.в, вид сверху. Траектория движения заряженной частицы при временах намного больше ларморовского периода  $t \gg T$

При временах равных Ларморовскому периоду  $t = T$ , получаем изображение в виде круга, но если рассмотреть его в пространстве, т.е. растянуть по оси  $z$ , то получим траекторию близкую к траектории движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле, изображение в виде спирали (см. Рис. 4.а и 4.в).

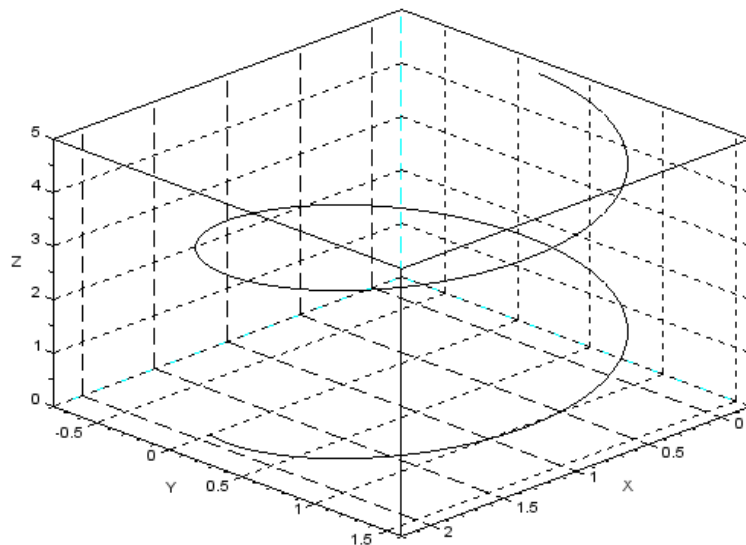


Рис. 5. а, вид сбоку. Траектория движения заряженной частицы при временах равных Ларморовскому периоду  $t = T$

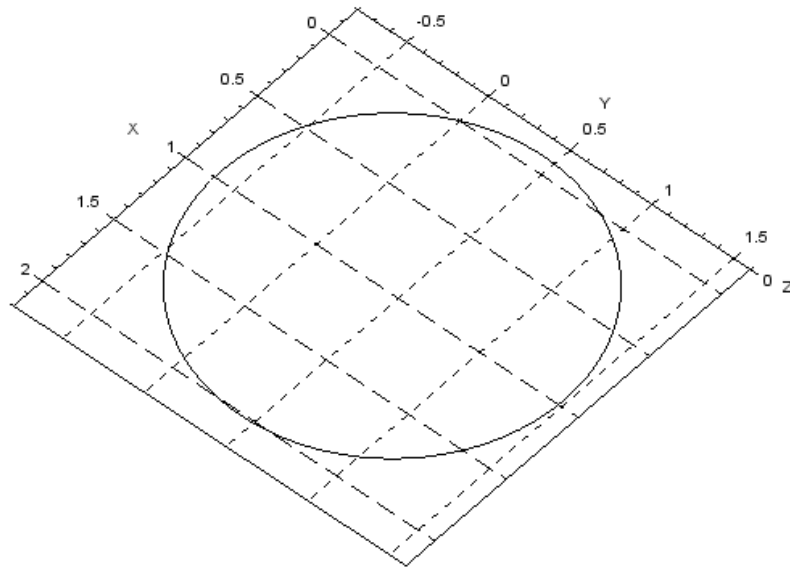


Рис. 5. в, вид сверху. Траектория движения заряженной частицы при временах равных Ларморовскому периоду  $t = T$

Так как в нашем решении нет случайностей, то для любой ступенчатой функции принимающей значения  $\pm 1$  в некоторые моменты времени вид траектории имеет аналогичную форму.

Из рисунка (4.в) видно, что траектории частицы многократно проходят через начало координат в плоскости  $(x, y)$ . Это указывает на то, что через определенные промежутки времени возможна определенная локализация пучка заряженных частиц, подобно тому, как это происходит в постоянном магнитном поле [2], [22].

В постоянном поле, если частицы выходят из начальной точки, образуя пучок с малой расходимостью к силовой линии, служащей осью пучка, то спустя время  $T$ , после выхода из начальной точки любая частица вновь пересечет силовую линию, проходящую через эту точку. Расстояние, на которое она при этом продвинется, есть шаг винтовой линии, который определяется по формуле (при малом угле  $\alpha$ )

$$l = 2\pi \frac{mc}{qH} v_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Таким образом, все частицы, вышедшие из начальной точки под малыми углами к силовой линии, соберутся на той же силовой линии в пределах узкого

отрезка [2],[22].

На больших временах (см. Рис. 6,7,8), выделена область локализации на плоскости  $(x, y)$ . Увеличивая время  $t$ , увеличивается и область локализации.

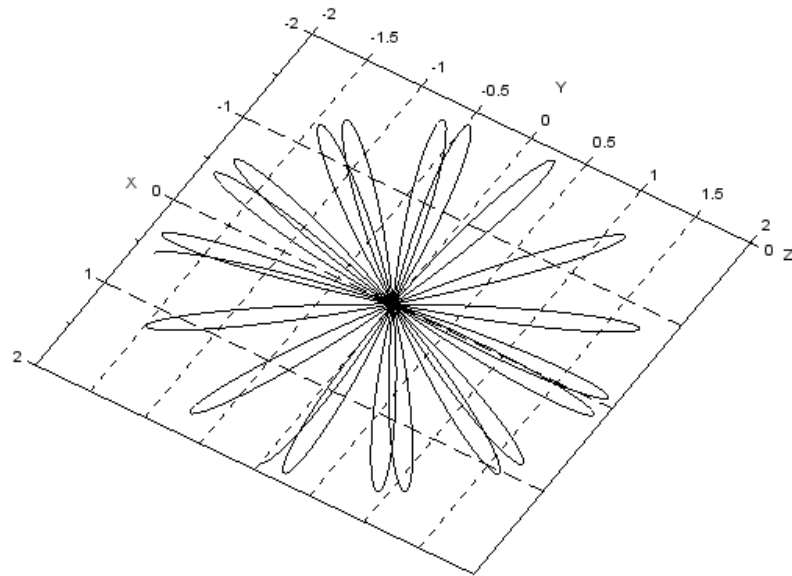


Рис. 6. Траектория движения заряженной частицы с выделенной областью локализации

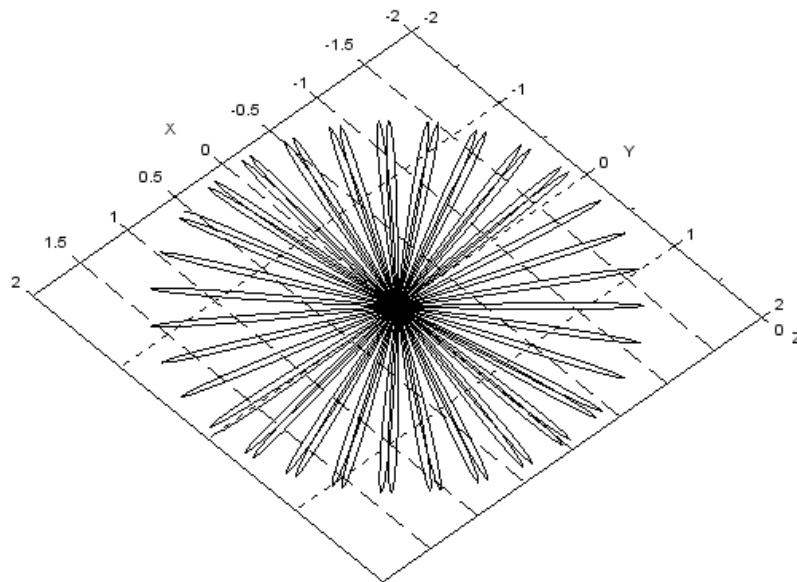


Рис. 7. Траектория движения заряженной частицы с выделенной областью локализации

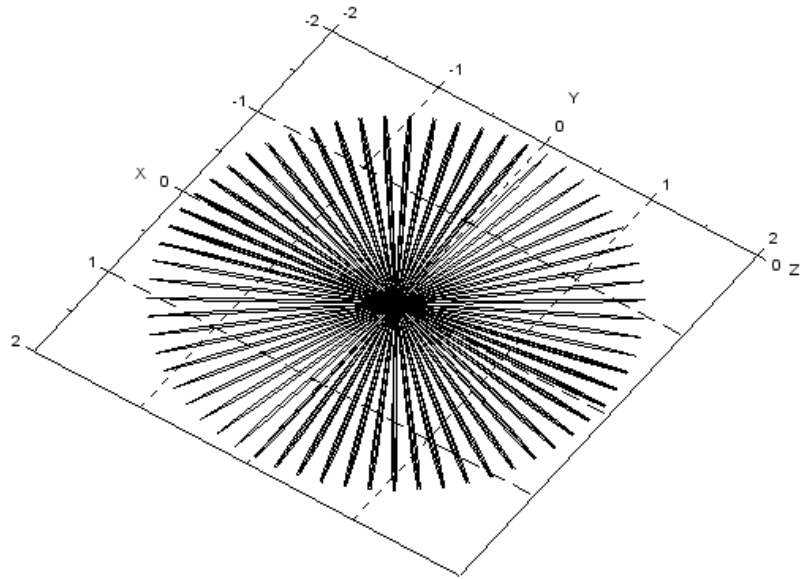


Рис. 8. Траектория движения заряженной частицы с выделенной областью локализации

Таким образом, для обсуждаемой модели магнитного поля со случайными переключениями полученный результат принципиально отличается от хорошо известного случая  $\vec{B} = const$ , где радиус орбиты является постоянным  $R = \frac{mv}{qB}$  и движение частицы в пространстве происходит по спирали (см. Рис.8).

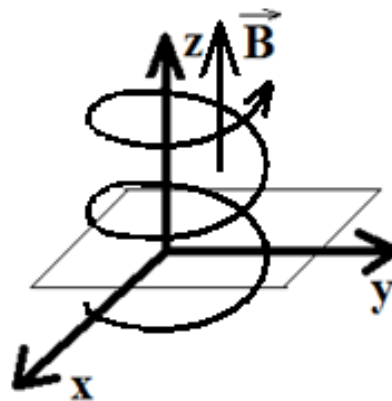


Рис. 8. Траектория движения частицы в постоянном магнитном поле

## 2. УСРЕДНЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПЛОСКОСТИ (x, y)

В предыдущем параграфе было установлено, что уравнение траектории частицы в плоскости (x, y), т.е.

$$x^2(t) + y^2(t) \equiv w^2(t)$$

определяется неслучайной зависимостью  $w^2(t)$ , согласно уравнению (1.16).

Связанно это с тем, что в уравнение для  $w(t)$  случайное магнитное поле входит квадратично и при выбранной модели  $B(t) = B_0\alpha(t)$ , где  $\alpha(t)$ - Марковский дихотомический процесс, для которого  $\alpha^2(t) \equiv 1$  при  $\forall t$ , так, что в силу этого свойства уравнение для  $w(t)$  не содержит случайных коэффициентов.

Определим средние координаты частицы  $\langle x(t) \rangle$  и  $\langle y(t) \rangle$  в плоскости (x, y), где  $\langle \dots \rangle$ - означает усреднение по ансамблю реализаций процесса  $\alpha(t)$ . Зависимость координат частицы от случайного магнитного поля определяется выражением

$$x + iy = w(t)e^{-\frac{\omega g}{2} \int_0^t \alpha(t) dt}, \quad (2.1)$$

где  $w(t)$ - неслучайная функция. Таким образом, зависимость координат от поля определяется случайным фазовым множителем.

Из (2.1) имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= w(t) \cos\left(\frac{\omega g_0}{2} \int_0^t \alpha(t) dt\right), \\ y(t) &= -w(t) \sin\left(\frac{\omega g_0}{2} \int_0^t \alpha(t) dt\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом  $\langle x(t) \rangle$  и  $\langle y(t) \rangle$ , так как  $w(t)$ - неслучайная функция равны

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= w(t) \langle \cos\left(\frac{\omega g_0}{2} \int_0^t \alpha(t) dt\right) \rangle, \\ \langle y(t) \rangle &= -w(t) \langle \sin\left(\frac{\omega g_0}{2} \int_0^t \alpha(t) dt\right) \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Нашей задачей является определение средних вида:  $-\langle \cos\left(\frac{\omega g_0}{2} \int_0^t \alpha(t) dt\right) \rangle$  и  $\langle \sin\left(\frac{\omega g_0}{2} \int_0^t \alpha(t) dt\right) \rangle$  от запаздывающих функционалов процесса  $\alpha(t)$ .

Введем случайные переменные

$$\begin{aligned}
a(t) &= \cos\left(\frac{\omega_{g0}}{2} \int_0^t \alpha(t) dt\right) \\
b(t) &= -\sin\left(\frac{\omega_{g0}}{2} \int_0^t \alpha(t) dt\right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Стохастические уравнения для  $a(t)$  и  $b(t)$  легко записываются и имеют вид

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\omega_{g0}}{2} \alpha(t) b \\ \dot{b} = -\frac{\omega_{g0}}{2} \alpha(t) a \end{cases} \tag{2.5}$$

После усреднения (2.5) по процессу  $\alpha(t)$  получаем

$$\begin{cases} \langle \dot{a} \rangle = \frac{\omega_{g0}}{2} \langle \alpha(t) b \rangle \\ \langle \dot{b} \rangle = -\frac{\omega_{g0}}{2} \langle \alpha(t) a \rangle \end{cases} \tag{2.6}$$

Так как  $a(t)$  и  $b(t)$  – запоздавший функционал от  $\alpha$ , то для решения средних используем формулу дифференцирования [20]

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha(t) \phi_t[\alpha] \rangle = -\nu \langle \alpha(t) \phi_t[\alpha] \rangle + \langle \alpha(t) \frac{d\phi_t}{dt} \rangle, \tag{2.7}$$

где  $\phi_t[\alpha] = \phi_t[\alpha(\tau)]$ ,  $\tau \leq t$ - функция  $t$  и запаздывающий функционал процесса  $\alpha$ .

Обозначим

$$a_1 = \langle \alpha(t) a \rangle \text{ и } b_1 = \langle \alpha(t) b \rangle.$$

Для  $a_1$  и  $b_1$  имеем из (2.5) и (2.7),

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -\nu a_1 + \frac{\omega_{g0}}{2} \langle \alpha^2(t) b \rangle = -\nu a_1 + \frac{\omega_{g0}}{2} \langle b \rangle \\ \dot{b}_1 = -\nu b_1 - \frac{\omega_{g0}}{2} \langle \alpha^2(t) a \rangle = -\nu b_1 - \frac{\omega_{g0}}{2} \langle a \rangle \end{cases} \tag{2.8}$$

Окончательно для определения средних  $\langle a \rangle$  и  $\langle b \rangle$ , получаем

$$\begin{cases} \langle \dot{a} \rangle = \frac{\omega_{g0}}{2} b_1 \\ \dot{b}_1 = -\nu b_1 - \frac{\omega_{g0}}{2} \langle a \rangle \end{cases} \tag{2.9}$$

и

$$\begin{cases} \langle \dot{b} \rangle = -\frac{\omega_{g0}}{2} a_1 \\ \dot{a}_1 = -\nu a_1 + \frac{\omega_{g0}}{2} \langle b \rangle \end{cases} \tag{2.10}$$

Уравнение (2.9) и (2.10) можно переписать в виде дифференциальных

уравнений второго порядка

$$\langle \ddot{a} \rangle + \nu \langle \dot{a} \rangle + \frac{\omega^2 g_0}{4} \langle a \rangle = 0 \quad (2.11)$$

и аналогично

$$\langle \ddot{b} \rangle + \nu \langle \dot{b} \rangle + \frac{\omega^2 g_0}{4} \langle b \rangle = 0 \quad (2.12)$$

Оба уравнения совпадают и представляют собой уравнение гармонического осциллятора в среде с трением, где коэффициент трения равен  $\nu$  [23]. Определим начальные условия для  $\langle a(t) \rangle$  и  $\langle b(t) \rangle$  при  $t = 0$ .

Очевидно

$$a(0) = 1, b(0) = 0. \quad (2.13)$$

Выражаем для скорости  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{db}{dt}$  при  $t \rightarrow 0$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{da}{dt} = \frac{\omega g_0}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) b(t) = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{db}{dt} = -\frac{\omega g_0}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) a(t) = -\frac{\omega g_0}{2} \alpha(0).$$

Так как в (2.12) входит среднее  $\frac{d\langle b \rangle}{dt}$ , то при  $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\langle b \rangle}{dt} = -\frac{\omega g_0}{2} \langle \alpha(0) \rangle = 0.$$

Начальные условия для  $\langle b(t) \rangle$  означает, что  $\langle b(t) \rangle = 0 \forall t$

Для  $\langle a(t) \rangle$ , получаем

$$\langle a(t) \rangle = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.14)$$

где  $\lambda_{1,2} = -\frac{\nu}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 - \omega^2 g_0}$ .

Здесь  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . В случае вырождения  $\nu = \omega g_0$  вместо (2.14), имеем

$$\langle a(t) \rangle = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{\nu}{2} t} \quad (2.15)$$

Общий вывод: при  $t \rightarrow \infty$  среднее  $\langle x(t) \rangle$  стремится к нулю

$$\langle x(t) \rangle = w(t) \langle a(t) \rangle \rightarrow 0,$$

а средняя координата  $\langle y(t) \rangle$  равна нулю при всех  $t$ :

$$\langle y(t) \rangle = w(t) \langle b(t) \rangle = 0 \text{ для } \forall t.$$

При конечных же  $t$  имеется монотонно спадающее (при  $\nu \geq \omega g_0$ ) или осциллирующее с экспоненциальным спадом (при  $\nu < \omega g_0$ ) дрейфовое

**движение** заряженной частицы по координате  $x$ .



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе нами предложена модель случайного магнитного поля со случайными переключениями, задаваемыми Марковским дихотомическим процессом и было получено точное аналитическое решение для траектории движения нерелятивистской заряженной частицы.

Показано, что  $x^2(t) + y^2(t) = R^2(t)$ , где радиус периодическая функция с частотой  $\omega_{g0}$ . так, что движение частицы происходит по «**лепесткам цветка**» в плоскости перпендикулярной направлению магнитного поля и равномерно вдоль третьей оси. Что принципиально отличается от известной задачи для однородного магнитного поля, когда заряженная частица движется по спирали с постоянным радиусом орбиты.

С помощью свободно распространяемого пакета прикладных математических программ Scilab 5.5.2, визуализировано полученное решение, иллюстрирующее особенности движения заряженной частицы.

Получено также точное решение для средних  $\langle x(t) \rangle$  и  $\langle y(t) \rangle$ . Показать, что  $\langle y(t) \rangle = 0 \forall t$ , а  $\langle x(t) \rangle \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , совершая при этом дрейфовое движение по оси  $x$ .

Полученные нами результаты представляются важными не только в теоретическом плане, но и практическом при изучении соответствующих разделов электродинамики. В силу простоты математической модели переменного магнитного поля и используемого математического аппарата рассмотренная нами задача может быть использована на практических занятиях по курсу «Электродинамики». Рассмотренная нами задача, является хорошей темой для элективного курса, который включает в себя разные виды деятельности и области точных наук.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ленерт, Б. Динамика заряженных частиц (Dynamics of charged particles by Bo Lehnert). Перевод с английского А. В. Гордеева, А. А. Иванова, Г. В. Шолина / Б. Ленерт. - М.: Атомиздат, 1967. - 353 с.
2. Арцимович, Л.А. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях: учебное пособие / Л.А. Арцимович, С.Ю. Лукьянов. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 224 с.
3. Вячеславов, В.В. Электродинамика заряженных частиц в стационарных полях: учебное пособие / В.В. Вячеславов. – Новосибирск: НГТУ, 2002. - 91с.
4. Поршнева, С.В. Динамическая неустойчивость движения заряженных частиц в постоянном неоднородном магнитном поле [Электронный ресурс], - <http://jre.cplire.ru/koi/nov00/5/text.html>- статья в интернете.
5. Кравченко, Н.С. Лекции по физике. Электричество и Магнетизм. 12. Ускорители заряженных частиц [Электронный ресурс], - <http://portal.tpu.ru:7777/SHARED/k/KRAVCHENKONS/rabota/avtf/Tab1/lek12.pdf>- статья в интернете.
6. Коломенский, А.А. Теория циклических ускорителей/ А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. - 350 с.
7. Добрецов, Ю.П. Ускорители заряженных частиц в экспериментальной физике высоких энергий. Текст лекций / Ю.П. Добрецов. - М.: МИФИ, 2004. - 108 с.
8. Лебедев, А.Н. Основы физики и техники ускорителей: учебное пособие для вузов. В 3-х т. Т.1. Ускорители заряженных частиц / А.Н. Лебедев, А.В. Шальнов.- М.: Энергоиздат, 1981. – 192 с.
9. Заславский, Г.М. Стохастичность динамических систем / Г.М. Заславский. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 270 с.
10. Понтекорво, Бруно «Успехи физических наук» Т.LVII,вып.3 Энрико Ферми (1901-1954) (К годовщине смерти) [Электронный ресурс], -

[http://ufn.ru/ufn55/ufn55\\_11/Russian/r5511a.pdf](http://ufn.ru/ufn55/ufn55_11/Russian/r5511a.pdf)- статья в интернете.

11. Фок, В.А. Об инвариантной форме волновых уравнений и уравнений движения заряженной точечной массы / В.А. Фок // УФН. - 2010. - №8. - С. 874-877.
12. Иродов, И.Е. Основные законы электромагнетизма: учебное пособие для студентов вузов.-2-е, стереотип / И.Е. Иродов. - М.: Высш. шк., 1991. - 289с.
13. Тамм, И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. - М.: Наука, 1976.- 255с.
14. Двойнов Д., Кулагин К., научный руководитель Беляев М. А. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле [Электронный ресурс], - <http://magnitnoe.narod.ru/dvig/3.htm>- статья в интернете.
15. Электромагнитное поле. Часть 1. Электричество и магнетизм [Электронный ресурс] / Научная библиотека. - Режим доступа: [http://lib.sernam.ru/book\\_el1.php?id=58](http://lib.sernam.ru/book_el1.php?id=58), свободный. - (Дата обращения: 25.05.2015 г.).
16. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, страница 2. Движение частиц в постоянном магнитном поле (проектирование векторных равенств на циркулярные орты) [Электронный ресурс] / Вунивере.ру: учебные материалы для студентов. - Режим доступа: <http://vunivere.ru/work21894/page2>, свободный. (Дата обращения: 25.05.2015 г.).
17. Павлов, Г.Г. Циклотронная частота (гирочастота, гиромангнитная частота) [Электронный ресурс], -<http://www.astronet.ru/db/msg/1188285>- статья в интернете.
18. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 576 с.
19. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марычев. – Наука, 1981. – 800 с.
20. Шапиро, В.Е. Динамические системы при случайных воздействиях. Простые средства анализа / В.Е. Шапиро, В.М. Логинов. - Новосибирск: Наука,

1983. - 160 с.

21. Марковский процесс [Электронный ресурс] / StudFiles файловый архив для студентов. - Режим доступа: <http://www.studfiles.ru/preview/1633337/>, свободный. - (Дата обращения: 25.05.2015 г.).

22. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц (The physics of charged-particle beams by J.D. Lawson). Перевод с английского А.В. Агафонов. / Дж. Лоусон. - М.: 1980. - 439с.

23. Осциллятор с трением. Дифференциальное уравнение осциллятора с решением. Режимы движения осциллятора с трением. [Электронный ресурс] / Вунивере.ру: учебные материалы для студентов. - Режим доступа: <http://vunivere.ru/work23396/page2>, свободный. - (Дата обращения: 25.05.2015 г.).