

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Сорокина Светлана Владимировна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**ОРГАНИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОЙ ПОДГОТОВКИ
ОБУЧАЮЩИХСЯ 11 КЛАССОВ К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ
ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой
д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина

16.05.2022

Научный руководитель

канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина

16.05.2022

Дата защиты

Обучающийся С.В. Сорокина

Оценка

Красноярск 2022

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1. Структура и содержание единого государственного экзамена по математике	8
1.1. Единый государственный экзамен по математике и его особенности в современной школе	10
1.2. Структура и содержание контрольно-измерительных материалов	14
1.3. Анализ результатов единого государственного экзамена по математике последних лет в Красноярском крае.....	22
Выводы по первой главе.....	28
Глава 2. Курс по выбору для организации дифференцированной подготовки обучающихся к единому государственному экзамену	29
2.1. Учебная программа и основные методические идеи подготовки обучающихся к экзамену	31
2.2. Методическое обеспечение подготовки обучающихся к экзамену.....	41
2.3. Результаты опытно-экспериментальной работы	58
Выводы по второй главе.....	65
Заключение	66
Список использованных источников.....	68
Приложения.....	

Введение

Наша цивилизация создала важнейшую науку – математику. Именно математика, в настоящее время, является одним из ключевых составляющих мирового научно-технического прогресса, одним из основных ресурсов. Математическое образование играет важную роль в культурном развитии каждого человека. Задача общеобразовательной школы – не только усвоение учащимися определенных знаний по предмету, но и развитие личности, а также познавательных и созидательных способностей.

Значительно повысилась роль математической грамотности как общественно значимого фактора. В Концепции развития математического образования в РФ, утверждённой распоряжением Правительства Российской Федерации 24 декабря 2013 года № 2506-р, говорится о важности изучения математики, как системообразующей в образовании, как науки, развивающей познавательные способности человека, его логическое мышление, что безусловно влияет на изучение других дисциплин [11].

Кроме того в Концепции сказано, что математическое образование должно, с одной стороны, «предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе», с другой – «обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.», а также «в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования» [36].

Чтобы математическая наука в Российской Федерации стала передовой и привлекательной областью знания и деятельности, математическое образование в нашей стране должно выйти на лидирующее положение в мире. Это говорит о

том, что процесс получения математических знаний необходимо сделать осознанным и мотивированным процессом.

Большое значение уделяют школьному курсу математики, где особое внимание – подготовке выпускников к единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике. Именно высокие результаты ЕГЭ по математике профильного уровня служат билетом на технические, экономические, инженерные, IT направления.

Вне всяких сомнений, математика – один из самых сложных предметов в школе, который требует серьезной мыслительной работы, высокого уровня обобщений и абстрагирующей деятельности. Даже в профильных группах различия (умственные, личностные, мотивационные) между детьми крайне ощутимы. Поэтому невозможно ждать от всех обучающихся одинаково высокого уровня усвоения математического материала. Последние годы всё больше учителей задумываются над сложной задачей организации образования учеников по их образовательным траекториям при подготовке к ЕГЭ. В связи с этим усиливается интерес к проблеме дифференцированного подхода в обучении и подготовке к ЕГЭ. Вполне естественно, что перед каждым учителем общеобразовательной школы встает вопрос о повышении качества подготовки детей к экзамену. Задача педагога – обеспечение наиболее благоприятных условий для развития способностей каждого ученика.

Качество математической подготовки обучающихся по результатам единого государственного экзамена в последние годы имеет тенденцию к снижению. Ежегодно выявляется ряд системных проблем в освоении обучающимися школьного курса математики. К ним можно отнести: недостаточно высокий уровень геометрической подготовки обучающихся (так, например, задания с развернутым ответом имеют статистику решаемости от 0,7 до 4 %); неумение проводить преобразования выражений; проблемы с решением задач практического характера; пробелы в усвоении материала, связанного с понятием производной, ее геометрического смысла и применения к исследованию функции на экстремумы и т.д. Несмотря на достаточно стандартный характер некоторых

заданий с кратким и развернутым ответом, который повторяется несколько лет, экзаменуемые допускают большое количество ошибок различного характера, что свидетельствует о низком уровне математической культуры и грамотности.

В условиях нехватки часов, необходимости успешного освоения школьной учебной программы, разного уровня подготовленности обучающихся, перед учителем математики в старших классах встает непростая профессиональная задача: как эффективно организовать подготовку к единому государственному экзамену?

Школе необходимы конкретные методические разработки по подготовке выпускников 11 классов к государственной итоговой аттестации по математике, построенные на основе дифференцированного подхода с использованием современных приемов, методов и технологий. В связи с этим выделим *проблему исследования*: как организовать подготовку к единому государственному экзамену по математике, используя дифференцированный подход?

Одной из серьезных проблем школы сейчас является низкая мотивация учащихся. Решение этой проблемы тесно связано с дифференциацией обучения и подготовки к экзаменам.

Учитывая все вышесказанное, а также то, что в современном обществе каждому человеку необходимо качественное математическое образование для успешной жизни, *актуальность темы* данной работы не вызывает сомнения.

Объектом исследования является процесс обучения математике обучающихся 11 классов.

Предметом исследования выступит реализация дифференцированного подхода при организации подготовки обучающихся 11 классов к единому государственному экзамену по математике.

Целью выпускной квалификационной работы является: разработка методики организации подготовки обучающихся 11 классов к единому государственному экзамену по математике на основе дифференцированного подхода.

Гипотеза исследования: реализация курса по выбору для учащихся 11 классов «Подготовка к ЕГЭ по математике» будет формировать устойчивые

предметные умения учащихся по решению заданий различного уровня сложности базового и профильного ЕГЭ по математике, при условии создания и осуществления специального содержания курса и результативной методики его выполнения.

В связи с поставленной целью в данной работе решаются следующие **задачи**:

1. Охарактеризовать особенности единого государственного экзамена по математике в современной школе.
2. Раскрыть сущность дифференцированного подхода в обучении математике.
3. Разработать программу, содержание и основные методические идеи курса по выбору для подготовки обучающихся к единому государственному экзамену.
4. Разработать и апробировать рекомендации по реализации курса по выбору.

Для решения поставленных задач в выпускной квалификационной работе были использованы следующие **методы исследования**: теоретические (изучение нормативных документов, анализ психолого-педагогической и научно-методической литературы по теме исследования, обобщение методического опыта), эмпирические (сравнение, наблюдение, педагогический эксперимент).

Структура выпускной квалификационной работы. Работа состоит из введения, основной части, включающей две главы, заключения, списка используемых источников и приложений.

В **первой главе** охарактеризованы особенности единого государственного экзамена в современной школе, история появления ЕГЭ в России, изучена структура и содержание контрольно-измерительных материалов, а также представлен анализ результатов ЕГЭ по математике в Красноярском крае за 2019, 2020 и 2021 года.

Вторая глава включает в себя три раздела, в которых представлена пояснительная записка с задачами и целями предложенного курса по выбору. Даль-

ше описана учебная программа курса по выбору, его структура и содержание, а также приведены методические идеи по подготовке выпускников 11 классов к ЕГЭ по математике. Предложено методическое обеспечение подготовки обучающихся к ЕГЭ. В заключении главы описаны основные результаты исследования. В приложениях представлены задания для проведения устного счета на занятиях, задания к фрагменту занятия “Сложные проценты. Банковские задачи на вклады”, примеры заданий для работы на занятиях.

Глава 1. Структура и содержание единого государственного экзамена по математике

Вот уже не один год ведутся споры и дискуссии сторонников и оппонентов ЕГЭ на территории России. Несмотря на то, что не все согласны с форматом и результатами экзамена, Минпросвещения Российской Федерации и Рособнадзор не собирается отменять его. Когда и откуда, а главное, зачем, появился ЕГЭ?

Впервые подобие ЕГЭ появилось в 60-х годах во Франции. Но правительство было вынуждено отказаться от такого рода нововведений спустя всего три года, так как народ считая, что новая система ведет нацию к деградации и к более низкому интеллектуальному уровню, не принимал новую систему.

Тем не менее упрощенная система экзаменов быстро прижилась в США, по причине того, что была более удобная и менее затратная. По всему миру массово начала распространяться идея «2 экзамена в 1».

Первые прообразы ЕГЭ стали появляться в России в 1997 году. В отдельных школах начали проводить эксперименты по добровольному тестированию выпускников [21].

Инициатором внедрения Единого государственного экзамена в России стал Владимир Филиппов, возглавлявший Министерство образования с 1998 по 2004 год. Именно он начал масштабную реформу отечественного образования: присоединение России к Болонскому процессу с разделением высшего образования на бакалавриат и магистратуру, создание новых образовательных стандартов. Одним из необходимых условий этого процесса стало введение новых способов оценки знаний школьников [9].

В связи с тем, что стандартная пятибалльная шкала оценивания не могла больше обеспечить объективную эффективную проверку знаний выпускников школ, была выбрана тестовая форма экзамена. С тестами работал беспристрастный компьютер путем сканирования и распознавания ответов, то есть проверка полностью проходила без участия человека, она автоматизирована. Основной целью введения ЕГЭ была борьба с коррупцией на выпускных экза-

менах в школах и на вступительных экзаменах в вуз. С появлением подобной формы аттестации появилась возможность сделать высшее образование для детей из регионов по-настоящему доступным. Ни один выпускник не оставался теперь без аттестата, даже если экзамен был сдан неудачно. Были и ещё плюсы внедрения единого государственного экзамена – информационные технологии на уровне регионов стали развиваться с огромной скоростью.

Федеральный центр тестирования был создан в 1999 году. Его задачей стало создание в стране системы тестирования для осуществления мониторинга качества знаний учащихся в российских образовательных учреждениях.

Под руководством директора центра Владимира Хлебникова была разработана идея, технология и методика проведения ЕГЭ, а также его программное обеспечение и шкалирование результатов тестирования. (Шкалирование – это процедура перевода первичных баллов в тестовые, процесс формирования правил начисления тестовых баллов по результатам проведения экзаменов на основе статистических данных) [17]. Тогда же была сформирована основа для составления КИМ, решались вопросы координирования информационно-технологического обеспечения экзамена.

В 2000 году в распоряжении Правительства РФ был обозначен новый план развития образования: «Поэтапный переход к нормативному подушевому финансированию высшего профессионального образования предусматривает отработку технологии проведения Единого государственного выпускного экзамена и его последующее законодательное закрепление» [9].

За время своего существования единый государственный экзамен очень сильно изменился (изменения происходили в несколько этапов), превратившись из обычного эксперимента, проведенного в пяти регионах страны, в обязательный этап (экзамен) для каждого российского школьника.

А теперь охарактеризуем особенности экзамена по математике в современной школе.

1.1. Единый государственный экзамен по математике и его особенности в современной школе

С 2009 года ЕГЭ является основной формой государственной итоговой аттестации российских школьников. Совершенствуя ежегодно процедуру проведения экзамена, а также ее содержательную часть, ЕГЭ в наши дни стал высокотехнологичным экзаменом с применением современных технологических решений, направленных на безопасность при проведении экзаменов и обеспечение объективных результатов [27].

Сегодня одно из ведущих мест в системе оценки качества образования занимает ЕГЭ по математике. ЕГЭ – это единый государственный экзамен для школьников, оканчивающих 11 класс. По всей территории России ЕГЭ является единым уровнем требований к содержанию общего образования. Экзамен представляет собой особую форму государственной итоговой аттестации. Результатами экзамена интересуются как работодатели, так и политики, и социум. Чтобы получить аттестат, все выпускники 11 классов обязаны сдать математику, что является существенной особенностью ЕГЭ. Основная цель такой аттестации – независимая экспертиза качества знаний и совмещение выпускного и вступительного экзаменов. В наше время ЕГЭ может сдать любой желающий, независимо от возраста, места проживания и финансового положения, достаточно только подать заявление. Проводится в соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования, утверждённым приказом Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512 [41].

По результатам экзамена можно оценить и эффективность образовательного процесса в общеобразовательном учреждении.

ЕГЭ могут проходить обучающиеся в учреждениях среднего и начально-профессионального образования, а также выпускники школ прошлых лет и те, кто не удовлетворён своими результатами. Школьники «с ограниченными

возможностями здоровья», выпускники школ закрытого типа и школ уголовно-исполнительной системы имеют право отказаться от сдачи ЕГЭ и могут сдавать традиционный выпускной экзамен.

ЕГЭ по математике проводится в письменной форме. Контрольно-измерительные материалы (КИМ) единого государственного экзамена по математике включают в себя тесты и задания – материал, полученный школьниками на экзамене, представляющий собой комплекты заданий стандартизированной формы, соответственно спецификации и демонстрационному варианту [41].

Базовый и профильный – два уровня, по которым проводится ЕГЭ по математике, начиная с 2015 года. Тогда же были заложены практико-ориентированные акценты, соответствующие ФГОС. Базовый уровень ЕГЭ показывает, насколько выпускники (участники экзамена) способны производить бытовые расчёты и использовать свои математические знания для решения задач из повседневной жизни. Профильный уровень ЕГЭ – более серьёзное испытание для выпускников школы, он показывает, насколько хорошо выпускники освоили более широкий диапазон математических методов и понятий, которые нужны для их дальнейшего поступления на технические и математические специальности. В 2020 году и в 2021 году базовый уровень ЕГЭ по математике отменили (из-за сложной эпидемиологической обстановки в нашей стране и во всём мире). А выпускники, не планирующие поступать в ВУЗ, для получения аттестата сдавали ГВЭ по математике.

ГВЭ – государственный выпускной экзамен – это форма государственной итоговой аттестации (ГИА) по образовательным программам среднего общего образования. Проводится в письменной форме с использованием текстов, тем, заданий, билетов [5]. Экзаменационная работа ГВЭ – аттестат состояла из одной части, в которой было 14 заданий с кратким ответом базового уровня сложности (целое число, конечная десятичная дробь или последовательность цифр) и оценивалась 1 баллом за каждый правильный ответ. На выполнение экзаменационной работы отводилось 3 часа 55 минут (235 минут).

ГВЭ проводится в соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования, утверждённым приказом Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512 (зарегистрирован в Минюсте России 10.12.2018 № 52952) [21].

Действующая в последние годы модель ЕГЭ по математике обладает достаточным диагностическим потенциалом и послужила основой для разработки перспективной модели профильного и базового ЕГЭ и материалов для проведения ЕГЭ 2022 г. Изменений в структуре и содержании КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня в 2021 г. по сравнению с 2020 г. не было [37].

В связи с ростом общественного запроса на качественное математическое образование и повышением роли математической грамотности, в 2020 году число, выполнявших тренировочные работы в популярных системах, было более 80 % участников. А в 2021 году это число увеличилось. Таким образом, доля технических ошибок при заполнении бланков ответов за последние два года снизилась благодаря массовому использованию этих систем. Кроме того, снизилось количество вычислительных ошибок, так как учителя стали уделять больше внимания вычислительной культуре учащихся.

С помощью современной модели ЕГЭ по математике на профильном уровне (по результатам ЕГЭ), можно выявить наиболее подготовленных участников с потенциалом дальнейшего обучения по математическим и техническим специальностям, исходя из их уровня предметной подготовки. Однако и для диагностики общих математических знаний и умений, охватывающих обширный спектр математических объектов, методов и практических сюжетов, в экзамене достаточно материала. В таблице 1 отображены группы по уровню подготовки по профильному уровню.

Группы по профильному уровню подготовки

Группа	1 (мин.)	2 (базовый)	3 (базовый)	4 (повыш.)	5 (высокий)
Границы первичных баллов	0 – 6	7 – 10	11 – 13	14 – 22	23 – 32
Границы тестовых баллов	0 – 27	33 – 50	56 – 68	70 – 86	88 – 100

Позитивное влияние на результаты ЕГЭ оказывают практико-ориентированные задания, включенные в КИМ ОГЭ. Включение в ОГЭ блока обязательно решенных геометрических заданий положительно сказывается на росте геометрической подготовки выпускников и на уровне выполнения заданий по геометрии в ЕГЭ.

Единый государственный экзамен помогает выпускникам выбрать дальнейший жизненный путь, объективно оценив собственные возможности. Один из существенных факторов успеха Единого государственного экзамена – обеспечение качественного преподавания на протяжении всех лет обучения в школе, а также серьезная подготовка к сдаче ЕГЭ. Отсюда и актуальность подготовки учащихся к экзамену, ведь на ЕГЭ по математике даже отличники выполняют правильно (в среднем) 70% заданий. Основная проблема кроется в том, что изучение математики по школьной программе и подготовка к ЕГЭ по математике – это не одно и то же [29]!

В готовности учащихся к сдаче экзамена в форме ЕГЭ можно выделить следующие составляющие:

- информационная готовность (информированность о правилах поведения на экзамене, о правилах заполнения бланков и т. д.);
- предметная готовность или содержательная (готовность по определенному предмету, умение решать тестовые задания);

- психологическая готовность (внутренняя настроенность на определенное поведение, ориентированность на целесообразные действия).

Ориентируясь на данные компоненты, можно выделить актуальные вопросы подготовки к ЕГЭ:

1. Организация информационной работы по подготовке учащихся к ЕГЭ;
2. Мониторинг качества знаний;
3. Психологическая подготовка к ЕГЭ.

1.2. Структура и содержание контрольно-измерительных материалов

На базе кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных организаций и спецификации были составлены варианты контрольно-измерительных материалов (КИМ).

Содержание КИМ определяется на основе федерального компонента государственного стандарта основного общего и среднего (полного) общего образования (приказ Минобрнауки России от 05.03.2004 № 1089) [36].

Спецификация содержит следующую информацию:

- 1) назначение КИМ ЕГЭ;
- 2) документы, определяющие содержание КИМ ЕГЭ;
- 3) подходы к отбору содержания, разработке структуры КИМ ЕГЭ;
- 4) структуру экзаменационной работы;
- 5) распределение заданий КИМ ЕГЭ по содержанию, видам умений и способам действий;
- 6) распределение заданий экзаменационной работы по уровню сложности;
- 7) продолжительность экзамена по математике;
- 8) дополнительные материалы и оборудование;
- 9) система оценивания экзаменационной работы в целом и выполнения отдельных заданий;

10) изменения в КИМ ЕГЭ в сравнении с предыдущим годом; 11) обобщенный план варианта КИМ ЕГЭ по математике [21].

Базовый уровень

В связи с тем, что роль общематематической подготовки в повседневной жизни возрастает, в модели ЕГЭ базового уровня сделан акцент на контроль способности применять полученные знания на практике, развитие логического мышления, умения работать с информацией.

Задания экзаменационной работы базового уровня проверяют необходимые человеку умения и навыки, такие как: умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. Все основные разделы математики входят в задания спецификации базового уровня: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра и начала мат. анализа, теория вероятностей и статистика [21].

20 заданий базовой сложности входит в данную экзаменационную работу. Ученики, не планирующие продолжения образования в специальностях, требующих высокого уровня математической подготовки, могут пройти аттестацию, выбрав ЕГЭ базового уровня. Правильные ответы к заданиям краткие, записываются в виде числа или последовательности цифр, или конечной десятичной дроби и оцениваются 1 баллом за каждое. Общий максимальный первичный балл – 20.

Первичный балл – это предварительный балл, который получается путем прямого суммирования числа правильных ответов, каждый из которых имеет определенный коэффициент.

На выполнение экзаменационной работы отводится 3 часа (180 минут). На экзамене разрешается пользоваться линейкой и справочными материалами, которые выдают вместе с вариантом контрольно-измерительных материалов [32]. Не разрешается использование калькулятора.

В экзаменационной работе проверяется следующий учебный материал.

1. Математика, 5–6 классы.
2. Алгебра, 7–9 классы.
3. Алгебра и начала анализа, 10–11 классы.
4. Теория вероятностей и статистика, 7–9 классы.
5. Геометрия, 7–11 классы.

В таблице 2 представлено, как распределены задания экзаменационной работы по разделам курса математики.

Таблица 2

Распределение заданий экзаменационной работы по содержательным разделам всего курса математики

<i>Содержательные разделы</i>	<i>Количество заданий</i>	<i>Максимальный первичный балл</i>	<i>Процент максимального первичного балла за выполнение заданий данного раздела содержания от максимального первичного балла за всю работу, равного 20</i>
Алгебра	10	10	50
Уравнения и неравенства	3	3	15
Функции	1	1	5
Начала математического анализа	1	1	5
Геометрия	4	4	20
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	1	1	5
Итого	20	20	100

Содержание и структура экзаменационной работы дают возможность достаточно полно проверить комплекс умений и навыков по предмету:

- уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- уметь выполнять вычисления и преобразования;
- уметь решать уравнения и неравенства;
- уметь выполнять действия с функциями;

- уметь выполнять действия с геометрическими фигурами;
- уметь строить и исследовать математические модели.

В таблице 3 представлено распределение заданий в варианте контрольных измерительных материалов по проверяемым умениям и способам действий.

Таблица 3.

Распределение заданий экзаменационной работы по видам проверяемых умений и способам действий

<i>Проверяемые умения и способы действий</i>	<i>Количество заданий</i>	<i>Максимальный первичный балл</i>	<i>Процент максимального первичного балла за выполнение заданий данного вида от максимального первичного балла за всю работу, равного 20</i>
Уметь выполнять вычисления и преобразования	5	5	25
Уметь решать уравнения и неравенства	2	2	10
Уметь выполнять действия с функциями	1	1	5
Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	3	3	15
Уметь строить и исследовать математические модели	5	5	25
Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	4	4	20
Итого	20	20	100

Правильное решение оценивается 1 баллом. Не менее 7 первичных баллов необходимо набрать для прохождения государственной итоговой аттестации, для чего достаточно выполнить 7 задач из 20, что соответствует «тройке» [41].

Изменения структуры и содержания КИМ ЕГЭ 2021 года в сравнении в 2020 годом отсутствуют.

Профильный уровень

Экзаменационная работа по математике профильного уровня состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базо-

вого уровня сложности (задания 1 – 8) с кратким ответом. Ответ записывается в виде целого числа, или последовательности цифр, или конечной десятичной дроби и оценивается 0 или 1 баллом. Приносит 8 баллов, то есть 25% всего экзамена.

Задания этой части направлены на проверку освоения общематематических умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях. Здесь проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную в таблицах и на графиках, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в геометрических конструкциях. В часть 1 включены задания по всем основным разделам математики: алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей, геометрия (планиметрия и стереометрия).

Задания в части 2 проверяет знания выпускников на уровне, который необходим для поступления в вузы, где математика является профильным экзаменом. Последние 3 задания части 2 предназначены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке [21].

Во 2 части – 4 задания (задания 9 – 12) с кратким ответом повышенного уровня, записывается в виде целого числа, или последовательности цифр, или конечной десятичной дроби и 7 заданий (задания 13 – 19) с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности; задания 18 и 19 относятся к высокому уровню сложности. В заданиях 13 – 19 в бланке ответов записывается полная запись решения с обоснованием выполненных действий, которое соответствует критериям оценивания. Каждое из заданий 13-15 оцениваются 2 баллами, задания 16 и 17 – 3 баллами, 18 и 19 – 4 баллами, при условии, если ответ правильный и развернутый:

- Приносит 16 баллов, то есть 50% всего экзамена за 9 заданий повышенного уровня.
- Приносит 8 баллов, то есть 25% всего экзамена за 2 задания высокого уровня.

Максимальный первичный балл за всю работу – 32. Затем первичные баллы переводятся в тестовые по 100-балльной шкале.

В таблице 4 приведено распределение заданий экзаменационной работы по содержательным разделам курса математики.

Таблица 4

Распределение заданий экзаменационной работы по содержательным разделам курса математики

<i>Содержательные разделы</i>	<i>Количество заданий</i>	<i>Максимальный первичный балл</i>	<i>Процент максимального первичного балла за выполнение заданий данного раздела содержания от максимального первичного балла за всю работу, равного 32</i>
Алгебра	4	9	28,1
Уравнения и неравенства	5	10	31,2
Функции	2	2	6,3
Начала математического анализа	2	2	6,3
Геометрия	5	8	25,0
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	1	1	3,1
Итого	19	32	100

В таблице 5 приведено распределение заданий экзаменационной работы по видам проверяемых умений и способам действий.

Таблица 5

Распределение заданий экзаменационной работы по видам проверяемых умений и способам действий

<i>Проверяемые умения и способы действий</i>	<i>Количество заданий</i>	<i>Максимальный первичный балл</i>	<i>Процент максимального первичного балла за выполнение заданий данного вида от максимального первичного балла за всю работу, равного 32</i>
Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной	4	6	18,8

жизни			
Уметь выполнять вычисления и преобразования	1	1	3,1
Уметь решать уравнения и неравенства	4	9	28,1
Уметь выполнять действия с функциями	2	2	6,2
Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	5	8	25,0
Уметь строить и исследовать математические модели	3	6	18,8
Итого	19	32	100

Задания части 2 направлены на проверку освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности и на творческом уровне. Чтобы решить задание 19, нужно уметь рассуждать и строить цепочку рассуждений, в следствие чего и прийти к верному ответу.

В таблице 6 приведено распределение заданий экзаменационной работы по уровню сложности.

Таблица 6

Распределение заданий по уровню сложности

<i>Уметь строить и исследовать математические модели</i>	<i>Количество заданий</i>	<i>Максимальный первичный балл</i>	<i>Процент максимального первичного балла за выполнение заданий данного уровня сложности от максимального первичного балла за всю работу, равно 32</i>
Базовый	8	8	25
Повышенный	9	16	50
Высокий	2	8	25
Итого	19	32	100

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Каждое задание экзамена относится к основным разделам курса математики: числа и вычисления, алгебра и начало математического анализа, геометрия, вероятность и статистика, и всегда соответствует определенной теме. При

решении заданий с развернутым ответом, а также при большинстве других заданий, проверяется логическое мышление [20].

В экзамене достаточно материала для проверки общих математических умений, которые применимы в быту, в самых разнообразных профессиях и при изучении других предметов. Эти задания, как правило, даются в части 1 КИМ экзамена и охватывают широкий круг математических объектов, методов и практических сюжетов: оптимальный выбор, финансовая грамотность, бытовые расчёты, оперирование процентами, прикладная геометрия, оценка вероятностей событий и т.п. [20].

Часть 2 проверяет математические знания, необходимые для поступления на математические и технические специальности. Сюда входят текстовая задача, решение неравенств и уравнений, задания на исследование функций, задачи по геометрии (планиметрии и стереометрии).

Распределение заданий КИМ ЕГЭ по содержанию, видам умений и способам действий

Задания части 1 проверяют следующий учебный материал.

1. Математика, 5 – 6 классы.
2. Алгебра, 7–9 классы.
3. Алгебра и начала анализа, 10–11 классы.
4. Теория вероятностей и статистика, 7–9 классы.
5. Геометрия, 7–11 классы.

Задания части 2 проверяют следующий учебный материал.

1. Алгебра, 7–9 классы.
2. Алгебра и начала анализа, 10–11 классы.
3. Геометрия, 7–11 классы.

Проверка правильности выполнения заданий, в которых предусмотрен короткий ответ, оценивается с помощью специальных аппаратно-программных средств. Проверка заданий 13 – 19 проводится экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания.

Для получения аттестата выпускнику необходимо набрать 6 первичных баллов, что соответствует 27 тестовым.

Перейдем к анализу результатов экзамена в регионе.

1.3. Анализ результатов единого государственного экзамена по математике последних лет в Красноярском крае

В 2021 году ЕГЭ по предмету математика профильная в Красноярском крае писали 7771 человек, это 53,64 % от общего числа участников, это на 213 человек меньше, чем в 2020 году и на 105 человек меньше, чем в 2019 году. Сохраняется увеличение доли юношей по сравнению с долей участников ЕГЭ по профильной математике, (2019 году – 54,52% от общего числа участников, в 2020 году – 55,46%, в 2021 году – 57,34%). Количество девушек, наоборот, снизилось на 1,88 % в сравнении с 2020 годом и составило 42,66%.

За последние три года наблюдается рост положительной динамики результатов ЕГЭ по математике.

В 2021 году результаты участников профильного экзамена немного улучшились по сравнению с результатами 2020 года. Вероятнее всего это связано с тем, что во многих регионах страны в 2020 году с доступом к дистанционным учебным платформам для учеников и учителей могли возникать серьезные трудности, а уже в 2021 году дистанционные формы обучения стали более совершенными, что и приблизило результаты 2021 года к результатам 2019 года.

В 2021 году не преодолевших минимальный барьер выпускников стало меньше (2019 г. – 3,29%, 2020 г. – 9,21%, 2021 г. – 6,45%). Средний тестовый балл стал выше (2019 г. – 54,65, 2020 г. – 52,90, 2021 г. – 54,31) и увеличился процент участников, получивших от 81 до 100 баллов на 1,78% (2019 г. – 4,27%, 2020 г. – 4,62%, 2021 г. – 6,05%). 100 баллов в 2021 году никто не получил (2019 г. – 8 чел., 2020 г. – 6 чел.).

Лучшие результаты экзамена наблюдались у выпускников лицеев, Кадетских корпусов, Мариинских гимназий, Школы космонавтики и гимназий, причем в этих ОО существенно увеличилась доля участников, получивших тестовые

вый балл от 81 до 99 баллов (лицей: 2019 г. – 11,48%, 2020 г. – 8,36%, 2021 г. – 14,36%; Кадетские корпуса, Мариинские гимназии, Школа космонавтики: 2019 г. – 9,89%, 2020 г. – 7,81%, 2021 г. – 10,89%; гимназии: 2019 г. – 8,11%, 2020 г. – 9,47%, 2021 г. – 10,16%). У выпускников лицеев, Кадетских корпусов, Мариинских гимназий, Школы космонавтики и гимназий доля участников, набравших балл ниже минимального значения, стала меньше в 2 раза, чем в 2020 году, но все еще остается высокой по сравнению с 2019 годом (лицей: 2019 г. – 0,94%, 2020 г. – 4,52%, 2021 г. – 2,10%; Кадетские корпуса, Мариинские гимназии, Школа космонавтики: 2019 г. – 0,76%, 2020 г. – 8,20%, 2021 г. – 2,02%; гимназии: 2019 г. – 0,19%, 2020 г. – 6,00%, 2021 г. – 3,07%).

У выпускников учреждений СПО, вечерних (сменных) общеобразовательных школ (2019 г. – 58,62%, 2020 г. – 13,33%, 2021 г. – 27,27%) и образовательных центров (2019 г. – 50,00%, 2020 г. – 50,00%, 2021 г. – 40,00%) результаты экзамена оказались самыми слабыми.

Среди выпускников, обучающихся по программам СОО, увеличилась доля выпускников, не набравших минимального балла (2019 г. – 0,57%, 2020 г. – 8,27%, 2021 г. – 5,74%), однако на 1,77% увеличилась доля получивших от 81 до 99 баллов (2019 г. – 4,51%, 2020 г. – 4,73%, 2021 г. – 6,28%).

В целом, за последние три года, наблюдается улучшение результатов выпускников по основным показателям: процент, не набравших минимального балла среди выпускников прошлых лет, уменьшилась на 18,21% (2019 г. – 35,48%, 2019 г. – 25,47%, 2020 г. – 17,27%); а процент участников, получивших тестовый балл от 81 до 99 баллов, стал выше на 0,71% в сравнении с 2019 годом и уменьшился на 1 % в сравнении с 2020 годом (2019 г. – 1,24%, 2020 г. – 2,95%, 2021 г. – 1,95%).

Результаты выпускников, обучающихся по программам СПО, стали чуть лучше, чем в 2020 году, но остаются все еще ниже, чем в 2019 (2019 г. – 65,71%, 2020 г. – 26,32%, 2021 г. – 38,46%). Участников, получивших тестовый балл от 81 до 99 баллов, среди выпускников, обучающихся по программам СПО, на протяжении трех последних лет нет.

Ухудшились результаты участников ЕГЭ с ОВЗ: на 5,62% увеличилась доля набравших балл ниже минимального значения (2019 г. – 3,90%, 2020 г. – 4,40%, 2021 г. – 9,52%), уменьшилась на 1,62% доля участников, получивших тестовый балл от 81 до 99 (2019 г. – 5,19%, 2020 г. – 2,20%, 2021 г. – 3,57%) [32].

В крае немного ухудшились результаты выпускников в части заданий базового уровня сложности в сравнении с 2020 годом. В части 1 процент выполнения первых задач (№1, №2, №4 и №5) снизился. При выполнении заданий № 1-5 были продемонстрированы показатели выше 89 %. Высокие показатели говорят о сформированности базовых математических компетенций у участников экзамена за курс основной и средней общеобразовательной школы по математике. Неумение читать условие задачи, понимать логику задачи, знание нахождение геометрических величин, вычислительные ошибки – наиболее частые ошибки в этих заданиях.

Значительно улучшились результаты участников, выполнивших геометрические задания №6 по планиметрии – 79,89%, что выше, чем в 2020 году – 68,02%.

Результаты выполнения задания №7 на использование геометрического смысла производной, требующего соотнесения графика и свойств функции и её производной, также стали выше.

Задание №8 – геометрическая задача, с которой в 2021 году справились 73,07% выпускников, это на 2,78% меньше, чем в 2020 году – 75,85%. Задача показывает, что существенные пробелы в геометрической подготовке сохраняются у значительной части учащихся.

Если сравнивать с предыдущими годами, то процент выполнивших задания части 2 с кратким ответом повышенного уровня сложности (это задания 9 – 12), в среднем практически не изменился. Процент выполнения этих заданий ниже, чем в предыдущий год. Наиболее трудным остаётся задание 12 на исследование функций: нахождение точек экстремума, экстремумов, наибольших и

наименьших значений функций. В этом году с заданием справились 43,12 % участников [41].

При выполнении ряда заданий с развернутым ответом, меньше стало количество выпускников, получивших неполный балл. За *задание №13* (уравнение с отбором корней на промежутке), 16 (алгебраическое неравенство) и 17 (составление и исследование математической модели по тексту задачи) неполный балл получил совсем небольшой процент выпускников.

В 2021 году большие трудности вызвала у выпускников задача повышенного уровня сложности по геометрии – это было *задание №14* (стереометрия). Процент решения данного задания – 3,17%, это чуть выше показателей прошлого года – 0,92%. Среди выпускников, выполнивших работу на 80-100 баллов, задание решили 23,30% участников (в 2020 г. – 14,51%). Строгое доказательство того, что отрезок является средней линией вызвало затруднения. Часть выпускников применили метод координат при решении этой задачи. Однако ошибались, используя нерациональный способ введения системы координат в пространстве или при определении координат точек. Возможная причина ошибки – учащиеся не знают признак параллельности прямых в пространстве, то есть, плохо владеют теоретическими фактами. Допускаются также и арифметические ошибки при выполнении пункта б.

Задание №15 (показательное неравенство) в этом году решили – 16,28%, что значительно выше показателей прошлого года – 8,39%. Задание выполнили 93,09 % выпускников (в 2020 г. – 76,90%) среди участников, получивших 80-100 баллов. Эксперты отмечали, что было достаточно много работ, в которых выполнялась замена переменных и ставились неверные ограничения на введенную переменную, что является грубой ошибкой. Основные ошибки связаны с плохим знанием метода интервалов и неумением произвести обратную замену, часто допускались также арифметические ошибки и ошибки при преобразованиях.

Сравнивать результаты ЕГЭ по математике за 2021 год с результатами 2019 и 2020 годов не совсем корректно, так как вводились временные изменения.

Существенно снизилась доля технических ошибок при заполнении бланков ответов за последние 2 года, также снизилось количество вычислительных ошибок.

В наиболее сильной группе участников решаемость задания 16 на полный балл в ЕГЭ 2021 г. составляет – 22,06% (в 2020 г. – 31,46 %). Из слабой группы участники за это задание, в основном, не берутся. Решаемость задания составила 1,60%, что ниже показателей прошлого года (3,25%). Большая часть выпускников, решая данную задачу, не предоставляла строгое обоснованное доказательство. Чтобы увидеть верный ход решения задачи, учащимся необходимо было построить правильный чертеж, чего большинство из них не сделали (построение было не точным). Кроме этого, наблюдаются логические ошибки и вычислительные. Предлагаемую задачу можно было решить разными способами, здесь это допустимо. Однако, это лишний раз подтверждает недостаточное владение теоретическим аппаратом геометрии, способами решения задач, не умеют доказывать утверждения. Вообще нужно отметить, что предлагаемая задача допускала решение разными способами. Это лишний раз подтверждает, что школьники недостаточно владеют теоретическим аппаратом геометрии, способами решения задач, не умеют доказывать утверждения. Умение доказывать формируется постепенно не только в процессе решения задач, но и при доказательстве теорем, это одна из самых важных составляющих геометрии. Поэтому учителю нельзя игнорировать из-за нехватки времени представление доказательства на уроках самому и опрос учащихся по доказательству теорем; требовать от учащихся пояснений и доказательств утверждений при решении задач, обоснованных устных ответов, обучать доказательству.

В задании № 17 решаемость составила 16,44% (в 2020 г. – 23,79%). К выполнению этой задачи приступали многие учащиеся. Поскольку задача текстовая, содержащая в себе несколько условий, которые необходимо учесть, то

многие учащиеся не смогли совместить все условия вместе или неверно поняли условие, в результате чего неправильно построили математическую модель к задаче. По сравнению с задачей прошлого года, задание имело больше сложных вычислений, поэтому очень часто наблюдались вычислительные ошибки. Некоторые школьники пользовались при построении модели лишь своими предположениями, не обосновывая их. Стоит отметить большое количество работ с очень небрежным оформлением данной задачи. Показатель выполнения этого задания в разных группах участников нестабилен: в группе выпускников, получивших 61-80 баллов – 28,92% (в 2020 г. – 50,47%), 81-100 баллов – 96,60% (в 2020 г. – 95,96%).

К заданиям высокого уровня сложности относились задания №18 и №19. Это задания на применение комбинации различных методов решения. Для успешного выполнения этих заданий необходим, кроме хороших математических знаний, высокий уровень математической культуры.

Стоит отметить, что на результаты ЕГЭ по данным заданиям могли повлиять изменения учебного процесса, вызванные распространением коронавирусной инфекции (COVID-19).

Итоги ЕГЭ 2021 года указывают на основные проблемы, которые необходимо решать при обучении математике:

- несформированность базовой логической культуры у учащихся;
- недостаточные геометрические знания у значительной части учащихся;
- неумение проводить анализ условия задачи, искать пути решения, применять известные алгоритмы в измененной ситуации;
- неразвитость регулятивных умений: находить и исправлять собственные ошибки.

Обозначенные выше проблемы вызваны системными недостатками в преподавании математики. Необходимо обратить внимание на:

- отсутствие системы выявления и ликвидации пробелов в осваиваемых математических компетенциях, начиная с 6 класса;

- отсутствие системной поддержки углубленного математического образования в 8-11 классах.

Выводы по первой главе

В первой главе были охарактеризованы особенности единого государственного экзамена в современной школе, рассмотрены некоторые факты из истории появления ЕГЭ в России. Расписаны и изучены структура и содержание контрольно-измерительных материалов, проанализированы результаты ЕГЭ по математике в Красноярском крае за последние три года 2019, 2020 и 2021 года.

Глава 2. Курс по выбору для организации дифференцированной подготовки обучающихся к единому государственному экзамену

Рассмотрим, что такое дифференцированная подготовка. Понятие дифференцированного подхода отнюдь не новое, впервые о нем заговорили за рубежом представители гуманистической психологии К. Роджерс, А. Маслоу, Р. Мей, В. Франкла.

В России активная разработка структуры дифференцированного образования началась учеными А.В. Мудрик, И.С. Кон с восьмидесятых годов XX века. Над темой дифференцированного подхода работали Л.С. Выготский, Л.В. Занков, Д.Б. Эльконин, И.М. Осмоловская и другие. И.М. Осмоловская утверждает, что *дифференцированное обучение* — это организация учебного процесса, при которой учитываются индивидуально-психологические особенности личности, формируются группы учащихся с различающимся содержанием образования, методами обучения [16].

А.С. Макаренко утверждал, что воспитание отдельной личности осуществляется в своём индивидуальном педагогическом приёме. Каждое воздействие на личность должно быть индивидуально, учитывая индивидуальный путь его развития [13].

И.М. Осмоловская в своей книге «Как организовать дифференцированное обучение» пишет, как противники дифференциации утверждают, что дифференцировать необходимо не детей, а учебный материал, можно не выделять группы явно, они могут быть гибкими, подвижными, допускающими переход учеников из одной группы в другую.

Понятие дифференциация происходит от латинского слова *differentia* — «различие». Переводится как разделение, расслоение процессов или явлений на различные части, ступени, уровни. *Дифференцированное обучение* — это:

- форма организации учебного процесса, при которой учитель работает с группой учащихся, составленной с учетом наличия у них каких-либо значимых для учебного процесса общих качеств;

- часть общей дидактической системы, которая обеспечивает специализацию учебного процесса для различных групп обучаемых.

Дифференциация обучения (дифференцированный подход в обучении — это принцип дидактики) – это:

- создание разнообразных условий обучения для различных школ, классов, групп с целью учета особенностей их контингента;
- комплекс методических, психолого-педагогических и организационно-управленческих мероприятий, обеспечивающих обучение в группах.

Технология дифференцированного обучения есть сочетание методов, средств и организационных решений определённой части учебного процесса.

Организация процесса обучения делится на два основных вида дифференциации:

- 1) по индивидуально-психологическим особенностям детей (это возраст, пол, интересы ребёнка, уровень умственного развития, здоровья и личностно-психологический тип;
- 2) по организационному уровню (региональная, внутришкольная, в параллели, межклассная, внутриклассная).

Таким образом, есть два типа, на которые делится дифференциация обучения: внешняя и внутренняя.

Формой внешней дифференциации является дифференциация по содержанию. Эта форма осуществляется в разных группах по разным программам, которые отличаются более глубоким изучением материала. В школе, в основном, это спец. классы профильного направления или же курсы по выбору. При такой форме дифференциации, как правило, создаются относительно стабильные группы учащихся.

Существует две основные модели внешней дифференциации:

4. Модель потоков. С помощью тестов, вводных контрольных в зависимости от уровня интеллекта учащихся делят на три потока: низкий, средний и продвинутый.

5. Модель гибкого состава класса. Эта модель предполагает обучение по основной программе в общем составе. Только по ряду предметов учащиеся занимаются в разных группах.

Внешняя дифференциация используется давно и широко в общеобразовательных организациях: экзамены по выбору, посещение факультативов, элективов, курсов по выбору. Однако не все школы, особенно это касается школ в отдалённых сельских местностях, могут позволить себе разбиение на классы с разным уровнем математической подготовки. Поэтому в такой ситуации более рациональным решением является организация процесса обучения принципов внутренней дифференциации.

Формой внутренней дифференциации выступает различное обучение учащихся в рамках какой-то группы (класса), сформированной случайным образом и реализуется через систему уровневой дифференциации.

Такая форма дифференциации осуществляется в группе (классе), где процесс обучения строится на разных уровнях усвоения материала по одному учебнику и по одной программе, но при этом каждый учащийся может выбрать нужный ему уровень усвоения материала: обязательный (базовый) или повышенный.

При подобной форме организации учебного процесса учащиеся получают базовый минимум знаний и одновременно могут развивать творческую индивидуальность своей личности.

Прежде, чем адаптировать вышеизложенный материал под систему подготовки к ЕГЭ по математике, разработаем учебную программу курса по выбору и предложим методические идеи дифференцированной подготовки обучающихся к экзамену.

2.1. Учебная программа и основные методические идеи подготовки обучающихся к экзамену

Результаты ЕГЭ очень важны для современных школьников, потому что именно от баллов, полученных на экзамене, зависит поступление в вуз и карье-

ра. Каждый выпускник и родитель понимает, что именно профильный ЕГЭ будет пропуском в мир интересных и высокооплачиваемых профессий. Поэтому главная задача, стоящая перед каждым учителем – хорошо подготовить учащихся к сдаче ЕГЭ и, пользуясь разнообразными технологиями и формами, улучшить качество математической подготовки выпускников. Следующая задача учителя – передать целостное понимание курса школьной математики и научить грамотно (математически) решать любую экзаменационную задачу [26]. Безусловно, важными моментами работы по подготовке к ЕГЭ являются: получение навыков решения простых задач быстро и без калькулятора, а также формирование позитивного отношения к итоговому контролю, как к одной из форм оценки результатов обучения. Еще одной задачей преподавателя является научить выпускника рассчитывать время на экзамене.

В основу программы подготовки к ЕГЭ должны быть положены следующие концептуальные положения:

- Личностный подход, педагогика успеха, педагогика сотрудничества.
- Обучать математике – значит обучать решению задач, а обучать решению задач значит обучать умениям типизации и умениям решить типовые задачи.
- Индивидуализировать обучение «трудных» и «одаренных».
- Органическая связь индивидуальной и коллективной деятельности.

Главными в обучении служат следующие принципы:

- Принцип простоты (Сохраняя математическую строгость изложения, любую тему можно объяснить просто и понятно) [14].
- Принцип дифференцированного обучения и оценки [20].
- Принцип максимального использования источников, рекомендованных ФИПИ.
- Принцип сочетания парного обучения и обсуждения выполненных заданий в группе.
- Принцип всестороннего самоконтроля и обратной связи [2].

Пояснительная записка

Любой выпускник может хорошо сдать государственный экзамен по математике, если он правильно и тщательно подготовлен. Компетентный педагог, высокая степень мотивации, где основой будут небольшие ежедневные успехи в освоении математики и отсутствие непонятных тем, и восприимчивость учащихся – залог успешных результатов на ЕГЭ. Курс научит школьников не только не бояться заданий различной степени сложности, в том числе и не типичных учебных задач, а близких к реальным проблемным ситуациям, но и решать их, а также поможет обобщить знания по математике, вспомнить основные алгоритмы решения задач. Школьный курс математики не дает такой возможности, чтобы на уроках отработать подобные задания. То, что учащимся предлагается разрешать проблемы, близкие к реальности, с использованием математики, важно для понимания ими ее роли в повседневной жизни [19]. Для решения подобных задач необходимо развивать математическую грамотность учащихся. И именно программа курса позволит решить эту задачу.

Курс по выбору «Готовимся к ЕГЭ по математике» предназначен для эффективной подготовки учащихся 11 классов, которые готовятся к государственной (итоговой) аттестации по математике 1 год, с сентября по май. Программа курса рассчитана на 68 часов с учебной нагрузкой 2 часа в неделю на занятиях + самостоятельная подготовка. Состоит из трех модулей разного уровня сложности. 1-й модуль – «Базовый» для тех, кому нужен базовый уровень сложности. 2-й модуль – «Профильный» для тех, кому достаточно 45-60 баллов по математике для поступления в учебное заведение. 3-й модуль – «Профильный (углубленный)» для тех, у кого есть цель получить более высокий балл, выше 60.

Обучающийся может выбрать один из модулей.

Разработка программы предложенного курса отвечает всем требованиям КИМ ЕГЭ, а также требованиям образовательного стандарта математического образования. Курс дополняет учебный материал, соответствующий тематическому содержанию программы по математике для 5 – 11 классов общеобразова-

тельных школ, и будет служить помощью учащимся с любой степенью подготовленности.

Программа курса разработана на основе системно-деятельностного подхода к изучению математики, основная идея которого в том, что знания не даются в чистом виде, а дети «открывают» их самостоятельно в процессе исследовательской деятельности [27].

Цели курса [7]:

- повышение качества подготовки учащихся к ЕГЭ по математике с помощью практических занятий через повторение, коррекцию базовых математических знаний, систематизацию, расширение и углубление знаний;
- развитие и совершенствование творческих и интеллектуальных способностей, математической культуры, математической и читательской грамотности;
- создание условий для дифференциации и индивидуализации обучения, выбора выпускниками разных образовательных траекторий в соответствии с их способностями и потребностями.

Задачи курса [12]:

- систематизировать знания и умения за курс средней школы;
- подкорректировать (ликвидировать) пробелы в знаниях учащихся;
- сформировать навык работы с дополнительной литературой, использования различных Интернет-ресурсов;
- сформировать и развить аналитическое и логическое мышление, научить выделять главное при проектировании решения задач;
- развить умение вести дискуссию, общеучебные и коммуникативные способности работы в группе, самостоятельной работы, аргументировать ответы;
- сформировать продуктивное мышление, обеспечивающее успешность жизни в обществе;

- сформировать навыки самоконтроля и концентрации, навыки устной и письменной речи, умения грамотно распорядиться отведенным временем;
- развивать групповые и индивидуальные формы внеурочной деятельности;
- организовать поисково-исследовательскую работу учащихся в рамках темы, используя предложенную информацию;
- сформировать у обучающихся устойчивый интерес к предмету и привить умение самостоятельно пополнять знания
- психологическая подготовка к экзамену.

Виды деятельности на занятиях: уроки-лекции, уроки-консультации, зачетные уроки, уроки контроля и оценки знаний, умений и навыков, уроки-практикумы, работа с компьютером, самостоятельное изучение теории.

Формы и методы контроля, с помощью которых будет отслеживаться эффективность курса:

- ✓ *текущий* – получение баллов за задания после лекций, за итоговый тест после каждого раздела (часть заданий выполняется в классе, часть – дома самостоятельно);
- ✓ *тематический* (получение баллов за выполнение групповых заданий);
- ✓ *итоговый* (формирование рейтинга личных результатов по мере прохождения каждой ступени курса).

Оценка обучающимся будет выставлена по итогам результатов.

Планируемые результаты:

Изучение данного курса даёт учащимся возможность:

- повторить основные темы и систематизировать ранее изученный материал школьного курса алгебры и геометрии;
- освоить навыки быстрого счета и проверки ответа;
- познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;

- увидеть и выделить в ситуации проблему, которая решается средствами математики;
- овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения задач;
- освоить основные приемы решения задач повышенного и высокого уровня;
- сформировать навыки самообразования, критического мышления, самоорганизации и самоконтроля, умения формулировать и решать проблемы.

Методические идеи курса:

1. Курс рассчитан на разных обучающихся, поэтому информацию (теорию) необходимо предоставлять в разных форматах: текст, схема, ментальные карты, аудио и видео форматы, и др.
2. Разработка структуры курса должна быть ориентирована на особенности различных задач в различных формах, в том числе и геометрических.
3. Вся теория и задания подбираются из лучших, актуальных пособий, зарекомендовавших себя с положительной стороны.
4. Сначала курса учащимся предлагать большой выбор задач с целью заинтересовать (привлечь), а не оттолкнуть (испугать) сложными формулировками, чтобы каждый мог выбрать и решить то, что ему нравится. А уже после – давать задачи вне зависимости от выбора.
5. Для более легкого усвоения материала при разборе особенно сложных задач использовать исключительно свое видео.
6. Использовать визуальный контент, гиф-анимацию, ментальные карты, схемы, таблицы, картинки для разнообразия теоретического текста.
7. Всегда давать комментарии по проверенной работе и ставить баллы.
8. Все тренировочные тесты проводить с жестким ограничением времени.
9. Ввести систему оценивания, чтобы каждый мог посмотреть на какой процент он прошел курс. Важно выставлять баллы за каждую работу.

Методическое обеспечение курса: традиционные формы обучения, дистанционное обучение.

Эффективность данного курса будет выше, при условии реализации смешанного обучения [8]. Современные дети – это дети поколения Z. Они гораздо быстрее усваивают некоторые темы через электронный ресурс, чем через многократные объяснения учителя [39].

Особенности курса:

- интеграция (объединение) разных тем;
- практическая значимость для учащихся;
- использование ИКТ-технологий.

Требования к знаниям и умениям учащихся.

Выполнение практических заданий, а также заданий для самопроверки способствует закреплению у учащихся теоретического материала и развитию навыков решения разных заданий. В таблице 7 представлен учебно-тематический план курса «Готовимся к ЕГЭ по математике».

Таблица 7

Учебно-тематический план курса «Готовимся к ЕГЭ по математике»

№ п/п	Название темы	Количество часов
1	Структура КИМ ЕГЭ, правила заполнения и оформления бланков, решения заданий. Результаты экзамена прошлых лет	1
2	Выражения и преобразования	3
3	Функции и их свойства	6
4	Текстовые задачи	5
5	Уравнения и неравенства. Системы уравнений	11
6	Приемы решения нестандартных уравнений	4
7	Различные способы решения уравнений и неравенств с параметром	8
8	Планиметрия: нахождение отрезков и углов	4
9	Планиметрия: нахождение площадей	4
10	Планиметрия: много конфигурационные задачи	6
11	Стереометрия: нахождение отрезков и углов	6
12	Стереометрия: нахождение площадей поверхностей и объемов	4
13	Решение тренировочных вариантов из учебных пособий и заданий из открытого банка заданий ЕГЭ	3
14	Итоговый зачет	3
	Итого	68

Содержание программы курса

1. Структура КИМ ЕГЭ по математике, правила заполнения и оформления бланков решения. Ознакомление со структурой и содержанием КИМ ЕГЭ, с бланками. Разбор типичных ошибок при заполнении бланков. Практическое занятие по заполнению бланков ответов. (1 ч)

2. Выражения и преобразования. (3 ч). Приемы быстрого счета без калькулятора. Корни и степени, логарифмы и их свойства. Преобразования логарифмических, тригонометрических, иррациональных и степенных выражений. Логарифмические уравнения.

3. Понятие функции и их свойства. (6 ч). Геометрический и физический смысл производной. Производная и исследование функции. Первообразная функции. Возрастание и убывание функции, экстремумы, точки максимума и минимума, четности и нечетности функции. Чтение и построение графиков функции, зависимостей, содержащих модуль. Чтение графиков производной функции. Квадратичная функция. Дробно-рациональная функция и метод интервалов.

4. Текстовые задачи. (5 ч) Задачи на проценты. Практико-ориентированные задачи. задачи на совместную работу и движение по реке. Задачи на смеси и сплавы. Задачи на разбавление. Задачи на определение средней скорости движения и задачи на движение по окружности. Задачи с экономическим содержанием и нестандартные задачи. Теория вероятностей. Простейшие задачи с физическим содержанием. Задачи с физическим содержанием, которые решаются с помощью линейных и квадратных уравнений и неравенств.

5. Уравнения и неравенства, их системы. (11 ч)

Равносильность уравнений. Уравнения вида $P(x) \cdot Q(x) = 0$. Уравнения вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. Уравнения с переменной под знаком модуля. Нестандартные приемы решения уравнений. Доказательство неравенств. Системы неравенств. Различные методы решения неравенств (замены множителя, метод оценки). Иррацио-

нальные уравнения и их системы. Неравенства и системы неравенств с модулем. Метод интервалов.

6. Нестандартные уравнения. (4 ч) Способы решения нестандартных уравнений: графический, с использованием свойств функций, нахождением производной. Уравнения в целых числах и пути их решения.

7. Задачи с параметром. (8 ч) Параметр, его суть в различных случаях. Элементарные функции, их графики и преобразование графиков функций. Множества точек на плоскости. Квадратичные уравнения и неравенства с параметрами. Аналитический и графический метод решения задач с параметром.

8. Планиметрия: нахождение отрезков и углов. (4 ч) Тригонометрия. Определения синуса, косинуса, тангенса угла в прямоугольном треугольнике. Окружность. Углы в окружности. Вписанная и описанная окружности. Смежные углы. Многоугольники. Векторы. Метод координат.

9. Планиметрия: площади плоских фигур. (4 ч) Вывод формулы площадей. Решение задач.

10. Планиметрия: многоконфигурационные задачи. (6 ч) Соотношения между сторонами и углами треугольника. Теорема Пифагора. Теоремы о пропорциональных отрезках в круге. Биссектриса, медиана, высота треугольника. Задачи повышенной сложности. Простые геометрические построения. Теорема Менелая.

11. Стереометрия: прямые и плоскости в пространстве. (6 ч) Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между скрещивающимися прямыми. Линейный угол двугранного угла. Нахождение различных отрезков и углов методом координат.

12. Стереометрия: многогранники (основные типы) и их свойства. Тела вращения. (4 ч) Объем и площади поверхности тел. Соотношение между объемами подобных тел. Векторы. Скалярное произведение и угол между векторами. Метод координат.

13. Решение тренировочных вариантов из учебных пособий и заданий из открытого банка заданий ЕГЭ -11 (3 ч)

14. Итоговый контроль дифференцированно ориентированный (3 ч). Проведение итогового тестирования с использованием ИКТ:

Каждый блок по определенной теме завершается дифференцированной самостоятельной работой или зачетом. Предусмотрены творческие задания и итоговая зачетная работа, приближенная к условиям сдачи ЕГЭ по математике.

После прослушивания лекционного материала, проведения уроков-практикумов, на этапе закрепления знаний учащихся, будут предложены индивидуальные и групповые домашние задания с элементами исследовательской работы.

Задания базового уровня наиболее тщательно отрабатываются до усвоения их всеми учащимися. Особое внимание «слабым» учащимся из «группы риска».

Для более эффективной подготовки учащихся целесообразно организовывать самостоятельную работу с использованием ИКТ. Для этого можно рекомендовать сайты из Интернета, где есть весь необходимый теоретический материал. Там же можно проверить уровень своей подготовки онлайн. Например:

1. Сайт Ларина А.М.
2. «ЕГЭ Базовый уровень. Математика с нуля!»
3. Школково ЕГЭ, ОГЭ, олимпиады»
4. "РЕШУ ЕГЭ": математика
5. Решение вариантов из сборника Ященко и т.д.

2.2. Методическое обеспечение подготовки обучающихся к экзамену

Проанализировав содержание контрольно-измерительных материалов, критерии оценивания, результаты ЕГЭ по математике последних лет, типичные ошибки выпускников и основные затруднения, испытываемые учащимися при выполнении заданий, была выбрана экспериментальная работа на основе

курса по выбору «Готовимся к ЕГЭ по математике», в котором предусмотрена дифференцированная подготовка учащихся.

Эффективной формой осуществления дифференциации является разноуровневый подход в обучении, под которым понимается такая организация учебно-воспитательного процесса, при которой каждый ученик имеет возможность овладеть учебным материалом по отдельным предметам школьной программы на разном уровне, но не ниже базового, в зависимости от его способностей и индивидуальных особенностей [18].

Главной педагогической установкой этого метода подготовки является создание ситуации успеха, формирование положительной мотивации учения у учащихся и возможность подготовиться к ЕГЭ как слабоуспевающим, так и успешно обучающимся, потому что предлагаются задачи разной сложности – от типовых до сложных. Какой сложности задачу выбрать – каждый ученик решает сам [3].

Основной момент здесь заключается в том, чтобы каждый ученик смог увидеть свои достижения, а затем захотел ликвидировать пробелы в знаниях. Небольшие ежедневные успехи будут повышать мотивацию, а значит, и самооценку ученика.

Курс представляет собой целостную систему, где каждая тема начинается с самых основ (основных понятий, определений, связи этих понятий). Часть задач разбирается во время занятий, а часть – является домашним заданием.

Каждому разделу содержания программы курса по выбору соответствует своя цель, методы, средства и формы обучения: в некоторых случаях нужно уделить больше внимания теоретическому материалу, в других – потребуется больше времени на отработку практических навыков, в-третьих – выделить время для самостоятельной работы. Именно поэтому систему занятий разобьем на 3 типа:

I. Лекции.

Отвечают за формирование основы, необходимой для дальнейшей деятельности обучающихся, поэтому являются основной ступенью в системе подготовки к экзамену.

II. Занятия-практикумы.

Формируют умения и навыки в применении теоретических знаний в решении различных упражнений, примеров и задач. В рамках курса по выбору рассматриваются решения заданий разного уровня сложности, включенных в содержание ЕГЭ по математике, подобранных в соответствии с изучаемой темой. Работу в ходе таких занятий можно организовать по группам с обсуждением содержания заданий и методов их решения обучающимися самостоятельно, но с внесенными коррективами от преподавателя.

III. Занятия самостоятельной работы.

На таких занятиях учащиеся работают самостоятельно, решая задания разного уровня сложности от базового – к высокому, от высокого – к повышенному. Уровень сложности каждый ученик здесь выбирает сам, учитывая, что базовый уровень является обязательным для всех. Здесь можно организовывать работу как индивидуально, так и в группах. Выполнив задание в виде теста по пройденному материалу на базовом уровне сложности, учащийся или группа имеют право перейти на следующий, более высокий, уровень и т.д. В случае, когда с заданием базового уровня сложности справиться не удалось, решение типовых задач по пройденной теме отработывают еще раз, после чего проходят повторное тестирование.

Группа учащихся, успешно прошедшая тест базового уровня, будет иметь мобильный состав. По мере подготовки и прохождения тем, ее состав будет меняться: учащиеся, освоившие базовый уровень, будут вливаться в нее, а освоившие задания второго (высокого) уровня, выходить, образуя третью группу учащихся, работающих на повышенном уровне сложности. По каждо-

му содержательному разделу целесообразно проводить не меньше трех занятий.

При переходе ученика на повышенный уровень сложности, система дифференциации может изменяться. Либо это будет работа в небольших группах, либо индивидуально.

В процессе подготовки, достигая определенных результатов, учащиеся учатся планировать и регулировать свою деятельность. Самостоятельно осуществляя свой выбор, при положительной мотивации и поддержке, каждый ученик формируется, как личность, а также повышается самооценка.

Перед началом курса важно определить стартовый уровень знаний для каждого ученика, и для этого необходимо провести входную диагностическую работу, которая поможет выявить пробелы и, заодно, познакомит обучающихся со структурой и содержанием экзаменационной работы. На основании входного теста по предмету, учитывая запросы учащихся и их родителей, то есть, выбор уровня сдаваемого экзамена, а также уровень знаний, навыков и обучаемости детей, класс условно разделим на 3 группы. Первую группу будут составлять ученики с «высоким уровнем знаний». Это мотивированные учащиеся с хорошими познавательными способностями, которым помощь нужна при решении заданий повышенной и высокой сложности для получения максимально высокого балла, необходимого при поступлении в ВУЗ.

Во второй группе («средний уровень знаний») будут учащиеся, которые легко справляются с заданиями с кратким ответом, но затрудняются решать задания с развернутым ответом. То есть, это учащиеся, которые могут набрать баллы для поступления в учебное заведение, где не предъявляют высоких требований к математической подготовке.

И третью группу («низкий уровень знаний») будут составлять те, кто может осилить на данном этапе лишь некоторые задания с кратким ответом, то есть, это группа «риска» - учащиеся, которые могут не набрать минималь-

ное количество баллов и не сдать экзамен. По мере того, как пробелы будут устраняться, при свободном владении материала, в соответствии с результатами обучения, ученики смогут переходить из одной группы в другую.

Вместо диагностической работы можно предложить ученикам, перешедшим в 11-й класс, заполнить анкету (тест), на вопросы которой нужно отвечать максимально честно только «ДА» или «НЕТ». Результатом будут являться тестовые баллы.

Экзамен базового уровня и экзамен профильного уровня – это кардинально два разных экзамена. Поэтому группе учащихся, которые выбрали модуль «Базовый», предпочтительно заниматься отдельно.

После изучения индивидуальных особенностей учащихся, будем работать в нескольких направлениях:

- 1) модули: «Базовый», «Профильный» и «Профильный (углубленный)»;
- 2) разноуровневые занятия с использованием ИКТ, на которых будут предложены разноуровневые задания, как обучающие, так и контролирующие, а также домашние работы. Каждый ученик должен уметь оценивать себя;
- 3) самостоятельная работа с ресурсами Интернет, дополнительной литературой, учебником.

На первом же занятии курса необходимо уделить внимание работе со структурой КИМ ЕГЭ, работе с бланками, разобрать типичные ошибки при заполнении бланков. И, для закрепления, провести практическое занятие по заполнению бланков ответов.

На всех последующих занятиях, с целью постоянного повторения учебного материала, необходимо систематически уделять особое внимание вычислительным приемам и устной работе. Во время ЕГЭ недопустимо использование калькуляторов, поэтому с самого начала курса нужно показать учащимся ряд приемов быстрого счета без калькулятора. В качестве устного счета мож-

но использовать задания из ЕГЭ, начиная с легкого, постепенно переходя к более сложному [4]. Подбирать устные упражнения необходимо, исходя из темы и цели занятия. Для постоянного совершенствования устных вычислений, можно прибегать к письменному вычислению только тогда, когда устно вычислить трудно и довести навык выполнения вычисления до автоматизма.

Устный счет можно использовать по темам:

- 1) Тригонометрические формулы.
- 2) Вычисление производных.
- 3) Простейшие тригонометрические уравнения.
- 4) Простейшие тригонометрические неравенства.
- 5) Функции, обратные тригонометрическим.
- 6) Задачи
- 7) Преобразование графиков функций.
- 8) Вычисление первообразных.
- 9) Свойства логарифмов.
- 10) Простейшие показательные и логарифмические уравнения.
- 11) Простейшие показательные и логарифмические неравенства [22].

Например, при решении уравнений можно использовать подобные задания:

$$3^x = 1, 3^{2x-1} = 27, 5^x = 8^x, 3 \cdot 9^x = 81, \log_7 x = 0, \log_7(14x) = 2$$

Раз – два в месяц нужно проводить зачетную работу (аудиторную или домашнюю, индивидуальную или групповую) по выбранным задачам [28]. Для зачета удобно использовать компьютерные тесты. Обязательно надо учить учащихся сдавать тесты. Зачетная система поможет ученику сразу оценить свои знания по конкретной теме, увидеть процент верного выполнения заданий по данной теме. Учащийся видит конкретные типы заданий, с которыми не справился, а учитель имеет возможность вести учет индивидуальных ошибок. Это позволяет построить для каждого учащегося индивидуальную образовательную траекторию. Текущий контроль уровня усвоения материала осу-

ществляется по результатам выполнения учащимися компьютерного тестирования. [2]. Результаты заносятся в «Индивидуальную карту достижений».

Первый урок при изучении и закреплении материала проводим одинаково для всех, дальнейшие уроки – это разноуровневая работа по модулям. Группа 3 – повторяет материал, а если надо, то осваивает материал, и решает простые задания. Группа 2 – выполняют упражнения, для которых требуется старание, понимание основных положений тем и умений, решение. И группа 1 выполняет задания более сложные, творческие.

Закрепление материала: учащиеся группы 3 работают у доски с учителем, учащиеся группы 2 – работают на местах, учащиеся группы 1 – по карточкам индивидуально. Для тестирования, в самостоятельных и домашних работах подбираются задания разной сложности. Например:

Для 1 группы можно предложить следующее задание:

При каких k система не имеет решений?

$$\begin{cases} y = kx - 2, \\ y = -3x + 2 \end{cases}$$

Для 2 группы $\begin{cases} x + 4y = -2, \\ x^3 + 64y^3 = -56 \end{cases}$ Для 3 группы $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 15 \end{cases}$

По причине индивидуальных особенностей личности, у многих учеников существует проблема общения с учителем. И так как спросить проще у одноклассников, то целесообразно проводить групповую форму работы по 2 человека в группе. При этом в парах дети с разным уровнем развития и способностей. Получив задание и обсудив его друг с другом, пара защищает свое решение перед классом.

В конце каждой темы необходимо проводить зачеты в виде теста (научить «технике сдачи теста»), составленного из задач разных уровней сложности.

Учебно-тематическое планирование

I модуль «Базовый»

№	Наименование разделов курса	Всего часов	Форма контроля
1	Структура КИМ ЕГЭ, правила заполнения и оформления бланков, решения заданий. Результаты экзамена прошлых лет	1	Самостоятельная работа
Блок 1. Преобразования и вычисления (6 часов)			
2	Действия с обыкновенными дробями	2	Самостоятельная работа. Тесты
3	Действия со степенями	2	Самостоятельная работа
4	Арифметический квадратный корень, свойства	2	Самостоятельная работа
Блок 2. Текстовые задачи (7 часов)			
5	Задачи на проценты. Практико-ориентированные задачи	2	Самостоятельная работа
6	Задачи на сплавы, смеси и на разбавление	2	Самостоятельная работа
7	Задачи на движение по реке и совместную работу	2	Самостоятельная работа
8	Разные задачи	1	Самостоятельная работа. Тесты
Блок 3. Тригонометрия (8 часов)			
9	Тригонометрический круг, тригонометрические формулы. Область значений тригонометрических функций	4	Самостоятельная работа. Тесты
10	Простейшие тригонометрические уравнения и методы их решения.	4	Самостоятельная работа
Блок 4. Планиметрия (8 часов)			
11	Многоугольники. Правильные многоугольники. Окружность. Площади плоских фигур	2	Самостоятельная работа
12	Окружность. Углы в окружности	2	Самостоятельная работа
13	Векторы. Метод координат	2	Самостоятельная работа
14	Многоконфигурационная планиметрическая задача	2	Самостоятельная работа. Тесты
Блок 5. Стереометрия (9 часов)			
15	Параллелепипед, куб	2	Самостоятельная работа
16	Призма, пирамида	2	Самостоятельная работа
17	Конус, цилиндр, шар	3	Самостоятельная работа
18	Составные многогранники	2	Самостоятельная работа. Проект
Блок 6. Уравнения и неравенства (14 часов)			
19	Квадратичная функция и ее график.	2	Самостоятельная

	Парабола. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на множители, выделение полного квадрата		работа. Тесты
20	Линейные, дробно-рациональные уравнения	2	Самостоятельная работа
21	Иррациональные уравнения	2	Самостоятельная работа
22	Показательные уравнения	2	Самостоятельная работа
23	Системы уравнений	2	Самостоятельная работа
24	Линейные неравенства	2	Самостоятельная работа
23	Дробно-рациональные неравенства	2	Самостоятельная работа
Блок 7 Логарифмы (3 часа)			
24	Логарифмы и их свойства	1	Самостоятельная работа. Тесты
25	Преобразование логарифмических выражений	1	Самостоятельная работа
26	Логарифмические уравнения	1	Самостоятельная работа
Блок 8. Вероятность (3 часа)			
27	Теория вероятности и статистики	3	Самостоятельная работа
Решение тренировочных вариантов из учебных пособий (3 часа)			
Итоговый зачет (2 часа)			
	Итого	68	

Таблица 8

II модуль «Профильный (углубленный)»

№	Наименование разделов курса	Всего часов	Форма контроля
1	Структура КИМ ЕГЭ, правила заполнения и оформления бланков, решения заданий. Результаты экзамена прошлых лет	1	Самостоятельная работа
Блок 1. Текстовые задачи + теория вероятностей (6 часов)			
2	Задачи на проценты, на сплавы, смеси и растворы	1	Самостоятельная работа
3	Задачи на движение и работу	1	Самостоятельная работа
4	Задачи на движение протяжных тел, на среднюю скорость и движение по окружности	1	Самостоятельная работа
5	Задачи с физическим содержанием	1	Самостоятельная работа
6	Задачи с экономическим содержанием (подготовительные)	1	Самостоятельная работа
7	Теория вероятностей	1	Самостоятельная работа
Блок 2. Функции (3 часа)			

8	Понятие функции, возрастания и убывания функции, нулей функции	1	Самостоятельная работа. Тесты
9	Линейная, квадратичная, дробно-рациональная функция и метод интервалов.	1	Самостоятельная работа
10	Логарифмическая и показательная функции. Понятие обратной функции	1	Самостоятельная работа
Блок 3. Тригонометрия (5 часов)			
11	Определение синуса, косинуса, тангенса, тригонометрический круг, тригонометрические функции	1	Самостоятельная работа
12	Формулы тригонометрии	1	Самостоятельная работа
13	Тригонометрические преобразования. Простейшие тригонометрические уравнения	1	Самостоятельная работа
14	Обратные тригонометрические функции и их графики	1	Самостоятельная работа. Тесты
15	Тригонометрические уравнения (2 часть)	1	Самостоятельная работа.
Блок 4. Производная (4 часа)			
16	Производная функции. Исследование функции с помощью производной	2	Самостоятельная работа.
17	Первообразная функции	2	Самостоятельная работа
Блок 5. Геометрия (планиметрия) (3 часа)			
18	Планиметрия. Вычисление площадей фигур на клетчатой бумаге	1	Самостоятельная работа. Тесты
19	Определение синуса, косинуса, тангенса в прямоугольном треугольнике	1	Самостоятельная работа
20	Медиана, высота, биссектриса. Сумма углов треугольника. Построения	1	Самостоятельная работа
Блок 6. Стереометрия (7 часов)			
21	Векторы на плоскости	1	Самостоятельная работа
22	Формулы объема и площади поверхности многогранников и тел вращения	1	Самостоятельная работа. Тест
23	Все задачи по стереометрии из части 1	1	Самостоятельная работа
24	Классический метод решения задач по стереометрии	1	Самостоятельная работа
25	Векторы в пространстве. Координатно-векторный метод	1	Самостоятельная работа. Тесты
26	Стереометрия (часть 2)	2	Самостоятельная работа
Блок 7. Неравенства (7 часов)			
27	Квадратичные, дробно-рациональные, иррациональные, с модулем неравенства. Метод интервалов	2	Самостоятельная работа
28	Показательные, логарифмические неравенства. Метод замены множителя	2	Самостоятельная работа
29	Логарифмические неравенства повышенной сложности	2	Самостоятельная работа
30	Составные многогранники	1	Самостоятельная

			работа. Проект
Блок 8. Геометрия (4 часа)			
31	Задачи на доказательство	2	Самостоятельная работа.
32	Геометрические задачи части 2	2	Самостоятельная работа
Блок 9. Задачи с экономическим содержанием (4 часа)			
33	Задачи с экономическим содержанием	2	Самостоятельная работа
34	Арифметическая и геометрическая прогрессия	2	Самостоятельная работа
Блок 10. Задачи с параметрами (9 часов)			
35	Элементарные функции и их графики (5 типов)	1	Самостоятельная работа
36	Преобразование графиков функции (сдвиги, растяжения-сжатия, построение графиков сложных функций)	1	Самостоятельная работа. Тесты
37	Неявные функции. Множества точек на плоскости. Окружность, круг, полуокружность, сумма модулей, полуплоскость, отрезок, полоса.	2	Самостоятельная работа
38	Определение параметра. Решение уравнений и неравенств с параметрами.	2	Самостоятельная работа
39	Решение систем уравнений с параметрами.	2	Самостоятельная работа
40	Графический метод решения задач с параметрами. Метод симметрии, параметр как переменная и др.	1	Самостоятельная работа
Блок 11. Нестандартные задачи (3 часа)			
41	Делимость. Признаки делимости. Деление с остатком	1	Самостоятельная работа
42	Нестандартные задачи	2	Самостоятельная работа
Решение тренировочных вариантов из учебных пособий (3 часа)			
Итоговый зачет (2 часа)			
	Итого	68	

Календарно-тематический план модуля «Профильный» будет таким же, как и календарно-тематический план модуля «Профильный (углубленный)», только без Блоков 8 – 11.

После составления тематического плана и содержания курса по выбору покажем несколько фрагментов занятий.

Изучение курса предпочтительно начинать с тем «Текстовые задачи» и «Задачи на проценты». Эти темы проходят в 5 – 8 классах и к 11 классу, обычно, забывают. Несколько несложных правил помогут каждому ученику полу-

чать положительный результат при решении данных задач с самого начала, а это значит, у учащегося появится вера в себя и свои способности.

Цели данного блока:

- ✓ вспомнить навыки составления и решения уравнений, построение математических моделей;
- ✓ освоить навыки быстрого счета и проверки ответа;
- ✓ повторить арифметические действия, порядок действий, обыкновенные и десятичные дроби, решение дробно-рациональных и квадратных уравнений.

Фрагмент занятия на тему “Сложные проценты. Банковские задачи на вклады” с использованием мозгового штурма

Цели занятия:

- ✓ выделить основные типы задач, сформулировать алгоритм решения задач на проценты;
- ✓ расширить математический кругозор учащихся и сформировать у них положительный мотив учения за счёт "погружения" в межпредметную область;
- ✓ сформировать практические математические умения и знания, организовать деятельность учащихся по обобщению знаний и способов деятельности при совмещении знаний по двум предметам.

Планируемые результаты.

Личностные: готовность и способность к саморазвитию и личностному самоопределению; формирование мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности.

Предметные: формирование умения решать основные типы задач на процентные расчеты; умение самостоятельно анализировать и отбирать необходимую информацию, а также умение преобразовывать и представлять ее в удобном виде; умение самостоятельно изучать материал.

Метапредметные: умение контролировать и оценивать свои действия, умение ставить перед собой цели и задачи; умение использовать приобретенные знания в практической деятельности; владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решения; умение осознанно использовать речевые средства; умение использовать ИКТ.

Оборудование: Компьютер, электронная доска, проектор, раздаточный материал (печатные формулы простых и сложных процентов, заготовка для графика)

План занятия:

1 этап Организационный этап. 2 мин

2 этап Постановка цели и задач занятия. Мотивация учебной деятельности учащихся. 2 мин

3 этап. Изучение материала 15 мин

4 этап Решение заданий 39 мин

5 этап Рефлексия 2 мин

Таблица 9

Этап	Деятельность		Необходимое оборудование
	Учитель	Обучающиеся	
Организационный момент	Добрый день, ребята! Начнем работу с вопросов. - Что вы помните о процентах? - Где мы встречаем понятие процента?	Перечисляют, где встречали проценты. (возможные варианты: скидки в магазине, молоко содержит 1,5 % жира, кредит под 12% годовых, реклама, вклад в банк со ставкой 4 %, хит-парад, успеваемость в классе - 80%, статистика, новости, кулинарные рецепты и т.д.)	Компьютер, электронная доска, проектор
Мотивация учебной деятельности	Столкнувшись с процентами в первый раз, мы вдруг замечаем, что они		

	<p>сопровожают нас повсюду – не только в школе (на уроках математики, физики, химии, биологии, географии и т.д.), но и в повседневной жизни: в магазине (особенно во время скидок), на работе (повышение и понижение зарплаты), в банке, на производстве, в СМИ, в интернете, при проведении статистических исследований и многом другом.</p>		
<p>Актуализация знаний Прием «Мозговой штурм» Прием «Лови ошибку» $8\% = 0,08$ $122\% = 12,2\%$ $50\% = 0,06$ $0,31 = 31\%$ $3,8\% = 0,38$ $1,6 = 16\%$ $0,4 = 40\%$</p>	<p>Проверим, как вы усвоили материал. Посмотрите внимательно на задания, изображенные на слайде, найдите ошибки и исправьте их. Выслушивает ответы учащихся, поправляет, консультирует. - Дайте математическое определение процента. -Чему равна вся величина? - Давайте вспомним, какого типа задачи мы умеем решать с процентами. И решим по одной каждого типа на доске с записью в тетрадь. <i>Тип 1. Нахождение процента от числа</i> -Как найти процент от числа? <u>Задача.</u> Блогер записал 500 видео для тиктока, но его продюсер сказал, что 20% из них — отстой. Сколько роликов придется перезаписать блогеру. <i>Тип 2. Нахождение числа по его проценту</i> -Как найти число по его</p>	<p>Выполняют задания с комментированием и пояснением. -Процентом – называется $1/100$ часть. $1\% = 1/100$ -т.к. $1\% = 1/100$, то вся величина равна 100% <i>Тип 1. Нахождение процента от числа.</i> -Чтобы найти процент от числа, нужно число умножить на процент. Решение: 1). Нужно найти 20% от общего количества снятых роликов (500). $20\% = 0,2$ $500 * 0,2 = 100$ Ответ: из общего количества снятых роликов продюсер забраковал 100 штук. <i>Тип 2. Нахождение числа по его проценту</i> -Чтобы найти число по его проценту, нужно его известную часть разделить на то, сколько про-</p>	<p>Компьютер, проектор, электронная доска</p>

	<p>проценту?</p> <p><u>Задача.</u> Школьник решил 40 задач из учебника. Что составляет 16% числа всех задач в книге. Сколько всего задач собрано в этом учебнике?</p> <p><i>Тип 3. Нахождение процентного отношения двух чисел</i></p> <p><u>Задача.</u> В секретном чате 25 человек. 10 из них — девочки. Сколько процентов девочек в чате?</p> <p>- А теперь разделимся на команды. Каждой команде выдает шифр. Задание: расшифруйте и узнаете название своей команды. (Приложение 1.1) -Что у вас получилось? -Знакомы ли вам эти аббревиатуры? -Верно, это название разных банков. Какие услуги</p>	<p>центов она составляет от числа. Решение: Мы не знаем, сколько всего задач в учебнике. Но нам известно, что 40 задач составляют 16% от общего количества. Запишем 16% в виде дроби: 0,16. Далее известную нам часть целого разделим на ту долю, которую она составляет от всего целого. $40 : 0,16 = 40 \cdot 100 : 16 = 250$ Ответ: 250 задач собрано в этом учебнике. <i>Тип 3. Нахождение процентного отношения двух чисел.</i> -Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, нужно ту часть, о которой спрашивается, разделить на общее количество и умножить на 100%. Решение: Поделим 10 на 25, полученную дробь переведем в проценты. $10/25 * 100\% = 2/5 * 100\% = 2 * 100/5 = 40\%$ Ответ: в чате 40% девочек. Выполняют расшифровку. (Приложение 1 “Название команд”-Шифр)</p> <p>Предполагаемый ответ (это название банка)</p> <p>Вклад, кредит, страховку и.д.</p>	
--	---	---	--

<p>Кейс – метод (у каждой команды свой кейс)</p>	<p>нам может предложить банк? А теперь разделимся на команды и подробно разберем один из продуктов банка из жизненной ситуации. Задача: У Александра есть 100 000 рублей, и он планирует открыть вклад в банке на 3 года. Какой вид вклада будет для него самым выгодным? Предлагаю каждой группе взять по одному предложению и рассчитать получаемую сумму по окончании 3-х лет (Приложение “Условия вклада”)</p>	<p>Выполняют задания</p>	
--	--	--------------------------	--

Представленные занятия, способствуют развитию познавательного интереса и повышению мотивации обучающихся. У каждого есть возможность принять участие в учебном процессе, выразить свое мнение и идеи, а также научиться взаимодействовать друг с другом и работать самостоятельно.

Занятие с использованием ментальной карты

Цели занятия:

1. повышение интереса к изучению предмета;
2. развитие творческих способностей обучающихся;
3. развитие компетентности в области ИКТ.
4. обобщение и систематизация изученного материала курса.

Планируемые результаты:

Личностные: готовность и способность к саморазвитию и личностному самоопределению; формирование мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности.

Предметные: умение анализировать и отбирать необходимую информацию, а также умение преобразовывать и представлять ее в удобном виде.

Метапредметные: умение контролировать и оценивать свои действия, умение самостоятельно планировать пути своей деятельности; владение осно-

вами самоконтроля, самооценки, принятия решения; умение организовывать работы в коллективе; умение ставить перед собой цели и задачи; умение использовать ИКТ.

Оборудование: компьютер, проектор, электронная доска, телефон или планшет у каждого обучающегося, доступ в сеть Интернет.

План урока:

1. Организационный момент (2 мин)
2. Работа над ментальными картами (35 мин)
3. Подведение итогов работы над проектами (20 мин)
4. Рефлексия (3 мин)

Описание занятия:

Данное занятие является итоговым занятием по теме «Уравнения». Обучающиеся работают в парах по теме “Уравнения”. Необходимо составить ментальную карту по теме и отразить всю изученную информацию. Для выполнения задания можно использовать разные онлайн-сервисы, такие как: Canva, Mindomo.

После завершения работы над картами обучающиеся представляют их всем.

Таблица 10

Занятие с использованием ментальных карт

Этап	Деятельность		Необходимое оборудование
	Учитель	Обучающиеся	
Организационный момент	Добрый день, ребята! Сегодня мы завершаем тему «Уравнения». Чтобы подвести итоги, составим ментальную карту по данной теме. В ней необходимо кратко отразить всю изученную информацию и привести примеры. На выполнение задания у вас есть 35 минут.	Приветствуют учителя. Делятся на пары. Слушают учителя и задают вопросы	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Работа над ментальной картой	Контролирует и помогает обучающимся по возникновении трудностей.	Работают над ментальными картами.	Компьютер (планшет, телефон) и

			доступ в Интернет
Подведение итогов работы	Сейчас мы посмотрим все ментальные карты, а затем выберем лучшую. Данная карта поможет вам перед экзаменом освежить знания.	Представляют свои ментальные карты	Компьютер (планшет, телефон), электронная доска, проектор и доступ в Интернет
Рефлексия	Подведем итоги. Понравилось ли вам работать с ментальными картами? Что вам не понравилось? Как вы считаете, по каким темам еще можно составлять ментальные карты? Остались ли у вас вопросы?	Участвуют в беседе	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет

Занятия с составлением ментальных карт и использованием компьютера, способствуют не только развитию познавательного интереса, но и развитию творческих способностей, а также повышают мотивацию учащихся. Подобные занятия учат самостоятельности и работе в паре, здесь каждый может высказать свое мнение, поучаствовать в учебном процессе.

Ориентируясь на используемые источники, покажем «Алгоритм построения разноуровневой (многоуровневой) системы задач»:

1. Выделяем уровень внешней дифференциации – базовый, профильный, профильный (углубленный).
2. Выделяем уровень внутренней дифференциации:
 - Знакомая задача (ЗЗ), которая разобрана с учителем в классе;
 - Модифицированная задача (МЗ), которая сводится к знакомой после нескольких самостоятельных мыслей;
 - Незнакомая задача (НЗ), решая которую нужно в незнакомой ситуации создавать алгоритм решения этой задачи.
3. Определяем способ варьирования задач: варьирование алгоритма; варьирование технической сложности и необычная форма представления условия задачи.

4. Составим перечень базовых задач (БЗ).
5. Проведем занятия на основе многоуровневых систем задач [].

Приведем пример **фрагмента занятия** по теме «Текстовые задачи», представленной в виде таблицы.

Таблица 11

Текстовые задачи

Подуровни внутренней дифференциации	БЗ 1. Задача вычисления отношения величин	БЗ 2. Вычисление дроби от числа, процента от числа
ЗЗ	Из 40 кг черешни получается вишневого варенья получается 10 кг. Сколько варенья получится из 45 кг черешни?	Цена футболки повысилась на 20%. Какой станет новая цена футболки, если прежняя цена была 400 рублей?
МЗ	Таня собрала в саду у дедушки 18 груш и разделила их между мамой, дедушкой и братом в отношении 2:1:3. Таким образом, мама получила 2 части, дедушка 1 часть, а брат 3 части всех груш. Сколько груш получит каждый член семьи?	Цену товара снизили на 30 %, затем новую цену снизили на 15 %. На сколько снизили первоначальную цену товара? В первой коробке из 150 тетрадей 32 % составляют тетради в линейку, а во второй коробке из 210 тетрадей 20 % тетрадей в линейку. Какой процент всех тетрадей составляют тетради в линейку?
НЗ	Вторая группа работала 7 дней, а первая – 6 дней. Как распределить между группами строителями полученную сумму, если все строители работали в абсолютно одинаковых условиях?	На одном складе находится в 3 раза больше бутылок воды, чем на втором. К концу месяца с первого склада в магазины было поставлено 80% бутылок воды, а со второго – 40%. На каком складе к концу месяца осталось больше бутылок воды?

2.3. Результаты опытно-экспериментальной работы

Для решения задач, поставленных в исследовании, был проведен педагогический эксперимент. Основой планирования и осуществления педагогического эксперимента являлись методика дифференцированной подготовки учащихся 11 классов к ЕГЭ по математике и теоретически разработанная модель.

Экспериментальная часть исследования проводилась в период с 2021 по 2022 гг. на базе МБОУ ВСШ ЭМР «Ванаварская средняя школа» в естественных условиях процесса обучения. Всего в эксперименте приняли участие 13 человек. Это были обучающиеся 11 «а» класса с разным уровнем математической подготовки. Занятия проходили два раза в неделю по 1 часу (60 минут) с сентября по май включительно. Экспериментальная работа проводилась в три эта-

па: констатирующий (2021 г.), поисково-формирующий (2021-2022 гг.), контрольно-обобщающий (2022 г.)

Основной целью педагогического эксперимента являлось как практическое, так и теоретическое обоснование актуальности темы исследования. Важно было убедиться в эффективности разработанной методики.

На первом, *констатирующем этапе*, был определен первоначальный уровень математической подготовки у обучающихся. Для этого был предложен тест. Основной целью на данном этапе являлось как практическое, так и теоретическое обоснование актуальности темы исследования.

Ключевыми методами исследования были:

- 1) анализ литературы по теме (математической, научно-методической, психолого-педагогической литературы);
- 2) наблюдение за процессом дифференцированной подготовки учащихся в естественных условиях педагогического процесса обучения;
- 3) обобщение педагогического опыта;
- 4) проверочное тестирование.

Анализ проверочного тестирования показал, что большая часть учащихся испытывает затруднения при решении практико-ориентированных задач, при выполнении геометрических заданий, при решении заданий, где нужен развернутый ответ. Ученики не умеют обобщать, переводить задачи на математический язык и создавать математические модели, формулировать выводы, устанавливать причинно-следственные связи.

На втором, *поисково-формирующем*, этапе был организован процесс обучения и подготовки к ЕГЭ по математике в 11 классе с учётом разработанной методики дифференцированной подготовки. Цель данного этапа заключалась в разработке и апробации модели и методики дифференцированной подготовки учащихся к ЕГЭ. По мере того, как реализовывалась методика, выявлялись основные дидактические условия и эффективность разных методов. Отслеживалась положительная динамика при решении того, или иного типа заданий.

На заключительном, *контролирующем (контрольно-обобщающем)*, этапе была проведена итоговая диагностическая работа, где был определен уровень сформированности предметных знаний у обучающихся 11 классов в результате применения разработанных рекомендаций.

После прохождения каждого раздела обучающиеся выполняли диагностические работы. Мы проанализировали результаты каждой работы и систематизировали их. Всего работ было 8. На рисунке 1 представлено количество обучающихся, которые справились с работой, в процентном соотношении.

Рисунок 1

Выполнение диагностических работ по разделам

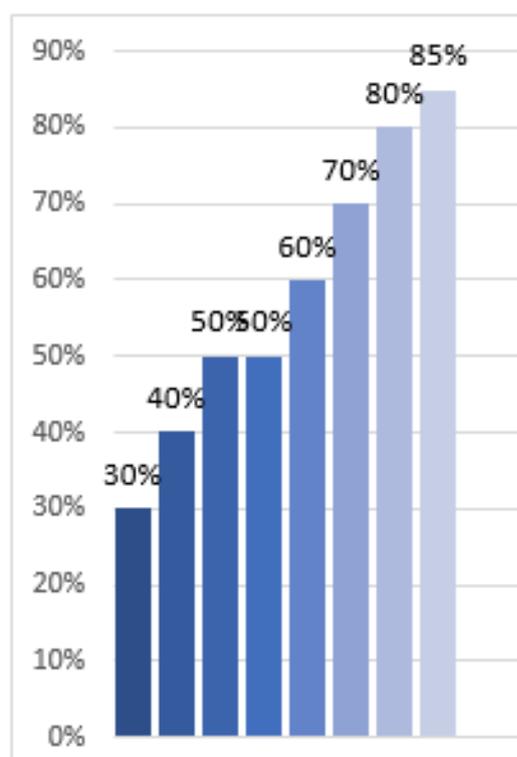


Рисунок 1 - Выполнение диагностических работ по разделам

По диаграмме можно наблюдать рост количества обучающихся, которые справлялись с работами в течении прохождения курса. Это связано с дифференцированным подходом к подготовке обучающихся, с тем, что по мере прохождения новых тем, обучающиеся с каждой последующей работой чувствовали себя более уверенно, постепенно привыкая к разнообразным формулировкам

заданий и к заданиям повышенной сложности, учились создавать математические модели задач.

По уровню знаний в классе можно выделить три группы учащихся:

1. «сильный уровень», стабильно выполняющие контрольные и проверочные задания на «4» и «5»;
2. «средний уровень», выполняющие эти задания на «4», а иногда на «3»;
3. «слабый уровень», выполняющие контрольные работы на слабую «3», а иногда и «неудовлетворительно».

В таблице 7 показано распределение обучающихся по уровню подготовки к ЕГЭ до эксперимента.

Таблица 12

Распределение обучающихся по уровню сформированности предметных результатов 11 класса до эксперимента

	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Количество обучающихся	3	7	3
% обучающихся	23,1%	53,8%	23,1%

Для наглядности полученные результаты отображены в виде диаграммы (рис.2):

Распределение обучающихся по уровню сформированности предметных результатов 11 класса до эксперимента



Рисунок 2 – Результаты входного тестирования

В группу со средним и высоким уровнем знаний (это учащиеся, поступающие в вуз) входило 10 человек.

Для достижения наиболее успешных результатов при подготовке учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ для каждой группы учащихся применялись различные методы работы.

Для подготовки к итоговой аттестации в формате ЕГЭ применялся дифференцированный подход к учащимся. Составлялись подробные планы подготовки к ЕГЭ с учащимися, поступающими в ВУЗы, и со «слабыми» учащимися.

Важное место при подготовке к экзаменам отводилась работе со «слабыми» учащимися. С такими учащимися работа была направлена на привитие навыков и умений решать типовые задания, чтобы они могли решать задания базового уровня. При этом учащиеся много работали самостоятельно, т. к. необходимо проработать материал, начиная с 5-го класса. С учащимися этой группы проводились занятия по ликвидации пробелов в знаниях, повторение и закрепление материала 5-11 классов. Для достижения наиболее успешного результата проводились индивидуальные занятия, составлялись индивидуальные

задания, которые позволили «натаскать» учащихся именно по тем темам, которые вызывают затруднения.

Работа с группой «сильных» учащихся в основном была направлена на закрепление пройденного материала и решению заданий высокой и повышенной трудности.

С группой «среднего уровня» учащимися работа по подготовке к годовой аттестации была направлена на закрепление и повторение пройденного материала, разбор различных способов и методов решения текстовых задач и построения графиков функций.

Работа по подготовке к итоговой аттестации была начата в 2020 году, в 11 классе. По итогам изучения каждой темы на уроках алгебры и начала анализа, и геометрии, проводились обучающие работы, содержащие подборку тематических заданий по материалам ЕГЭ. Для этого использовались сайты ФИПИ, Д. Гущина, А. Ларина, открытый банк заданий ЕГЭ, тематические сборники.

Хороший результат отслеживания показателей обучения каждого выпускника давали диагностические карты учебных достижений каждого ученика. Этот трудоёмкий процесс более эффективен в случае, когда сами учащиеся осознанно прогнозируют результаты своего обучения. Диагностические карты регулярно доводились до сведения учащихся и их родителей.

Второй этап эксперимента – *поисково-формирующий*. Цель данного этапа заключалась в разработке и апробации модели и методики организации дифференцированного подхода при подготовке обучающихся 11 классов к ЕГЭ по математике.

В результате реализации методики выявлялись основные дидактические условия и эффективность различных методов.

Эффективность разработанной методики показал третий этап – *контрольно-обобщающий*. На данном этапе анализировались, интерпретировались и обобщались результаты эксперимента. Был проведен итоговый тест.

В таблице 8 представлено распределение обучающихся по уровню сформированности предметных результатов 11 класса после эксперимента.

Распределение обучающихся по уровню сформированности предметных результатов 11 класса после эксперимента.

	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Количество обучающихся	1	7	5
% обучающихся	7,7%	53,8%	38,4%

Покажем наглядно на диаграмме (рис.3) распределение обучающихся.

Распределение обучающихся по уровню сформированности предметных результатов 11 класса после эксперимента



Рисунок 3 – Результаты повторного тестирования

Отметим, что анализ результатов обучающихся, которые прошли данный курс несет положительную динамику. Нельзя сказать, что все выпускники справятся с заданиями на 4 балла на экзамене, но высокие показатели решения большинства заданий на тренировочных вариантах дает нам право с уверенностью сказать, что большинство из них справятся с экзаменом хорошо.

Согласно результатам эксперимента, на основании проведенной диагностики, можно заметить положительную динамику, которая прослеживается через изменения уровней, характеризующихся сформированностью образовательных результатов. Это говорит о том, использование разработанной методики при подготовке 11 классов к ЕГЭ по математике повышает уровень пред-

метных знаний и, как следствие, улучшаются результаты на ЕГЭ по математике.

Выводы по второй главе

Во второй главе представлена программа курса по выбору и ее содержание для учащихся 11 классов «Подготовка к ЕГЭ по математике», которая реализует идею дифференцированной подготовки. Составлен тематический план модулей «Базовый» и «Профильный», описана методика дифференцированной подготовки, представлены несколько фрагментов занятий. В последнем разделе этой главы описаны экспериментальные результаты.

Как показало экспериментальное внедрение обучения, основанное на дифференцированном подходе в подготовке к экзамену, значительно повысился уровень обученности выпускников. Учащиеся стали демонстрировать более стабильные результаты при прохождении тестового контроля. Кроме того, повысился интерес к предмету, сформировалось позитивное отношение к обучению.

Подготовка к ЕГЭ по математике базового и профильного уровня проходит более качественно и успешно на всех этапах данного курса.

Заключение

Эффективность любой деятельности определяется конечным результатом. Конечный результат данной работы – разработанная программа и методика для качественной подготовки к экзамену по математике. Дифференцированный подход к такому серьезному и важному испытанию, как итоговая аттестация, в жизни каждого выпускника, способствует созданию ситуации успеха и позволяет более качественно подготовиться к экзамену как успешно обучающихся, так и слабоуспевающих по предмету.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи.

1. Охарактеризованы особенности ЕГЭ по математике в современной школе. Проанализировав особенности экзамена, подготовку к экзамену, был сделан вывод. Для того, чтобы уровень математической подготовки повышался из года в год, необходимо использовать разные методы, формы и средства.

2. Раскрыта сущность дифференцированного подхода в обучении математике. Собрана и изучена статистика по данному вопросу, а также подобрана методическая литература. Изученная литература, дидактические материалы, опыт других учителей помогли разобраться в проблемах, связанных с подготовкой к экзамену, с подбором разноуровневых заданий.

3. Разработана программа, содержание и представлены основные методические идеи курса по выбору для подготовки обучающихся к единому государственному экзамену. На основании этой программы был построен курс по модульному принципу. Всего три модуля – «Базовый», «Профильный» и «Профильный (углубленный)». Внутри каждого модуля была выстроена разноуровневая система подготовки к ЕГЭ.

4. Разработаны и апробированы рекомендации по реализации курса по выбору. Апробация курса дала положительные результаты, на основании чего можно сделать выводы, что дифференцированная подготовка не только интересна, но и необходима.

Таким образом, все задачи выполнены, а значит, цель достигнута. Можно подвести итог. Гипотеза получила частичное подтверждение, т.к. курс апробиро-

ван частично на небольшой выборке. Для дальнейшего подтверждения гипотезы необходимо продолжать экспериментальную работу.

Исходя из выполненных исследований и проведенного эксперимента, можно с уверенностью сказать, что подготовка к ЕГЭ по математике остается большой проблемой как для выпускников, так и для учителей. Исследование доказало тот факт, что готовится надо не только на уроках, но и во внеурочное время, формируя навыки самоконтроля, устной и письменной математической речи, повышая математическую грамотность, осмысленного чтения текста, умения его анализировать, сопоставлять и делать выводы, основываясь на математических фактах. Однако организация данной работы – так и остается серьезной задачей для учителя.

Хорошим решением будет учебный курс по выбору «Готовимся к ЕГЭ по математике» для обучающихся 11 классов, который разработан в ходе написания выпускной квалификационной работы после изучения статистики и методической литературы по данному вопросу.

Перспективы дальнейшего исследования состоят в конструировании курса, добавлении методических идей, подборе задач, создании мотивационных заданий, а также апробации курса, которые помогут совершенствовать данную программу. Вывод: Несмотря на то, что нет легких путей в науку, нужно использовать все возможности, чтобы учащиеся успешно сдали экзамен, учились с интересом и осознали притягательные стороны математики, ее возможности не только в совершенствовании умственных способностей, но и в преодолении трудностей.

Список использованных источников

1. Аксененко А.Н. Система работы учителя математики по подготовке учащихся к ОГЭ и ЕГЭ. // [Электронный ресурс]. // URL: <https://multiurok.ru/files/sistema-raboty-uchitelia-matematiki-pri-podgotovkie-k-oge-i-iege.html> / (дата обращения 20.05.22)
2. Алатаева З.А. Система подготовки учащихся в итоговой аттестации ЕГЭ по математике // Актуальные проблемы современного образования. – 2019. -- № 4. – с. 28—32.
3. Гайджиева А.Г. Лучшая методика подготовки к ЕГЭ по математике// [Электронный ресурс]//URL: <https://infourok.ru/metodicheskaya-razrabotka-luchshaya-metodika-podgotovki-k-ege-po-matematike-1703016.html>/ (дата обращения 25.05.2022)
4. Губанова О.В. Система подготовки к ЕГЭ по математике воспитанников с разным уровнем учебных достижений // [Электронный ресурс]//<https://koncept.ru/metodicheskaya-kopilka/obmen-opytom/3952-sistema-podgotovki-k-ege-po-matematike.html>/ (дата обращения 25.05.2022)
5. Дорофеев Г.В., Седова Е.А. Процентные вычисления. 10—11 кл.: Учебно-метод.пособие. – М.: Дрофа, 2003. – 144 с.:
6. Етова Ю.В. Особенности построения и использования многоуровневой системы задач // Математика в школе. –2015.— № 4.
7. Журавлева Н.А., Шашкина М.Б. Развитие познавательных универсальных учебных действий обучающихся в процессе решения заданий с параметром // Стандарты и мониторинг в образовании. 2017. Т. 5. № 5. С. 42–47.
8. Журавлева Н.А., Шашкина М.Б. ЕГЭ 2016. Извлекаем уроки и делаем выводы: задание с параметром // Математика в школе. 2016. № 9–10. С. 21–26.
9. История ЕГЭ / Дополнительное образование для взрослых. / Портал ГлавСправ [Электронный ресурс]. URL: <http://edu.glavsprav.ru/spb/ege/history> (дата обращения 10.11.2021).

10. Кодификаторы элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников XI классов общеобразовательных учреждений к государственной итоговой аттестации в 2021 году по математике [Электронный курс] URL: [file:///C:/Users/User/AppData/Local/Temp/Temp2_ma-ege-2021%20\(1\).zip/ma-ege-2021/%D0%9C%D0%90%D0%9A%D0%A2%202021.pdf](file:///C:/Users/User/AppData/Local/Temp/Temp2_ma-ege-2021%20(1).zip/ma-ege-2021/%D0%9C%D0%90%D0%9A%D0%A2%202021.pdf) (дата обращения 14.11.21).
11. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/> (дата обращения 12.11.2021).
11. Ларин А.А. <https://alexlarin.net/trvar.html>
12. Макаренко А.С. Цель воспитания: Учебное пособие / А.С. Макаренко - М.: Педагогика, 1984.
13. Малкова А.Г. Методика подготовки к ЕГЭ по математике. [Электронный ресурс]. URL: <https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/metodika/> (дата обращения 25.05.22)
14. Осипова М.В. Дифференцированное обучение на уроках математики как средство повышения качества обученности школьников».[Электронный ресурс].//https://r1.nubex.ru/s10676e27/f1043_06/%D0%9E%D1%81%D0%B8%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B0%20%D0%9C.%D0%92.%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC.%20%D0%9A%D0%BE%D0%B2%D1%80%D0%BE%D0%B2%20%D0%A1%D0%9E%D0%A8%20%E2%84%96%209.pdf (дата обращения 15.05.22)
15. Осмоловская И.М. Как организовать дифференцированное обучение. – М.: Сентябрь, 2002. – 160 с.
17. Полный справочник по подготовке и проведению единого государственного экзамена для выпускников школ и абитуриентов/ авт.-сост. С. Петров,

- Е. Эльф. – Москва: АСТ: Астрель, 2013. – 254 с. – (Единый государственный экзамен).
16. Пудовкина С.Н. Методическая разработка по теме "Дифференцированный зачет при обучении математике" для 5,6,9,11 классов // [Электронный ресурс] // <https://pedsovet.su/load/135-1-0-8029/>
17. Рослова Л.О. Функциональная математическая грамотность: что под этим понимать и как формировать? // Педагогика. 2018. № 10. С. 48-55.
18. Сон Э Сен. ЕГЭ по математике как показатель качества знаний и уровень образования выпускников // Актуальные вопросы современной педагогики: материалы V Междунар. науч. конф. (г. Уфа, май 2014 г.). — Т. 0. — Уфа: Лето, 2014. — С. 133-136. — URL: <https://moluch.ru/conf/ped/archive/103/5527/> (дата обращения: 12.11.2021).
19. Спецификация ГВЭ – 11 [Электронный ресурс]. URL: http://doc.fipi.ru/gve/gve-11/2022/spec_MA_pism_gve-11_2022.pdf (дата обращения 29.10.2021).
20. Спецификация для профильного уровня (ЕГЭ по математике в 2021 году) / [Электронный ресурс]. URL: // file:///C:/Users/User/AppData/Local/Temp/Temp1_ma-ege-2021.zip/ma-ege-2021/MA-11%20ЕГЭ%202021_СПЕЦ_проф.pdf (дата обращения 14.11.21).
21. Спецификация для базового уровня (ЕГЭ по математике в 2021 году). / [Электронный ресурс] // URL: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!tab/151883967-2> (дата обращения 14.11.21)
22. Стадград. [Электронный ресурс] / URL <https://math100.ru/egeprofil-statgrad/> (дата обращения 30.05.22)
23. Тестов В.А. Особенности формирования у школьников основных математических понятий в современных условиях // Концепт. 2014. №. 12.
24. Тумашева О.В., Берсенева О.В. Обучение математике с позиции системно-деятельностного подхода. // Красноярск. – 2016. – 280 с.

- 25.Тумашева О.В. Об особенностях обучения математике в условиях реализации системно-деятельностного подхода // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты. г. Красноярск 2015. С. 75-78.
- 26.Фаут Ю.В. Подготовка к решению задач высокого уровня сложности профильного ЕГЭ по математике на основе платформы Moodle // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы III Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 18 мая 2018 года. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2018. С. 234–238.
- 27.Федеральные государственные образовательные стандарты [Элек-тронный ресурс]. URL: fgos.ru (Дата обращения: 19.05.2021).
- 28.Финк О.В. Проблемы подготовки к ЕГЭ по математике. // Проблемы современной науки. – 2015. – № 4 (34). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-podgotovki-k-ege-po-matematike> (дата обращения 11.04.22)
- 29.Цыбикова В.К./ Преподавание математики в различных профильных направлениях.//[Электронный ресурс] // <https://cyberleninka.ru/article/n/prepodavanie-matematiki-v-razlichnyh-profilnyh-napravleniyah/> (дата обращения 10.06.22)
- 30.Чугуевская Е./ От эксперимента до обязательного экзамена: как изменился ЕГЭ за 20 лет. // Пять углов.//
- 31.Черепанова О.Н., Полякова Т.В. Методический анализ результатов ГИА-11 по математике (профильный уровень) за 2019 год [Электронный ресурс]. URL: <https://coko24.ru/wp-content/uploads/2019/09/ГИА11-МО-МАТЕМАТИКА-II-2019.pdf> (Дата обращения: 05.11.2021).

32. Черепанова О.Н., Зотов И.Н. Методический анализ результатов ЕГЭ по предмету математика (профильная) за 2020 год/ [Электронный ресурс]. URL: <https://coko24.ru/результаты-егэ-2014>.
33. Черепанова О.Н., Зотов И.Н., Крохмаль С.В. / Методический анализ результатов ЕГЭ по предмету математика профильная/ [Электронный ресурс]. // <https://coko24.ru/egerek2021/> (дата обращения 05.11.2021)
34. Шашкина М.Б. Дефициты математической подготовки обучающихся общеобразовательной школы (по результатам итоговой государственной аттестации) // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы VII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 10–11 ноября 2020 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2020. С. 29-34.
35. Шашкина М.Б. Проблемы качества математической подготовки обучающихся по результатам профильного ЕГЭ 2018 г. // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты»: материалы VI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции Международного научно-образовательного форума «Человек, семья, общество: история и перспективы развития». г. Красноярск, 8–9 ноября 2018 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. госуд. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2018. С. 13–19.
36. Шкерина Л. В., Григорьева Ф. А., Ракуньо Ф. Формирование метапредметных умений учащихся в процессе обучения математике [Электронный ресурс]. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovaniemetapredmetnyh-umeniy-uchaschihsya-v-protssesse-obucheniya-matematike> (дата обращения 30.05.2022)

37. Шашкина М.Б., Табинова О.А. Как учить математике детей поколения Z? // Математическое образование в цифровом обществе: материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (26–28 сентября 2019 г.). Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ. 2019. С. 108–111.
38. Шашкина М.Б. Обучение математике в эпоху цифровизации: приобретения и потери // Математика – основа компетенций цифровой эры: Материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (01-02 октября 2020 года). Москва: ГАОУ ВО МГПУ, 2020 С. 140–143.
39. Юдакова О.А. Основные аспекты методики подготовки школьников к ЕГЭ по математике в средней школе/ [Электронный ресурс]. // URL: <https://znanio.ru/media/osnovnye-aspekty-metodiki-podgotovki-shkolnikov-k-ege-po-matematike-v-srednej-shkole-2713010/> (дата обращения 06.06.22)
40. Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Семенов А.В. / Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике // Педагогические измерения. – 2021. – № 4. – с. 3 – 28.

Приложение А

Задание к фрагменту занятия “Сложные проценты. Банковские задачи на вклады”

“Название команд” - Шифр

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px;"><i>Команда 1</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> <p>Определите процент от числа: 21% от 200</p> </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><i>Т</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> <p>Найдите число по его процентам: 12% = 36</p> </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><i>Б</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> <p>Выразите отношение в процентах (ответ округлить до десятых): 325 =</p> </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><i>В</i></td> </tr> </table> <p style="margin-top: 10px;"><i>Впишите буквы под ответами</i></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center; padding: 5px;"><i>Команда 1</i></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">12%</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">42</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">300</td> </tr> <tr> <td style="height: 40px;"></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	<i>Команда 1</i>		<p>Определите процент от числа: 21% от 200</p>	<i>Т</i>	<p>Найдите число по его процентам: 12% = 36</p>	<i>Б</i>	<p>Выразите отношение в процентах (ответ округлить до десятых): 325 =</p>	<i>В</i>	<i>Команда 1</i>			12%	42	300				<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px;"><i>Команда 2</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> <p>Найдите число по его процентам: 5% = 8</p> </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><i>О</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> <p>Определите процент от числа: 25% от 60</p> </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><i>С</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> <p>Выразите отношение в процентах (ответ округлить до десятых): 732 =</p> </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><i>Р</i></td> </tr> </table> <p style="margin-top: 10px;"><i>Впишите буквы под ответами:</i></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center; padding: 5px;"><i>Команда 2</i></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">21,8%</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">160</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">15</td> </tr> <tr> <td style="height: 40px;"></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	<i>Команда 2</i>		<p>Найдите число по его процентам: 5% = 8</p>	<i>О</i>	<p>Определите процент от числа: 25% от 60</p>	<i>С</i>	<p>Выразите отношение в процентах (ответ округлить до десятых): 732 =</p>	<i>Р</i>	<i>Команда 2</i>			21,8%	160	15			
<i>Команда 1</i>																																			
<p>Определите процент от числа: 21% от 200</p>	<i>Т</i>																																		
<p>Найдите число по его процентам: 12% = 36</p>	<i>Б</i>																																		
<p>Выразите отношение в процентах (ответ округлить до десятых): 325 =</p>	<i>В</i>																																		
<i>Команда 1</i>																																			
12%	42	300																																	
<i>Команда 2</i>																																			
<p>Найдите число по его процентам: 5% = 8</p>	<i>О</i>																																		
<p>Определите процент от числа: 25% от 60</p>	<i>С</i>																																		
<p>Выразите отношение в процентах (ответ округлить до десятых): 732 =</p>	<i>Р</i>																																		
<i>Команда 2</i>																																			
21,8%	160	15																																	

<i>Команда 3</i>		<i>Команда 4</i>	
<p><i>Определите процент от числа:</i></p> <p>60% от 120 =</p>	<i>Т</i>	<p><i>Определите процент от числа:</i></p> <p>25% от 72 =</p>	<i>П</i>
<p><i>Найдите число по его процентам:</i></p> <p>4% = 42</p>	<i>С</i>	<p><i>Найдите число по его процентам:</i></p> <p>16% = 40</p>	<i>Т</i>
<p><i>Выразите отношение в процентах (ответ округлить до десятых):</i></p> <p>3469 =</p>	<i>М</i>	<p><i>Выразите отношение в процентах (ответ округлить до десятых):</i></p> <p>1719=</p>	<i>О</i>
<i>Впишите буквы под ответами</i>		<i>Впишите буквы под ответами</i>	
<i>Команда 3</i>		<i>Команда 4</i>	
49,3%	72	89,5%	250
1050		18	

Ответы для учителя

<table border="1"><thead><tr><th colspan="3">Команда 1</th></tr></thead><tbody><tr><td>12%</td><td>42</td><td>300</td></tr><tr><td>В</td><td>Т</td><td>Б</td></tr></tbody></table>			Команда 1			12%	42	300	В	Т	Б	<table border="1"><thead><tr><th colspan="3">Команда 2</th></tr></thead><tbody><tr><td>21,8%</td><td>160</td><td>15</td></tr><tr><td>Р</td><td>О</td><td>С</td></tr></tbody></table>			Команда 2			21,8%	160	15	Р	О	С
Команда 1																							
12%	42	300																					
В	Т	Б																					
Команда 2																							
21,8%	160	15																					
Р	О	С																					
<table border="1"><thead><tr><th colspan="3">Команда 3</th></tr></thead><tbody><tr><td>49,3%</td><td>72</td><td>1050</td></tr><tr><td>М</td><td>Т</td><td>С</td></tr></tbody></table>			Команда 3			49,3%	72	1050	М	Т	С	<table border="1"><thead><tr><th colspan="3">Команда 4</th></tr></thead><tbody><tr><td>89,5%</td><td>250</td><td>18</td></tr><tr><td>О</td><td>Т</td><td>П</td></tr></tbody></table>			Команда 4			89,5%	250	18	О	Т	П
Команда 3																							
49,3%	72	1050																					
М	Т	С																					
Команда 4																							
89,5%	250	18																					
О	Т	П																					

Задачи для устного счета

- Найдите 30% от 27. (8,1)
- Какое число получится, если 140 увеличить на 60%? (224)
- Кафельная плитка продается коробками по 6 м². Сколько коробок плитки нужно купить, чтобы хватило на облицовку стен площадью 35 м²? (6)
- Билеты в ботанический сад стоит 50 рублей. Сколько рублей сдачи нужно получить с 2000 рублей, заплаченных за проход 36 человек? (200)
- Горные лыжи стоят 16 000 рублей. Сколько рублей будут стоить горные лыжи во время сезонной распродажи, когда на них объявлена скидка 20%? (12800)
- Йогурт стоит 7 рублей 60 копеек. Какое максимальное количество йогуртов можно купить на 50 рублей? (6)
- Шариковая ручка стоит 7 рублей. При покупке более 50 ручек на всю покупку начинает действовать скидка 20%. Сколько рублей нужно заплатить при покупке 120 ручек? (672)

1. Найти 1% от:

- | | |
|---------------|--------------------|
| а) 34 000 р.; | д) 6 тыс. жителей; |
| б) 1 км; | е) 6 га; |
| в) 0,3 л; | ж) 12 р.; |
| г) 200 г; | з) 700 овец. |

2. Верно ли, что:

- а) 345 человек составляют меньше одного процента от 10 тыс. человек;
- б) 345 р. составляют больше одного процента от 20 тыс. р.;
- в) 3 г составляют один процент от 250 г;
- г) 150 км составляют менее одного процента от 20 тыс. км;
- д) 330 р. отличаются от 300 р. менее, чем на 1%;
- е) масса 990 г отличается от 1 кг не более, чем на 1%?

Примерные задачи для курса по выбору

Текстовые задачи

1. В университетскую библиотеку привезли новые учебники по геометрии для 2—3 курсов, по 280 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 7 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми учебниками?
2. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?
3. Оптовая цена учебника 170 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 рублей?
4. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 65 миль в час? Ответ округлите до целого числа.
5. Для того, чтобы связать свитер, хозяйке нужно 800 граммов шерсти красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 80 рублей за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 рублей за 100 г и окрасить ее. Один пакетик краски стоит 20 рублей и рассчитан на окраску 400 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.
6. Для изготовления книжных полок требуется заказать 48 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,25 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	420	75
Б	440	65
В	470	55

8. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,01$ средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P$.

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4600	2	0	2
Б	5500	4	3	1

В	4800	4	4	4
Г	4700	2	1	4

9. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?
10. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.
11. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту быстрее, чем первая труба?

Решение.

Пусть x литров — объем воды, пропускаемой первой трубой в минуту, тогда вторая труба пропускает $x + 1$ литров воды в минуту. Резервуар объемом 110 литров первая труба заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба, отсюда имеем:

$$\frac{110}{x+1} + 1 = \frac{110}{x} \Leftrightarrow \frac{110+x+1}{x+1} = \frac{110}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow_{x>0} 110x + 110 = x^2 + 111x \Leftrightarrow x^2 + x - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10; \\ x = -11 \end{cases} \Leftrightarrow_{x>0} x = 10.$$

Значит, первая труба пропускает 10, а вторая — 11 литров воды в минуту.

Ответ: 11.

Тригонометрия

1. Решите уравнение $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

2. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

3. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{7 \sin \alpha + 13 \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = 3$

4. Найдите значение выражения $\frac{12 \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$

5. Найдите значение выражения $36\sqrt{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}$.

6. Найдите значение выражения $\frac{8}{\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{31\pi}{4}\right)}$

7. Найдите значение выражения $7 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 77^\circ$.

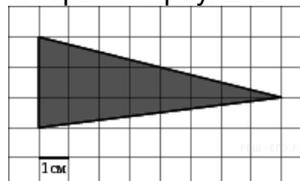
8. Найдите значение выражения $\frac{5 \operatorname{tg} 163^\circ}{\operatorname{tg} 17^\circ}$

9. Найдите значение выражения $\frac{2 \sin(\alpha - 7\pi) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha + \pi)}$

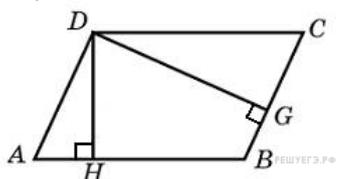
10. Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$. а) Решите уравнение; б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Планиметрия

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок).



нок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах



- Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.
- Диагонали четырехугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.
- Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 3 и 2. Найдите площадь трапеции.
- Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.
- Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите скалярное произведение векторов \vec{AB} и \vec{AC} .
- Точки $O(0; 0)$, $A(6; 8)$, $B(6; 2)$, $C(0; 6)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей.

8. **Решение.**

$$9. \quad BA = \sqrt{(6-6)^2 + (8-2)^2} = 6,$$

$$10. \quad OC = \sqrt{(0-0)^2 + (6-0)^2} = 6,$$

$$11. \quad OB = \sqrt{(6-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40},$$

$$12. \quad CA = \sqrt{(6-0)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{40}.$$

13. Противоположные стороны попарно равны, четырехугольник является параллелограммом, значит, точка P является серединой отрезка CB . Поэтому координаты точки P вычисляются следующим образом:

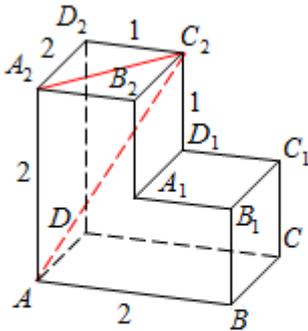
$$x = \frac{6+0}{2} = 3, \quad y = \frac{6+2}{2} = 4.$$

Ответ: 3.

14. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB .
15. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 75° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.
16. На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C , взята точка E , удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE , если $BC = 6$, $AC = 4$.

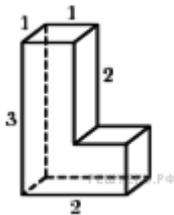
Стереометрия

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS .
2. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.
3. Найдите расстояние между вершинами A и C_2 многогранника, изображенного на рисунке. **Решение.**



РЕШУЕГЭ.РФ

Рассмотрим прямоугольный треугольник, по теореме Пифа-



гора

4. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке
5. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро ку-

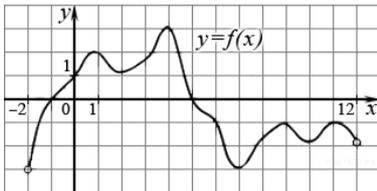
$$\text{ба. } AC_2 = \sqrt{AA_2^2 + A_2C_2^2} = \sqrt{AA_2^2 + A_2D_2^2 + D_2C_2^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

ба. Ответ: 3.

- Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота – 10. Ответ: 3
- Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.
- Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.
- В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите косинус угла между плоскостями $BA_1 C_1$ и $BA_1 D_1$.
- В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра: $AB = 6$, $AD = 8$, $CC_1 = 16$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 DB$.

Производная

- Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ с.
- Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.
- На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



- Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$.
- Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 1}{x}$.
- Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 3)^2(x + 5) - 1$ на отрезке $[-4; -1]$.
- Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \sin x + \frac{24}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.
- Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.
- Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \cos 2x - \cos x$.

Вычисления и преобразования

- Решите уравнение $\frac{6}{13}x^2 = 19\frac{1}{2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

2. Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x-15} = \frac{1}{4x+3}$
3. Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72+17x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
4. Найдите $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$, если $p(b) = \left(b + \frac{3}{b}\right) \left(3b + \frac{1}{b}\right)$ при $b \neq 0$.
5. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$
6. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[42]{m} \cdot \sqrt[7]{m}}$ при $m = 125$
7. Найдите значение выражения $\frac{2^{3,5} \cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}$.
8. Найдите значение выражения $\frac{a^{3,21} \cdot a^{7,36}}{a^{8,57}}$ при $a = 12$.
9. Найдите значение выражения $\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$
10. Найдите корни уравнения: $\cos \frac{8\pi x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Практико – ориентированные задачи

1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}(\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.
2. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в Омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в Омах.)
3. Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километров?
4. В ходе распада радиоактивного изотопа, его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин) — прошедшее от начального момента время, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 40$ мг изотопа Z , период полураспада

пада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа будет не меньше 5 мг?

5. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $v = 3$ моля воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии

воздуха, определяется выражением $A = \alpha v T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ – постоянная, а $T = 300$ – температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10350 Дж?

6. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 1 до 5. Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла

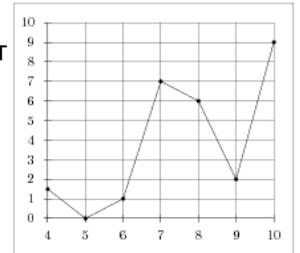
вид $R = \frac{2In + Op + 3Tr + Q}{A}$. Каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все оценки наибольшие, получило бы рейтинг 1?

7. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полета будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

8. На рисунке изображен график осадков в Калининграде с 4 по 10 февраля 1974 г. На оси абсцисс откладываются дни, на оси ординат — осадки в мм.



9. В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.
10. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Стереометрия

1. Высота конуса равна 6, а диаметр основания – 16. Найдите образующую конуса.
2. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21π , а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.
3. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $7\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.
4. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
5. Сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см³ воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см³.
6. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
7. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем призмы.

8. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$. 9. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 6. Найдите объем шара.

Решение.

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \pi R^2 R = 6, V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = 24$$

Ответ: 24.

9. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π .

Примеры разноуровневых заданий. Квадратичная функция

1-й уровень.

1. Дана функция: $y = x^2 + 4x + 3$;

а) найти значения x при $y=8$,

б) построить график заданной функции;

в) указать область значений и промежутки возрастания функции, используя построенный график;

г) решить неравенство $y \leq 8$

2-й уровень.

2. Найти нули функции: $y = \frac{10x^2 - 13x - 3}{2x^2 + x - 3}$

3. Дана функция: $y = 3x^2 - x + 5$.

а) построить график функции;

б) найти область значения и промежутки возрастания и убывания заданной функции, используя построенный график;

в) сравнить значение функции на концах отрезка $[1;2]$

4. Решить неравенство: $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 10x + 20} < 0$.

3-й уровень.

5. Найти область значений и промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2 - 6x + 9$, не строя её графика.

6. При каких значениях a график функции $y = x^2 - 6ax + 6a$ не пересекает ось абсцисс?

7. Построить график функции: $y = 5x^2 - 10x + 7$ с помощью шаблона параболы $y = x^2$, предварительно выделив квадрат двучлена.

8. Разложить трёхчлен $x^2 - 2(a+1)x + 41$ на множители.

Типы и методы тригонометрических уравнений

Базовый тип I уровень будет содержать простейшие тригонометрические уравнения с односложными аргументами без дополнительных заданий в виде поиска корней на промежутке. Решения такого типа тригонометрических уравнений, выступают фундаментом для решения последующих типов. Их роль в системе является ключевой, так как все типы тригонометрических уравнений, посредством преобразований, приходят к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пример 9.1. Решите уравнение: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Ответ:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 9.2. Решите уравнение: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9.3. Решите уравнение: $\sin x = \frac{1}{8}$;

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ответ: } x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 9.4. Решите уравнение: $\cos x = \frac{5}{3}$. Ответ: нет решений, т.к.

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

Пример 9.5. Решите уравнение: $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Базовый тип 2 уровень будет содержать простейшие тригонометрические уравнения с модифицированным аргументом без дополнительных заданий в виде поиска корней на промежутке. Такой тип тригонометрических уравнений подготавливает учащихся к решению самых сложных уравнений базового профиля.

Пример 9.6. Решите уравнение: $\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{x}{2} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$x = \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ответ: } x = \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 9.7. Решите уравнение: $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 1; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 9.8. Решите уравнение: $2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}; \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{x}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ответ: } x = (-1)^k \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 9.9. Решите уравнение: $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3; \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}};$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}; \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{x}{3} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Базовый тип 3 уровень будет содержать простейшие тригонометрические уравнения с модифицированным аргументом и поиском корней на заданном промежутке, или поиске наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней. Это типовые тригонометрические уравнения, которые входят в ЕГЭ базового уровня. Учащиеся, сдающие базовый ЕГЭ по математике, должны стремиться безошибочно решать подобные уравнения.

Пример 9.10. Решите уравнение $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень. Решение: $\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x_1 = \frac{1}{2} + 6k, k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{5}{2} + 6k, k \in \mathbb{Z}$. Если $k = 0$, то $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{5}{2}$. Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример 9.11. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень. Решение: $\frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $x = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$. Если $k = 0$, то $x = -1$. Ответ: $x = -1$.

Пример 9.12. Решите уравнение $\cos \frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$. Решение:

$$\frac{\pi(x+2)}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{2} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x}{2} = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = -1,5 + 4k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -2,5 + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: -2,5; -1,5.

Пример 9.13. Решите уравнение $\operatorname{ctg} \frac{\pi(x-4)}{6} = \sqrt{3}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[2\pi; 0]$. Решение: $\frac{\pi(x-4)}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{\pi x}{6} = \frac{4\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi x}{6} = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = 5 + 6k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: 5.

Профильный тип 1 уровень будет содержать уравнения основных типов тригонометрических уравнений и методы их решения. Типы: метод замены переменной, однородные уравнения, метод разложения на множители. На этом уровне учащиеся вспоминают основные типы тригонометрических уравнений и методы их решений, для последующего включения в уравнения дополнительных преобразований.

Пример 9.14. Решите уравнение: $4\sin^2x - 3\sin x = 0$;
 $\sin x(4\sin x - 3) = 0$; $\sin x = 0$ или $4\sin x - 3 = 0$.

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9.15. Решите уравнение: $6\cos^2x + \cos x = 2$;
 $6\cos^2x + \cos x - 2 = 0$. Пусть $\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $t^2 + t - 2 = 0$;
 $D=49, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{2}{3} \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Пример 9.16. Решите уравнение:
 $\sin^2 4x + 2\sin 4x \cos 4x - 3\cos^2 4x = 0$,
 $(/\cos^2 4x \neq 0; 4x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z})$; $\operatorname{tg}^2 4x + 2\operatorname{tg} 4x - 3 = 0$.

Пусть $\operatorname{tg} 4x = t$, тогда $t^2 + 2t - 3 = 0$; $D=16, t_1 = 1, t_2 = -3$.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 4x = 1 \\ \operatorname{tg} 4x = -3 \end{cases} \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\operatorname{arctg} 3}{4} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\operatorname{arctg} 3}{4} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9.17. Решите уравнение: $\sin^2 \frac{x}{2} = 3\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$;
 $\sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) = 0$; $\sin \frac{x}{2} = 0$ или $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0$
 ($\cos \frac{x}{2} \neq 0$; $x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$).

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Профильный тип 2 уровень будет содержать тригонометрические уравнения с применением преобразований уравнений с помощью тригонометрических формул: формул приведения; формул двойного аргумента; формул суммы и разности аргумента и т.д.). Так же на этом уровне будут изучаться тригонометрические уравнения, содержащие в себе другие математические функции. Второй уровень профильной подготовки необходим для отработки решения уравнений с преобразованиями.

Пример 9.18. Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$;
 $\operatorname{tg} x \sin 2x = 1$; $\frac{\sin x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{\cos x} = 1$; $2 \sin^2 x = 1$; $\sin^2 x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9.19. Решите уравнение $(81^{\sin x})^{\cos x} = 9^{\sqrt{2} \cos x}$;
 $9^{2 \sin x \cos x} = 9^{\sqrt{2} \cos x}$; $2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x$; $\cos x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0$.

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9.20. Решите уравнение $(6\sin^2 x + 11\cos x - 10)\log_{\pi} \sin x = 0$;
 ОДЗ: $\sin x > 0$; $\pi k, k \in \mathbb{Z} < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ (1) $6\sin^2 x + 11\cos x - 10 = 0$
 или (2) $\log_{\pi} \sin x = 0$. Решаем по очереди: (1) $6\sin^2 x + 11\cos x - 10 = 0$;
 $6 - 6\cos^2 x + 11\cos x - 10 = 0$; $6\cos^2 x - 11\cos x + 4 = 0$. Пусть
 $\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $6t^2 - 11t + 4 = 0, D=25, t_1 = 1\frac{1}{3}$ (не подходит),
 $t_2 = \frac{1}{2}, \cos x = \frac{1}{2}; x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; с учетом ОДЗ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
 (2) $\log_{\pi} \sin x = 0; \sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9.21. Решите уравнение $3\sin^2 \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = 2$;
 $3\sin^2 \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} - 2\sin^2 \frac{x}{4} - 2\cos^2 \frac{x}{4} = 0$;
 $\sin^2 \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} - 2\cos^2 \frac{x}{4} = 0$ ($\cos^2 \frac{x}{4} \neq 0; \frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$
 $x \neq 2\pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$); $tg^2 \frac{x}{4} - tg \frac{x}{4} - 2 = 0$. Пусть $tg \frac{x}{4} = t$, тогда $t^2 - t - 2 = 0$,
 $D=9, t_1 = 1, t_2 = -2$.

$$\begin{cases} tg \frac{x}{4} = 1 \\ tg \frac{x}{4} = -2 \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{4} = -\arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = \pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -4\arctg 2 + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = -4\arctg 2 + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Профильный тип 3 уровень будет содержать тригонометрические уравнения с применением преобразований уравнений с помощью тригонометрических формул: формул приведения; формул двойного аргумента; формул суммы и разности аргумента и т.д.). На этом уровне учащиеся тренируются решать тригонометрические уравнения разными методами: метод замены, переменной, метод разложения на множители, метод оценки правой и левой частей. Так же на этом уровне будут изучаться тригонометрические уравнения, содержащие в себе другие математические функции. И обязательное дополнительное задание для каждого уравнения – поиск корней на заданном промежутке. Это типичное 13 задание ЕГЭ профильного уровня. Рассмотренные уравнения этой группы представлены в учебных пособиях И.В. Яценко [73, 74]. Третий уровень играет роль непосредственной подготовки к ЕГЭ.

Пример 9.22. а) Решите уравнение $tg(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin\frac{5\pi}{6}$. б)

Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Решение а)

$$-tgx(-\sin 2x) = \frac{1}{2}; \quad tgx 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}; \quad \frac{\sin x 2\sin x \cos x}{\cos x} = \frac{1}{2}; \quad 2\sin^2 x = \frac{1}{2};$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}; \quad \sin x = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad x = \pm (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } x = -\frac{5\pi}{6}; x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}; x = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } x = \pm (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{5\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}.$$

Пример 9.23. а) Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. б) Найти корни

уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. Решение а) ОДЗ:

$$\frac{1-\cos x}{2} \geq 0; \quad 1 - \cos x \geq 0; \quad \cos x \leq 1; \quad x \in \mathbb{R}. \quad \frac{1-\cos x}{2} = \sin^2 x; \quad 1 - \cos x = 2\sin^2 x;$$

$$1 - \cos x - 2 + 2\cos^2 x = 0; \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0. \quad \text{Пусть } \cos x = t,$$

$$-1 \leq t \leq 1, \text{ тогда } 2t^2 - t - 1 = 0, D=9, t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{б) } x = 2\pi; x = 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}; x = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: а) } x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } 2\pi; \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}.$$

Пример 9.24. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}(\sin x + 1) = 0$. б)

Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$. Решение

а) Это уравнение решается методом оценки левой и правой частей и оно переходит к решению следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2}(\sin x + 1) = 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \leq x \leq 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{б) } -4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{9\pi}{2}.$$

Пример 9.25. а) Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$. б)

Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$. Решение а)

$$4\sin x \cos x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0; \quad \sin x(4\cos x + 3) - (4\cos x + 3) = 0;$$

$$(4\cos x + 3)(\sin x - 1) = 0.$$

$$\begin{cases} 4\cos x + 3 = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} \cos x = -\frac{3}{4} \\ \sin x = 1 \end{cases} \begin{cases} x = \pi - \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{б) } x = \frac{5\pi}{2}; x = \pi + \arccos \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ответ: а) } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pi \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{б) } \frac{5\pi}{2};$$

$$\pi + \arccos \frac{3}{4}.$$

Пример 9.26. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{2} - x)} = 2$. б) Найти

корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$. Решение а) ОДЗ:

$$\begin{cases} \sin^2 x \neq 0 \\ \cos(\frac{3\pi}{2} - x) \neq 0 \end{cases} \sin x \neq 0; x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - 2 = 0; \quad \frac{1 + \sin x - 2\sin^2 x}{\sin^2 x} = 0; \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \quad \text{Пусть}$$

$$\sin x = t, -1 \leq t \leq 1, \text{ тогда } 2t^2 - t - 1 = 0, D=9, t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{б) } x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}; x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}.$$