МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Сучкова Ксения Юрьевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ФОРМИРОВАНИЕ НАВЫКОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОСРЕДСТВОМ ЯЗЫКА ГРАФОВ В ПРОЦЕССЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5 КЛАССОВ

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: математика, заочная форма обучения

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой:
д-р п.н., профессор, Л.В. Шкерина
20.05.2022
(дата, подпись)

Научный руководитель:
к.п.н., доцент М.А. Кейв
20.05.2022 г.
(дата, подпись)

Обучающийся:
К.Ю. Сучкова
20.05.2022.
(дата, подпись)

Дата защиты ____________________

Оценка __________________________

Красноярск 2022

Оглавление

Введение

«В настоящее время общество развивается очень динамично, поэтому невозможно точно определить, какие именно знания пригодятся ребенку в его последующей жизни, и на первый план выходит вопрос формирования у них умений самостоятельно продолжать образование на протяжении всей жизни, т.е. обладать метапредметными компетентностями» [15]. Согласно ФГОС ООО одним из требований к метапредметным результатам освоения основной образовательной программы по математике является: «умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач» [55].

Пытаясь решить какую-нибудь проблему или разобраться в некоторой ситуации человек порой интуитивно рисует схему на которой точками изображает некоторые объекты, а связи между ними – линиями. Подобного рода модели в математике называют графами. Графы позволяют многочисленные явления и процессы представить в виде моделей и схем, которые удобно использовать при обработке информации и поиска решений. При помощи графов можно наглядно продемонстрировать взаимоотношения между событиями или объектами в сложных ситуациях или же системах. После того, как произойдет адекватное соотношение вершин графа интересующими нас объектами, а ребрам – отношения между данными вершинами, полученный граф станет знаковой (математической) моделью данного явления. Язык теории графов, а также методы теории графов, проникают во многие сферы человеческой деятельности, тем самым становятся неотъемлемой составной частью общей математической культуры.

Одной из специфик теории графов, которая позволяет задаться вопросом о введении ее элементов в школьный курс математики, есть возможность представить граф геометрически – в виде удобного, простого в обращении рисунка.

Вопросу обучения элементам теории графов посвящён ряд работ таких авторов, как: Мельников О.И., Глухова А.К., Ложакова Е.А., Волкова С.В., Егорина В.С., Березина Л.Ю., Зыков А.А. и др. Граф – как математическая модель реальных ситуаций рассматривается в учебно-методических комплектах Босовой Л.Л., Полякова К. Ю., Семакиной И. Г., Гейн А. Г. и др.

Однако частные методики обучения элементам теории графов в рамках школьного курса математики отсутствуют. Поиск возможностей включения элементов теории графов в программу подготовки школьников на сегодня остается одной из актуальных проблем школьного математического образования. Тема выпускной квалификационной работы посвящена методике обучения элементам теории графов обучающихся 5 классов в процессе их математической подготовки.

Гипотеза исследования: если в содержание математической подготовки обучающихся 5 классов включить элементы теории графов, то это будет способствовать формированию навыков знакового моделирования.

Объект исследования: математическая подготовка обучающихся 5 классов.

Предмет исследования: методика обучения элементам теории графов обучающихся 5 классов.

Цель исследования: выявление, обоснование и экспериментальная проверка дидактических условий формирования навыков знакового моделирования на языке теории графов в процессе математической подготовки обучающихся 5 классов.

Задачи исследования:

1. Описать сущность понятия «знаковое моделирование».
2. Обосновать целесообразность включения элементов теории графов в систему математической подготовки обучающихся 5 классов.
3. Охарактеризовать дидактические условия формирования навыков знакового моделирования на языке теории графов в процессе математической подготовки обучающихся 5 классов.

4. Разработать методическое обеспечение для уроков и внеурочных мероприятий по математике для 5 класса, в содержание которых включены элементы теории графов.

5. Провести педагогический эксперимент, проанализировать и описать его результаты.

Данная квалификационная работа состоит из:

- Двух глав;
- Итогов опытно-экспериментальной работы;
- Заключения,
- Библиографического списка
- Приложений.

В первой главе работы рассматриваются теоретические основы формирования навыков знакового моделирования на языке теории графов в процессе математической подготовки обучающихся 5 класса. Во второй главе представлено методическое обеспечение для включения элементов теории графов в систему математической подготовки обучающихся 5 класса.

В приложения включены: диагностическая карта, примерная методическая разработка, выписка из федерального списка учебников, рекомендованных ФГОС ООО (5 класс).

Глава 1. Теоретические основы формирования навыков знакового моделирования на языке теории графов в процессе математической подготовки обучающихся 5 класса

1.1 Знаковое моделирование на языке теории графов как метапредметный результат обучения математике

Согласно ФГОС ООО одним из требований к метапредметным результатам освоения основной образовательной программы по математике является: «умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач» [55]. Процесс обучения математике обладает большим потенциалом в формировании умений и навыков моделирования – построение математической модели для конкретной ситуации.

Моделирование — это деятельность по созданию и использованию моделей.

Более точное определение принадлежит А. А. Ляпунову: «Моделирование — это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система (модель) [64]:

1) находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

2) способная замещать его в определенных отношениях;

3) дающая при ее исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте». [64].

Знаковое моделирование, это моделирование, где в качестве модели используется преобразование какой-либо ситуации с использованием различных знаков, например [64]:

- формулы;
- компьютерные программы;

- тексты.

Знаковые модели бывают разных видов [64] (рисунок 1)

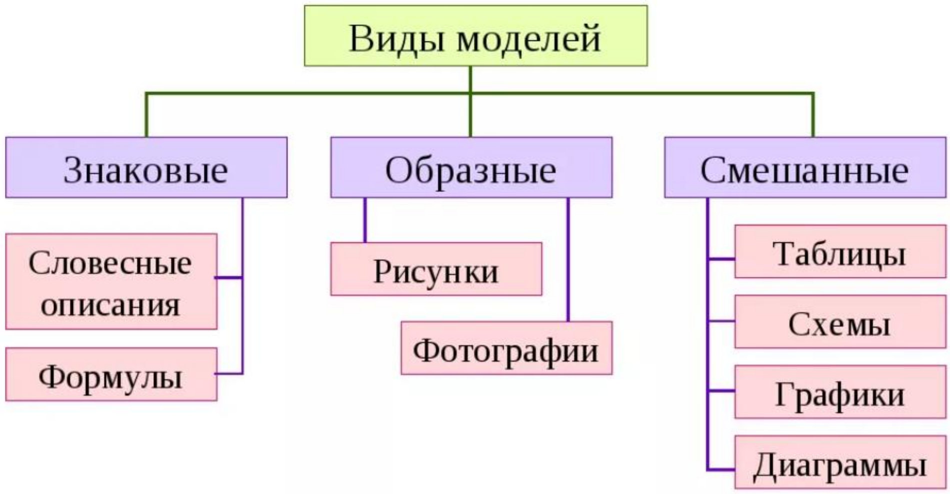


Рисунок 1. Виды моделей

Основными этапами знакового моделирования являются [64] (рисунок 2)

Рисунок 2. Этапы знакового моделирования

Состав действий для каждого этапа моделирования [64] (таблица 1)

Пошаговые действия при построении модели (таблица 1).

Таблица 1.Состав действий для каждого этапа моделирования

Номер этапа	Описание действия
1	Определить сведения общего характера о природе объекта, информацию о целях его исследования и некоторые предположения
2	Завершение идеализации объекта, отбрасываются несущественные факторы и эффекты
3	Проведение контрольных проверок корректности поставленных задач
4-5	Выбор наиболее эффективного метода решения
6	Сравниваются результаты измерений на объекте в ходе процесса решения с результатами предсказания модели в идентичных условиях
7	Качественный и количественный анализ результатов моделирования

Если объекты некоторой системы изобразить вершинами, а связи между ними — линиями, то мы получим модель рассматриваемой системы в форме графа.

Доступные обучающимся 5 классов виды знакового моделирования, с которыми они встречаются в реальных ситуациях или при изучении школьного курса математики:

1. Модель-схема, это схема с использованием пиктограмм и стрелок. Поисковые задания по решению проблем, связанных с ситуациями с различными действиями, выполняемые с использованием пиктограмм и стрелок. Примером модели-схемы в математике является краткая запись к задаче (рисунок 3)

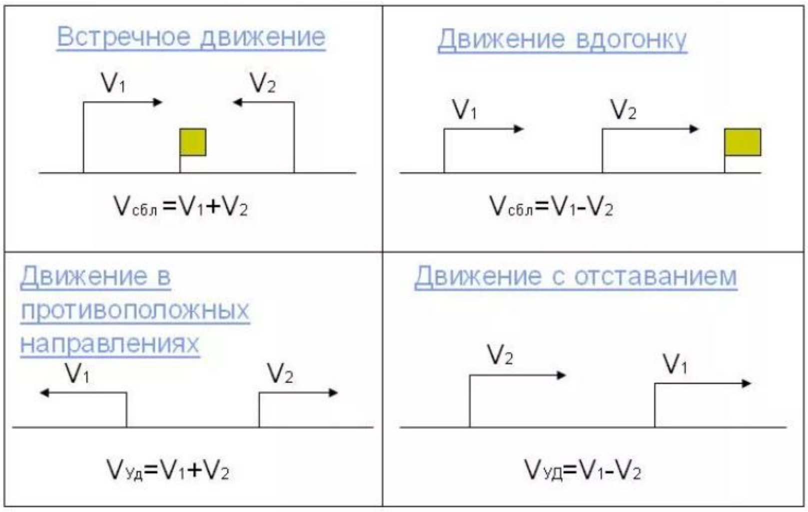


Рисунок 3. Пример модели-схемы для школьников

2. Модель – таблица.

Поисковые задания по решению различных ситуаций, выполняемые с использованием таблиц .

Пример модели-таблицы изображен на рисунке 4.

Объект	**Параметры**	
	Название	*Значение*
Краска	*Наименование образцов* *Площадь покраски при использовании 1 банки* $(S_{1\ банка})$	*Исходные данные* *Расчетные данные*
Комната	*Длина (а)* *Ширина (b)* *Высота (с)* *Неокрашиваемая поверхность* $(S_{стен\ с\ кафелем})$ *Площадь стен* $(S_{стен\ для\ покраски})$	*Исходные данные* *Исходные данные* *Исходные данные* *Рекомендуется 88%* *Расчетные данные*
Система	*Количество банок (К)*	*Результаты*

Рисунок 4. Пример модели-таблицы

3. Модель-граф. Модель, которая отражает отношение между объектами, имеющими связь с использованием стрелок и вершин связных линиями (рисунок 5) [64].

Рисунок 5. Пример модели-граф

Вывод: В данной работе под понятием знакового моделирования будет понимать процесс моделирования посредством языка графов. При помощи графов можно наглядно продемонстрировать взаимоотношения между событиями или объектами в сложных ситуациях или же системах. После того, как вершинам графа поставить в соответствие интересующие нас объекты, а ребрам – отношения между данными вершинами, полученный граф станет знаковой (математической) моделью данного явления.

Для построения знаковой модели необходимо понимать, какой будет итоговый вид модели, какие задачи ставятся для решения и какие выводы нужно получить после построения модели.

1.2Дидактические условия формирования навыков знакового моделирования на языке теории графов в процессе математической подготовки обучающихся 5 класса.

Дидактические условия – один из важнейших компонентов образовательного процесса. Сегодня в педагогической науке можно встретить разные определения понятия «дидактические условия» (Егорина В.С., Волкова С.В., Ложакова Е.А.).

Андреев В.И. под дидактическими условиями понимает «специально создаваемые педагогом обстоятельства педагогического процесса, при котором оптимально сочетаются процессуальные компоненты системы обучения» [Андреев В.И., 1996].

Содержание дидактических условий может изменяться в зависимости от поставленных задач перед педагогом в ходе учебного процесса.

Вопросу обучения элементам теории графов посвящён ряд работ таких авторов, как: Мельников О.И., Глухова А.К., Ложакова Е.А., Волкова С.В., Егорина В.С., Березина Л.Ю., Зыков А.А. и др. Граф – как математическая модель реальных ситуаций рассматривается в учебно-методических комплектах Босовой Л.Л., Полякова К. Ю., Семакиной И. Г., Гейн А. Г. и др.

Математическая подготовка обучающихся 5-го класса с внедрением элементов теории графов заключается в разработке специальной методической системы обучения. Особое содержание обучения элементам теории графов: история возникновения теории графов; основные понятия теории графов (таблица 2); сведения о применении теории графов при построении моделей; примеры различных задач с применением графовых моделей; специальные формы, методы и средства обучения.

Примерное содержание обучения элементам теории графов

Граф – это несколько точек, часть из которых соединены друг с другом линиями (отрезками, стрелками, дугами). Точки называются вершинами графа, а соединяющие их линии – рёбрами (рис.6). Штрихованные стрелки на рис. 6 – это указатели элементов графа.

Рис. 6

Основные понятия теории графов рассмотрим в таблице 2.

Таблица 2. Основные понятия теории графов

Основные понятия теории графов
1. **Вершина графа** - элемент (точка) графа, обозначающий объект любой природы, входящий в множество объектов, описываемое графом.
2. **Ребро графа** - линия, соединяющая две вершины графа.
3. **Неориентированный граф**. Если ребра не имеют ориентации, граф называется неориентированным.
4. **Ориентированный граф.** Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется ориентированным графом.
5. **Смешанный граф**. Если не все ребра ориентированы
6. **Взвешенный граф.** Граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некое значение-число (вес ребра).
7. **Цепь** – это маршрут, в котором все ребра различны.
8. **Цикл** - цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают.
9. **Связный граф** – граф, в котором любые две вершины соединяет маршрут
10. **Степень вершины графа -** число ребер, выходящих из каждой вершиныграфа, называют *степенью этой вершины*. Если из вершины выходит нечетное число ребер – она будет называться *нечетной*, а если четное – *четной*.
11. **Кратные ребра** – это ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин 2-мя и более ребрами.
12. **Дерево** – связный граф без циклов.

Под содержанием обучения мы будем понимать «не только некоторый объем теоретического учебного материала, но и комплекс задач, заданий и упражнений, а также сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач» [24]. Рассмотрим примеры задач для обучающихся 5 класса, в решении которых используется математическая модель – граф.

Пример 1 [5]**.** Аркадий, Борис. Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?

Решение:

Итак, нас 5 человек. Давайте выберем пять произвольных точек плоскости, которые мы назовем по первой букве имени человека. Эти точки будут вершинами графа, а отрезки, соединяющие эти вершины, будут представлять рукопожатия, которые мужчины заключили между собой (рис. 7).

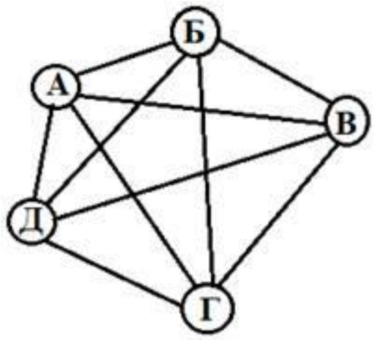


Рисунок 7. Граф «Рукопожатия»

Если подсчитать число ребер графа, изображенного на рисунке, то это число будет равно количеству совершенных рукопожатий. Как видно, их 10.

Ответ:10

Пример 2 [5]. Витя, Костя, Паша, Алина и Надя являются наиболее активными учащимися в 7 класса. Для участия в мероприятии необходимо произвести выбор из них одного мальчика и одну девочку. Сколько существует способов выбора?

Решение:

Подсчет количества способов относится к такой области математики, как комбинаторика.

Эту задачу можно решить с помощью графа.

Рисуем 5 вершин и обозначаем их первыми буквами имени – «В, К, П, А, Н». Витя может составить пару с Алиной и Надей. Вершину В соединяем ребром с вершинами А и Н. Костя может составить пару с Алиной и Надей. Соединяем вершину К с вершинами А и Н. Паша может составить пару с Алиной и Надей. Соединяем вершину П с вершинами А и Н (рис. 8).

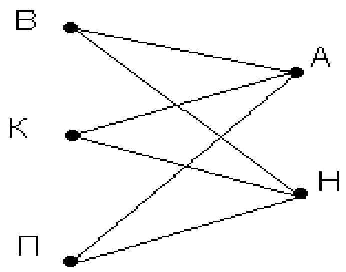


Рисунок 8. Граф «Активные ученики»

Число способов составить различные пары соответствует числу ребер в графе.

Ответ: 6 способов.

Пример 3 [5]**.** Для участия в шахматных соревнованиях были номинированы 6 человек: Андрей, Борис, Виктор, Георгий, Денис и Егор. Это соревнование проводится по определенной системе, которая называется круговой. Суть его заключается в том, что каждый из заявленных участников играет с каждым из оставшихся участников только один раз.

Список проведенных на данный момент игр указан в турнирной таблице (таблица 3):

Таблица 3. Список проведенных игр

Имя ученика	Имя соперника
Андрей	Борис, Григорий, Егор
Борис	Григорий
Виктор	Георгий, Денис, Егор
Георгий	Андрей, Борис, Виктор
Денис	Виктор
Егор	Андрей, Виктор

Вопрос: Каково количество сыгранных игр на данный момент, а также количество игр, которые еще нужно сыграть?

Участников будем изображать точками: Андрея –А, Бориса –Б и т.д. – это вершины графа.

Если двое участников уже сыграли между собой, то будем соединять изображающие их точки отрезками – это ребра графа (рис. 9).

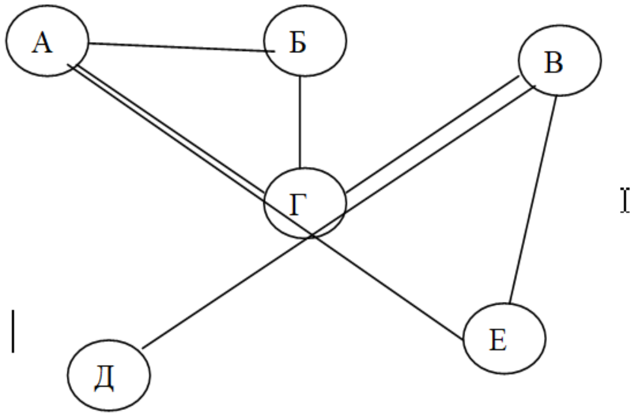


Рисунок 9. Граф «Проведенные игры турнира»

В полученном графе вышло 7 ребер, а значит, что на данный момент уже было сыгранно 7 игр.

Число оставшихся игр равно числу ребер, которых недостаточно для постройки полного графа, начертим их другим цветом (рис. 10).

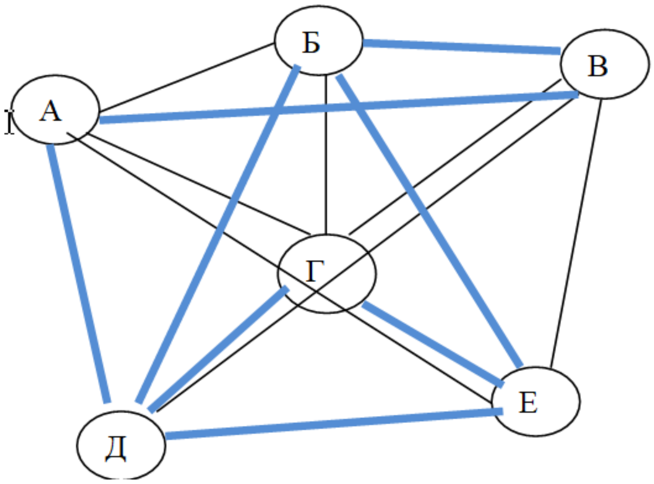


Рисунок 10. Граф «Турнир»

И получается, что для постройки графа, нам необходимо было достроить 8 ребер, а значит, ребятам осталось провести еще 8 игр.

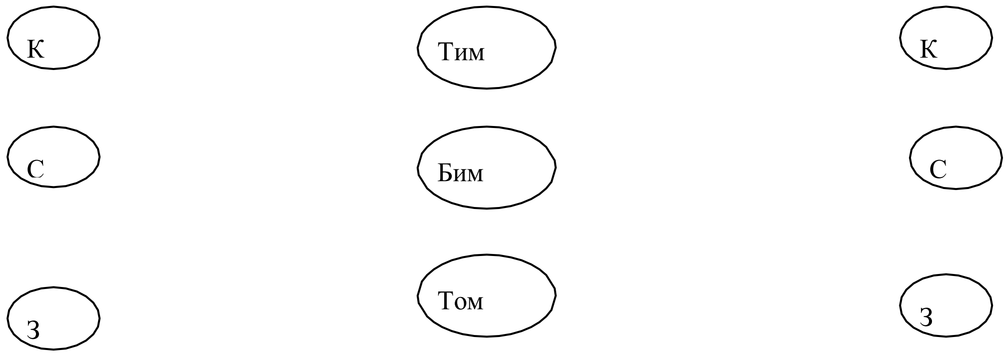
Ответ: Проведено 7 игр, осталось провести 8 игр.

Пример 4 [8]**.** Медвежата Тим, Бим, Том собрались гулять в красной, синей и зеленой рубашках. Их туфли тоже были этих трех цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного.

Туфли Тима были синие, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Тома и Бима?

Решение выполним с помощью графа.

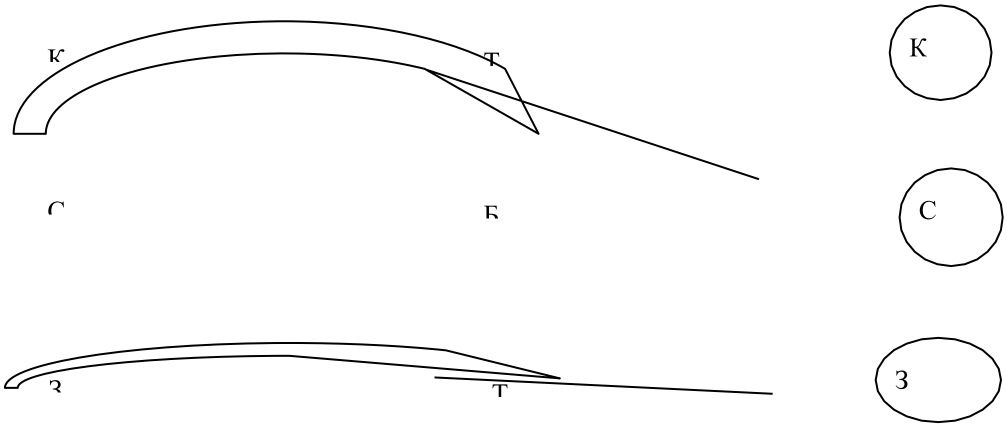
Обозначим вершины графа Тим, Бим, Том, К, С, З - цвета туфель и рубашек. Всего 9 вершин.



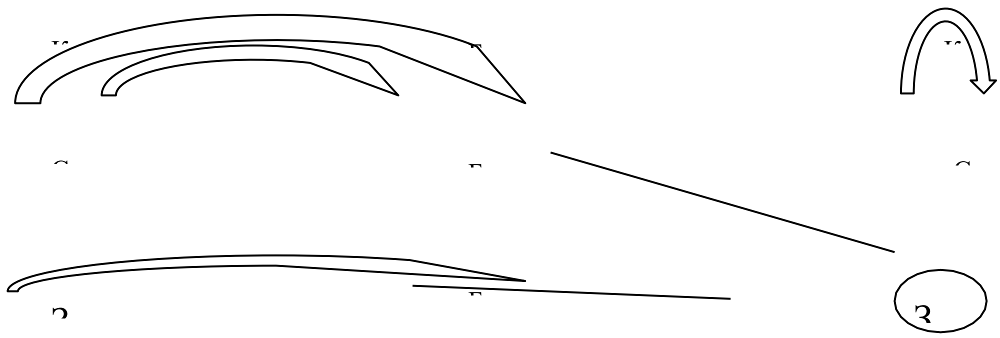
Туфли Медвежата Рубашки

Туфли Тима по условию синие, проводим ребро. На Томе не было ничего красного, значит у него зеленые туфли, проводим ребра.

Туфли Медвежата Рубашки



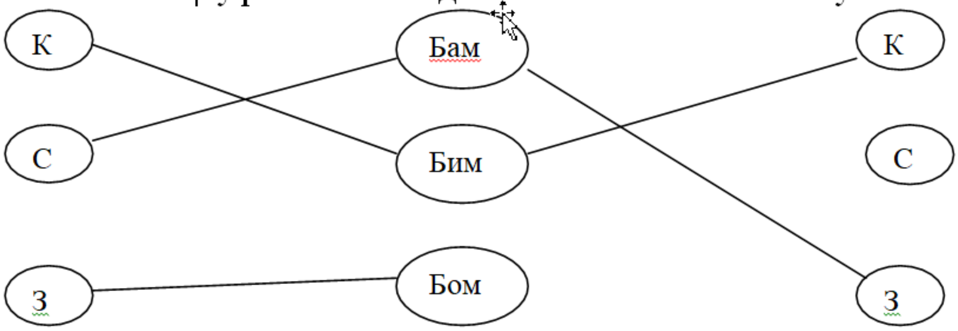
Тогда Биму достались красные туфли, а рубашка и туфли у Бима одного цвета, проводим 2 ребра



Туфли Медвежата Рубашки

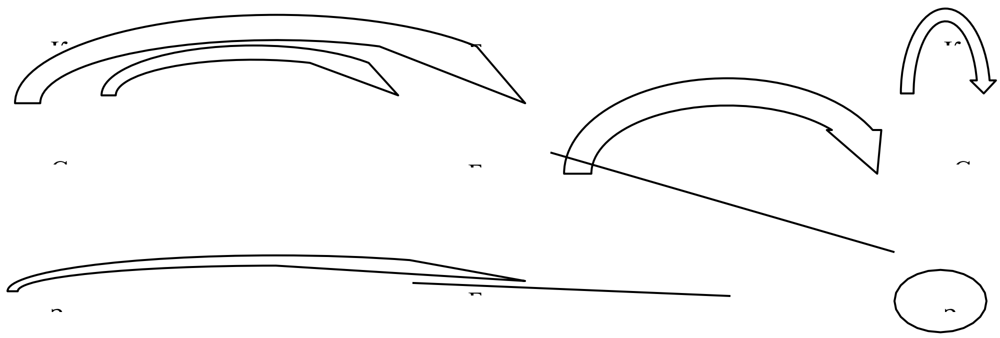
Туфли у Тима синие, а рубашка нет, значит ему достается только зеленая. Проводим ребро.

Туфли Медвежата Рубашки



Значит Тому достается синяя рубашка. Проводим ребро.

Туфли Медвежата Рубашки



Ответ: Том – синяя рубашка и зеленные туфли. Тим – зеленая рубашка и синие туфли.

Пример 5. ***Задача о Кёнигсбергских мостах*** [5]. Бывший Кёнигсберг расположен на реке Прегель. В черте города река омывает два острова. Через берега островов были переброшены мосты.

Старые мосты не сохранились, но есть карта города, где они изображены. Жители города предложили посетителям следующее задание:

Пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причем на каждом мосту следовало побывать только один раз (рисунок 11).

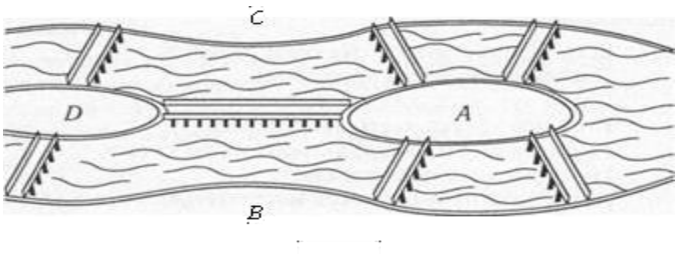


Рисунок 11. «План города Кёнигсберг»

Произвести прогулку по данным городским мостам предложили и Эйлеру. После того, как было произведено некое количество безуспешных попыток создать необходимый обход, Эйлер смог начертить упрощенную схему мостов.

У него получился граф, вершины которого – части города, разделенные рекой, а ребра – мосты (рисунок 12).

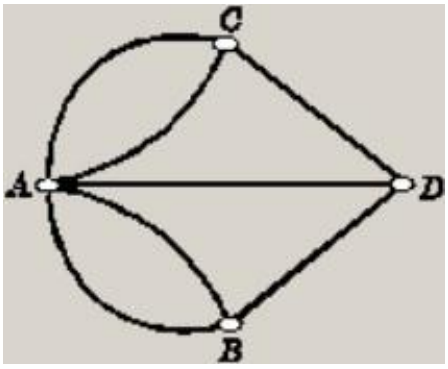


Рисунок 12. «План города Кёнигсберг в виде графа»

Провести линии по всем ребрам – «мостам», не отрывая карандаша от бумаги не получится. А в чем причина? Причина заключается в количестве ребер, принадлежащих вершине. Л. Эйлер сформулировал правило:

Обход возможен если:

1. все вершины – четные, а значит, тогда и только тогда, его можно начать с любой вершины;

2. две (2) вершины – нечетные, это значит, что его нужно начать с одной из нечетных вершин.

Обход невозможен, если нечетных вершин больше 2.

Если подсчитать, сколько ребер сходится в каждой вершине графа, то в вершине А сходится 5 ребер, в вершине В - 3, в вершине С - 3, в вершине Д – 3.

Все вершины являются нечетными.

Ответ: во время прогулки по городу нельзя пройти по всем семи мостам, проходя по каждому только один единственный раз.

Такие задачи известны под названием «задачи о вычерчивании фигур одним росчерком».

Специальные формы, методы и средства обучения элементам теории графов обучающихся 5 класса

Воспользовавшись переводом с греческого methodos означает «путь исследования, теория», по другому – это способ достижения какой-либо цели или решения конкретной задачи. И. Ф. Харламов понимает под методами обучения «способы обучающей работы учителя и организации учебно-познавательной деятельности учащихся по решению различных дидактических задач, направленных на овладение изучаемым материалом» [66].

Н. В. Савин считает, что «методы обучения - это способы совместной деятельности учителя и учащихся, направленные на решение задач обучения» [66].

В рамках ФГОС ООО [55] рекомендовано использование активных и интерактивных методов обучения, таких как:

Кейс-метод. Метод подразумевает задание какой-либо ситуации (реальной или максимально приближенной к реальности). Ученики должны приступить к исследованию ситуаций, после исследования предложить варианты ее разрешения, а далее выбрать лучшие из предложенных решений [55].

Метод проектов. Данный метод подразумевает самостоятельный анализ заданной ситуации и умение находить решение данной проблемы. Метод проектов объединяет исследовательские, поисковые, творческие методы и приемы обучения по ФГОС [55].

Проблемный метод. Данный метод предполагает постановку проблемы (проблемной ситуации, проблемного вопроса) и поиск решений этой проблемы, осуществляющийся через анализ подобных ситуаций (вопросов, явлений) [55].

Метод развития критического мышления через чтение и письмо(РКМЧП). Данный метод направлен на развитие критического (самостоятельного, творческого, логического) мышления [55]. В методике предлагается своя структура уроков, состоящая из этапов вызова, осмысления и размышления.

Эвристический метод – объединяет в себе разнообразные игровые приемы в форме конкурсов, ролевых и деловых игр, различных соревнований и исследований [55].

Исследовательский метод близок с проблемным методом обучения. Отличие только в том, что здесь учитель сам формулирует проблему [55]. Задача учеников - организовать исследовательскую работу по изучению проблемы.

Для того, чтобы выбрать подходящий метод обучения необходимо учитывать многие условия:

- цели обучения;
- уровень подготовленности обучающихся, а также возрастные особенности;
- время, которое необходимо отвести на изучение данного материала;
- оснащенность школы ресурсами.

В ходе проектирования методики обучения элементам теории графов, мы остановились на использовании следующих методов и приёмов:

- Кейс-метод;
- Проблемный метод;

- Эвристический метод;
- Исследовательский метод.

Вывод: Одно из важных мест в курсе математики занимают задачи. В процессе решения задач, ученик переходит от ее условия к модели (записи краткого решения). Для того, чтоб самостоятельно решить какую либо задачу, ученик должен освоить различные виды моделей, научиться понимать и выбирать модель, научиться переходить от одной модели к другой.

Графическая модель (граф) - одна из математических моделей посредством которой решаются разнообразные задачи. Одной из специфик теории графов, которая позволяет задаться вопросом о введении ее элементов в школьный курс математики, есть возможность представить граф геометрически – в виде удобного, простого в обращении рисунка.

Глава 2. Организация обучения математике в 5 классе, направленного на формирование навыков знакового моделирования на языке теории графов

2.1 Конспекты уроков математики 5 класса, в содержание которых включены элементы теории графов

Согласно учебному плану основного общего образования на изучение предмета «Математика» в 5 классе отводится 5 часов в неделю, всего 175 часов в год. В рамках данного исследования, элементы теории графов предлагаем включить в содержание следующих тем школьного курса математики:

- «Линии» – 8 часов;
- «Углы и многоугольники» - 9 часов;
- «Треугольники и четырехугольники» - 10 часов;
- «Многогранники» - 10 часов;
- «Комбинаторные задачи» (таблица 4).

Таблица 4. Тематическое планирование уроков математики по теме «Элементы теории графов» в 5 классе

№	Тема урока	Форма урока	Кол-во часов
1	Введение. Сведения из истории графов. Граф и его элементы.	Беседа, Исследовательская работа	2
2	Эйлеровы и гамильтоновы пути в графе.	Практическая работа	2
3	Решение комбинаторных и логических задач с помощью теории графов.	Беседа, Практическая работа	2
4	Деревья. Прикладные задачи теории графов.	Практическая работа	2
5	Итоговое занятие	Групповая практическая работа	2
6	Всего		10 час.

Конспект занятия №1

***Тема*: «**Введение. Сведения из истории графов. Граф и его элементы.

Различные способы записи графов.**»** (2ч)

Основная дидактическая цель: знакомство с базовыми понятиями теории графов: граф, вершина, ребро, степень вершины.

План

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Экскурс в историю возникновения теории графов; (15 мин)
3. Введение в теорию графов: основные понятия; (40 мин)
4. Практикум: решение задач; (20 мин)
5. Итог урока; (15 мин)
6. Рефлексия; (5 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент

Здравствуйте!

Тема урока “Графы”.

В рамках урока, мы познакомимся с понятием “Графы”, научимся изображать графы и решать задачи по этой теме.

Важно спросить у учащихся, как они могут оперировать такими понятиями как фигура, точка, отрезок, прямая, луч, ломаная, угол, многоугольник, а также треугольник и четырёхугольник, прямоугольник и квадрат, окружность и круг, прямоугольный параллелепипед, куб, призма, шар, пирамида, цилиндр, конус и изображать изучаемые фигуры от руки и с помощью линейки, циркуля, компьютерных инструментов. Перейдем теперь к изложению теоретических основ.

Начало теории графов датируют 1736 г., когда Л. Эйлер решил популярную в то время «задачу о кенигсбергских мостах», ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов.

Термин «граф» впервые был введен спустя 200 лет (в 1936 г.) венгерским математиком Денешем Кенигом. В начале 20 века наряду с термином «граф» употреблялись другие термины, например карта, комплекс, диаграмма.

Слово «граф» в математике означает рисунок (картинку), где нарисовано некоторое количество точек, которые чаще всего соединены между собой линиями (могут и не все).

С дворянским титулом «граф» их связывает общее происхождение от латинского слова «графио» - пишу. Граф однокоренное слово со словами география, биография, библиография и др.

Типичные графы, с которыми встречаются учащиеся в жизни – это схемы метро, схемы дорог как автомобильных, так и железнодорожных, схемы авиалиний и другие схемы (рисунок 13,14,15).

Рисунок 13. «Схема Новосибирского метрополитена»

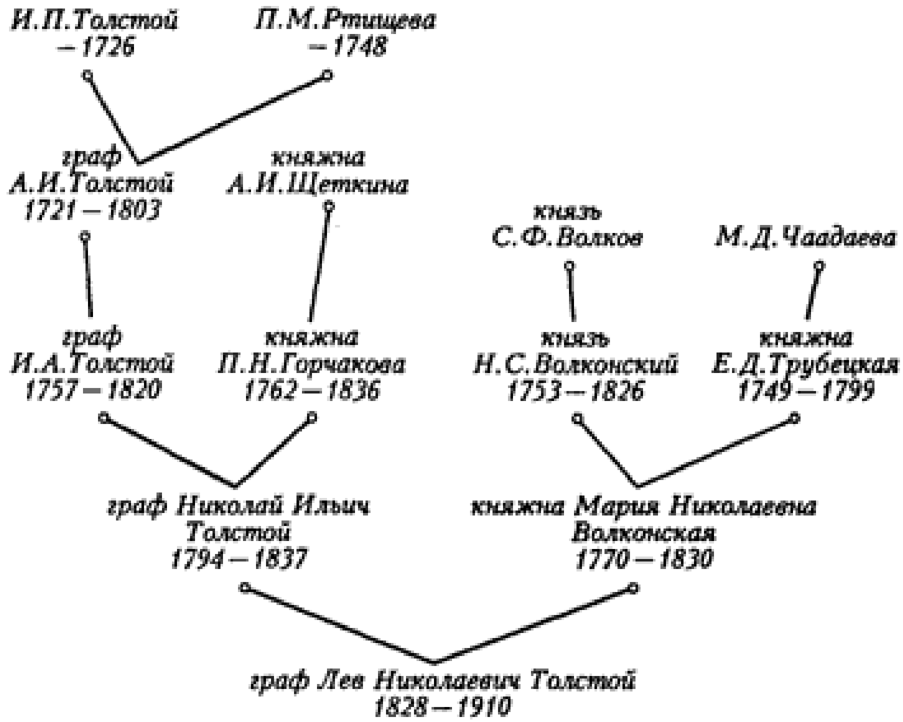


Рисунок 14. «Генеалогическое дерево великого русского писателя графа Л.Н. Толстого»

Рисунок 15. «Примеры графов»

«Граф– это несколько точек, часть которых соединены друг с другом линиями (отрезками, стрелками, дугами).

Точки называются вершинами графа, а соединяющие линии – рёбрами».

Некоторые виды графов и основные теоретические понятия представлены в таблицах 5,6.

Таблица 5. Виды графов

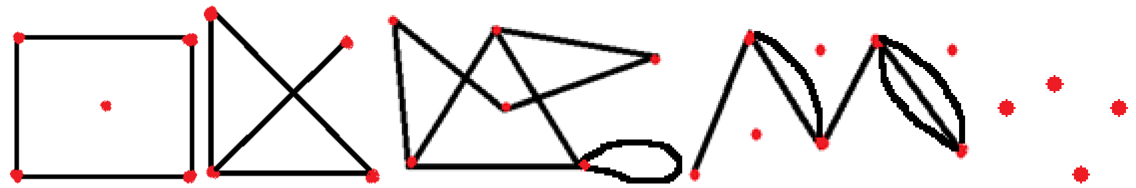


рисунок 3 рисунок 4 рисунок 5 рисунок 6 рисунок 7

Таблица 6. Основные понятия

Основные понятия теории графов

1. **Вершина графа** - элемент (точка) графа, обозначающий объект любой природы, входящий в множество объектов, описываемое графом.
2. **Ребро графа** - линия, соединяющая две вершины графа.
3. **Неориентированный граф**. Если ребра не имеют ориентации, граф называется неориентированным.
4. **Ориентированный граф.** Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется ориентированным графом.
5. **Смешанный граф**. Если не все ребра ориентированы
6. **Взвешенный граф.** Граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некое значение-число (вес ребра).
7. **Цепь** – это маршрут, в котором все ребра различны.
8. **Цикл** - цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают.
9. **Связный граф** – граф, в котором любые две вершины соединяет маршрут
10. **Степень вершины графа -** число ребер, выходящих из каждой вершиныграфа, называют *степенью этой вершины*. Если из вершины выходит нечетное число ребер – она будет называться *нечетной*, а если четное – *четной*.
11. **Кратные ребра** – это ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин 2-мя и более ребрами.
12. **Дерево** – связный граф без циклов.

Число ребер, выходящих из каждой вершины графа, называют «степенью этой вершины». Если из вершины выходит нечетное число ребер - она будет называться нечетной, а если четное – четной.

Известно, что «сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равно удвоенному числу ребер».

Кратные ребра – это ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин 2-мя и более ребрами. Четкого, строгого обозначения вершин не существует, вершины обозначают исходя из условия задачи: это или буквенные выражения (русскими, латинскими) или цифрами.

Графы могут состоять всего лишь из одних вершин. Встречаются и такие графы, у которых две вершины соединяются несколькими ребрами одновременно.

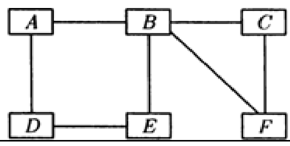
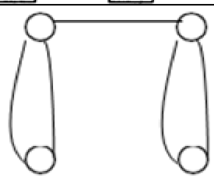
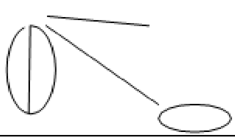
Существуют и такие графы, у которых ребро может «выходить и заходить» в одну и ту же вершину несколько раз.

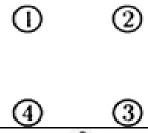
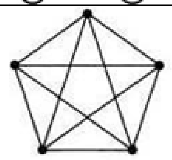
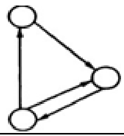
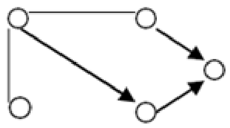
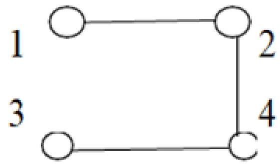
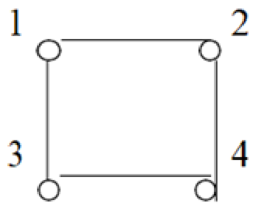
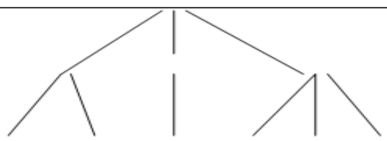
Именно такие ребра называют «петлями». Нужно усвоить, что вершины и ребра – это элементы графа. Чтобы построить граф, нужно определить его элементы (таблица 7).

Вершины графа - это объекты.

Ребра графа – выражают отношения между объектами.

Таблица 7. Виды графов

№	Название графа	Рисунок	Число ребер и вершин
1.	Граф (простой, обыкновенный - без кратных ребер, без петель		B=6 P=7
2.	Граф (мультиграф -есть кратные ребра, имеющие одинаковые начальные и конечные вершины)		B=4 P=5
3.	Граф (псевдограф, кратные ребра и петли)		B=4 P=5 Петля =1

4.	Нуль (пустой) граф (не имеет ребер)		В=4 Р=0
5.	Полный граф (каждая пара различных вершин смежная)		В=5 Р=10 полный граф имеет n вершин, то числоребер равно $\frac{n(n-1)}{2}$.
6.	Ориентированный граф		В=3 Р=4
7.	Смешанный граф		В=5 Р=5
8.	Граф с цепью		В=4 Р=3 Цепь 1,2,4,3
9.	Граф с циклом (цепью)		В=4 Р=4 Цикл 1,2,4,3,1; 2,4,3,1,2;
10.	Граф - дерево		В=10 Р=9

Одним из явных примеров существования графов в математике, считается абсолютно любой многогранник, находящийся в трехмерном пространстве.

Куб - пример такого графа. Вершины и ребра куба можно рассматривать

как вершины и ребра графа. Не заостряем внимание на то, как располагаются элементы куба в пространстве. Необходима лишь информация о том, какие вершины соединены ребрами.

Обратим внимание на три способа изображения одного и того же графа, в данном случае трехмерного куба (рисунок 16).

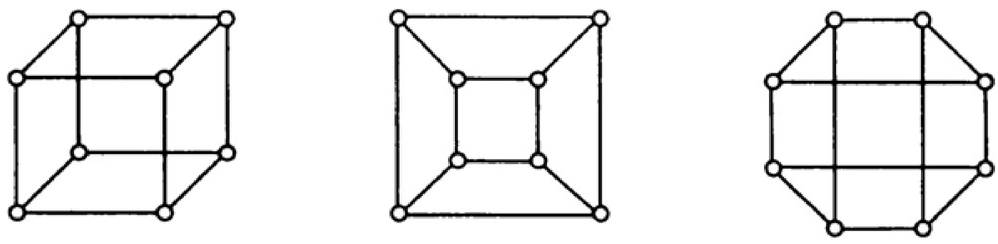


Рисунок 16. «Трехмерные кубы»

Следующие графы изображают одну и ту же структуру связей между элементами *A, B, C, D, E, F* (рис. 17.).

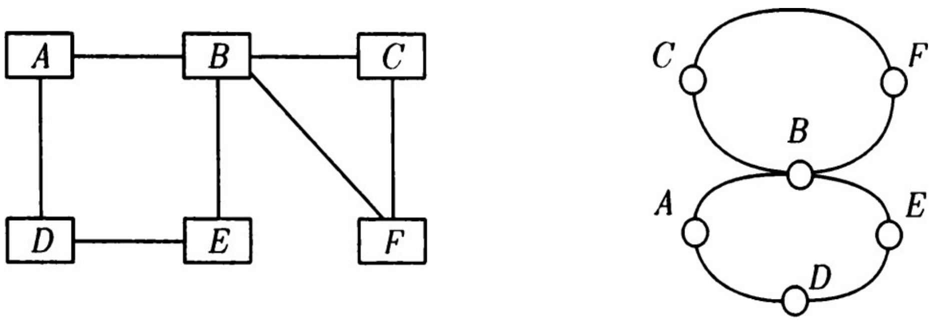


Рисунок 17. «Графы со структурой связи»

Способ изображения элементов, формы, длина линий не имеет никакого значения. Важным лишь одно- какие именно пары элементов соединены линиями.

Какой бы случай не рассматривали, граф будет состоять из двух множеств - множества вершин и множества ребер, причем для каждого ребра указана пара вершин, которые это ребро соединяет.

Слово «граф» в математике означает рисунок (картинку), где нарисовано некоторое количество точек, которые чаще всего соединены между собой линиями (могут и не все).

Будем учиться строить графы и решать задачи с помощью графов. Практическая работа:

№1 Построить граф, если A, B, C, D, – вершины графа, числа – степень вершины (количество ребер, инцидентных вершине графа)

A – 3 B – 3 C – 2 D – 2

№2. Построить граф, если A, B, C, D, E – вершины графа, числа – степень вершины (количество ребер, инцидентных вершине графа)

A – 2 B – 3 C – 1 D – 2 E – 3

№3 Построить граф по условию (смысловое чтение текста)

Приведем наглядный пример.

Пусть на первых партах сидят Саша, Маша Гриша, Наташа, Ваня, Галя. Всего 3 парты. Нарисовать граф «размещения школьников по партам». Объекты графа – школьники, ребра графа – парты (рис.18).

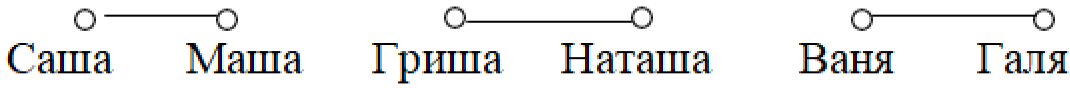


Рисунок 18. Граф «Ращмещение школьников по партам»

Из графа на рисунке видно, что за одной партой сидят Саша и Маша, Гриша и Наташа, Ваня и Галя. А Саша не сидит с Гришей, Наташей, Ваней и Галей за одной партой. Граф рассадки учеников можно нарисовать для всего класса, тогда и учащимся, и преподавателям не надо вспоминать кто с кем сидит. Прекрасно видно из графа.

Используя свойство графа, что «сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равно удвоенному числу ребер», можно ответить на вопросы:

1. Возможно, ли 5 столбов соединить проводами так, чтобы каждый был соединен ровно с 3-мя другими? Ответ: Нельзя, т.к. сумма степеней всех вершин (телефонов) графа четное число, а у нас 5*3=15 – нечетное число.

2. Может ли в микрорайоне, в котором от каждого дома выходит 3 дороги, быть ровно 10 дорог? Ответ: Нельзя, т.к. сумма степеней вершин (домов)графа должна быть четной и кратна 3, а 10*2 - четное число,

но не кратно 3. Заметим, что если бы было 12 дорог, то - можно, и в таком микрорайоне 8 домов.

Итог урока

- Ребята, на сегодняшнем уроке вы узнали новые слова, назовите их? (Граф, вершина графа, ребра графа.)

- Что же могут обозначать вершины графа? (Города; объекты, люди и другие, которые между собой связаны.)

- А ребра графа, что они будут обозначать? (Пути, движения, направления)

Приведите несколько пример, где в жизни мы можем с ними встретиться?

- Как изображаются графы?

Домашнее задание: повторить теоретический материал и решить предложенные задачи № 1-4.

Конспект занятия №2

***Тема*: «**Задачи, связанные с графами». Эйлеровы пути в графе, Гамильтоновы пути. (2ч)

Основная дидактическая цель: формировать умение выделять отношения, связывающие объекты. Развивать внимание, способность к логическому рассуждению. Переводить текст задачи в знаковую модель

План

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Опрос по домашнему заданию. Сверить ответы. Нерешенные задачи решить в классе, при этом вызвать ученика, у которого возникли трудности с решением; (20мин)
3. Новая тема: Эйлеров граф, правило Эйлера. Гамильтонов путь. Виды графов; (40 мин)
3. Разобрать задачи, которые решаются по правилам Эйлера;(40 мин)

4. Практикум: решение задач; (20 мин)
5. Итог урока; (15 мин)
6. Рефлексия; (5 мин) Ход занятия

1. Организационный момент Здравствуйте!

Какие трудности возникли при выполнении домашнего задания.

Разобрать спорные моменты при решении.

Перейдем к новому дальнейшему изучению теории графов.

Коротко об истории возникновения теории графов

Рисунок 19. «Леонард Эйлер»

Леонард Эйлер (1707-1783) – математик, механик, физик и астроном. Ученый необычайной широты интересов (рисунок 6). Является автором более 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки. Леонард Эйлер по происхождению швейцарец. В 1726г. был приглашен работать в Петербург, в 1727г. переехал жить в Россию. Являлся академиком, а затем почетным членом Петербургской академии наук.

Первая работа по теории графов принадлежит именно ему (1736), хотя термин «граф» впервые ввел в 1936 году венгерский математик Денеш Кениг. Эйлером была решена задача «о Кёнигсбергских мостах», а также сформулировано правило обхода:

- если все вершины чётные, то его можно начать с любой вершины;
- 2 вершины нечетные, то его нужно начать с одной из нечетных

вершин.

Задача 1. **<u>«Распечатанное письмо»</u>** обозначим по часовой стрелке вершины А, Б, С, Д, Е (рис. 20).

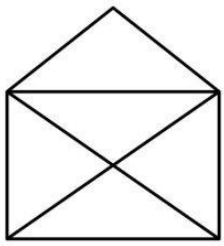


Рисунок 20. «Распечатанное письмо»

Применим правило Эйлера.

В вершине А сходится 3 ребра, в вершине Б сходится 4, в вершине С сходится 2, в вершине Д сходится 4(3 вершины – четные, 2 – нечетные) (рис. 21).

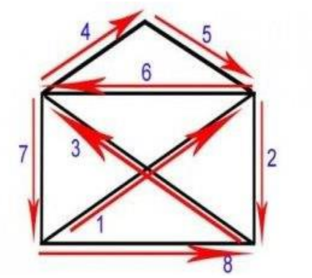


Рисунок 21. «Применение правила Эйлера»

Возможно ли произвести обход этого графа, используя правило Эйлера? (Начать обход в одной из нечетных вершин А или Е, а завершить в другой.) Такие задачи называются «*Вычерчивание фигур одним росчерком*». Решая задачи на языке теории графов, можно увидеть, что каждая из данных задач сводится к изображению графа «одним росчерком».

Изображение птицы (рисунок 22).

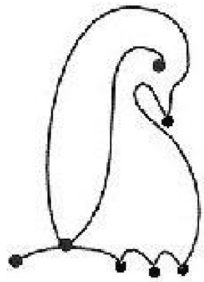


Рисунок 22. Граф «птица»

Точки, в которых пересекаются линии-вершины графа. Считаем количество получившихся вершин. Выходит 7, но не все имеют нечетную степень, а всего лишь 2. Именно поэтому в данном графе будет существует эйлеров путь. Из этого следует, что изображенную на рисунке птицу возможно нарисовать при помощи одного росчерка.

Задача 2. Какие буквы русского алфавита можно нарисовать одним росчерком?

Ответ: Б, В, Г, З, И, Л, М, О, П, Р, С, Ф, Ъ, Ь, Я. Остальные нет. Например, А – у нее 4 (больше 2) вершины нечетные, Ш – у нее 3 (больше 2) вершины нечетные.

Путь, проходящий по всем рёбрам графа и притом только по одному разу, назвали - **Эйлеров путь** (**эйлерова** цепь) в графе.

Если задачу **«о Кёнигсбергских мостах»** поставить по другому: побывать в каждой части города по одному разу (рисунок 22).

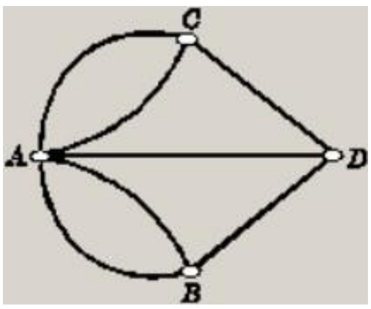


Рисунок 22. Граф «Кенигсбергские мосты»

Это означает, что на этом графе построить путь, в котором каждая вершина встречается ровно один раз.

Путь, проходящий по всем вершинам графа ровно один раз, называется Гамильтонов путь.

Задача 4. На рисунке 23 изображена некая схема. На данной схеме при помощи квадрата отмечено почтовое отделение «Почта Росси». А оставшиеся вершины -это те места куда курьеру следует отвезти посылки. Как курьеру следует построить маршрут, чтобы развести всё посылки к каждому месту, при этом не подъезжать ни к одному месту более одного раза, и вернуться назад (рисунок 23)?

Рисунок 23. Граф «Схема доставки посылок»

Заказчики: верхний ряд 1,2,3 (слева направо), ниже 4,5,6,7 и последний 8.

Тогда гамильтонов путь:

М,3,2,5,6,7,8,4,1

М,1,4,5,2,6,8,7,3

М,2,3,7,8,6,5,4,1

М,1,2,5,4,8,6,7,3

Этот список путей можно продолжить самостоятельно.

Чтобы вернуться в магазин, в конце каждого пути нужно добавить М. М,3,2,5,6,7,8,4,1М

Это цикл. Домашнее задание:

Ответить на вопрос:

Почему буквы А, Д, Е, Ж, К, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Э, Ю нельзя написать одним росчерком?

Конспект занятия №3

***Тема*: «**Решение комбинаторных и логических задач с помощью теории графов**»** (2ч)

Дидактическая цель: Обучить логически мыслить, ставить и решать логические и комбинаторные задачи с помощью графов.

План:

1. Организационный момент; (5 мин) 2.Проверка домашнего задания (15 мин).

3. Дальнейшая отработка полученных знаний (ориентированные, неориентированные и смешанные графы). Научить последовательно строить согласно условию задачи граф, который даст ответ на поставленный вопрос в задаче (40 мин).

4. Разобрать комбинаторные и логические и задачи (40 мин).
5. Практикум: решение задач (20 мин).
6. Итог урока (15 мин).
7. Рефлексия (5 мин) Домашнее задание.

Ход занятия: «Здравствуйте!»

Вернемся к предыдущему уроку и проверим домашнее задание. Может у кого-то получилось написать предложенные буквы одним росчерком.?

Далее на этом уроке мы научимся решать логические и комбинаторные задачи.

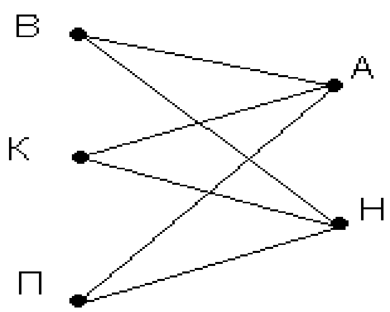
Задача 5. Витя, Костя, Паша, Алина и Надя являются наиболее активными учащимися в 7 класса. Для участия в мероприятии необходимо произвести выбор из них одного мальчика и одну девочку. Сколько существует способов выбора?

Решение:

Подсчет количества способов относится к такой области математики, как комбинаторика.

Эту задачу можно решить с помощью графа. Рисуем 5 вершин и обозначаем их первыми буквами имени – «В, К, П, А, Н». Витя может составить пару с Алиной и Надей. Вершину В соединяем ребром с вершинами А и Н. Костя может составить пару с Алиной и Надей. Соединяем вершину К с вершинами А и Н. Паша может составить пару с Алиной и Надей. Соединяем вершину П с вершинами А и Н (рис 24).

Рисунок 24. Граф «Пара активных учеников»



Число способов составить различные пары соответствует числу ребер в графе.

Ответ: 6 способов.

Задача 6. Андрей, Виктор, Максим, Николай при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано? Нарисуем четыре вершины и обозначим их заглавными буквами имени: А, В, М, Н. Андрей обменялся рукопожатием с Виктором, Максимом и Николаем. Соответственно рисуем ребра. Виктор обменялся рукопожатием с Андреем (ребро уже нарисовано), Максимом и Николаем. Рисуем недостающие ребра. Николай обменялся рукопожатием с Андреем, Виктором (ребра нарисованы) и Максимом. Рисуем недостающее ребро - Максим обменялся рукопожатием с Андреем, а с Виктор и Николаем ребра уже нарисованы. Число рукопожатий равно числу ребер (рис.25).

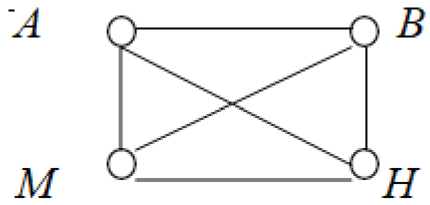


Рисунок 25. Граф «Схема доставки посылок»

Ответ: 6 (количество ребер)

В задаче №5 и №6 ответы получаем путем подсчета ребер графов. Нужно отметить в задаче №6 - неориентированный граф.

Задача 7. Для участия в шахматных соревнованиях были номинированы 6 человек: Андрей, Борис, Виктор, Георгий, Денис и Егор. Это соревнование проводится по определенной системе, которая называется круговой. Суть его заключается в том, что каждый из заявленных участников играет с каждым из оставшихся участников только один раз.

Список проведенных на данный момент игр указан в турнирной таблице (таблица 8):

Список проведенных игр

Таблица 8

Имя ученика	**Имя соперника**
Андрей	Борис, Григорий, Егор
Борис	Григорий
Виктор	Георгий, Денис, Егор
Георгий	Андрей, Борис, Виктор
Денис	Виктор
Егор	Андрей, Виктор

Вопрос: Каково количество сыгранных игр на данный момент, а также количество игр, которые еще нужно сыграть?

Участников будем изображать точками: Андрея –А, Бориса –Б и т.д. – это вершины графа.

Если двое участников уже сыграли между собой, то будем соединять изображающие их точки отрезками – это ребра графа (рис. 26).

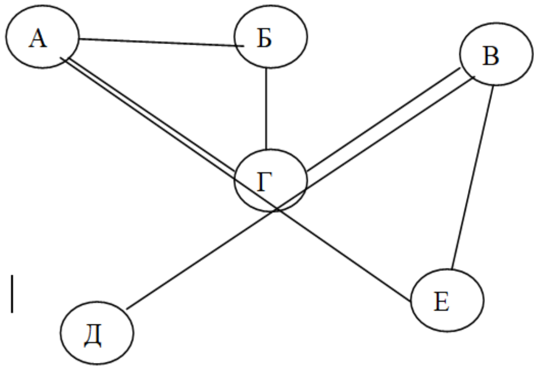


Рисунок 26. Граф «Проведенные игры турнира»

В полученном графе вышло 7 ребер, а значит, что на данный момент уже было сыгранно 7 игр.

Число оставшихся игр равно числу ребер, которых недостаточно для постройки полного графа, начертим их другим цветом (рис. 27).

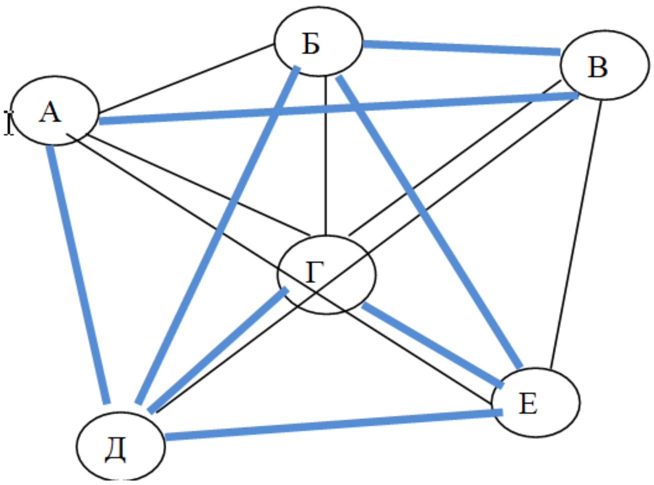


Рисунок 27. Граф «Турнир»

И получается, что для постройки графа, нам необходимо было достроить 8 ребер, а значит, ребятам осталось провести еще 8 игр.

Ответ: Проведено 7 игр, осталось провести 8 игр.

Так же относительно графов в задачах №5,6,7 можно задать вопрос и получить ответ:

- Пожалуйста, назовите, сколько ребер выходит из каждой вершины, а также назовите степень вершины каждого графа? (учащиеся отвечают на поставленный вопрос);
- Ответьте:

«сколько ребер, сколько вершин, какова сумма степеней?»

(учащиеся отвечают);

● Как вы думаете, «как связаны, количество ребер и сумма степеней?»

Если учащиеся не отвечают, то можно подсказать:

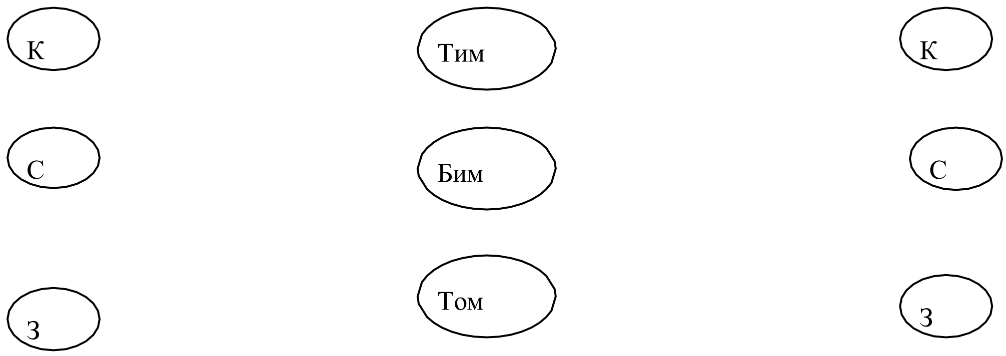
«количество ребер *2= сумма степеней вершин».

Логические задачи (Кто есть кто?). В этих задачах очень важно смысловое чтение текста задачи и не пропустить ни одну деталь в условиях задачи.

Задача 8. Медвежата Тим, Бим, Том собрались гулять в красной, синей и зеленой рубашках. Их туфли тоже были этих трех цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Тима были синие, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Тома и Бима?

Решение выполним с помощью графа.

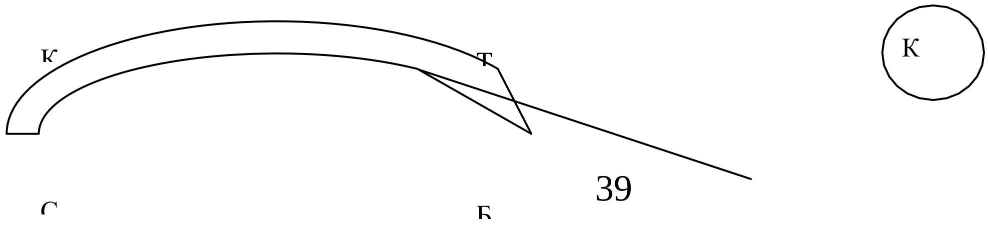
Обозначим вершины графа Тим, Бим, Том, К, С, З - цвета туфель и рубашек. Всего 9 вершин.

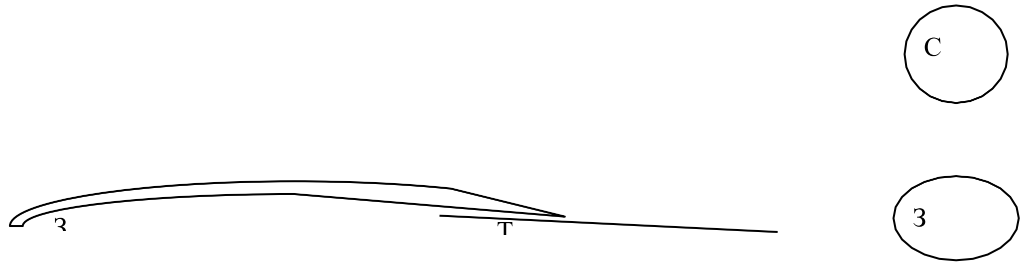


Туфли Медвежата Рубашки

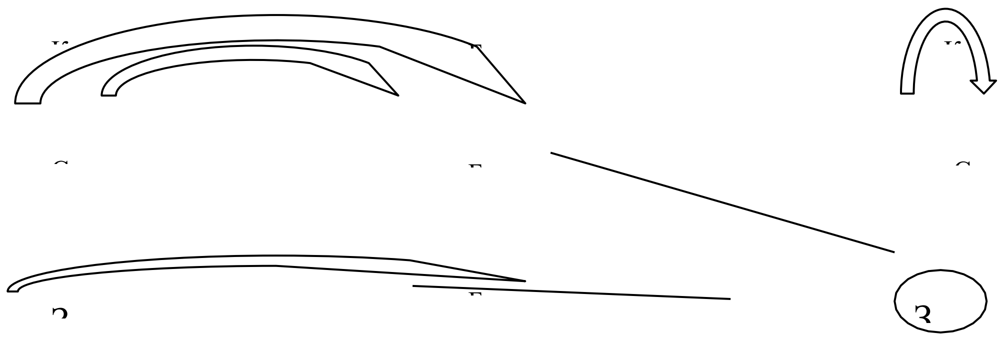
Туфли Тима по условию синие, проводим ребро. На Томе не было ничего красного, значит у него зеленые туфли, проводим ребра.

Туфли Медвежата Рубашки





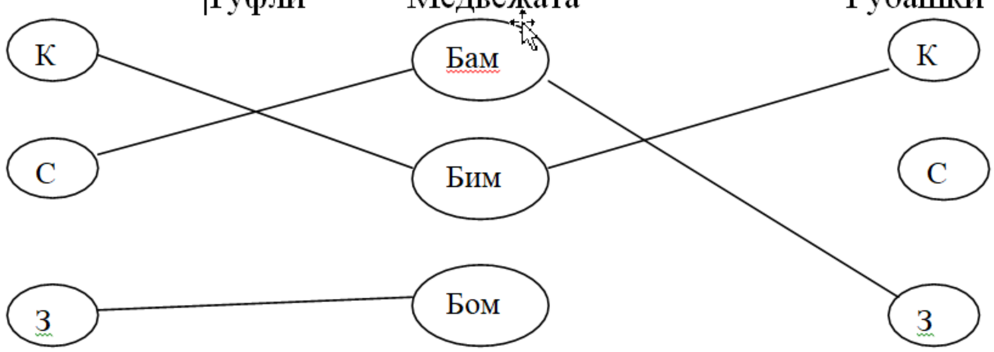
Тогда Биму достались красные туфли, а рубашка и туфли у Бима одного цвета, проводим 2 ребра



Туфли Медвежата Рубашки

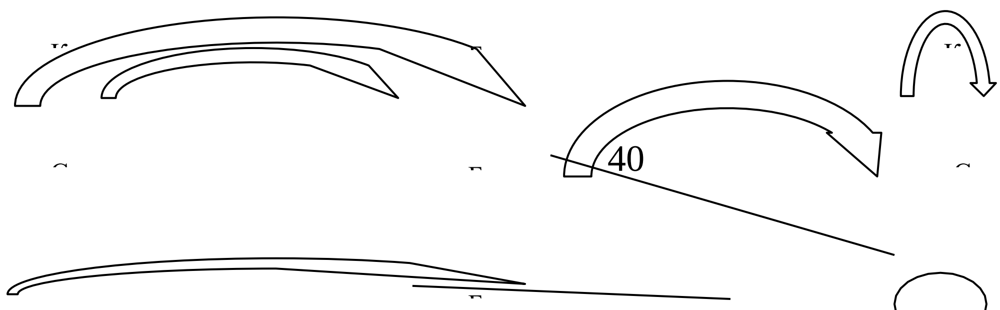
Туфли у Тима синие, а рубашка нет, значит ему достается только зеленая. Проводим ребро.

Туфли Медвежата Рубашки



Значит Тому достается синяя рубашка. Проводим ребро.

Туфли Медвежата Рубашки



Ответ: Том – синяя рубашка и зеленные туфли. Тим – зеленая рубашка и синие туфли.

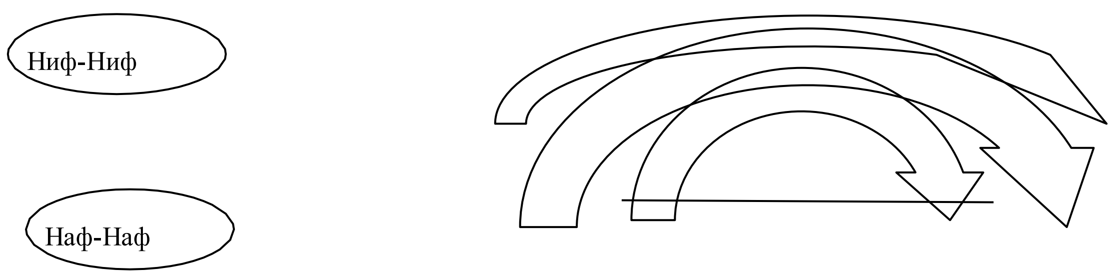
Аналогично решить

Задача 9. «*Три поросёнка*»

Жили-были на свете три поросёнка, три брата: Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф. Ими были построены 3 домика: соломенный, деревянный и кирпичный. Поросята выращивали возле своих домиков цветы: розы, ромашки и тюльпаны. Известно, что Ниф-Ниф живет не в соломенном домике, а Наф-Наф – не в деревянном; возле соломенного домика растут не розы, а тот, у кого деревянный домик, выращивает ромашки. У Наф-Наф аллергия на тюльпаны, поэтому он не выращивает их. Узнайте, кто в каком домике живет и какие цветы выращивает.

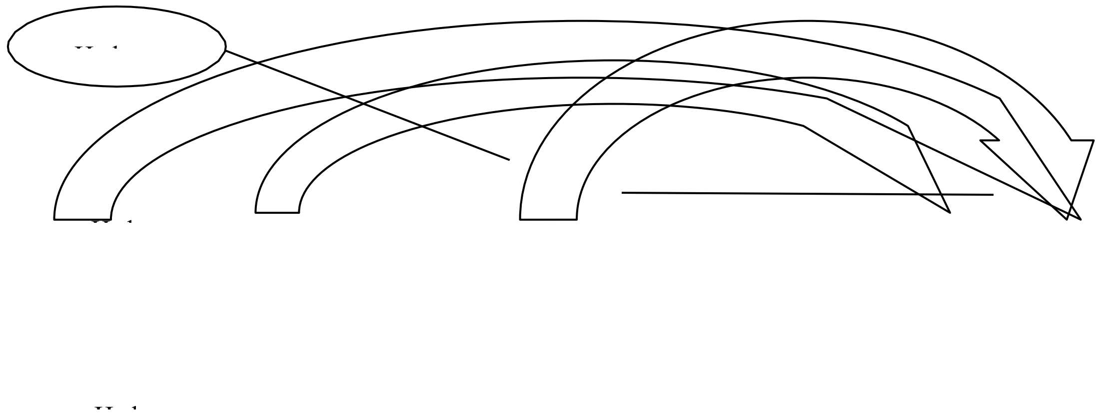
Вершины графа Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф, соломенный, деревянный, кирпичный(дома), розы, ромашки, тюльпаны (цветы)

Поросята Дома Цветы



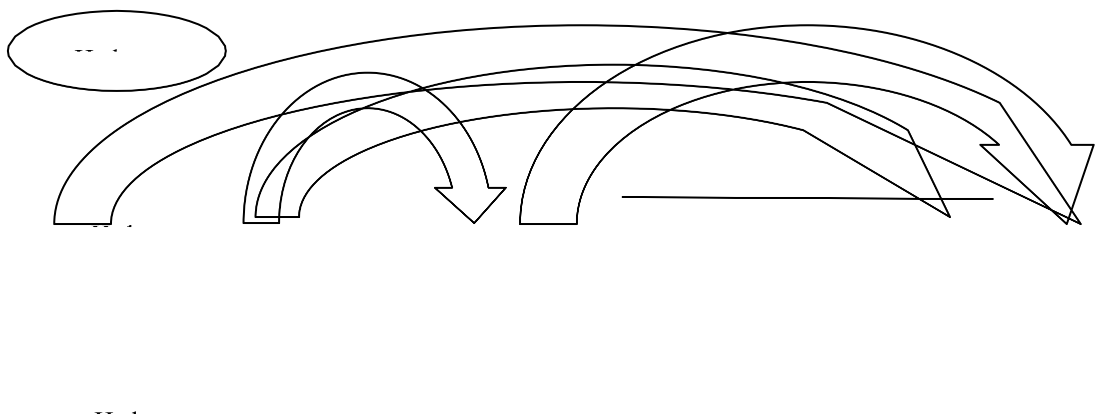
У того, кто живет в деревянном домике, в клумбе будут расти ромашки.

Проводим ребро дер – рома. Далее, возле соломенного домика растут не розы, следовательно тюльпаны. Проводим ребро кир – розы. Тогда тюльпаны



растут у соломенного домика. Проводим ребро сол – тюль. Наф-Наф живет не в деревянном домике, значит в соломенном или кирпичном, но у него аллергия на тюльпаны. Следовательно он живет в кирпичном доме. Проводим ребро Наф-Наф – кир. Ниф-Ниф живет в не соломенном домике, значит в деревянном. Проводим ребро Ниф-Ниф – дер.

Поросята Дома Цветы



Нуф-Нуфу остается соломенный домик. Проводим ребро Нуф-Нуф

Ответ:

Наф-Наф: кирпичном домике, возле которого растут розы;

Ниф-Ниф: деревянном домик, возле которого растут ромашки;

Нуф-Нуф: соломенном домике, возле которого растут тюльпаны.

На основе логических задач предложить учащимся составить и квест- игру.

Следующие задачи попробовать решить самостоятельно .

Задача 10: **«Друзья»**

Повстречались три товарища - Белов, Серов и Чернов. Чернов сказал другу, одетому в серый костюм: «Интересно, что на одном из нас белый костюм, на другом - серый и на третьем — черный, но на каждом костюм цвета, не соответствующего фамилии». Какой цвет костюма у каждого из друзей?

Вершины графа Б, С, Ч (фамилии), б,с,ч (цвета костюмов) Строим граф (рис. 28)

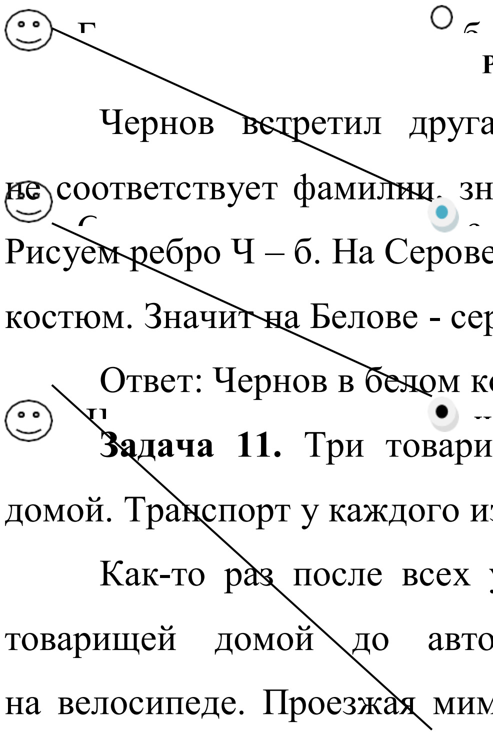


Рисунок 28. Граф «Рукопожатия»

Чернов встретил друга, одетому в серый костюм и цвет костюма не соответствует фамилии, значит на Чернове не серый и не черный костюм. Рисуем ребро Ч – б. На Серове не может быть серый костюм, остается – черный костюм. Значит на Белове - серый костюм. Рисуем ребра С – ч, Б – с.

Ответ: Чернов в белом костюме, Белов - в сером, Серов - в черном.

Задача 11. Три товарища Егор, Слава и Виталик едут после школы домой. Транспорт у каждого из них разный: велосипед, самокат, автобус.

Как-то раз после всех уроков Егор решил проводить одного из своих товарищей домой до автобусной остановки. Третий товарищ поехал на велосипеде. Проезжая мимо ребят он сказал: «Слава, ты оставил в школе свою кепку». Кто на чем ездит домой? Обозначить вершины графа. Построить ребра согласно условиям задачи. Решить самостоятельно дома.

Задача 12. Атос, Портос, Арамис и Д’Артаньян – четыре молодых мушкетёра. Один из них лучше всех сражается на шпагах, другой не имеет равных в рукопашном бою, третий лучше всех танцует на балах, четвертый без промаха стреляет с пистолетов. О них известно следующее:

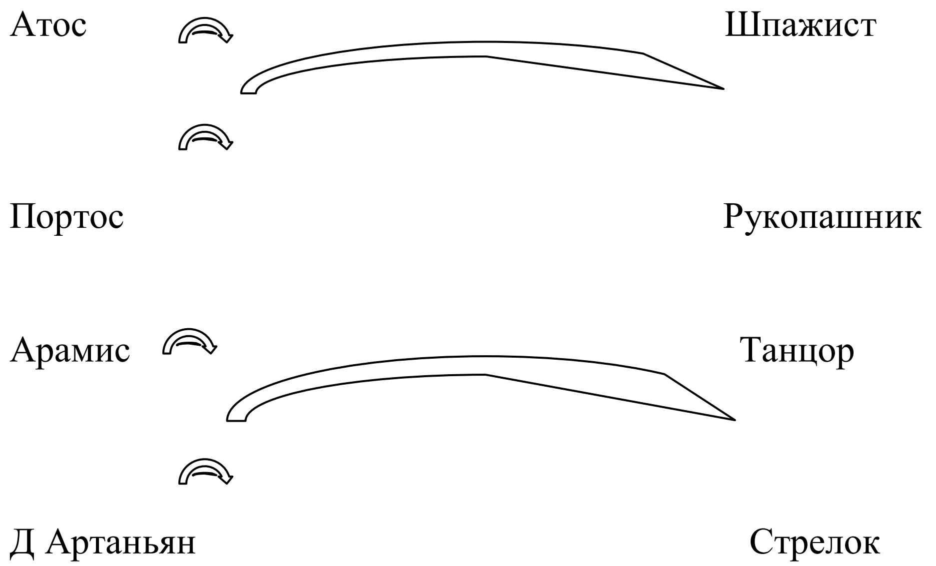
- Атос и Арамис наблюдали на балу за их другом – прекрасным танцором.
- Портос и лучший стрелок вчера с восхищением следили за боем

рукопашника.

- Стрелок хочет пригласить в гости Атоса.
- Портос был очень большой комплекции, поэтому танцы были не его стихией.

Кто чем занимается?

Определяем вершины графа Атос, Портос, Арамис, Д'Артаньян, шпажист, рукопашник, танцор, стрелок. Строим граф.



Читаем внимательно текст. Портос – не стрелок, не рукопашник, не танцор. Портос – шпажист. Проводим ребро. Атос - не стрелок, не танцор, не шпажист. Атос – рукопашник. Проводим ребро. Арамис – не танцор. Значит Арамис – стрелок. Остается Д Артаньян – танцор.

Задача 13. В некоем 10-м числе каждые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, которое делится на 13. Докажите, что среди этих цифр нет цифры 8.

Решение. Существует 7 двузначных чисел, которые делятся на 13 – это 13,26,39,52,65,78,91. Обозначим эти числа точками (вершины графа), и, если вторая цифра одного числа совпадает с первой цифрой другого числа, соединим их линией (ребро графа).

Видим, что если 10-значное число обладает заданным свойством, то оно состоит из периодически повторяющихся чисел 1391 или 6526…

Цифры 8 быть не может (рис. 29).

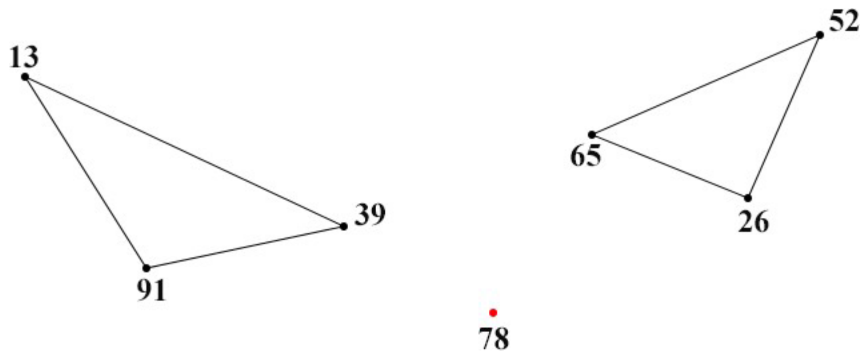


Рисунок 29. Граф «фигуры двухзначных чисел»

Вершина 78 – обособлена, значит и цифры 7 и 8 не входят в 10-значное число.

Это задача повышенной трудности и может быть непосильна для всех пятиклассников.

Домашнее задание: задачи №11,12,13.

Конспект занятия №4

***Тема*: «**Деревья. Кратчайшие пути. Прикладные задачи теории графов**»**

Основная дидактическая цель: развитие памяти, внимания; развитие самостоятельности; воспитание познавательной активности.

План:

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Научить строить граф в виде дерева согласно условию и который даст ответ на поставленный вопрос в задаче; (40 мин)
3. Практикум: решение задач; (20 мин)
4. Итог урока; (15 мин)
5. Рефлексия; (5 мин) Ход занятия

Здравствуйте! Проверим домашнее задание.

Сегодня мы научимся строить еще один вид графов, который называется дерево.

Задачи на построение деревьев

Задача 14. В кафе «Ветерок» на сегодняшний день существует меню, в котором на первое можно покушать щи, суп и борщ, на второе – котлету и рыбу, а на третье – чай и морс. Какое количество обедов возможно собрать из данных блюд (рисунок 30)?

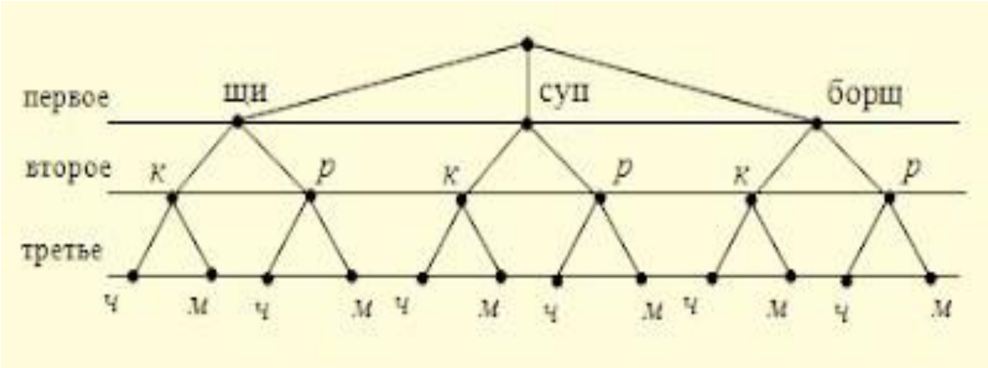


Рисунок 30. «Меню столовой»

Ответ: 12 обедов.

Задача 15. В школьной столовой на завтрак предлагают, как основное блюдо: кашу, запеканку. Напитки: чай, компот, сок. Выпечка: коржик ватрушка, булочка. Сколько различных завтраков можно заказать (рис. 31)?

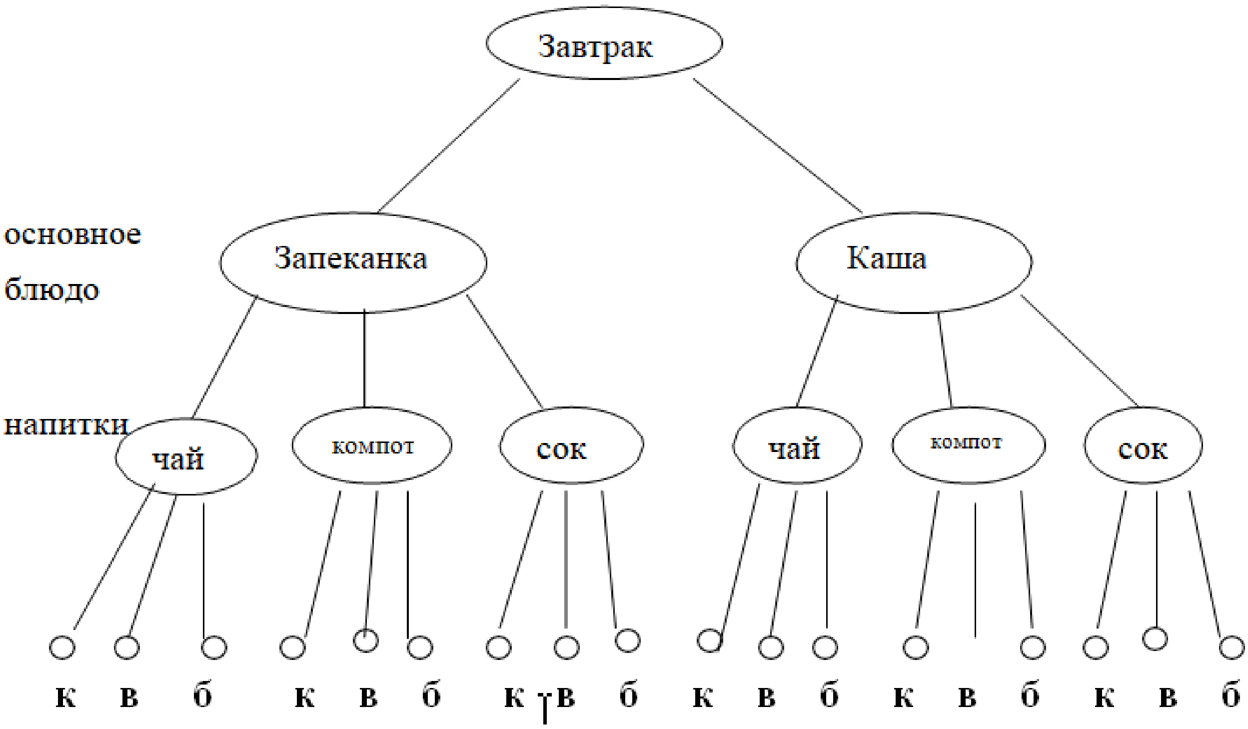


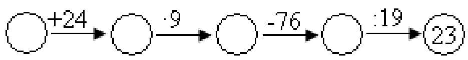
Рисунок 31. Граф «Меню столовой»

Ответ: 18 завтраков.

Задача 16.В уме было задумано некое число. К этому числу прибавлю 24, после то, что получилось умножу на 9, далее из полученного произведения вычту 76, а после возьму полученную разность разделю на 19. После всех этих действий у меня вышло 23. Найдите задуманное мною число.

Решение:

Сделаем рисунок (граф).

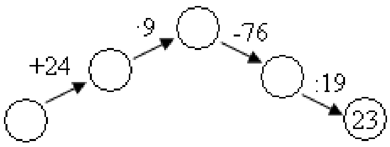


Исходя из рисунка видим, чтобы найти задуманное число, надо выполнить обратные действия:

23 · 19 = 437,

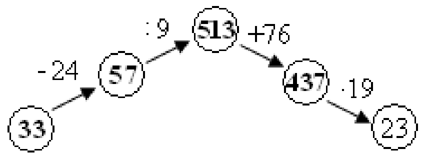
437 + 76 = 513,

513 : 9 = 57, 57 - 24 = 33.



Видно, что решать задачу следует с конца, заменяя каждое действие на обратное ему.

Получаем:



Ответ: 33.

С помощью таких задач можно проводить конкурс задач с молниеносном решением.

Конспект занятия №5

***Тема*: «**Итоговое занятие Оценка УДД**»** (2ч)

Основная дидактическая цель: оценка уровня усвоения и самостоятельности в изучении языка теории графов.

План:

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Самостоятельная работа; (40 мин)
3. Подведение итогов; (40 мин) Оценка полученных знаний.

Ход занятия. Здравствуйте!

Мы познакомились с элементами теории графов. Освоили язык теории графов. Узнали виды графов. Используя язык (знаки) теории графов, вы текстовое содержание задачи можете перевести в знаковую модель, позволяющую решить и ответить на вопросы, поставленные в задаче.

Кратко повторим основные определения и свойства графов. Опрашиваем учащихся. И тогда сейчас проверим уровень усвоенной информации по теории графов, выполнив самостоятельную работу. Самостоятельная работа проводится по 2-м вариантам (таблица 9).

Самостоятельная работа на уровень усвоенного материала

Таблица 9

Номер задачи	Вариант 1	Вариант 2
1	Нарисовать граф и сосчитать сумму степеней графа А-2, Б- 2, В-5, Г- 3	Нарисовать граф и сосчитать сумму степеней графаА-3, Б-3, В-2, Г- 4
2	Можно ли одним росчерком написать буквы Н, М, F	Можно ли одним росчерком написать буквы P, R, E
3	В уме было задумано некое число. К этому числу прибавлю 24, после то, что получилось умножу на 9, далее из полученного произведения вычту 76, а после возьму полученную разность разделю на 19. После всех этих действийу меня вышло 23. Найдите задуманное мною число.	В уме было задумано некое число. Умножу его на 7, а потом прибавлю 15. Далее полученную сумму умножу на 10, а после из произведения вычту 76. Возьму полученную разность и разделю на 6. После всех этих действий у меня вышло 24. Найдите задуманное мною число.

Подведем итоги. Выставим оценки.

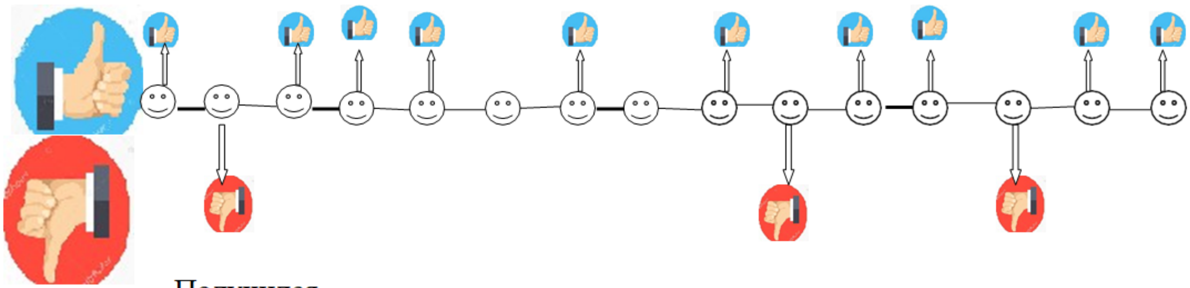
В качестве оценки уровня полученных знаний по этой теме можно предложить учащимся вести в виде графа.

Объекты – учитель, ученики класса.

Отношения – оценка усвоенных знаний.

Сделать такие карточки.

Нарисовать оценочный граф.



Получился смешанный граф.

Стрелка вверх 5 баллов. Стрелка вниз 2 балла. Если стрелки нет, учащийся получил – 3 балла.

Считаем среднюю оценку: 5*10+ 3*2+ 2*3 =62. Делим на 15. Получаем в среднем 4,1 балла.

Учащимся будет интересно оценивать знания с помощью теории графов. Сведения вносить в таблицу и увидеть динамику подготовки

и усвоения материала по каждому учащемуся и в целом по классу. Возможно включить сюда можно и оценку уровня преподавания учителя.

2. 2. Итоги опытно-экспериментальной работы

Педагогический эксперимент проходил на базе МБОУ «Первомайская СОШ» Боградский район Республика Хакасия, 5 класс.

В классе присутствовало в среднем 15 учеников. Средняя оценка успеваемости в обоих классах 3,7.

Цель эксперимента: формирование навыков знакового моделирования на языке теории графов.

Этапы эксперимента:

1. На первом – констатирующем этапе был определен первоначальный уровень сформированности у обучающихся умений строить математические модели (графы) для конкретных ситуаций в 5 классе МБОУ «Первомайская СОШ» Боградский район Республика Хакасия.

2. На втором – формирующем этапе был организован процесс обучения математики в 5 классе с включением в программу уроков с изучением теории знакового моделирования и заданий на построение графов.

3. На заключительном – контролирующем этапе была проведена повторная диагностика уровня сформированности у обучающихся 5 класса умений моделировать посредством языка графов.

На первом этапе опытно-исследовательской работы была проведена диагностическая работа по математике в 5 классе, продолжительность которой равна 40 минут.

Диагностическая работа содержала ряд заданий, позволяющих определить у обучающихся имеющийся уровень умений строить математические модели на языке графов для конкретных ситуаций. При верно выполненном задании присваивался «1» балл, если обучающийся не выполнил задание или выполнен неверно – «0» баллов. Полученные данные заносятся в итоговый отчет по каждому ученику.

Такой отчет позволяет подсчитать количество обучающихся, которые верно выполнили определённое число заданий. Тем самым, можно определить уровень сформированности у обучающихся умений моделировать посредством языка графов (таблица 9).

Таблица 9. Распределение обучающихся 5 класса по уровню сформированности умений моделировать посредством языка графов (констатирующий этап эксперимента)

	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Количество обучающихся	9	4	2
% обучающихся	57%	33%	10%

Для наглядности полученные результаты отображены в виде диаграммы (рис. 33).

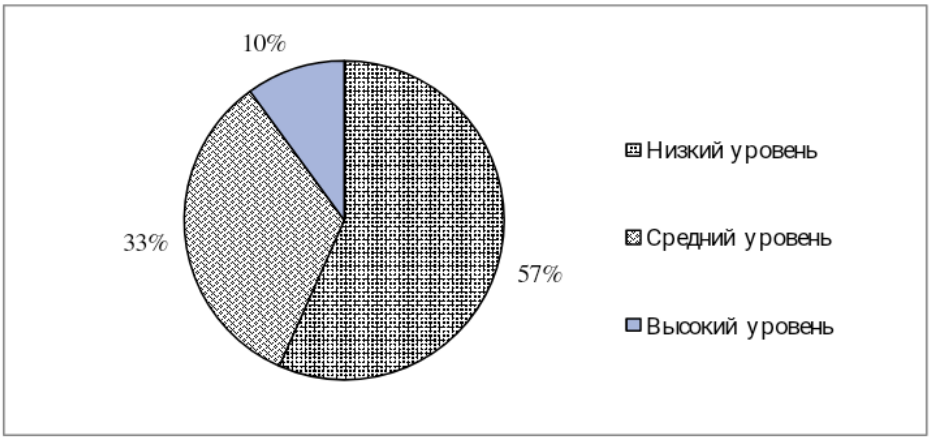


Рис. 33. Диаграмма распределения обучающихся 5 класса по уровню сформированности умений моделировать посредством языка графов (констатирующий этап эксперимента)

На основе проведенного анализа и полученной статистической данной диагностики можно отметить, что у обучающихся 5 класса преобладает низкий уровень сформированности умений моделировать посредством языка графов.

На втором этапе опытно-исследовательской работы были проведены ряд уроков по математике в 5 классе, в содержание которых включались элементы теории графов и задачи на графы. Экспериментальная работа осуществлялась во время учебного процесса, в соответствии с рабочей программой образовательной организации. Проектирование содержательного и организационного компонентов осуществлялись в соответствии с методической разработкой.

В связи с тем, что исследование выполнялось на протяжении учебного года, темы учебных материалов формировались в соответствии с учебным планом МБОУ «Первомайская СОШ» Боградский район Республика Хакасия.

На последнем этапе (контрольном) опытно-исследовательской работы в 5 классе нами была повторно проведена диагностирующая работа, которая позволила определить уровень сформированности у обучающихся умений строить математические модели для конкретных ситуаций посредством графов.

Задания в предложенных работах схожи с заданиями, которые были реализованы на констатирующем этапе эксперимента. Количество баллов за верно решённое задание и критерии не изменялись.

В таблице 10 представлено распределение обучающихся 5 класса по уровням сформированности умений моделировать посредством языка графов.

Таблица 10. Распределение обучающихся 5 класса по уровню сформированности умений моделировать посредством языка графов (контрольный этап эксперимента)

	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Количество обучающихся	2	8	5
% обучающихся	13%	53%	33%

Полученные результаты отображены на диаграмме (рис. 34).

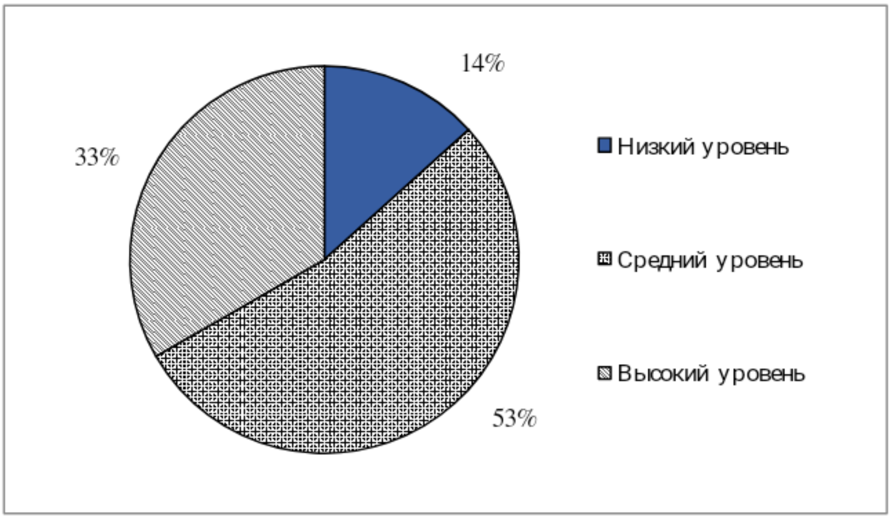


Рис. 34. Диаграмма распределения обучающихся 5 класса по уровню сформированности умений моделировать посредством языка графов (контрольный этап эксперимента)

В итоге всех исследований нами был осуществлен сравнительный анализ результатов констатирующего и контрольного этапов, который показал положительную динамику: количество обучающихся с низким уровнем сформированности умений моделировать посредством языка графов сократился на 43%; увеличилось количество обучающихся со средним уровнем на 20% и с высоким – на 23%. Это говорит о том, что представленная в работе методика обучения элементам теории графов, способствует формированию навыков знакового моделирования у обучающихся 5 класса.

Заключение

В ходе проведенного исследования можно прийти к выводу, что существуют определенные возможности для включения элементов теории графов в содержание математической подготовки школьников 5 класса.

Одной из главных особенностей теории графов, которая позволяет ставить вопрос о введении элементов теории графов в школьный курс математики, является возможность представить граф (как математическую модель или как отвлеченный образ) геометрически – в виде простого и наглядного (имеется в виду удобного для человека) в обращении рисунка. Вершины отождествляются с точками на плоскости, а ребра – с линиями, соединяющими вершины. При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием.

Перспективным и достаточно естественным является использование изобразительного языка графов в качестве служебных средств, при решении различных методических вопросов, связанных с обучением математике.

В рамках данного исследования охарактеризованы основные дидактические условия для включения элементов теории графов в математическую подготовку обучающихся 5 класса.

Разработана примерная программа по теме «Элементы теории графов» для включения в математическую подготовку обучающихся 5 класса, рассчитанная на 10 часов. Представлено соответствующее методическое сопровождение – методическая разработка цикла уроков по теме «Элементы теории графов».

Для каждого урока отобрано и адаптировано для 5 класса специальное содержание обучения элементам теории графов. В методической разработке представлен комплекс разнообразных задач, который направлен на формирование навыков знакового моделирования у обучающихся 5 класса.

На базе МБОУ «Первомайская СОШ» Боградский район Республика Хакасия проведен педагогический эксперимент по формированию навыков знакового моделирования у обучающихся 5 класса.

Результаты педагогического эксперимента подтверждают гипотезу исследования: изучение элементов теории графов способствует формированию умений создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач.

В ходе проведенного исследования все основные задачи выполнены и цель достигнута.

Библиографический список

1. Алексеев В.В., Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. (ред.) Теория графов. Покрытия, укладки, турниры. Сборник переводов - М.: Мир, 1974.— 224.

2. Альсина К. Карты метро и нейронные связи. Теория графов. / Пер. с исп.- М.: Де Агостини, 2014 г.

1. Альпин Ю.А., Ильин С.Н. Задачи по дискретной математике: Учебно- методическое пособие. — Казань: Казанский федеральный университет, 2013. — 26 с

2. Андреев В.И. Педагогика творческого саморазвития. Казань, 1996. С.568

3. Асельдеров З.М., Донец Г.А. Представление и восстановление графов - К.:Наукова Думка, 1991, 96 стр.

4. . Березина Л. Ю. Графы и их применение. Пособие для учителей.

– М.: просвещение, 1979.

5. Берж К. «Теория графов и ее применение», М, «Мир», 1980;

6. Богомолова О.Б. Логические задачи. 4-е изд., испр. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 277с. :ил.

7. Большой энциклопедический словарь: в 2-х т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. – Сов. энциклопедия, 1991

8. Болховитинов В. Н., Колтовой В. И., Лаговский И. К. Твое свободное время. М.: Детская литература, 1975.

9. Волкова С.В. Дидактические условия реализации учащимися личностных смыслов в процессе обучения. - Автореф. дисс. к.п.н. - Петрозаводск, 2002.

10. «В помощь учителю математики», Йошкар-Ола, 1972 (ст. «Изучение элементов теории графов»)

11. Гарднер М. «Математические головоломки и развлечения», М. «Мир», 1972.

12. Глухова А.К, «Элементы теории графов в школьном курсе математики», диссертация, Москва, 2016 г.

13. Государственная программа Российской Федерации "Развитие образования" (С изменениями и дополнениями от: 22 февраля, 30 марта, 26 апреля, 11 сентября, 4 октября 2018 г., 22 января, 29 марта 2019 г).

14. Донец Г.А., Шор Н.З. Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов - К.: Наукова думка, 1982. — 144 с.

15. Егорина В.С. Формирование логического мышления младших школьников в процессе обучения. - Автореф. дисс. к.п.н. - Брянск, 2001

16. Зыков А.А. Основы теории графов. - М.:Наука, 1987, 384 с.

17. Жуковская Е.П. Дидактические аспекты организации факультативов [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://festival.1september.ru.

18. Игнатьев, Е.И. Хрестоматия по математике «В царстве смекалки, или арифметика для всех» – Ростов, 1995 г

19. Калмыков Г. И. Древесная классификация помеченных графов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 192 с.

20. Кейв М.А. Дискретная математика для будущего учителя: уч. пос.- Красноярск: КГПУ им В.П. Астафьева, 2009.

21. Кейв М.А. Дискретная математика: учебное пособие [электронное издание]. – Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016.

22. Кейв М.А., Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие. – Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2015.

23. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. Пер. с анг. - М.:Мир, 1978, 432 с.

24. Курьянов, М.А. Активные методы обучения : метод. пособие / М.А. Курьянов, В.С. Половцев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 80 с. – 50 экз.

25. Лернер И.Я., Дидактические основы методов обучения. М.: Педагогика, 1981. - 186 с

26. Ложакова Е.А. Педагогические условия и принципы обеспечения эффективности процесса формирования информационной компетентности студентов музыкальных специальностей в ходе обучения информатики // Вестник РУДН. - 2011. - № 3. - С. 3-6.

27. Луначарский А.В., статья из «Учительской газеты» №1, 1924 г.

28. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Г.В.Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б.Суворов и др.под ред. Г.В.Дорофеева, И.Ф. Шарыгина, 5-е изд.М: Просвещение, 2017-287с

29. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Бунимович Е.А., Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и др.) М: Просвещение

30. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.) М: Просвещение

31. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Александрова Л.А., Шварцбурд С.И.) М: Просвещение.

32. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под редакцией Подольского В.Б.) М: Просвещение

33. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и другие) М: Просвещение.

34. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств - М.:Наука, 1974, 304 с.

35. Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд.3, испр. и доп. 2009. 232 с.

36. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов, уч.-Метод. Пособие/ Изд-е 2-е, стереотип.- Минск: НТОО «ТетраСистемс», 2001.

37. Мельников, О.И. Незнайка в стране графов. – М.: КомКнига/URSS, 2006.

38. Мельников О.И. Теория графов для учителей, для школьников…И не только! Книга ,которая научит вас теории графов и поможет обучать ей других. Под ред Метельского Ю.М., Москва,Ленанд, 2017 г.240с.

39. Оре О. Графы и их применение: пер. с англ./ Под ред. И предисл. И.М. Яглома. Изд. 4-е.- М.: Издательство ЛКИ, 2008.

40. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. - М.:Мир, 1984, 456 с.

41. Сластенин В.А. и др. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр "Академия", 2002. - 576 с.

42. «Соросовский образовательный журнал» №11, 1996 (ст. «Плоские графы»)

43. Татт, У. Теория графов. – М.: Мир, 1988.

44. Фарков, А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 класс. – М., 2004

45. Шевченко, В.Е. Некоторые способы решения логических задач. – Киев, Вища школа, головное изд-во, 1979 – 80 с.

46. Энциклопедия: Дискретная математика /Гл. ред. В.Я. Козлов. – М.: БРЭ, 2004.

47. Уилсон Р. Введение в теорию графов. Пер. с анг. 1977. 208 с.

48. Фляйшнер Г. Эйлеровы графы и смежные вопросы. Пер. с англ. - М.:Мир, 2002, 176 с.

49. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (утв.приказом Министерства образования и науки РФ от 17 декабря 2010г.N 1897). С изменениями и дополнениями от: 29 декабря 2014 г., 31 декабря 2015 г., 11 декабря 2020 г.

50. Харари Ф. Теория графов / Пер.с англ. и предисл. В. П. Козырева. Под ред. Г. П. Гаврилова. Изд. 2-е. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 296 с.

51. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов - М.: Мир, 1977. - 324 с.

52. Хотченкова Е.А. Развитие логического мышления школьников средствами учебного предмета «Математика». – Автореф. дисс. к.п.н. - Ставрополь, 2006.

Цифровые образовательные ресурсы

53. Федеральный государственный образовательный стандарт (официальный сайт) http://standart.edu.ru/

54. Сайт издательского центра «Вентана-Граф» http://www.vgf.ru/

55. Программа по математике (5-9 класс). Издательский центр «Вентана-Граф» http://www.vgf.ru/tabid/210/Default.aspx

56. Федеральный портал «Российское образование» http://www.edu.ru

57. Единая коллекция образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/

58. Всероссийский интернет-педсовет http://pedsovet.org

59. Портал «Открытый класс» http://www.openclass.ru/

60. Презентации по всем предметам http://powerpoint.net.ru/

61. Сайт учителя математики Е.М.Савченко http://powerpoint.net.ru/

62. Электронное пособие. Математика, поурочные планы 5-6 классы. Издательство «Учитель»

63. http://naukovedenie.ru/PDF/06PVN515.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/06PVN515

64. Всероссийская интернет-лаборатория знаний – издательство Бином https://files.lbz.ru/authors/informatika/8/kalinin-samilkina-10-gl3.pdf

65. Портал «Библиотека-тыква.ру» http://bibl.tikva.ru/base/B352/B352Chapter2-

8.php

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Выписка

Список учебников по математике 5-6 кл. АО "Издательство "Просвещение", включенных в федеральный перечень учебников

На основании Приказа Министерства просвещения № 766 от 23.12.2020 г. о внесении изменений в федеральный перечень учебников, утвержденный Приказом Министерства просвещения № 254 от 20.05.2020 г.

Номер ФПУ	Наименование по федеральному перечню	Авторы по федеральному перечню	Класс по федеральному перечню	Линия УМК	Предмет	Издательство по федеральному перечню	Правообладатель	Специальный учебник / углубленное обучение
1.1.2.4.1.1.1	Математика	Бунимович Е.А., Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и другие	5	Математика. "Сферы" (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.1.2	Математика	Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С. и другие	6	Математика. "Сферы" (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.11.1	Математика	Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.	5	Математика. Истомина Н. Б. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.11.2	Математика	Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.	6	Математика. Истомина Н. Б. (5-6)	атематика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.12.1	Математика (в 2 частях)	Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Александрова Л.А., Шварцбурд С.И.	5	Математика. Виленкин Н.Я. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	

1.1.2.4.1.12.2	Математика (в 2 частях)	Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Александрова Л.А., Шварцбурд С.И.	6	Математика. Виленкин Н.Я. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.3.1	Математика (в 2 частях)	Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	5	Математика. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. (5-6)	Математика	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.3.2	Математика (в 3 частях)	Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	6	Математика. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. (5-6)	Математика	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.4.1	Математика	Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и другие	5	Математика. Дорофеев Г.В. и др. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.4.2	Математика	Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и другие	6	Математика. Дорофеев Г.В. и др. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.6.1	Математика	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под редакцией Подольского В.Е.	5	УМК Мерзляка. Математика (5-6)	Математика	ООО Издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ»; АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.6.2	Математика	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под редакцией Подольского В.Е.	6	УМК Мерзляка. Математика (5-6)	Математика	ООО Издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ»; АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.7.1	Математика	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и другие	5	Математика. Никольский С.М. и др. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.7.2	Математика	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и другие	6	Математика. Никольский С.М. и др. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.8.1	Математика	Ткачёва М.В.	5	Математика. Ткачёва М. В. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	