

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»  
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики  
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

**Исаева Диана Эдуардовна**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Тема Методика реализации исследовательского подхода к изучению многоугольников в курсе геометрии 8 класса с использованием динамических чертежей

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями)

Направленность (профиль) образовательной программы: Математика и информатика

**ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ**

Заведующий кафедрой  
д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина

\_\_\_\_\_  
(дата, подпись)

Научный руководитель  
доктор пед. наук, профессор каф. МиМОМ  
В.Р.Майер

\_\_\_\_\_  
Дата защиты

\_\_\_\_\_  
Обучающийся  
Исаева Д.Э.

\_\_\_\_\_  
Оценка

\_\_\_\_\_  
Прописью

Красноярск 2022

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Теоретические аспекты исследовательского подхода к изучению геометрии с использованием обучающих возможностей среды Живая математика</b>	<b>6</b>
1.1 Обучающие возможности динамических чертежей при изучении математики в 7-9 классах	6
1.2 Основные содержательные линии курса геометрии в 8 классе и планируемые результаты его усвоения	11
1.3 Исследовательские умения как новый образовательный результат	15
Вывод по главе 1	25
<b>Глава 2. Реализация исследовательского подхода при изучении раздела “Четырехугольники”, ориентированное на формирование исследовательских умений</b>	<b>26</b>
2.1 Методика реализации исследовательского подхода при изучении темы “Многоугольники” с использованием динамических чертежей и результаты апробации	26
2.2 Методика реализации исследовательского подхода при изучении темы “Параллелограмм и трапеция” с использованием динамических чертежей и результаты апробации	29
Выводы по главе 2	48
<b>Заключение</b>	<b>49</b>
<b>Библиографический список</b>	<b>50</b>
<b>Приложение 1. Таблица “Сумма углов выпуклого n-угольника”</b>	<b>55</b>
<b>Приложение 2. Задачи для формирования исследовательских умений</b>	<b>56</b>
<b>Приложение 3. Анкеты для диагностики исследовательских компетенций у обучающихся</b>	<b>58</b>
<b>Приложение 4. Анкета “Интерес обучающихся к возможностям реализации собственной исследовательской активности в дальнейшем обучении”</b>	<b>60</b>
<b>Приложение 5. Задания для 8 класса на VIII Международном турнире по экспериментальной математике</b>	<b>61</b>

## **Введение**

Основной задачей школы в данный период развития общества является научить растущее поколение обучаться. Образование в нашей стране подвергается изменениям, изменения направлены на отход от только предметных результатов к включению еще метапредметных и личностных результатов.

Новые требования к качеству образования, особенно математического, обусловлены настоятельной необходимостью информационного, демократического, гражданского общества и инновационной экономикой. В концепции развития математического образования в Российской Федерации сказано, что успешная жизнь отдельного человека и страны в целом, развитие экономики нашего государства и так далее во многом зависит от качества именно математического образования.

Одним из основных факторов, которые выделяют И.А. Николаев и Т.Е. Марченко, благодаря которому возможен экономический рывок нашей страны является высококвалифицированная рабочая сила. А для этого необходимо обеспечить высокий уровень математического образования. Одной из задач, которое правительство РФ поставило перед педагогическим сообществом, это обеспечение применения современных технологий в образовательном процессе при одновременном качественном усвоении учебной программы.

Если обратимся к требованиям планируемых результатов усвоения курса математики на ступени основного общего образования, то среди метапредметных результатов увидим исследовательские действия: умение определять понятия, строить обобщение, проводить аналогии, устанавливать связи, логически рассуждать, делать умозаключения и вывод. Поэтому включение динамических чертежей и проведения экспериментов на уроках математики является актуальным в современной школе. Включение проективного и исследовательского метода обучения на сегодняшний день является мировой тенденцией. По результатам международной программы по оценке образовательных достижений в 2018 году Россия занимает 31 место со средним баллом 479. Результаты свидетельствуют о

владении учениками ключевыми навыками современного человека, от них зависит успех, раскрытие потенциала и взаимодействие с обществом.

Вышеописанные изменения заставляют нас искать пути реализации технологий обучения для продуктивной деятельности, в частности на уроках математики в 7-9 классах.

Решением проблемы организации учебно-исследовательской деятельности занимались Г.Л. Брославская, Ю.В. Громько, Г.Л. Данильцев, А.В. Леонтович, С.А. Морозова, Е.А. Певцова, Л.Б. Прокофьев, Л.А. Софронова, А.М. Столяренко, В.Е. Столяренко, Л.А. Тысько, Г.А. Ягодин.

Дидактическими и методическими основами, а также методами исследовательского обучения занимались Н.А. Добролюбов, А.А. Королькова, Н.К. Крупская, И.Я. Лернер, М.И. Махмутов, Н.И. Новиков, М.Н. Скаткин, В.П. Ушачев, К.Д. Ушинский.

**Проблема исследования** заключается в поиске ответа на вопрос: как организовать процесс обучения разделу “Многоугольник” в 8 классе для формирования исследовательских умений у обучающихся?

**Цель:** разработка методического обеспечения по изучению многоугольников с позиции реализации исследовательского подхода.

**Объектом** исследования является процесс обучения математике в 7-9 классах в условиях реализации исследовательского подхода.

**Предметом** исследования является организация изучения многоугольников с позиции исследовательского подхода.

**Гипотеза исследования:** если при обучении математике в школе применять специально разработанную методику, основанную на идеях Р.П. Овчинниковой, М.А. Павловой, М.В. Шабановой, А.В. Ястребова и других, то это будет способствовать формированию у обучающихся 7-9 классов исследовательских умений.

**Задачи:**

1. Изучить существующие описания исследовательских умений как новый образовательный результат.

2. Выявить особенности изучения многоугольников, ориентированные на формирование исследовательских умений.

3. Описать особенности содержания уроков по разделу “Четырехугольники” в 8 классе при условии использования на этих уроках динамических чертежей.

4. Разработать и апробировать компьютерные эксперименты в среде “Живая математика” по разделу “Многоугольники”, ориентированные на формирование у обучающихся исследовательских умений.

Работа состоит из двух глав. В первой главе рассмотрены основные содержательные линии курса математики в 7-9 классах и результаты его освоения, также описаны исследовательские умения и возрастные особенности обучающихся в 7-9 классах. Во второй главе проведена методическая разработка уроков по разделу “Четырехугольники”, а также результаты опытно-экспериментальной работы.

# **Глава 1. Теоретические аспекты исследовательского подхода к изучению геометрии с использованием обучающих возможностей среды Живая математика**

## **1.1 Обучающие возможности динамических чертежей при изучении математики в 7-9 классах**

Приоритетной задачей на сегодняшний момент при обучении является развитие потенциал ребенка для трансформации его в свободную и самостоятельную личность, которая не просто знает определение вектора и способ решения квадратного уравнения, но и решает задачу самореализации и саморазвития. Действующий федеральный государственный образовательный стандарт требует включение обучающихся в активную и осознанную учебную деятельность. Но прежде чем искать способы и методы для достижения выполнения задачи, необходимо разобраться с особенностями современных обучающихся 7 - 9 классов [5].

Возраст обучающихся 7 - 9 классов называется подростковым возрастом. В педагогическом словаре дается такое определение подростковому возрасту - это возраст, при котором происходит переход от детства к взрослости и который наступает от 10 - 11 лет и продолжается до 13 - 15 [25].

Жан Жак Руссо в своем роман-трактате “Эмиль, или О воспитании” пишет, что подросток переходит от ощущений к идеям и знаниям, от чувств он переходит к науке. Особенностью ее освоения должно стать самостоятельное открытие науки, а не заучивание фактов. Педагогу необходимо вызвать интерес у обучающегося и научить его методам изучения. Педагогу необходимо вызвать желание учиться, мотивацией изучения конкретного предмета должен быть личный интерес, удовлетворение любопытства, немаловажным является при этом получение удовольствия от учебной деятельности. Важно предугадывать чувства обучающегося, незаметно направлять их и подмечать выводы, которые формулирует подросток. Жан Жак Руссо пишет: “...Все уроки давать молодым людям в форме действий, а не слов. Пусть они не учат из книг того, чему можно научить из опыта” [31].

А.И. Савенков утверждает, что наиболее оптимальный вариант мотивации исследовательского поведения является творчество. Творческий поиск важен с двух аспектов: с одной стороны получения нового продукта, а с другой стороны ценность самого процесса такого поиска. В психологическом и образовательном процессе важно, то что человек может получать удовольствие не только от результата, но и от процесса деятельности [32].

Образование нового поколения должно носить интегральный характер, формировать личностные, предметные и метапредметные навыки и умения, прививать нравственные нормы и формировать гражданскую позицию. Одним из основных метапредметных результатов стандарта предполагается формирование и развитие компетентности в области использования информационно-коммуникативных технологий (ИКТ-компетентность) [28]. В связи с этим включение работы обучающихся с компьютером является обязательным. Для учителей существует огромный выбор различных программ и сред для работы на уроке. Одной из таких сред для изучения геометрии и проведения экспериментов на уроках математики является среда Живая математика, которая позволяет выполнять различные построения, проверять верность утверждения и так далее.

В настоящее время обучающимся поколения Z будет интереснее и проще изучать что-либо с помощью компьютера или телефона. Включение в образовательные процесс работу в данной среде будет повышать уровень усвоения информации и желания изучать геометрию обучающимися [1].

Учебно-методический комплект “Живая математика” был разработан Key Curriculum Press (USA), переведен на русский язык и адаптирован для российских школ институтом новых технологий. Среда “Живая математика” позволяет вращать объекты, передвигать их, увеличивать или уменьшать геометрические фигуры. Среди преимуществ мы выделим наглядность построений, простой интерфейс программы, способствует эффективному развитию логического и абстрактного мышления у обучающихся. Формируются навыки восприятия математических фигур, самостоятельного измерения величин, сравнения

объектов, умения проведения логических рассуждений для доказательства гипотезы, при этом наблюдая за изменением геометрических фигур. При изучении новой темы, обучающиеся видят точные иллюстрации изучаемых терминов. Появляется новая возможность организации внеурочной и проектной деятельности [17].

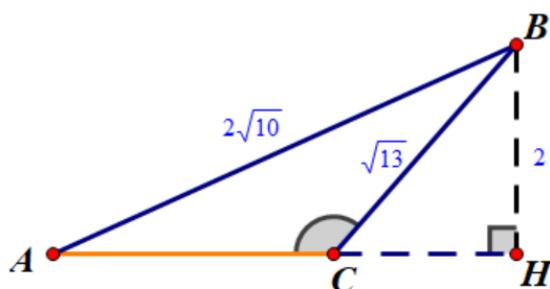
Разнообразие форм работы на уроке увеличивает активную творческую деятельность обучающихся и ее вовлеченность в изучении темы. Происходит экономия времени, необходимое для построения чертежа, исчезает необходимость в маркере или меле. Созданный компьютерный чертеж имеет множество преимуществ в сравнении с традиционным. Его можно видоизменять, есть возможность измерять элементы, а с результатом измерений производить вычисления. Возможен многократный обмен чертежами между обучающимися и учителем. Допускается возможность хранения нескольких вариантов построения одного чертежа. Учитель может добиться от обучающихся точных и грамотных письменных утверждений, основанных на чертеже и наблюдениях. В среде допускается смена внешнего вида построенной фигуры, оставление новых надписей и так далее. Важно то, что обучающиеся работают не с конкретным понятием, а со всем семейством, что развивает их геометрическую интуицию [10].

Данная среда служит хорошим помощником при решении задач на построение циркулем и линейкой, на доказательство и на нахождение конкретной величины. Данная среда также применима для некоторых тем по алгебре, например, при изучении графиков функций и их свойств. Графики можно тиражировать, деформировать различным образом, сдвигать и перемещать, что позволяет исследовать функцию, к тому же есть возможность “оживить” чертеж, увидеть его поэтапное построение [10].

В среде “Живая математика” есть такие инструменты: построение окружностей по заданному центру и радиусу; нахождение середины данного отрезка, точек пересечения прямых и отрезков; возможны преобразования: поворот точки или прямой, построение симметрии, параллельного переноса, гомотетии. Можно измерять: величину угла, отрезка, расстояния между точками.

Существует функция создания своего объекта, с помощью которого решать задачи или доказывать теоремы. Доступна возможность создавать кнопки, скрывающие объекты или запускающие анимацию с чертежом [12].

Геометрия, в целом, является сложным предметом для усвоения обучающимися, поэтому возможность построить чертеж к задаче, а после посмотреть его с разных ракурсов облегчает задачу поиска решения. Так, например, при проведении высоты из острого угла тупоугольного треугольника ученик может допустить ошибку. Если же обучающийся будет строить высоту в среде “Живая математика” с помощью команды проведения перпендикуляра, то он увидит, что она падает на продолжение стороны. Пример задачи, ее чертеж и решение, проведенное в среде “Живая математика” приведен на рис. 1.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C$  - тупой,  $BH \perp AC$ ,  $AB=2\sqrt{10}$ ,  
 $BC=\sqrt{13}$ ,  $BH=2$ .  
**Найти:**  $AC$   
**Решение:**  
 1) Заметим, что  $\triangle ABH$  и  $\triangle CBH$  - прямоугольные.  
 Тогда, по теореме Пифагора:  
 $BC^2=BH^2+CH^2$   
 $CH^2=13-4=9$   
 $CH=3$   
 $AB^2=BH^2+AH^2$   
 $AH^2=40-4=36$   
 $AH=6$   
 2)  $AC=AH-CH=6-3=3$   
**Ответ:**  $AC=3$

Рисунок 1. Пример чертежа в среде “Живая математика”

Определение особенности “исследовательского обучения” логично начать с его основы - исследовательского поведения. Исследовательское поведение можно рассматривать как:

- поведение, возникшее из-за неопределенности и направленное на сокращение возбуждения в связи с этим;
- поиск новой информации;
- форма взаимодействия человека с реальным миром, направленную на его познание.

Таким образом, исследовательское поведение - это такой вид поведения, который строится на базе поисковой активности и который направлен на изучение объекта или решение проблемной ситуации.

Исследовательская деятельность - это отдельный вид интеллектуально-творческой деятельности, возникающий в результате работы механизмов поисковой активности, который строится на базе исследовательского поведения.

Исследовательская деятельность включает мотивирующие факторы исследовательского поведения и способы его реализации. Для успешного осуществления исследовательского поведения в неопределенных ситуациях необходимо дивергентное и конвергентное мышление. Чтобы эффективно осуществлять исследовательскую деятельность обучающемуся необходимы специфические личностные способности - исследовательские. К таким способностям отнесем:

- умение видеть проблему;
- умение формулировать гипотезу;
- умение наблюдать;
- умение провести эксперимент;
- умение дать определение терминам и другие.

Исследовательское обучение - это такой подход к обучению, который строится на основе естественного желания ребенка к самостоятельному процессу познания. Главная цель - формировать у обучающихся готовность и способность самостоятельного, творческого овладения новыми способами деятельности в любой сфере человеческой культуры [36]. Таким образом при исследовательском обучении образовательный процесс строится на исследовательской деятельности обучающихся. Такая деятельность предполагает осуществление обучающимися учебных исследовательских задач с неизвестным решением, ориентированных на получение представления об объекте или явлении окружающего мира, под руководством специалиста. Исследование состоит из следующих этапов:

- формулирование проблемы;

- изучение необходимой литературы по теме;
- постановка гипотезы;
- выбор методов и способов проверки гипотезы;
- сбор результатов, анализ и обобщение;
- формулирование выводов.

Исследовательские умения можно формировать с помощью проведения эксперимента, а среда Живая математика позволяет создавать компьютерный математический эксперимент. Компьютерный математический эксперимент - это вид модельного эксперимента, в котором исследуется виртуальная модель, которая заменяет математическую модель реального объекта. Дж. Борвей и Д. Бейли утверждают, что компьютерный эксперимент можно включать для того, чтобы:

1. достигнуть понимания у обучающихся;
2. открыть новые модели и отношения;
3. графически визуализировать основные принципы;
4. тестировать и подтверждать/опровергнуть гипотезу;
5. изучить возможные результаты, чтобы понять, стоит ли он поиска формального доказательства;
6. выдвинуть гипотезу о подходе к формальному доказательству;
7. заменить технически сложные выкладки компьютерными расчетами на этапе доказательства;
8. подтвердить аналитически результаты [45].

## **1.2 Основные содержательные линии курса геометрии в 8 классе и планируемые результаты его усвоения**

Федеральный государственный образовательный стандарт содержит список требований к результату освоения учебной программы по каждому предмету. Поэтому данный стандарт лежит в основе планируемых результатов обучения по усвоению предмета, в частности геометрии, которые необходимо достигнуть

обучающемуся к концу учебного года. В 2021 году в стандарт были внесены корректировки, которые конкретизируют перечень требований.

Стандартом также утверждается перечень учебников, которые соответствуют всем необходимым требованиям. Учебники по геометрии 7-8 классов, которые вошли в федеральный перечень: Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б и другие; Козлова С.А., Рубин А.Г., Гусев В.А; Погорелов А.В.; Смирнова И.М., Смирнов В.А.; Шарыгин И.Ф. Учебники по геометрии за 8 класс, которые вошли в федеральный перечень: Берсенев А.А., Сафонова Н.В.; Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В.; Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; Мерзляк А.Г., Поляков В.М.; Смирнов В.А., Смирнова И.М.

В настоящее время в школах в большей степени при обучении геометрии используют учебник Атанасяна Л.С и др. [7], но помимо него вводятся новые авторы, например, Бутузов В.Ф. и др. [2], которые соответствуют рекомендации Министерства Образования и Науки РФ. При сравнительном анализе учебников разных авторов упор будем делать на раздел, касающийся изучение многоугольников и четырехугольников.

В учебнике Атанасяна Л.С [7] восьмиклассники начинают осваивать геометрию с понятия многоугольника, рассматривают виды многоугольников, затем выделяют свойства каждого вида. Определение четырехугольника не дается, автор лишь перечисляет из чего он образуется. Изучение параллелограмма начинается с определения, далее приводятся доказательства его свойств, которое проще по сравнению с тем, что приводит А.В. Погорелов. Также автор приводит три признака параллелограмма, что позволяет обучающимся быстрее решать задачи на доказательства. При изучении ромба, прямоугольника и квадрата автор обращает внимание на тот факт, что они являются параллелограммами, а следовательно обладают теми же свойствами. После этого изучается тема “Площадь многоугольника”, вычисление площадей осуществляется аналогично измерению длин отрезков (с помощью выбранной единицы измерения). Площадь любого многоугольника выражается положительным числом. Затем обучающиеся выводят формулы площадей многоугольников для каждого вида. Но на само

вычисление площадей времени не отводится, также не говорится о приборах, измеряющих площади четырехугольников. В рассматриваемом учебнике много задач и практических заданий к каждому параграфу, есть дополнительные задачи к главам, а также задачи повышенной сложности. Задач, ориентированных на исследование мало, но они есть, в основном задачи на построение. Порядок изучения тем: четырехугольники, подобные треугольники, окружность. Схема изучения четырехугольников: параллелограмм - трапеция - прямоугольник - ромб - квадрат.

В учебнике Погорелова А.В. [8] изучение четырехугольников начинается с определения, приведена задача на закрепление определения, далее изучается понятие параллелограмма, свойств его диагоналей, противоположных сторон и углов. Затем рассматривается прямоугольник (определение и свойство), после приводится определение ромба и свойств его диагоналей, Далее дается определение квадрата и его свойств. Изучается теорема Фалеса, средняя линия треугольника. Переходят на изучение трапеции и ее средней линии, дается теорема о пропорциональных отрезках. В этом же разделе изучаются замечательные точки в треугольнике. После каждого раздела приведены контрольные вопросы и задачи. Учебник включает большое количество фотографий реальных объектов, что позволяет показать обучающимся геометрические фигуры в реальном мире. Порядок изложения тем в 8 классе: четырехугольники, теорема Пифагора, декартовы координаты на плоскости, движение, векторы. Схема изучения четырехугольников: параллелограмм - прямоугольник - ромб - квадрат - трапеция.

В учебнике Бутузова В.Ф. и др. [2] порядок изучения тем существенно отличается от рассмотренных ранее авторов. Такое изменение предполагается упрощение усвоения изучаемого материала обучающимися. В учебник включено большое количество наглядно-иллюстративного материала. К главам приведены вопросы на повторение, а также задачи. В конце учебника подобраны задачи повышенной трудности, практико ориентированные задачи, проектные и исследовательские задания.

Многоугольники восьмиклассники начинают изучать с определения, далее изучается выпуклый многоугольник и его свойства. Затем рассматривается четырехугольник и его свойства, определение также не формулируется, но приводится определение правильного многоугольника. После дается определение параллелограмма и выделяются его свойства и признаки. Так как с прямоугольником обучающиеся уже знакомы, то сразу приведены его признаки. Затем следует изучение ромба, трапеции и симметрии. Далее приводится теорема Фалеса, до ее изучения обучающиеся знакомятся со средними линиями треугольника и трапеции. После следуют теоремы о пересечении медиан и высот треугольника, приводятся свойства ортоцентра треугольника и теорема об окружности Эйлера. Порядок изучения тем: параллельность: параллельные прямые, вписанная и описанная окружности; многоугольники: многоугольник, параллелограмм и трапеция, теорема Фалеса; решение треугольников: косинус и синус острого угла, теоремы синусов и косинусов, подобные треугольники. Схема изучения четырехугольников: параллелограмм - прямоугольник - ромб - трапеция.

В учебнике И.М. Смирновой, В.А. Смирнова [38] изучении геометрии начинается с параллельных прямых, после происходит переход сразу к сумме углов многоугольника. Определение и описание четырехугольника не приводится, их изучение начинается сразу с определения параллелограмма и его свойств, также автор приводит два признака параллелограмма. Далее в одном параграфе изучается прямоугольник, ромб и квадрат. После рассматривается средняя линия треугольника. Затем формулируется определение трапеции, приводятся ее виды, рассматривается средняя линия трапеции. Далее изучаются теоремы Фалеса и о пропорциональных отрезках, даны их доказательства. Помимо теории автор включил в учебник много исторического материала, а также разнообразные задачи как основные, так и нестандартные, исследовательские и повышенной трудности. Схема изучения четырехугольников: параллелограмм - прямоугольник - ромб - квадрат - трапеция.

Проанализировав учебники по геометрии можно составить примерное тематическое планирование изучения геометрии в 8 классе. На изучение

геометрии выделяется 2 часа в неделю, всего 68 часов в год. Из них 14 часов на изучение раздела “Четырехугольники” и 14 часов “Площадь”.

*Таблица 1.  
Тематическое планирование по учебнику [7].*

№	Тема	Количество часов
<b>Четырехугольники</b>		<b>14</b>
1	Многоугольники	2
2	Параллелограмм и трапеция	2
3	Прямоугольник, ромб, квадрат	4
4	Решение задач	1
5	Контрольная работа №1	1
<b>Площадь</b>		<b>14</b>
1	Площадь многоугольника	2
2	Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции	6
3	Теорема Пифагора	3
4	Решение задач	2
5	Контрольная работа №2	1

Проанализированные учебники позволяют достичь необходимые результаты обучения геометрии, сформулированные в ФГОС основного общего образования. Они помогают развить логическое мышление, творческие способности, пространственное мышление, умение грамотного построения чертежа.

### **1.3 Исследовательские умения как новый образовательный результат**

В связи с новым федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования (ФГОС ООО), основанным на системно-деятельностном подходе, к предметным результатам обучения добавились личностные и метапредметные умения и навыки. Стандарт ориентирован на личность обучающегося, его когнитивные способности и

особенности, поэтому необходимы методы обучения, при которых обучающийся ставится в активную позицию деятельности, позволяли самостоятельно организовывать деятельность, планировать, ставить цель, даже корректировать образовательный процесс. К одним из таких методов относится исследовательский.

Метапредметные результаты группируются в зависимости от видов универсальных учебных действий:

- овладение универсальными учебными познавательными действиями: логические, исследовательские, работы с информацией;
- овладение универсальными учебными коммуникативными действиями: общение, совместная деятельность;
- овладение универсальными учебными регулятивными действиями: самоорганизация, контроль [27].

Таким образом, исследовательские умения относятся к обязательным метапредметным планируемым результатам. Исследовательский метод позволяет:

- раскрыть существенные, значимые характеристики определяемого понятия и определить его ценность лично для себя;
- формировать и развивать научное мышление, через сбор, переработку и применения новых знаний;
- развить творческую активность обучающихся в процессе обучения и создать условия для научной и творческой самостоятельной деятельности;
- использовать различные формы работы в сочетании с различными организационными формами обучения;
- формировать готовность и способность обучающихся проявлять инициативу в познавательной деятельности [42].

Одним из способов формирования метапредметных результатов является организация исследовательской деятельности в процессе обучения. Исследовательская деятельность обладает огромным развивающим потенциалом. Даже психологи установили, что существуют большое количество детей, которые успешнее усваивают знания, которые получили через исследование.

Учебно-исследовательская деятельность - это активная, целенаправленная, непредсказуемая учебно-познавательная деятельность, направленная на открытие нового для обучающегося знания об объекте исследования, которая характеризуется самостоятельностью и творческим отношением к процессу исследования [39]. Поэтому в настоящее время необходимо не фрагментарно включать методы исследовательского обучения, но целенаправленно и систематически организовывать деятельность обучающихся, с помощью которой будут формироваться и развиваться исследовательские умения школьников. ФГОС подразумевает исследовательский аспект и преобладание активных методов обучения, так как это будет способствовать общему развитию обучающихся [28].

Потребность исследования, проявляющаяся в виде любопытства, вложена в здорового человека с рождения. В педагогике выделяют: “учение пассивное” - с помощью преподавания и “учение активное” - с помощью опыта обучающегося (по К.Д. Ушинскому). На основе этих путей обучения можно сказать, что исследовательское обучение - это активация интереса к обучению через включение собственного опыта. Главной целью такого обучения является формирование у обучающихся способности самостоятельного освоения и использования нового способа деятельности в любой сфере человеческой культуры. Таким образом, цель образования - это научить обучающегося учиться, образование становится личностным. Личностное образование предполагает самостоятельную умственную деятельность от каждого школьника. А.А. Вербицкий в своих работах пишет, что чтобы полученная информация применялась на практике необходимо ее осмыслить, тогда информация становится осмысленным знанием, “... чтобы получить статус знания, осознанного отражения действительности, информация с самого начала должна “применяться” к действию, усваиваться в его контексте” [3]. Исходя из этого, можно дать определение исследовательским умениям как совместной деятельности учителя и обучающихся, направленной на усвоение содержания методов исследования и способов работы с информацией [41]. Исследовательская деятельность - активная и продуктивная. По мнению И.Я. Лернера, для овладения научными методами

познания и приобретения в ходе этого опыта исследовательской деятельности, необходимо применять исследовательский метод [20].

Включение элементов исследовательской деятельности в образовательный процесс на уроках математики заключается в том, что в ходе анализа условия задачи и последующем ее решении обучающиеся выводят гипотезу, которая в последующем доказывается. Исследовательская деятельность - это творческая деятельность, которая направлена на открытие новых знаний, повышение интереса к предмету, формирование предметных и метапредметных умений [35].

П.В. Середенка дает такое определение исследовательским умениям и навыкам: “- это возможность и ее реализация выполнения совокупности операций по осуществлению интеллектуальных и эмпирических действий, составляющих исследовательскую деятельность и приводящих к новому знанию” [37]. А.И. Савенко в своих работах исследовательские умения описывает, как способность увидеть проблему, предположить гипотезу, поставить вопрос, найти определение термину, умение наблюдать и классифицировать, навык работы с информацией, строить доказательства своей точки зрения, формулировать вывод и заключение по завершению деятельности [33].

Из курса психологии известно, что новая, нетипичная ситуация или проблема с которой сталкивается человек вынуждает его включить механизмы исследовательского поведения. В ситуации, когда автоматизированные действия не работают, человек начинает активный поиск решения проблемы. Такая реакция проявляется как в повседневных мелочах, так и в глобальных ситуациях, например, изменения в социальной сфере страны, побуждают менять многое в привычной жизни. Поисковая активность может быть направлена на изменение самой ситуации или на изменение своего отношения к ней. Функционирование такого механизма необходимо для сохранения устойчивости в сложном и нестабильном мире [32].

В проблемных ситуациях, вызывающих исследовательское поведение, особую роль играет способность к оценке и прогнозированию результата тех или иных действий, от нее будет зависеть успешность выбора оптимального решения

проблемы. Психологи и педагоги, в частности Н.С. Лейтес, утверждает, что исследовательское поведение играет важную роль в когнитивном развитии ребенка, особенно в саморазвитии личности [18].

В ходе исследовательской деятельности происходит формирование универсальных учебных действий (УУД), таких как: самостоятельность, анализ, умение обобщать и делать вывод, замечать закономерности, сотрудничать в группе, умение грамотно высказывать свои мысли и слушать партнера. Под исследовательской деятельностью будем понимать образовательную технологию, в ходе которой обучающиеся решают исследовательскую и творческую задачи, целенаправленно, планомерно осуществляют поиск решения задачи, имеющей научную или практическую проблему, в ходе которого реализуются этапы исследования [26].

Из множества классификаций исследовательских умений приведем К.П. Кортнева и Н.Н. Шушариной, к исследовательским умениям, по их мнению, можно отнести [15]:

- умение охватывать всю проблему целиком;
- умение корректно поставить исследовательскую задачу;
- умение оценивать методы решения поставленной экспериментальной задачи;
- умение планировать эксперимент;
- умение искать оптимальное решение поставленной задачи;
- умение воплотить методику;
- умение оценивать ее информативность и точность с помощью лабораторных-практических занятий [14].

Н.Л. Стефанова дифференцирует исследовательские умения на:

1. Общие:

- 1.1 умение работать с разной литературой и поисковыми системами;
- 1.2 выполнять логические операции;
- 1.3 формулировать вопросы к данным;
- 1.4 ставить учебную проблему и делить ее на подпроблемы;

1.5 находить всевозможные способы решения проблемы и выбирать более рациональный в конкретной ситуации;

1.6 проводить эксперименты;

1.7 представлять данные в разной форме;

1.8 грамотно формулировать свои суждения и мнения;

1.9 формулировать гипотезу и проверять ее для частных случаев;

1.10 приводить контрпримеры;

1.11 строить доказательства;

1.12 делать выводы;

1.13 обобщать результаты исследования.

2. Специфические (для математики):

2.1 выделять существенные свойства понятий;

2.2 замечать динамику задачи;

2.3 осуществлять перебор;

2.4 выделять математические закономерности;

2.5 выделять общие или похожие свойства объектов;

2.6 формулировать в устной и письменной формах, математических моделей одно утверждение;

2.7 определять отношения между понятиями;

2.8 определять понятия, свойства и теоремы, которые применимы для решения задачи или к доказательству гипотезы;

2.9 замечать структурное сходство внешне различных задач;

2.10 проводить аналогию метод решения задач;

2.11 выделять подзадачи в общей задачи;

2.12 составлять алгоритм решения проблемы или задачи;

2.13 решать задачу или строить доказательство теоремы разными способами;

2.14 исследовать решение задачи на полноту и на достаточность построенного доказательства;

2.15 определять дополнительные и недостающие данные;

2.16 определять место полученных знаний в практической жизни, оценивать ее значимость.

### 3. Инструментальные умения:

3.1 создать текстовый документ, включающий формулы, схемы, чертежи и так далее;

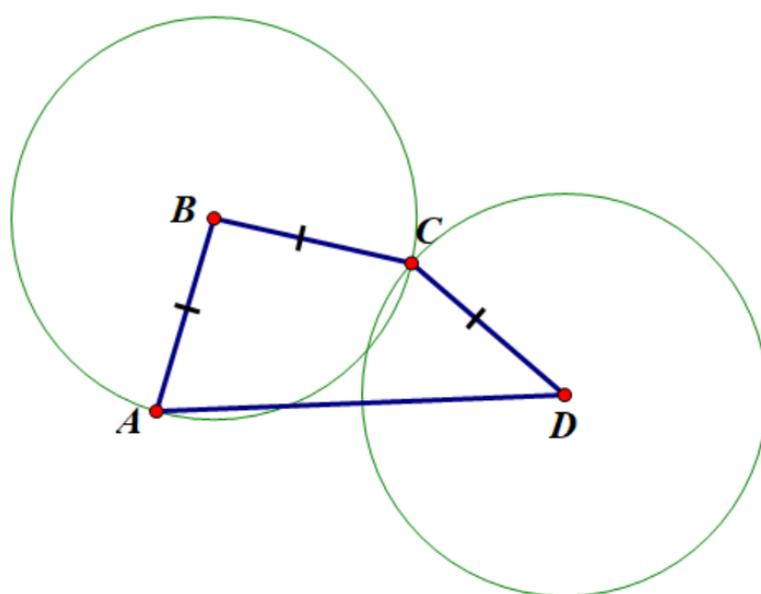
3.2 создать электронные расчетные таблицы;

3.3 создать презентацию и диаграммы для представления результатов исследования;

3.4 создать интеллект-карты, например, в XMind, FreeMind и др.;

3.5 работать в интерактивных математических средах, например, в Живой математике, математическом конструкторе, GeoGebra и так далее [42].

Среда “Живая математика” позволяет формировать такие умения, приведем пример задачи из олимпиады “Математический праздник”: В четырехугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB=BC=CD$ ,  $\angle A=70^\circ$  и  $\angle B=100^\circ$ . Чему могут быть равны  $\angle C$  и  $\angle D$ ? Первый способ решения данной задачи приводится на сайте олимпиады [24]. Второй способ приведен в статье [9]. С помощью среды можно организовать исследования поиска решения задачи, а также ее анализ на определение вида четырехугольника и количества таких четырехугольников, удовлетворяющих условию задачи. Чертеж к данной задаче приведен на рис. 2.



**Построение:**

1. Луч  $AD$ ;
2. Произвольный отрезок  $AB$ ;
3. Окружность 1 ( $B, AB$ );
4. Окружность 2 ( $D, AB$ );
5.  $C$  - точка пересечения окр. 1 и окр. 2;

Рисунок 2. Построение к олимпиадной задаче

На этапе анализа условия задачи, делается вывод, что  $AB$  не параллельна  $CD$ , так как сумма углов данных в условии не равняется  $180^\circ$ . Вторым выводом является то, что четырехугольник, удовлетворяющий условию, не единственный. Рассуждения приведены в статье М.В. Егуповой [9], а в среде “Живая математика” легко в этом убедиться, для этого построим окружность в центре  $C$  и радиусом  $AB$ . Получим две общие точки  $D$  и  $D_1$  с отрезком  $AM$  ( $M$  - точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ ). Данные построения приведены на рис. 3.

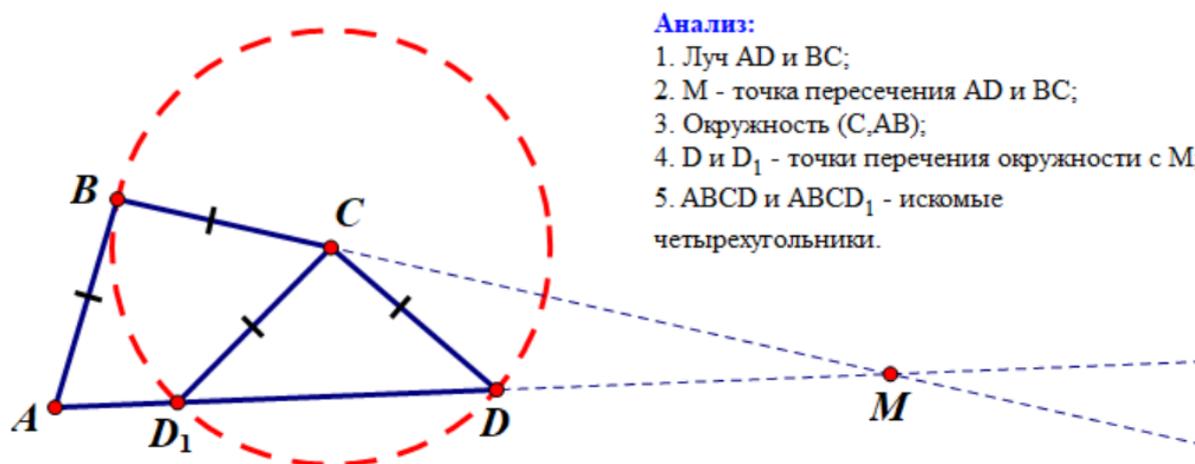


Рисунок 3. Анализ условия задачи

Задачи, которые решаются с помощью дополнительных построений, вызывают затруднения у обучающихся. Поэтому совместный разбор условия и наглядное представление динамического чертежа будет помогать в ходе исследования задачи.

Выделим основные функции исследовательских умений:

- Мотивационная - формирование интереса к предмету и желания к получению новых знаний;
- Развитие личных качеств: внимание, наблюдение, настойчивость, инициатива, трудолюбие, творческое критическое мышление;
- Расширение видов и способов деятельности;
- Развитие интеллектуальных способностей: умение анализировать информацию, замечать причинно-следственные связи, применять знания в новых условиях;

- Освоение новых приемов и действий, позволяющих совершать образовательную деятельность.

К основным компонентам исследовательской деятельности отнесем:

- ценностно-целевой (проявляется вовлеченности обучающихся в исследовательскую деятельность, а также в освоении методами решения задачи);
- интеллектуально-творческий (проявляется в умении применить новую информацию на практике);
- операциональный (проявляется в сформированности исследовательских умений);
- результативно-оценочный (проявляется в оценки адекватности полученного результата) [29].

Важным средством формирования исследовательских умений у обучающихся является решение учебно-исследовательской задачи. А одним из методов организации исследовательской деятельности является включение эксперимента на уроках математики.

Учебно-исследовательская задача - это проблемная задача, для решения которой необходимо осуществить поиск, объяснение и доказательство существующих связей и отношений, которые были выявлены в ходе наблюдения или анализа теоретических фактов, при решении которой обучающиеся открывают новые знания об объекте исследования. Эксперимент - это прием, при котором обучающиеся включаются в поисковую деятельность и самостоятельно открывают новые знания. Эксперимент содержит три этапа и включает учебно-исследовательскую задачу:

1. Подготовительный - формируется гипотеза, планируется ход работы, выбираются средства для доказательства гипотезы;
2. Сбор данных - производятся необходимые вычисления и измерения, происходит фиксация результатов;
3. Обработка результатов - анализируются данные, происходит сопоставление результата и гипотезы, формируются выводы [34].

Урок, на котором учитель целенаправленно включает и использует метод исследовательской деятельности называется урок-исследования [42]. Главной целью урока-исследования является приобретение обучающимися функционального навыка исследования как универсального метода приобретения новых прочных знаний, а также развитие способности к исследовательскому типу мышления, включения личной позиции обучающегося в образовательном процессе. По объему усвояемой методики научного исследования урок-исследования классифицируют на урок-исследования и на урок с элементами исследования. По степени самостоятельности данный урок классифицируют на 3 уровня:

1. Проблема и путь ее решения определяется учителем;
2. Проблема ставится учителем, а метод ее решения определяется обучающимися;
3. Проблема, выбор метода и решение устанавливается обучающимися.

Урок исследования имеет следующую структуру:

- Актуализация знаний;
- Мотивация и постановка проблемы исследования;
- Сбор фактического материала;
- Систематизация и анализ полученного материала;
- Формулирование гипотезы;
- Доказательство истинности гипотезы или ее опровержение;
- Вывод о применении полученных знаний в ходе исследования;
- Подведение итогов урока;
- Постановка домашнего задания [42].

Но в современных учебниках и методических рекомендациях для учителей нет конкретных методик организации исследования при изучении конкретной темы по математике. Редко встречаются задачи - исследования, но их решение предполагает простейшие действия, поэтому исследовательская часть полностью лежит на методической грамотности и творчестве учителя. Поэтому во второй главе мы постарались разработать технологические карты уроков, на которых

происходит формирование исследовательских умений при изучении четырехугольников [4].

### **Вывод по главе 1**

Среда “Живая математика” проста и доступна для использования. После компьютерного моделирования математические понятия и теоремы для обучающихся являются наглядными и “осязаемыми”. Использование интерактивной геометрической среды позволяет сделать урок зрелищным, повысить уровень активности и работоспособности обучающихся, качество понимания изучаемого материала, повышает развитие самостоятельности, творческих и креативных способностей обучающихся, способствует организации личностно-ориентированного обучения. Обучающиеся, проявляющие интерес к предмету и показывающие высокие результаты освоения основной программы, получают возможность углубиться в тему и расширить знания. Также отметим, что у обучающихся наблюдается интерес к использованию компьютера на уроке, особенно геометрии. При планировании учебной деятельности на уроке учителю необходимо определить материал, который рациональнее изучать с помощью среды “Живая математика”. Важным преимуществом динамического чертежа является, то что при проведении эксперимента необходимо провести несколько испытаний, чтобы сформулировать гипотезу, но для этого нет необходимости строить новые фигуры, а достаточно изменить уже построенную. Критериями отбора может служить: содержание, дидактическая цель, метод изложения, возраст и уровень развития обучающихся.

Исследовательский метод предполагает развитие у обучающихся умение творческого использования знаний. При этом происходит овладение научными методами познания, а также получение личного опыта исследовательской и творческой деятельности.

## **Глава 2. Реализация исследовательского подхода при изучении раздела “Четырехугольники”, ориентированное на формирование исследовательских умений**

### **2.1 Методика реализации исследовательского подхода при изучении темы “Многоугольники” с использованием динамических чертежей и результаты апробации**

Изучение частных видов четырехугольников осуществляется по следующей методической схеме:

→ сформулировать определение, указав род, в который входит геометрическая фигура как вид, а после указывается видовое отличие и связь между ними;

→ указать элементы из которых состоит фигура;

→ сформулировать и доказать свойства и признаки;

→ рассмотреть задачи на построение фигуры;

→ применить изученные свойства и признаки при решении задач.

Для лучшего понимания обучающимся полезно приводить структурно-логические схемы, которые лучше строить вместе с обучающимися.

Такой схемой является классификация многоугольников. За основание классификации берется параллельность противоположных сторон, таким образом выпуклые четырехугольники делятся на параллелограмм, трапецию и четырехугольники не имеющие параллельных сторон. Затем трапеция делится относительно равенства боковых сторон, а после на наличие или отсутствие прямого угла. Параллелограмм же делится по признаку равенства или неравенства смежных сторон, таким образом получается параллелограмм и ромб. А после на основании наличия или отсутствия прямого угла, то есть на параллелограмм и прямоугольник. Классификация ромба основана на наличии или отсутствии прямого угла. Классификация прямоугольников основывается на равенстве смежных сторон, то есть на прямоугольник и квадрат. Схематичное представление классификации приведена на рис. 4.

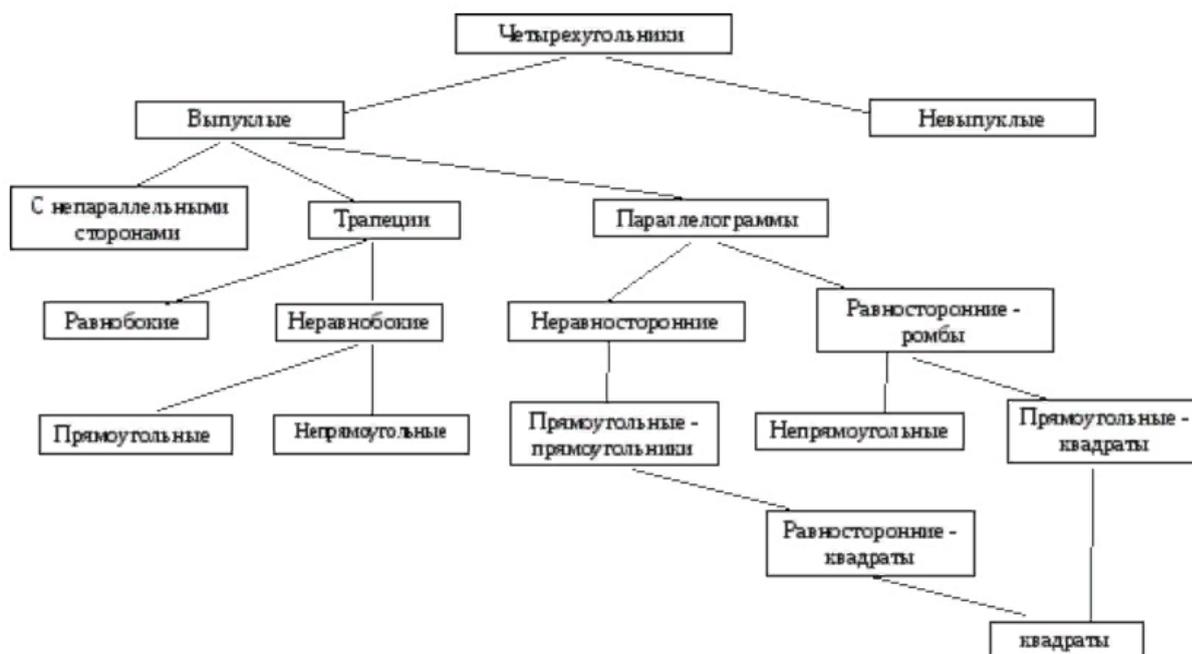


Рисунок 4. Классификация четырехугольников

Приведенный процесс классификации четырехугольников, который основан на последовательном целенаправленном рассмотрении сначала взаимного расположения сторон, затем равенстве или неравенстве сторон, а после на наличии или отсутствии прямого угла, позволяет увидеть обучающимися генетический характер образования частных видов четырехугольников. Также это способствует определению связей между ними и распространению свойств общей фигуры на ее частные виды.

Изучение свойств и признаков четырехугольников у обучающихся не вызывает затруднений, поэтому обучающиеся способны самостоятельно установить и доказать их. Поэтому при их изучении целесообразно организовать исследовательскую работу. Для создания образа каждого частного случая четырехугольника рекомендуется использовать такой прием, как обзор всех свойств фигуры или опрос по всей совокупности свойств или признаков [21].

На первом уроке изучения четырехугольников дается определение многоугольника, рассматриваются его элементы и приводится классификация на выпуклые и невыпуклые многоугольники. Мы рекомендуем после того, как обучающиеся с помощью учителя сформулируют определение многоугольника, вспомнить с ними какой многоугольник им уже известен (обучающимся

необходимо вспомнить про треугольник). Опираясь на уже имеющиеся знания о треугольнике, как частного случая многоугольника, изучить элементы  $n$ -угольника. Далее предложить картинку с разными многоугольниками (выпуклыми и не выпуклыми) и попросить разделить их на две группы. После этого попросить обучающихся сформулировать определение выпуклого многоугольника. Перед изучением формулы нахождения суммы внутренних углов выпуклого многоугольника, мы рекомендуем вспомнить о сумме углов любого треугольника, а далее предложить исследовать многоугольники и выяснить будет ли зависеть сумма углов многоугольника от количества углов и постараться ответить на вопрос: как найти сумму выпуклого  $n$ -угольника с помощью проведения эксперимента.

Приведем разработанный нами эксперимент в среде “Живая математика” по выведению формулы суммы внутренних углов в выпуклом  $n$ -угольнике:

1. Подготовительный этап:

Мы рекомендуем начать эксперимент в форме фронтальной работы и на примере четырехугольника найти сумму его углов. С помощью наводящих вопросов учителя, обучающиеся должны догадаться, что четырехугольник можно разделить на два треугольника, а так как сумма углов в каждом треугольнике  $180^\circ$ , то чтобы найти сумму углов в четырехугольнике необходимо  $180^\circ$  умножить на 2.

Далее обучающимся раздаются листы с таблицами, в которых они, работая в парах, вносят данные о числе углов, числе получившихся треугольников, сумме углов конкретного многоугольника (см. приложение 1). На основе полученных данных выдвигается гипотеза о том, что сумма углов вычисляется по формуле:  $(n-2)*180^\circ$ .

2. Сбор данных:

В среде “Живая математика” обучающиеся строят произвольные выпуклые многоугольники, например, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник. Обучающиеся измеряют углы в каждом  $n$ -угольнике и вносят данные в таблицу, с помощью команды вычисления. Изменяя величины углов в

многоугольниках, данные фиксируются, необходимо провести минимум 6 испытаний (см. рис. 5).

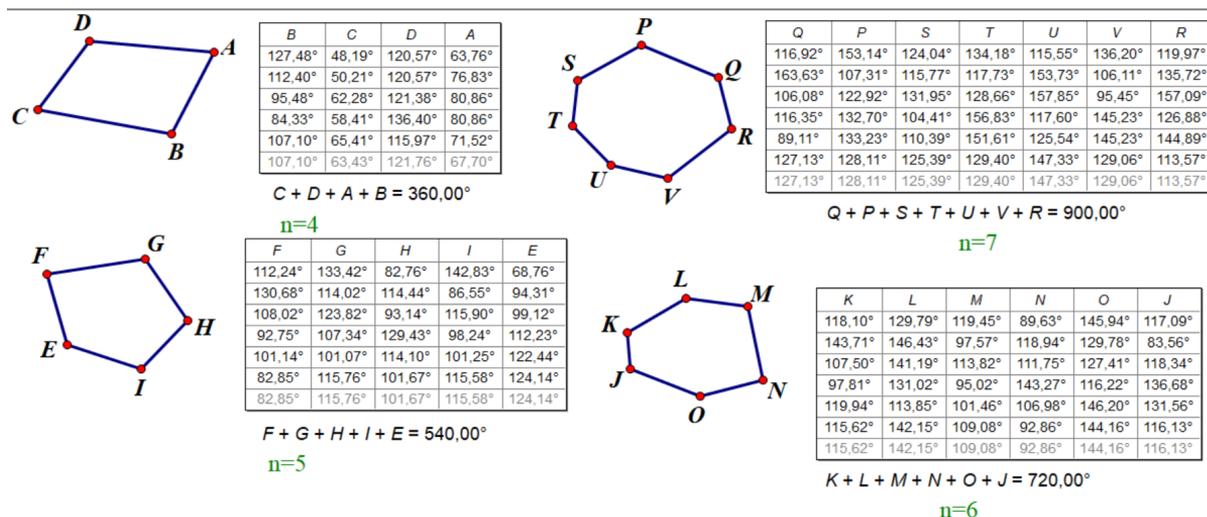


Рисунок 5. Сбор данных о сумме углов выпуклого многоугольника

### 3. Обработка результатов эксперимента:

Обучающиеся вычисляют в тетрадях сумму углов каждого n-угольника по формуле, которую предположили на первом этапе эксперимента, а после сравнивают результат с полученными результатами в ходе испытаний.

По завершению эксперимента делается вывод об истинности гипотезы.

## 2.2 Методика реализации исследовательского подхода при изучении темы “Параллелограмм и трапеция” с использованием динамических чертежей и результаты апробации

Приведем фрагмент урока по теме “Параллелограмм и его свойства”, с использованием эксперимента в среде “Живая математика”, направленного на выделение свойств параллелограмма. Свойства изначально формулируются в качестве гипотез, после чего приводится доказательство или опровержение их.

Таблица 2.

## Технологическая карта фрагмента урока на тему “Параллелограмм и его свойства”

Тема урока	Параллелограмм и его свойства
Тип урока	открытия новых знаний
Цели урока	<p><b>Предметные:</b> дать определение параллелограмму, изучить его свойства</p> <p><b>Личностные:</b> формировать креативность мышления, а также создать условия для приобретения личного опыта открытия знаний обучающимися</p> <p><b>Метапредметные:</b> формировать умение выделять существенные свойства параллелограмма, выдвигать гипотезы и понимать необходимость их проверки</p>
Планируемые результаты	<p><b>Предметные:</b> знают понятие параллелограмма, перечисляют свойства параллелограмма, применяют свойства при решении задач</p> <p><b>Личностные:</b> проявили находчивость и активность при проведении эксперимента, приобрели опыт проведения компьютерного эксперимента</p> <p><b>Познавательные:</b> умеют высказывать предположения, определить необходимую теорему для доказательства предположения</p> <p><b>Регулятивные:</b> умеют самостоятельно ставить цели, планировать свои действия и предвидеть их результат</p> <p><b>Коммуникативные:</b> умеют взаимодействовать в группе со сверстниками для достижения цели</p>
Основное содержание урока	Определение параллелограмма, свойства параллелограмма
Средства обучения	Учебник по геометрии 7-9 класс Л.С. Атанасян [и др.], компьютер, проектор, среда “Живая математика”

Ход урока:

Содержание этапа	Деятельность учителя	Деятельность учеников	Формирование УУД
Этап 3. Мотивация			

Цель: заинтересовать обучающихся в продолжении изучении четырехугольников и приобретении лично значимых знаний и умений			
<p><u>Задача:</u> Будут ли в выпуклом четырехугольнике ABCD, у которого <math>\angle BAC = \angle ACD</math> и <math>\angle DAC = \angle BCA</math>, противоположные стороны попарно параллельны?</p>	<p>Предлагаю вам ответить на вопрос задачи.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- о какой фигуре говорится в задаче? Давайте ее построим</li> <li>- что мы знаем об элементах четырехугольника? Давайте обозначим равные углы на чертеже, но на нем нет таких углов, что нужно сделать?</li> <li>- Что спрашивается в задаче? Давайте это выясним.</li> </ul> <p>- Итак, мы выяснили, что в четырехугольнике ABCD стороны попарно параллельны. На предыдущем уроке мы изучали выпуклые и невыпуклые четырехугольники, а сейчас изучим новый вид выпуклого четырехугольника - параллелограмм. Предлагаю каждому сформулировать тему урока и записать ее в тетради</p>	<p>Читают условие задачи</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- выпуклом четырехугольнике ABCD. Строят каждый в тетради</li> <li>- <math>\angle BAC = \angle ACD</math>, <math>\angle DAC = \angle BCA</math></li> <li>- Нужно провести диагональ AC</li> <li>- Будут ли противоположные стороны попарно параллельны (один ученик решает у доски, остальные в тетрадях)</li> </ul> <p>Записывают тему урока</p>	<p>Познавательные: умение определять необходимые понятия и теоремы для решения задачи, умение выделять подзадачи в задаче</p> <p>Коммуникативные: умение взаимодействовать с учителем и одноклассниками для решения геометрической задачи</p> <p>Личностные: способность к эмоциональному восприятию геометрических объектов, желание узнавать новое</p>
Этап 4. Изучение нового материала			
Цель: дать определение параллелограмму, сформулировать и доказать свойства параллелограмма			
<p>Параллелограмм - это выпуклый четырехугольник, у которого противоположные стороны</p>	<p>На основе решенной задачи давайте скажем, что называется параллелограммом?</p>	<p>Формулируют определение параллелограмма</p>	<p>Познавательные: умение выделять существенные свойства понятия, умение проводить</p>

<p>попарно параллельны; Свойства параллелограмма: 1. В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны 2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам</p>	<p>Каждый четырехугольник обладает какими-то своими свойствами. Предлагаю вам сейчас провести исследование и узнать, какие же свойства скрывает параллелограмм. Для этого вам нужно разделиться по группам и занять место за компьютером</p>	<p>Занимают места за компьютером и проводят исследование по выяснению свойств параллелограмма</p>	<p>эксперимент Коммуникативные: умение четко и ясно выражать свои мысли в устной и письменной формах</p>
---	--	---	--

### Эксперимент “Свойства параллелограмма”

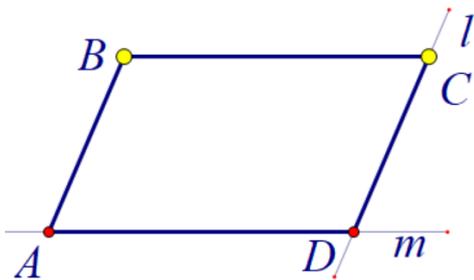
1. Построить в среде Живая математика параллелограмма ABCD, для этого:

- строим произвольную прямую и откладываем на ней отрезок BC, после этого прямую можно скрыть;
- строим произвольный отрезок AB;
- выделяем отрезок BC и точку A и с помощью Построения проводим параллельную линию m;
- выделяем отрезок AB и точку C, с помощью Построения проводим параллельную линию l;
- точка D - пересечение прямых m и l;
- ABCD - параллелограмм.

2. Затем, измеряем длины сторон параллелограмма и величины его углов, данные вносим в таблицу;

3. Меняя форму ABCD (мышкой следует перемещать BC или C), провести компьютерный эксперимент (около 6 испытаний), связанный с исследованием параллелограмма на наличие у него равных сторон и углов (результаты испытаний заносятся в таблицу см. рис. 6);

4. Если такие стороны и углы найдены, то необходимо сформулировать соответствующее утверждение (гипотезу);



AB	BC	CD	AD	$\angle BAD$	$\angle ABC$	$\angle BCD$	$\angle CDA$
4,06 см	5,98 см	4,06 см	5,98 см	63,27°	116,73°	63,27°	116,73°
3,88 см	6,93 см	3,88 см	6,93 см	75,99°	104,01°	75,99°	104,01°
4,97 см	8,02 см	4,97 см	8,02 см	77,45°	102,55°	77,45°	102,55°
2,53 см	5,42 см	2,53 см	5,42 см	63,69°	116,31°	63,69°	116,31°
2,53 см	5,42 см	2,53 см	5,42 см	63,69°	116,31°	63,69°	116,31°
3,91 см	6,22 см	3,91 см	6,22 см	66,90°	113,10°	66,90°	113,10°

Рисунок 6. Первое свойство параллелограмма

5. Проведите диагонали в параллелограмме ABCD и точкой E отметьте их пересечение;

6. Измерьте длины отрезков AE, BE, CE, DE и данные внесите в таблицу;

7. Изменяя параллелограмм, проведите не менее 6 испытаний по выяснению свойства параллелограмма, связанного с диагоналями. Данные вносите в таблицу (см. рис. 7);

8. На основе анализа полученной таблицы сформулируйте соответствующее утверждение (гипотезу).

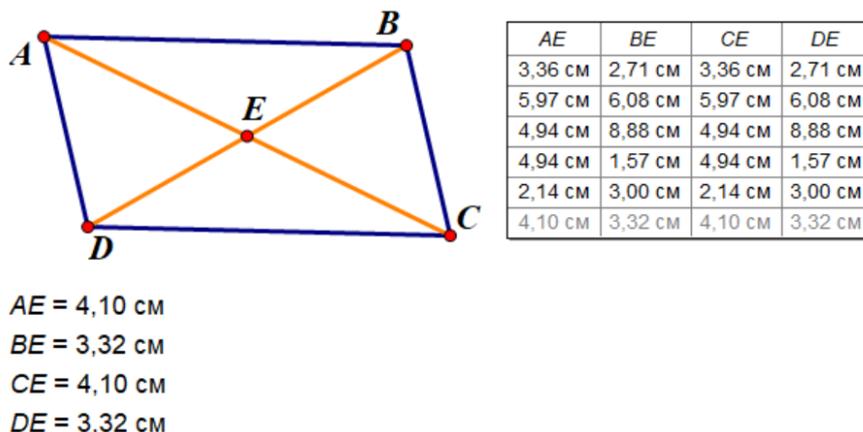


Рисунок 7. Второе свойство параллелограмма

После проведения эксперимента обучающиеся формулируют свойства параллелограмма, далее приводится доказательство данных свойств. После проведения доказательства свойств параллелограмма, обучающиеся переходят к решению задач на первичное закрепление и применение данных свойств. На этапе актуализации рекомендуем повторить с обучающимися виды четырехугольников, выполнить задание на определение противоположных сторон и противоположных углов, вспомнить углы при параллельных прямых и секущей, а также повторить формулу для нахождения величины угла любого n-угольника.

После изучения параллелограмма, его свойств и признаков, в курсе геометрии идет изучение трапеции и ее свойств. Ниже приведен разработанный фрагмент урока с включением эксперимента, направленного на самостоятельное выяснение свойств трапеции

Таблица 3.

## Фрагмент урока на тему: “Трапеция”.

Тема урока	Трапеция
Тип урока	открытия новых знаний
Цели урока	<p><b>Предметные:</b> дать определение трапеции, изучить ее виды и свойства равнобедренной трапеции</p> <p><b>Личностные:</b> формировать и развивать креативное мышление, побуждать к проявлению инициативы при поиске ответа на вопрос</p> <p><b>Метапредметные:</b> формировать умение планировать и осуществлять деятельность для решения задач исследовательской направленности</p>
Планируемые результаты	<p><b>Предметные:</b> знают понятие трапеции, могут определить вид трапеции, перечисляют элементы трапеции</p> <p><b>Личностные:</b> умеют выстраивать аргументацию, формулировать учебную проблему</p> <p><b>Познавательные:</b> умеют формулировать вопросы к исходным данным, умеют проводить анализ, а также сравнивать объекты</p> <p><b>Регулятивные:</b> умеют планировать исследовательскую деятельность</p> <p><b>Коммуникативные:</b> умеют работать с партнером, грамотно формулировать свои мысли на математическом языке</p>
Основное содержание урока	Определение трапеции, элементы трапеции, основные виды, свойства равнобедренной трапеции
Средства обучения	Учебник по геометрии 7-9 класс Л.С. Атанасян [и др.], компьютер, проектор, среда Живая математика

Ход урока:

Содержание этапа	Деятельность учителя	Деятельность учеников	Формирование УУД
Этап 3. Мотивация Цель: заинтересовать обучающихся на изучение трапеции и ее свойств на личностно значимом уровне			

<p>Задача: Отрезок <math>BK</math> - биссектриса треугольника <math>ABC</math>. Прямая <math>DK</math> параллельна стороне <math>AB</math> и пересекает <math>BC</math> в точке <math>D</math>, <math>\angle BDK=116^\circ</math>. Найдите <math>\angle BKD</math></p>	<p>Предлагает решить задачу.</p> <p>Есть ли на чертеже четырехугольник? Какой по виду <math>ABDK</math>? Как вы думаете, как называется такой четырехугольник? Такой четырехугольник называется трапецией. Давайте определим тему и цель сегодняшнего урока</p>	<p>Решают задачу каждый в тетради, после сверяют ответ</p> <p>Есть: <math>ABDK</math></p> <p>Выпуклый Отвечают если знают</p> <p>Тема: Трапеция и ее свойства Цель: понять, что такое трапеция и изучить ее свойства</p>	<p>Регулятивные: умение ставить цель учебной деятельности Познавательные: умение определить отношение между объектами, умение составить алгоритм решения задачи</p>
<p>Этап 4. Изучение нового материала Цель: дать определение трапеции, перечислить ее элементы, узнать виды трапеций, изучить свойства трапеции</p>			
<p>Определение трапеции, название ее элементов, виды трапеции и ее свойства</p>	<p>Давайте попробуем сформулировать определение трапеции. Параллельные стороны называются основаниями, а непараллельные - боковыми сторонами. Как вы думаете, если боковые стороны будут равны, то какой по виду будет трапеция? А если в трапеции одна из боковых сторон будет перпендикулярна основаниям? Давайте попробуем выяснить особенности равнобедренной трапеции. Предлагаю в парах</p>	<p>Трапеция - это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет. Записывают в тетрадь</p> <p>Равнобедренной</p> <p>Прямоугольной</p>	<p>Коммуникативные: умение работать с партнером для выполнения совместной задачи Предметные: определение трапеции и ее виды Личностные: умение контролировать процесс и результат математической деятельности Познавательные: умение работать в интерактивной математической среде "Живая математика"</p>

	занять место за компьютером и в среде Живая математика провести следующий эксперимент	Выполняют в парах эксперимент	
--	--	-------------------------------	--

На данном уроке проводится эксперимент по изучению свойств равнобедренной трапеции. Предполагается, что обучающиеся самостоятельно формулируют определение трапеции, а также в ходе эксперимента, самостоятельно формулируют свойства равнобедренной трапеции.

## Эксперимент “Свойства равнобедренной трапеции”

1. Постройте в среде Живая математика равнобедренную трапецию ABCD, для этого:

- постройте произвольную прямую и назовите точки на прямой, соедините их отрезком, а прямую скройте. Отрезок АВ - основание трапеции;
- поставьте точку С, не принадлежащую АВ. Выделите АВ и точку С и с помощью Построения проведите параллельную прямую;
- проведите отрезок ВС;
- выделите точку А и отрезок ВС, с помощью Построения постройте окружность в центре А и радиусом АВ, D - точка пересечения окружности и прямой CD;

• ABCD - равнобедренная трапеция.

2. Измерьте углы при основании АВ и CD, полученные данные внесите в таблицу;

3. Проведите диагонали AC и BD, данные также внесите в таблицу;

4. Затем, перемещая одну из вершин, меняйте длины сторон трапеции и новые величины углов и диагоналей вносите в таблицу, проведите минимум 6 испытаний (см. рис. 8).

5. Сформулируйте гипотезы.

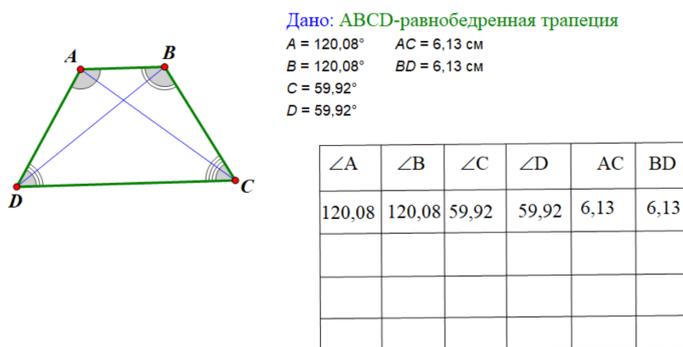


Рисунок 8. Свойства трапеции

Доказательства свойств осуществляется с помощью учителя. На этапе актуализации знаний необходимо повторить определение и свойства параллелограмма, а также углы при параллельных прямых и секущей: накрест лежащие, односторонние и соответственные. На этапе первичного закрепления

знаний целесообразно включить задания на распознавания трапеции, определения ее вида, а также задачи, при решении которых используются свойства равнобедренной трапеции.

### **2.3 Методика реализации исследовательского подхода при изучении темы “Прямоугольник, ромб и квадрат” с использованием динамических чертежей и результаты апробации**

Прямоугольник, ромб и квадрат изучаются обучающимися после параллелограмма и трапеции. Данные четырехугольники определяются как частные случаи параллелограмма, в связи с этим часть свойств данных фигур наследуется от него, такие свойства не доказываются на уроке. Ниже приведен разработанный фрагмент урока с проведение эксперимента, направленного на обнаружение свойств присущих только прямоугольнику, ромбу и квадрату.

Таблица 4.

Фрагмент урока по теме: “Прямоугольник, ромб, квадрат”.

Тема урока	Прямоугольник, ромб, квадрат
Тип урока	открытия новых знаний
Цели урока	<b>Предметные:</b> дать определение прямоугольнику, ромбу и квадрату, изучить их свойства <b>Личностные:</b> формировать готовность к самообучению на основе мотивации к обучению <b>Метапредметные:</b> формировать умение выдвигать гипотезу, делать вывод и обобщать результаты эксперимента
Планируемые результаты	<b>Предметные:</b> знают понятие прямоугольника, ромба и квадрата, умеют различать их, перечисляют их свойства <b>Личностные:</b> умеют сопоставить цель с результатом деятельности, понимают смысл поставленной задачи <b>Познавательные:</b> умеют проводить эксперимент, проверяют гипотезу на частных случаях <b>Регулятивные:</b> умеют ставить цель для своей деятельности, планировать деятельность для достижения цели <b>Коммуникативные:</b> умеют работать в группе, грамотно формулировать свои мысли на математическом языке
Основное содержание урока	Определение прямоугольника, ромба и квадрата, свойства прямоугольника, ромба и квадрата
Средства обучения	Учебник по геометрии 7-9 класс Л.С. Атанасян [и др.], компьютер, проектор, среда “Живая математика”

Ход урока:

Содержание этапа	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формирование УУД
Этап 2. Актуализация знаний Цель: повторить определение параллелограмма и его свойства			
<u>Задача:</u> Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $O$ .	Какие четырехугольники мы изучили на предыдущих уроках? Что называется	Параллелограмм и трапецию	Предметные: умение применять свойства параллелограмма при решении

<p>Будет ли четырехугольник <math>EFKM</math>, вершины которого являются серединами отрезков <math>OA</math>, <math>OB</math>, <math>OC</math>, <math>OD</math>, параллелограммом?</p>	<p>параллелограммом? Что называется трапецией? Что мы узнали о параллелограмме? Перечислите его свойства Давайте решим задачу</p> <p>Какими свойствами обладает трапеция? Какие виды трапеции мы знаем?</p>	<p>Говорят определения параллелограмма и трапеции</p> <p>Узнали его свойства</p> <p>Перечисляют свойства параллелограмма</p> <p>Самостоятельно решают задачу в тетрадях, после совместно проверяют решение</p> <p>Перечисляют свойства трапеции</p> <p>Равнобедренная и прямоугольная трапеция</p>	<p>задач</p> <p>Коммуникативные: умение грамотно и четко формулировать свои мысли</p>
<p>Этап 3. Мотивация Цель: заинтересовать обучающихся продолжить изучать виды четырехугольников, вызвать интерес к активной познавательной деятельности</p>			
	<p>А можете ли вы перечислить виды параллелограмма? Сегодня мы их изучим. Предположите цель сегодняшнего урока</p>	<p>Нет</p> <p>Узнать виды параллелограмма, узнать свойства их</p>	<p>Личностные: желание узнавать новое</p> <p>Регулятивные: умение ставить цель своей деятельности</p>
<p>Этап 4. Изучение нового материала Цель: изучать прямоугольник, квадрат и ромб: сформулировать определение и их свойства</p>			
<p>Определение прямоугольника, ромба и квадрата; Свойства прямоугольника, ромба и квадрата</p>	<p>Давайте, основываясь на видах трапеции, попробуем предположить виды параллелограмма. По аналогии прямоугольной трапеции, какой параллелограмм можем построить? Если в параллелограмме один из углов будет прямым, то чему</p>	<p>Параллелограмм, у которого есть прямой угол.</p> <p>В параллелограмме противоположные углы равны, а</p>	<p>Познавательные: умение проводить аналогии между объектами, умение формулировать гипотезу и проверять ее на частных случаях</p> <p>Коммуникативные: грамотно формулировать свое мнение</p>

	<p>будут равны оставшиеся?</p> <p>Параллелограмма, у которого углы прямые называется прямоугольником.</p> <p>По аналогии равнобедренной трапеции, давайте предположим какой параллелограмм может получиться? Такой параллелограмм называется ромбом.</p> <p>Для параллелограмма есть еще один вид, как вы думаете, какой? Давайте сформулируем определение.</p> <p>Если прямоугольник, ромб и квадрат - это параллелограммы, то какие свойства они наследуют?</p> <p>А сейчас давайте исследуем их особенные свойства, для этого займем места за компьютером</p>	<p>сумма углов равна 360, следовательно, все углы будут прямыми</p> <p>Параллелограмма с равными сторонами</p> <p>Если объединить равенство сторон и наличие прямых углов, то получим квадрат. Формулируют определение</p> <p>Перечисляют свойства параллелограмма</p> <p>Проводят исследование</p>	
--	--	---	--

На этапе актуализации знаний мы включили исследовательскую задачу, за основу взята задача с учебника №382 [17], но в переделанном формате, таким образом, чтобы невозможно было однозначно предугадать ответ на задачу. После проведенного эксперимента, обучающиеся формулируют гипотезы, после чего проводят доказательства совместно с учителем.

Эксперимент “Свойства прямоугольника, ромба и квадрата”

1. Постройте прямоугольник ABCD:
  - Проведите отрезок AB;
  - Выделите отрезок и его концы, с помощью Построения проведите перпендикуляры;
    - Отметьте точку D на прямой AD;
    - Выделите точку D и отрезок AB, с помощью Построения проведите параллельную прямую;
    - Точкой C обозначьте пересечение построенной прямой с перпендикуляром, проходящим через точку B;
2. Проведите диагонали в прямоугольнике ABCD;
3. Перемещая вершину B или D, меняйте длины сторон прямоугольника, вносите данные в таблицу, проведите минимум 6 испытаний (см. рис. 9);
4. На основе полученных данных сформулируйте гипотезу;

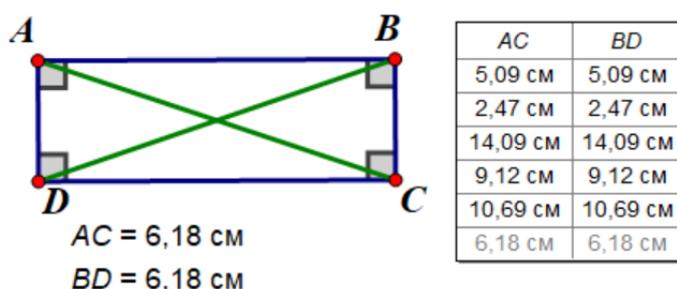
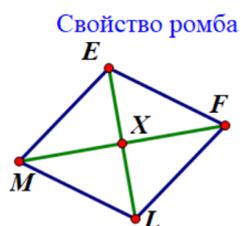


Рисунок 9. Свойство прямоугольника

5. Постройте ромб EFLM:
  - Проведите отрезок EF;
  - Выделите точку E и отрезок EF, с помощью Построения проведите окружность O (E,EF);

- Отметьте точку M на окружности и соедините с вершиной E, скройте окружность;
  - Выделите точку F и отрезок EM, с помощью Построения проведите параллельную прямую l;
  - Выделите точку M и прямую l, с помощью Построения проведите параллельную прямую k;
  - Точкой L обозначьте пересечение прямых l и k;
6. В ромбе EFLM постройте диагонали, точкой X обозначьте их пересечение;
7. Давайте исследуем взаимное расположение диагоналей, для этого измерим полученные углы, а также образованные углы при вершинах ромба. Данные внесите в таблицу;
8. Перемещая одну из вершин ромба, проведите не менее 6 измерений данных углов (см. рис. 10);
9. На основе полученных данных сформулируйте гипотезы;



$m\angle FXL$	$m\angle EXF$	$m\angle LXM$	$m\angle MXE$
90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
90,00°	90,00°	90,00°	90,00°

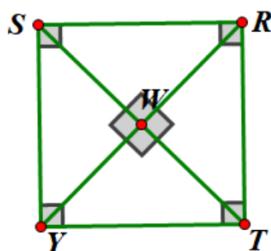
$m\angle FEX$	$m\angle XEM$	$m\angle EMX$	$m\angle LMX$	$m\angle MLX$	$m\angle FLX$	$m\angle LFX$	$m\angle EFX$
39,69°	39,69°	50,31°	50,31°	39,69°	39,69°	50,31°	50,31°
38,66°	38,66°	51,34°	51,34°	38,66°	38,66°	51,34°	51,34°
69,14°	69,14°	20,86°	20,86°	69,14°	69,14°	20,86°	20,86°
53,41°	53,41°	36,59°	36,59°	53,41°	53,41°	36,59°	36,59°
43,24°	43,24°	46,76°	46,76°	43,24°	43,24°	46,76°	46,76°
53,71°	53,71°	36,29°	36,29°	53,71°	53,71°	36,29°	36,29°

Рисунок 10. Свойства ромба

10. Постройте квадрат SRTY:
- Проведите отрезок SR;
  - С помощью Построения проведите окружность O (S, SR);
  - Через концы отрезка SR с помощью Построения проведите перпендикуляры;
  - Точкой Y обозначьте пересечение перпендикуляра с окружностью O;
  - Выделите точку Y и отрезок SR с помощью Построения проведите параллельную прямую n;
  - Точкой T обозначьте пересечение прямой n и перпендикуляра RT;

11. Изменяя длины сторон (перемещая одну из вершин квадрата), проверьте выполнения свойств прямоугольника и ромба, данные измерений занесите в таблицу (см. рис. 11);

12. Сформулируйте гипотезы относительно свойств квадрата, основываясь на полученные данные.



ST	RY	$m\angle RWS$	$m\angle SWY$	$m\angle YWT$	$m\angle TWR$
7,97 см	7,97 см	90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
10,14 см	10,14 см	90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
4,18 см	4,18 см	90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
6,01 см	6,01 см	90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
8,16 см	8,16 см	90,00°	90,00°	90,00°	90,00°
5,91 см	5,91 см	90,00°	90,00°	90,00°	90,00°

RW	TW	YW	SW
3,98 см	3,98 см	3,98 см	3,98 см
5,07 см	5,07 см	5,07 см	5,07 см
2,09 см	2,09 см	2,09 см	2,09 см
3,01 см	3,01 см	3,01 см	3,01 см
4,08 см	4,08 см	4,08 см	4,08 см
2,96 см	2,96 см	2,96 см	2,96 см

$m\angle RSW$	$m\angle YSW$	$m\angle SYW$	$m\angle TYW$	$m\angle YTW$	$m\angle RTW$	$m\angle TRW$	$m\angle SRW$
45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°
45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°
45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°
45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°
45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°
45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°	45,00°

Рисунок 11. Свойства квадрата

Подводя итог, отметим, что экспериментальное исследование, которое предваряет формулировку тех или иных свойств геометрических фигур, позволяет мотивировать обучающихся не только на «открытие» этих свойств, но и на заинтересованное участие в совместном с учителем их доказательстве.

Опытно-экспериментальная работа проводилась на базе гимназии №14 г. Красноярск в 8 классе. В эксперименте приняли участие 22 обучающихся.

Для оценки эффективности включения эксперимента на уроке геометрии в 8 классе мы выделили критерии и показатели ее эффективности, которые представлены в таблице 5.

Таблица 5.  
Диагностика сформированности исследовательских умений

№	Критерии	Показатели	Инструмент мониторинга
1	Уровень сформированности у обучающихся компетенций, входящих в структуру исследовательской	- учебно-познавательная компетенция; - информационная компетенция; - ценностно-смысловая компетенция	Анкеты (Приложение 3)

	деятельности		
2	Нацеленность на исследовательскую деятельность в контексте перспективы обучения	- доля обучающихся, имеющих интерес к возможности реализации собственной исследовательской активности при дальнейшем обучении	Анкета “Интерес обучающихся к возможностям реализации собственной исследовательской активности в дальнейшем обучении” (Приложение 4)

Метод сбора информации: анкетирование.

Данная диагностика проводилась в 2021-2022 учебном году и состояла из двух этапов: констатирующего и контрольного. На первом этапе эксперимента стояла цель установить исходный уровень сформированности исследовательских умений у обучающихся 8 класса. На втором этапе эксперимента стояла цель оценить изменения показателей после проведения уроков, содержащих разработанные эксперименты.

#### **Обработка результатов:**

- Уровень сформированности у обучающихся компетенций, входящих в структуру исследовательской деятельности

Уровень сформированности	Низкий		Средний		Высокий	
	I	II	I	II	I	II
Этап анкетирования						
учебно-познавательная компетенция	63%	54%	20%	25%	17%	21%
информационная компетенция	35%	30%	40%	45%	25%	25%
ценностно-смысловая компетенция	56%	42%	31%	36%	13%	22%

Первый этап диагностики показал у большинства обучающихся низкий уровень сформированности учебно-познавательной и ценностно-смысловой компетенций, однако информационная компетенция сформированная в основном на среднем уровне. После апробации уроков, включающих эксперимент в среде “Живая математика” заметна небольшая динамика уровня сформированности по трем показателям.

- Нацеленность на исследовательскую деятельность в контексте перспективы обучения

Уровень сформированности	Низкий		Средний		Высокий	
	I	II	I	II	I	II
доля обучающихся, имеющих интерес к возможности реализации собственной исследовательской активности при дальнейшем обучении	72%	46%	23%	36%	5%	18%

На первом этапе диагностики у обучающихся отмечен низкий уровень желания осуществлять исследовательскую деятельность. На втором этапе ситуация меняется: высокий и средний уровни увеличились на 3 обучающихся, низкий уровень сократился на 6 обучающихся.

Апробация показала, что включение эксперимента в урок придает работе обучающихся исследовательский характер, помогает развивать самостоятельность обучающихся, способствует развитию навыков планирования времени для работы, развивать у них чувство времени, способствует развитию умения сочетать индивидуальную работу с групповой и парной. Однако, обучающиеся были недостаточно готовы к самостоятельной работе. Благодаря серии уроков у обучающихся отмечен рост интереса для продолжения исследовательской деятельностью. Также, как показатель повышения уровня сформированности исследовательских умений, двое обучающихся 8 класса гимназии 14 приняли участие в VIII Международном турнире по экспериментальной математике в феврале 2022 года, на котором успешно выполнили задания, связанные с многоугольниками под номером 2 и 4 (Приложение 5). В данных заданиях проверяется умение проводить исследования с использованием экспериментов в системе динамической математики, обучающиеся использовали среду “Живая математика”.

## Выводы по главе 2

На основе результатов педагогического эксперимента можно сделать вывод о том, что подавляющему большинству обучающихся 8 класса необходимо целенаправленное и систематическое формирование и развитие исследовательских умений. Для этого мы рекомендуем использовать разработанную нами серию экспериментов по разделу “Многоугольники” в среде “Живая математика”. При их разработке мы учитывали дидактические условия и методы, описанные в первой главе, способствующих формированию исследовательских умений.

При разработки компьютерных экспериментов мы убедились, что выбранная нами среда “Живая математика” удобна для проведения таких экспериментов обучающимися. Во время проведения эксперимента на уроке геометрии обучающиеся проявляют интерес, а также активно участвуют при формулировании гипотезы, исследования разного вида четырехугольников и дальнейшем доказательстве обнаруженных свойств конкретного вида четырехугольника.

Разработанные нами эксперименты были включены в урок на этапе изучения нового материала, но проводить подобные эксперименты можно на любом этапе урока, например, решая исследовательские задачи применяя разработанные нами чертежи в среде “Живая математика” (см. Приложение 2)

## Заключение

В ходе проведенного исследования можно сделать вывод о том, что если на уроках геометрии включать компьютерный эксперимент в среде “Живая математика”, то это будет способствовать формированию у обучающихся 7-9 классов исследовательских умений.

Поставленная цель в начале данной работы была достигнута. Нами были разработаны компьютерные эксперименты в среде “Живая математика” и содержащие их фрагменты уроков для изучения многоугольников, реализующие исследовательский подход.

Отвечая на вопрос, поставленный нами в проблеме исследования, можем сказать, что для формирования исследовательских умений у обучающихся 8 класса при изучении раздела “Многоугольники” необходимо проводить компьютерные эксперименты в среде “Живая математика”.

Поставленные задачи для достижения цели были выполнены:

1. Мы изучили исследовательские умения как новый образовательный результат;
2. Мы выяснили особенности изучения многоугольников, ориентированные на формирование исследовательских умений;
3. Описали особенности содержания уроков по разделу “Четырехугольники” в 8 классе при условии использования на этих уроках динамических чертежей;
4. Разработали и апробировали по разделу “Многоугольники” компьютерные эксперименты в среде “Живая математика”, ориентированные на формирование у обучающихся исследовательских умений.

Данные разработки будут полезны для учителей математики 7-9 классов как на уроках, так и для применения во внеурочной деятельности.

## Библиографический список

1. Бороненко Т.А., Кайсина А.В., Федотова В.С. Активные и интерактивные методы педагогического взаимодействия в системе дистанционного обучения // Научный диалог. 2017. №1. С. 227-243.
2. Бутузов В.Ф. Геометрия 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А.Садовниченко. -3-е изд. - М.: Просвещение, 2016. - 175 с.
3. Вербицкий А.А. Контекстное обучение: теория и технология // Новые методы и средства обучения, №2 (16). Педагогические технологии контекстного обучения / Под ред. А.А. Вербицкого, М.: Знание, 1994. 96 с.
4. Волчёнкова С.Н. Системно-деятельностный подход как фактор повышения эффективности учебной деятельности школьников в процессе обучения математике // Вестник ГОУ ДПО ТО “ИПК и ППРО ТО”. Тульское образовательное пространство. 2016. №1. С. 93 - 96
5. Гапонюк. З.Г. Современные образовательные ресурсы - современному подростку // Актуальные проблемы методики преподавания биологии, химии и экологии в школе и вузе. 2017. С. 248 - 251.
6. Гауч О.Н. Организация учебно-исследовательской деятельности учащихся школы в условиях внедрения федеральных государственных образовательных стандартов / О.Н. Гауч // Научный диалог. 2016. №10 (58). С. 326 - 337
7. Геометрия 7-9 классы: учебник // Л.С. Атанасян [и др.]. Москва: Просвещение, 2015. 386 с.
8. Геометрия. 7 - 9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / А.В.Погорелов. - 2-е изд. - М.: Просвещение, 2014. - 240 с.
9. Егупова М.В. Как сделать понятным школьнику решение геометрической задачи / М.В. Егупова // Международная научно-практическая интернет-конференция “Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе”. 2022.

10. Живая математика: Сборник методических материалов / под ред. Г.Б. Шабат [и др.]. М.: ИНТ, 2012. 176 с.
11. Исаева Д.Э. Как в условиях смешанного обучения научить школьника решать задачи на построение циркулем и линейкой // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы VI Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. 2021. С. 76-79.
12. Исаева Д.Э. Потенциал электронной образовательной среды Живая математика для формирования исследовательских умений обучающихся // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы VI Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. 2021. С. 241-243.
13. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утв. распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г №2506-р)
14. Кортнев К.П. Сочетание в обучении решения задач и лабораторного практикума / К.П. Кортнев, Н.Н. Шушарина // Современные методы физико-математических наук: Труды международ. конф.: Сб.ст. Орел, 2006.
15. Кошелева Д.В. Генезис понятия “исследовательские умения” / Д.В. Кошелева // Знание. Понимание. Умение. 2011. №2. С. 218-221
16. Краткий отчет по результатам исследования PISA-2018. [Электронный ресурс]. URL: PISA2018RF\_Краткий отчет.pdf - Яндекс.Документы (yandex.ru) (Дата обращения: 11.01.2022)
17. Кугуелова О.Н. Учебно-методический комплект “Живая математика” и его применение на уроках геометрии // Вестник московского государственного педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. М., 2008. №11. С. 232-234.
18. Лейтес Н.С. Умственные способности и возраст. - М., 1971. - с. 252.
19. Леонтович А.В. Исследовательская деятельность как способ формирования мировоззрения / А.В. Леонтович // Развитие исследовательской

деятельности учащихся: методический сборник. - Москва: Народное образование. 2012. С. 34 - 41

20. Лернер И.Я. Проблемное обучение [Текст] / И.Я. Лернер. - М.: “Знание”, 1974. - 64 с.

21. Методика преподавания математики: учебник для вузов / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин [и др.]. - М.: Просвещение, 1980. - 368 с.

22. Михайлова. М. PISA - тест на компетентность. [Электронный ресурс]. 2018. 15 июня. URL: Международное исследование PISA: рейтинг России (rosuchebnik.ru) (Дата обращения: 10.01.2022)

23. Николаев И.А., Марченко Т.Е. Рынок в экономическом развитии // Общество и экономика. 2018. № 2. С. 12 - 25.

24. Олимпиада “Математический праздник”. URL: <https://olympiads.mcsme.ru/matprazdnik/> (дата обращения: 10.05.2022)

25. Педагогический терминологический словарь. [Электронный ресурс]. URL: Подростковый возраст - это... Что такое Подростковый возраст? (academic.ru) (Дата обращения: 8.01.2022)

26. Петрушенко Н.Н. Исследовательская деятельность учащихся // Региональное образование: современные тенденции. 2019. №1 (37). С. 49-54.

27. Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. N 287 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования" (Зарегистрировано в Минюсте России 05.07.2021 №64101)

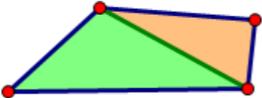
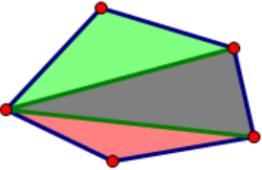
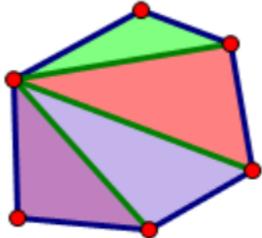
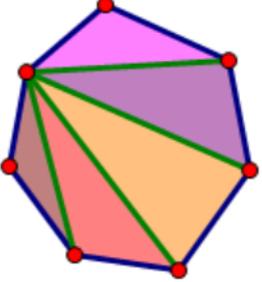
28. Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 №143 (ред. от 29.06.2017) “Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования” (Зарегистрировано в Минюсте России 07.06.2012 №24480)

29. Проказова О.Г. Организация исследовательской деятельности учащихся в системе работы школы / О.Г. Проказова // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. 2010. №1 (45). С. 66 - 69

30. Прокофьева Л.Б. Как организовать исследовательскую деятельность учащихся: практическое пособие / Л.Б. Прокофьева. - Москва: АРКТИ, 2013. - 234 с.
31. Руссо Жан Жак. Эмили, или О воспитании / пер с фр. М.А. Энгельгардта. СПб.: Газ. "Шк. и жизнь", 1912. - 491 с.
32. Савенков А.И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению / А.И. Савенков. - М., 2006.
33. Савенков А.И. Содержание и организация исследовательского обучения школьников. М.: Сентябрь, 2003. 204 с.
34. Сайфутдинова Е.В., Манькова Е.С. Математический эксперимент как средство развития исследовательской компетентности на уроках математики и во внеурочной деятельности по предмету // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика. Казань: Казанский федеральный университет. 2016. С. 200 - 207
35. Семенова Н.А. Условия развития исследовательских умений школьников [Текст] / Н.А. Семенова // Материалы международной научно-практической конференции "Модернизация и повышения квалификации" (Томск, 26 - 27 ноября). Том 2. - Томск, 2003. - С. 188 - 191
36. Сергеева Т.Ф., Шабанова М.В., Гроздев С.И. Основы динамической геометрии: монография. М.: АСОУ, 2016. 152 с.
37. Середенко П. В. Развитие исследовательских умений и навыков младших школьников в условиях перехода к образовательным стандартам нового поколения: монография. Южно-Сахалинск: СахГУ, 2014. 208 с.
38. Смирнова И.М. Геометрия. 7 - 9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. - 2-е изд. - М.: Мнемозина, 2007. - 376 с.
39. Стефанова Н.Л. Проблемы развития исследовательских умений учащихся с позиции мета-методического подхода // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. 2002. Вып. 3. Т. 2. С. 167-175.

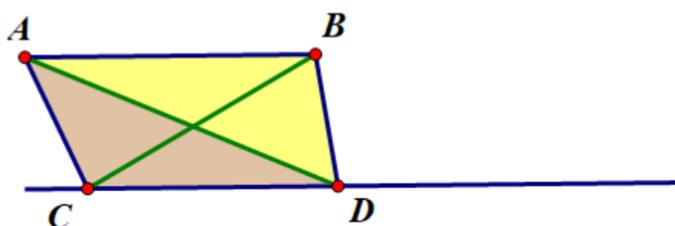
40. Столяренко Л.Д. Психология и педагогика: краткий курс лекций / Л.Д. Столяренко, В. Е. Столяренко. - Москва: Юрайт, 2013. - 144 с.
41. Таранова М.В. Формирование исследовательской деятельности в обучении математике: проблемы, новые решения // Международный журнал экспериментального образования. 2015. № 4-2. С. 311 - 313
42. Шабанова М.В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова и другие. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. – 300 с.
43. Экспериментальная математика: учеб. пособие / под общ. ред. М.А Павловой. - Архангельск: Изд-во АО ИОО, 2017. -184 с.
44. Ягодин Г.А. Учебно-исследовательская деятельность школьников как один из методов формирования ключевых компетенций / Г.А. Ягодин // Молодой ученый. 2012. №8. С. 54 - 5
45. Borwein J., Bailey D. Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century and Experiments in Mathematics: Computational Paths to Discovery 2003 // Book Reviews. URL: <https://ru.scribd.com/document/11560075/Math-by-Experiment> [дата обращения: 10.02.2022]

**Приложение 1. Таблица “Сумма углов выпуклого n-угольника”**

Число углов	Чертеж	Число треугольников	Сумма углов
n=4		2	$180 \cdot 2$
n=5		3	$180 \cdot 3$
n=6		4	$180 \cdot 4$
n=7		5	$180 \cdot 5$

## Приложение 2. Задачи для формирования исследовательских умений

**Задание 1.** Исследуйте вопрос о выпуклости четырехугольника, в котором две стороны параллельны. Используйте для этого динамическую модель



**Построение:**

1. Провести отрезок  $AB$ ;
2. Отметить точку  $C$ , не лежащую на  $AB$ ;
3. С помощью "Построения" провести через точку  $C$  прямую  $CD$  параллельно  $AB$
4.  $ABCD$  - искомый четырехугольник

**Поиск ответа на вопрос:**

В любом выпуклом четырехугольнике каждая его диагональ делит его на два треугольника.

Чтобы определить вид четырехугольника  $ABCD$  проведем диагонали  $AD$  и  $BC$ . В первом случае получили два треугольника  $ABD$  и  $ACD$ . Далее будем перемещать точки  $C$  и  $D$  и наблюдать за треугольниками (сохраняются или исчезают)

После изменения четырехугольника можно будет сделать вывод: четырехугольник у которого две стороны параллельны - выпуклый

Рисунок 12. Задание 1

**Задание 2.** Как определить - является ли четырехугольник параллелограммом? Проверь, все ли четырехугольники на чертеже являются параллелограммами?

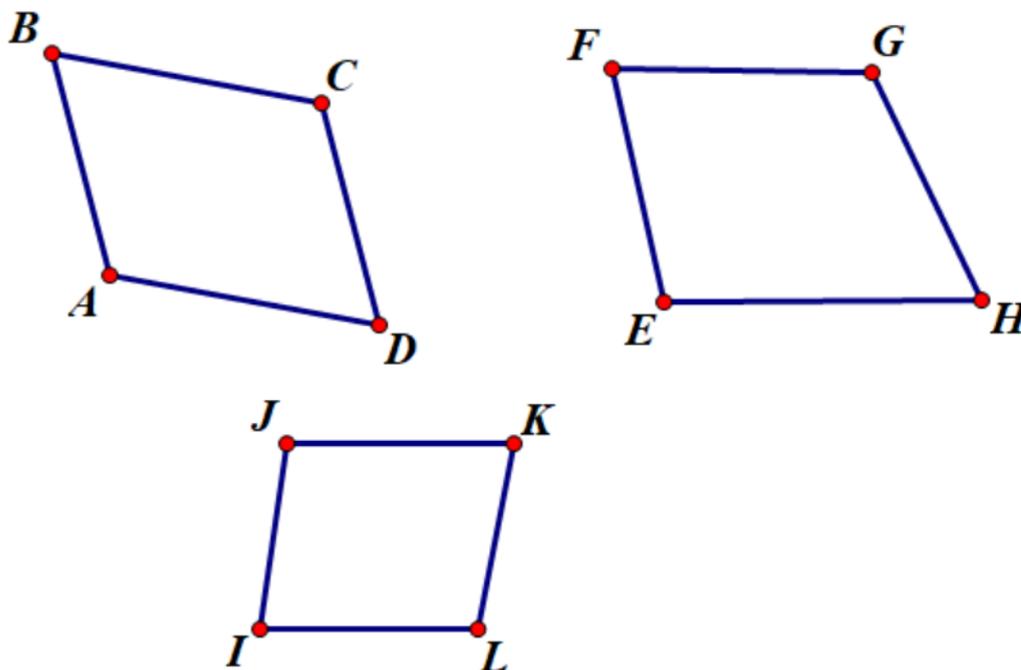


Рисунок 13. Задание 2

Чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо воспользоваться определением параллелограмма и поочередно проверить параллельность противоположных сторон. Для того чтобы проверить параллельность в среде “Живая математика” необходимо выделить сторону и вершину ей не

принадлежащую, затем с помощью кнопки Построение провести параллельную прямую. Если построенная прямая содержит анализируемую сторону, то проверяем две другие стороны аналогичным образом.

**Задание 3.** Постройте квадрат и прямоугольник с периметром, равным 16 условным единицам.

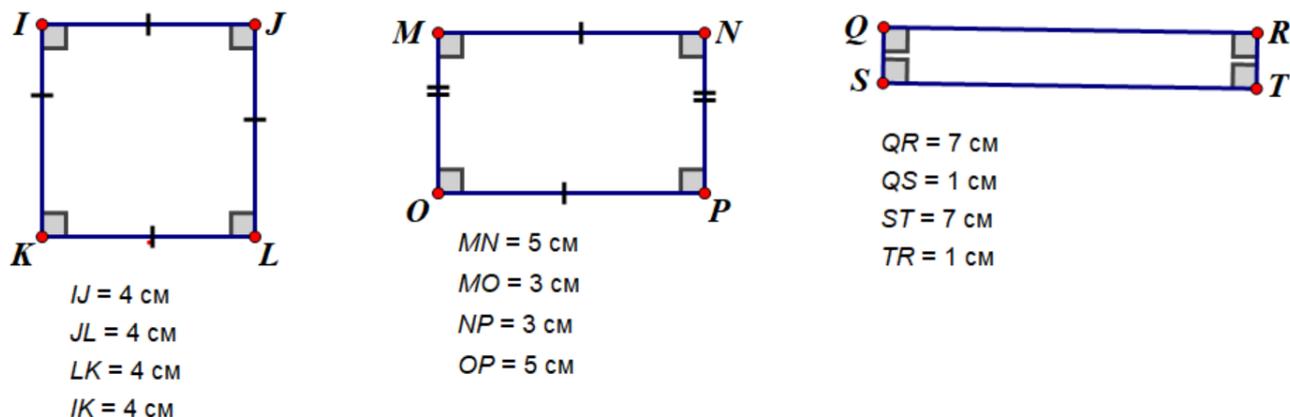
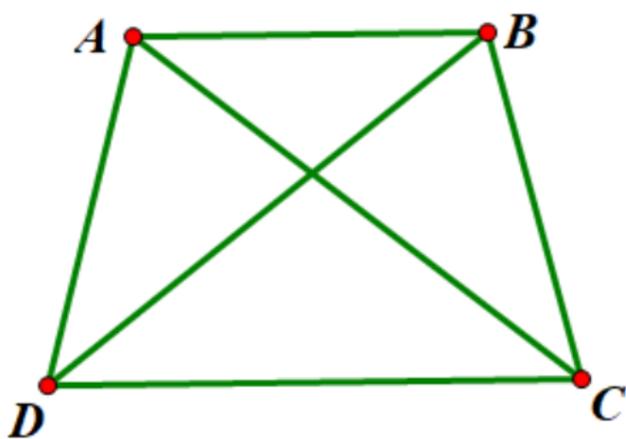


Рисунок 14. Задание 3

С помощью среды “Живая математика” обучающиеся смогут увидеть, что при заданном периметре квадрат будет единственным, но прямоугольников, удовлетворяющих данному условию бесконечное множество.

**Задание 4.** Исследуйте вопрос о виде трапеции, если ее диагонали равны. Используйте динамическую модель



1. Строим произвольный отрезок  $AB$
2. Строим окружность 1 ( $A, AC$ ), где  $AC$ -произвольный радиус
3. Строим окружность 2 ( $B, AC$ )
4. С помощью Построения проводим через точку  $C$  прямую параллельно  $AB$
5. Точка  $D$  - точка пересечения окружности 1 и прямой  $CD$
6.  $ABCD$  - искомая трапеция

Рисунок 15. Задание 4

### Приложение 3. Анкеты для диагностики исследовательских компетенций у обучающихся

#### Оценка сформированности учебно-познавательной компетенции

Инструкция. Ответьте, пожалуйста, на предложенные вопросы, оценивая варианты ответов по 3-х бальной шкале по степени их значимости для Вас (1 балл – минимальная значимость, 3 балла – максимальная значимость).

Отметьте галочкой выбранный Вами вариант ответа.

№	При выполнении и представлении результатов исследования можете ли Вы самостоятельно	Шкала значимости		
		1	2	3
1	Обозначить противоречие, лежащее в основе проблемы исследования?			
2	Сформулировать проблему Вашего исследования в соответствии с выделенным противоречием?			
3	Сформулировать тему исследования, отражающую проблему данного исследования?			
4	Выделить объект и предмет исследования в соответствии с его темой?			
5	Сформулировать цель и задачи исследования?			
6	Сформулировать гипотезу исследования?			
7	Выбрать и использовать основные методы исследования?			
8	Использовать различные источники информации?			
9	Грамотно оформить и представить полученные результаты исследования в виде устного выступления или письменной работы?			
10	Пользоваться современными технологиями и компьютерными средами для проведения эксперимента?			
11	Сформулировать критическое суждение?			

#### Оценка сформированности информационной компетенции

№	Умеете ли Вы?	Шкала значимости		
		1	2	3
1	Работать с научной литературой, осуществлять поиск информации с помощью			

	справочно-правовых систем (например, Google, Яндекс) для решения конкретных исследовательских задач?	
2	Владение навыками работы в математических компьютерных программах (Живая математика, GeoGebra)?	
3	Владение овладеть навыками работы в среде текстового редактора MS Word	
6	Возможность создания презентаций в MS Power Point	
7	Работать в сети Internet, использовать информационные и коммуникационные службы Internet для решения практических исследовательских задач?	

### **Оценка сформированности ценностно-смысловой компетенции**

№	Что Вас побуждает заниматься исследовательской деятельностью?	Шкала значимости		
		1	2	3
1	Осознанное желание участвовать в исследовании			
2	Желание овладеть исследовательскими умениями и методами			
3	Желание участвовать в конкурсах исследовательских работ, выступать на научных конференциях, семинарах			
4	Желание активно участвовать в обсуждении результатов исследовательских проектов			
5	Желание реализовать творческие способности и возможность повысить познавательную активность			
6	Одобрение со стороны педагогов, одноклассников, родителей			
7	Ценность образования как фактора личностной успешности			
8	Стремление к успеху			

**Приложение 4. Анкета “Интерес обучающихся к возможностям реализации собственной исследовательской активности в дальнейшем обучении”**

№	При дальнейшем обучении будет ли Вам интересно...?	Шкала значимости		
		1	2	3
1	Использовать методы/приемы исследовательской деятельности в решении конкретных исследовательских задач?			
2	Работать с научной литературой, справочными материалами в библиотеке, осуществлять поиск информации с помощью справочно-правовых систем?			
3	Участвовать в конкурсах исследовательских работ?			
4	Выступать на научных конференциях, семинарах?			
5	Активно участвовать в обсуждении результатов исследовательских проектов на научных конференциях, семинарах?			
6	Принять участие в публикации тезисов и статей?			
7	Участвовать в будущих профессиональных конкурсах исследовательской направленности?			
8	Заниматься научно-исследовательской деятельностью для углубления и расширения своих профессиональных контактов и будущих профессиональных достижений?			
9	Продолжить обучение в ВУЗе?			

Обработка результатов:

**Низкий уровень** ниже 50%

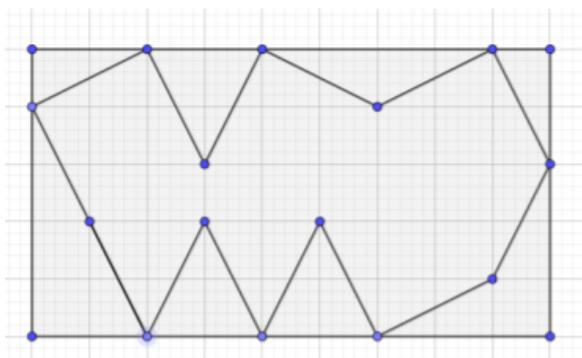
**Средний уровень** от 50% до 75%

**Высокий уровень** от 75% и выше

## Приложение 5. Задания для 8 класса на VIII Международном турнире по экспериментальной математике

### Задание 2.

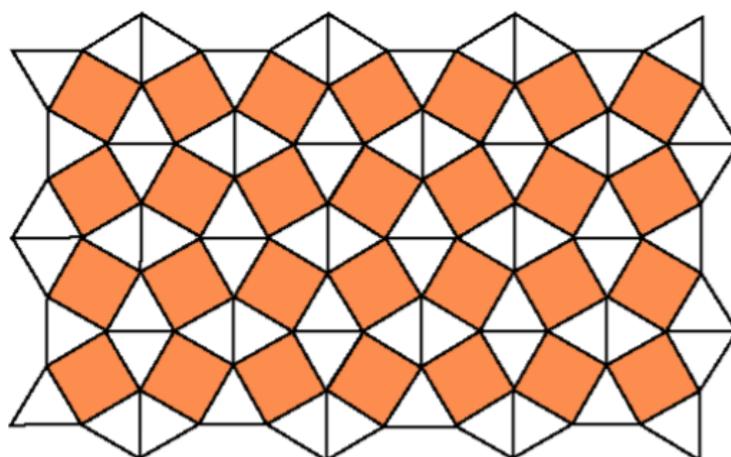
Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника  $5 \times 9$ , идущие по диагоналям прямоугольников  $1 \times 2$ . На рисунке изображен пример пути, проходящего по 14 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать самый длинный путь. Представьте результат в виде рисунка.



Баллы	Критерии
3	Представлен вариант замкнутого пути, состоящий из отрезков, идущих по 18 диагоналям прямоугольников $1 \times 2$ .
5	Представлен вариант замкнутого пути, состоящий из отрезков, идущих по 20 диагоналям прямоугольников $1 \times 2$ .
7	Представлен вариант замкнутого пути, состоящий из отрезков, идущих по 22 диагоналям прямоугольников $1 \times 2$ .
10	Представлен вариант замкнутого пути, состоящий из отрезков, идущих по 24 диагоналям прямоугольников $1 \times 2$ .

### Задание 4.

Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек. Рассмотрите на рисунке пример паркета, состоящего из квадратов и правильных треугольников. Найдите повторяющуюся часть изображения и создайте инструмент GeoGebra для быстрого построения такого паркета любого размера. Проверьте его работу воссозданием такого же рисунка.



Баллы	Критерии
1	Построен орнамент, который представлен на рисунке, но построения являются динамически неустойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки)
5	Правильно построен орнамент, показана повторяющаяся часть орнамента, но не создан инструмент или он создан, но работает неправильно.
10	Правильно построен орнамент. Правильно создан инструмент для его построения.