МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Лукашова Марина Эдуардовна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой
д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина

____

(дата, подпись)

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук, В.В. Абдулкин

____

Дата защиты

03.07.2021 г.

Обучающийся
Лукашова М.Э.

____

Оценка__________________________________

Красноярск 2021

Содержание

Введение 3
Глава 1. Факультативные занятия по математике в средней школе 6
1.1 Факультативные занятия по математике в средней школе 6
1.2 Роль и место функций в школьном курсе математики 9
1.3 Методы и формы организации занятий на уроках математики. 11
Вывод по главе 1 14
Глава 2. Факультатив по теме «Исследование функций и построение графиков» 16
2.1 Общая характеристика факультатива по теме «Исследование функций и построение графиков» 16
2.2 Программа факультатива 18
2.2.1 Пояснительная записка 18
2.2.2 Планируемые результаты обучения 20
2.2.3 Учебно-тематическое планирование факультативного курса 23
2.2.4 Содержание факультативного курса 25
2.2.5 Методические рекомендации 29
Вывод по главе 2 34
Заключение 35
Список использованных источников 38
Приложение 1. План-конспекты уроков 41

Введение

Одним из основных направлений школьного курса математики является исследование ситуаций реального мира с использованием математических моделей, основной математической моделью является функция.

Функциональная линия является основным из четырех разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о числе, учение о функции, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она встречается на протяжении целого курса математики.

М. И. Башмаков в учебном пособии [8] утверждает, что понятие функции является фундаментальным математическим понятием, которое непосредственно связанно с реальной действительностью. В нем воплощены изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов и явлений. Функции, их свойства и графики образуют основу школьного курса математики. Вокруг функциональной линии группируется вся современная школьная алгебра, начала математического анализа и в некоторой степени геометрия. Специфичность данной линии заключается в ее возможности устанавливать в обучении внутрипредметные и межпредметные связи.

Также углубленное изучения раздела математики «Исследование функций и построение их графиков» необходимо школьникам так как эта тема включена в ЕГЭ (7, 12 и 17 задания), и имеет высокий балл при правильном решении.

При этом, на изучение материала по исследованию функций и построению их графиков, в школьной программе отводится малым объемом учебных часов. Материал изучается недостаточно полно, многие важные моменты, которые связаны с этим вопросом, упущены из программы.

Таким образом, отмеченные противоречия приводят к проблеме, решением которой может служить разработка факультативного курса по теме «Исследование функций и построение их графиков».

Объектом исследования является процесс профильного обучения математике в школе.

Предметом исследования является факультативный курс по математике на тему «Исследование функций и построение их графиков» в 10-м классе.

Цель: Разработать факультативный курс на тему «Исследование функций и построение их графиков».

В соответствии с целями, объектом и предметом исследования были сформулированы следующие **задачи** исследования:

1. На основе анализа научно-методической литературы, выявить наименее освещенные вопросы по теме «Исследование функций и построение графиков» в школьном курсе математики.

2. Теоретически обосновать форму и методы организации занятий.

3. Составить программу факультатива на тему «Исследование функций и построение их графиков».

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены и разрешены вопросы по теме «Исследование функций и построение их графиков», которые вызывают затруднения у учеников в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлены системы задач, уроков по обучению учащихся функциям и графикам в курсе алгебры основной школы, позволяющие рассмотреть данный раздел математики наиболее полно.

Методы исследования: теоретические (анализ научно-методической и учебной литературы по проблеме исследования); эмпирические (наблюдение, опрос, измерение, педагогический эксперимент).

Методологическую основу исследования составляют научные труды в области организации факультативных занятий. В работе использованы методы анализа и синтеза научной литературы, в том числе, анализ Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся функциям в курсе алгебры старшей школы. Выявлены основные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы. Определен инструментарий факультатива.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся функциям в курсе алгебры основной школы. Сформулированы методические рекомендации по обучению функциям в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены задачи ЕГЭ по теме исследования. Разработаны системы задач, уроков по обучению учащихся теме «Функции и их графики» в курсе алгебры основной школы.

Глава 1. Факультативные занятия по математике в средней школе.

1.1 Факультативные занятия по математике в средней школе.

Развитие личности учащихся, формирование сознания – цель современной школы. Без развития духовного мира ребенка и его нравственной воспитанности, достичь ее становится невозможно [28]. Полноценная познавательная деятельность школьника выступает в обучении главным условием развития у них инициативы, активной жизненной позиции.

В школе дополнительное образование, в том числе, факультативные курсы позволяют для учеников создать широкий эмоционально значимый фон усвоения всех школьный предметов. А также предметно ориентировать их в определении своих жизненных планов [16]. Залог формирования увлеченности наукой и техникой у учеников – это интеллектуальное удовлетворение, получаемое в самой деятельности. Без этого всесторонней развитие личности невозможно.

Важным является сам процесс обучения учеников, какие они освоят методы самостоятельного приобретения знаний и применения их на практике. Знания и умения, приобретенные ранее, всегда найдут себе применение в процессе выявления взаимосвязи объектов с другими математическими понятиями, при знакомстве с новыми объектами.

Именно факультативные занятия и их организация позволяют расширять кругозор учеников, формировать активный познавательный интерес к предмету, развивать их математическое мышление, воспитывать мировоззрение и ряд личностных качеств при помощи углубленного изучения математики.

Факультативный курс является необязательным курсом. Он изучается по желанию учеников средних общеобразовательных школ. Такие курсы – лишь дополнение к основному объему общеобразовательных знаний, который определяется учебным планом и учебными программами.

Проведение факультативных занятий началось с 1967 года, когда постановлением ЦК КПСС «О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы» от 10 ноября 1966 года [30] были введены факультативные курсы.

Факультатив помогает расширять знания школьников, которые они приобретают при изучении основных предметов. Кроме того, они позволяют формировать и развивать у учащихся культуру мышления, разносторонние интересы, умение самостоятельно добывать знания, приобщают школьников к самостоятельной исследовательской работе, дают возможность познакомиться со многими современными достижениями науки.

Эта особая организационная форма учебной деятельности связана с добровольным выбором предметов, наиболее интересующих учеников. В этом есть сходство факультативов с внеклассными формами познавательной деятельности. Тем не менее, факультативы являются отдельной частью учебно-воспитательной работы в школе. Они проводятся по специально разработанной учебной программе, в рамках отведенного для этого времени [16]. Руководитель факультативного курса может исключить из программы либо вынести на самостоятельное изучение некоторые из тем, уделить наибольшее внимание вопросам, вызывающих у школьников особый интерес на факультативе. Это и отличает факультативы от уроков.

Некоторые путают факультативные курсы с элективными. Имея некоторые сходства, они все же различаются. Например, факультативы не являются обязательными, а элективный курс необходимо выбрать каждому ученику. Так же факультативы проходят в дополнительное время и отличаются большей продолжительностью по времени.

Обычно, обучение на факультативах не оценивается, однако, Мельник А.А. указывает на то, что проведение оценивания деятельности школьников на факультативных занятиях необходимо [31]. Оно может проводиться учителями по урочной или зачетной системе. Итоговая оценка за весь курс выставляется на основе учета всех выполненных работ: защита реферата, выступление на семинаре, проведение исследований и т.д. Так же, оценка за факультатив должна выставляться в аттестат о среднем образовании наряду с оценками по основным предметам.

Факультативный курс позволяет учитывать индивидуальные особенности и способности школьников, повышать степень их самостоятельности путем подготовки докладов, рефератов, выполнения исследовательских или иных работ.

Введение факультативных занятий в школе приводит к разделению учебного материала на основной, являющийся обязательным для всех учеников, и дополнительный, который рассчитан на удовлетворение повышенных интересов отдельных учащихся. Такое разделение дает возможность повысить уровень общего образования, при этом не допуская перегрузки учащихся обязательными учебными предметами.

Так же, во время проведения факультативных занятий учителю можно апробировать новое содержание материала и методику обучения, новое оборудование, что способствует совершенствованию школьного образования.

Факультативы являются самостоятельным элементом учебно-воспитательной работы в школе, поэтому они могут дополняться внеклассными (кружковыми) занятиями, где школьники в еще большей степени расширяют и углубляют свои знания и умения.

Включение факультативов в школе в соответствии со способностями и желаниями школьников способствует повышению эффективности учебных занятий и является необходимым средством развития у них интереса к науке, а также делает их интересы более целенаправленными к определенным видам практической деятельности. Посещение факультативных занятий может обеспечить ученикам большие возможности для «профессиональной пробы», что безусловно способствует их профессиональному самоопределению.

Согласно федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования [27] результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей. Таких результатов поможет достичь посещение факультативного курса.

Таким образом, факультатив позволяет повысить уровень знаний учеников, при этом не перегружая их обязательными учебными предметами. Факультативный курс поможет заинтересованным школьникам сформировать и развить разносторонние интересы, культуру мышления, умение самостоятельно получать знания, приобщить их к самостоятельной исследовательской работе.

1.2 Роль и место функций в школьном курсе математики.

Большая часть курса алгебры в основной школе посвящена изучению функций, их графиков и свойств. Это связано с тем, что понятие функции имеет огромное прикладное значение. В нём, «как в зародыше, уже заложена вся идея овладения явлений природы и процессами техники с помощью математического аппарата». Многие из физических, химических, биологических процессов, без которых немыслима жизнь, являются функциями времени. Экономические процессы также представляют собой функциональные зависимости [13]. Важную роль функции играют в программировании, а также в проектировании различных механизмов, в расчётах на прочность и т.д.

В курсе алгебры и начале математического анализа в 10-11 классах предусматривается дальнейшее изучение элементарных функций и их свойств. Формирование функциональных представлений у школьников является основным стержнем программы и учебных пособий для этих классов.

Более глубоко изучить свойства всех функций, а именно, линейной, квадратной, степенной, тригонометрической, логарифмической и показательной, а также показать их практическое применение, возможно при введении понятий непрерывности, производной, предела и интеграла в старших классах. Это позволяет более тесно связать школьный курс геометрии с началами математического анализа, математику с химией. физикой, техникой [1].

Изучение поведения функций и построение их графиков является важным разделом математики. Многие задачи удается решить, свободно владея техникой построения графиков, и зачастую такой способ является единственным средством их решения. Кроме того, умение строить графики функций представляет большой самостоятельный интерес.

Целью изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10-11 классах является систематическое изучение функций и их графиков, раскрытие прикладного значения общих методов математики, которые связанны с исследованием функций.

В старших классах развитие представлений о функциях в курсе изучения алгебры и начал математического анализа помогает ученикам получить наглядные представления о непрерывности функций и ее разрывах, узнать о непрерывности различных элементарных функций на области их применения, научиться чертить графики и проводить полное их исследование, а также осознать их роль в жизни человека и явлениях реальной действительности.

Формирование графических умений имеет определяющее значение функциональной подготовки школьников основной школы. График функции обширно применяется при изучении большинства вопросов в школьном курсе, так как он является отличным средством наглядности. В средней школе функция от её графического представления неотделима.

График функции является основной опорой при формировании таких понятий, как убывание и возрастание функции, нечетность и четность, понятие экстремума, обратимость функции [9]. Школьники сталкиваются с трудностями в геометрической наглядности, не имея чётких представлений о графике. Без этого невозможно формирование таких ведущих понятий курса алгебры и начал математического анализа, как производная функции, непрерывность, интеграл.

Умение строить графики часто помогает решать многие уравнения и неравенства, однако, многие ребята с такими заданиями не справляются.

В школьном курсе алгебры и начал анализа на исследование функций и построение графиков элементарными способами отводится два часа. Рассматриваются простые примеры, но даже при их решении учащиеся часто испытывают затруднения при нахождении промежутков монотонности, экстремумов функции. После изучения понятия производной находят промежутки возрастания (убывания) функции, критические точки, а на исследование функции по полной схеме и построение графиков отводится три часа, поэтому рассматриваются простые примеры исследования функции. Однако, учащихся заинтересовывает данная тема, хоть и вызывает у них затруднения.

Таким образом, успешность усвоения большинства разделов школьного курса математики зависит от того, насколько качественно школьники усвоили материал, связанный с функциями и их графиками.

1.3 Методы и формы организации занятий на уроках математики.

В наше время Федеральный Государственный Образовательный Стандарт предполагает на всех учебных предметах в школе использование информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) и электронных устройств [27]. В классах на месте центральной большой меловой доски установлены электронные доски, а место для меловой доски либо не остается, либо она занимает одну треть от прежней и расположена на боковой стене класса. За счет наглядности и быстроты выполнения работы, применение на уроках математики ИКТ дает возможность учителю сократить время на изучение материала и исследовать знания учеников в интерактивном режиме. Это увеличивает результативность обучения, помогает реализовать весь потенциал личности – морально-нравственный, познавательный, творческий, коммуникативный и эстетический, способствует развитию информационной культуры учащихся и их интеллекта. Однако, из публицистических статей [33] мы видим ситуацию, которая беспокоит преподавателей высших учебных заведений: уровень знаний абитуриентов и первокурсников в вузах очень далек от необходимого уровня знаний для успешного изучения вузовской программы.

По мнению новаторов, «интерактивные панели» расширяют возможности подачи материала и делают уроки интереснее. Однако, ряд ученых отмечают негативное влияние излучения на здоровье учеников в классе от работающих в течении всего учебного времени электронных досок [32]. А многие родители обеспокоены – дети жалуются на усталость глаз и снижение зрения.

Исследования о воздействии интерактивных досок на организм ребенка, на его психику не проводились, а санитарно-эпидемиологическое заключение об их безопасности отсутствует.

Кроме того, как на первый взгляд кажется, не значительный момент протирания меловой доски перед каждым уроком носит большой воспитательный, социальный и прикладной характер для учеников.

К тому же, написание текста от руки на меловой доске развивает глазомер, моторику и координацию у школьников. При таком письме задействованы участки мозга, которые отвечают за интерпретацию сенсорных ощущений и формирование речи, отсюда улучшается навык чтения. Орфография, пунктуация и грамматика также находят свое развитие при письме от руки.

Вместе с тем, различные математические программы на нашем факультативе так же не будут использоваться. Например, математическая программа GeoGebra, позволяющая строить графики функций онлайн, на наш взгляд, лишает учеников думать самостоятельно, подбирать точки, считать. Использование подобных программ, на наш взгляд, затормаживает процесс наглядно образного мышления. Однако, данную программу можно было бы использовать в качестве проверки полученного нами графика, но мы, все же, предпочтем просто подобрать несколько других точек.

Существуют и другие математические программы, например, «Живая математика» или «Математический конструктор». Их возможности в достаточной мере разнообразны – динамические геометрические построения, функции и графики, измерения и вычисления, создание заданий с автоматизированной проверкой и т. д. Они так же позволяют создавать интерактивные модели, объединяющие конструирование, динамическое варьирование, эксперимент, и могут быть использованы на всех этапах математического образования. Однако, такие программы имеют и некоторые минусы: они лишают школьников возможности проводить все мыслительные операции в голове, отсюда слабость в памяти, затруднения при переходе от одной операции к другой, отсутствие гибкости мышления. К тому же, использование различных программ предполагает работу с компьютерами, что опять же, сказывается на усталости глаз и снижении зрения школьников.

Несмотря на позитивный опыт применения ИКТ в обучении математике, тем не менее стоит уделять внимание и традиционным методам работы.

Вывод по главе 1.

В первой главе были сформулированы виды, цели, задачи и функции факультативных курсов и выделены требования по разработке факультативных курсов. Устройство факультативных занятий способствует расширению кругозора учащихся, формированию познавательного активного интереса к изучаемому предмету, развитию математического мышления, а также, воспитывает мировоззрение и другие личностные качества средствами углубленного изучения математики. Такая организационная форма учебной деятельности позволяет школьникам добровольно выбирать предметы, представляющие для них наибольший интерес. Так ученики смогут повысить уровень знаний, не перегружаясь обязательными учебными предметами.

Программа факультатива содержит увеличенное количество сведений функционального содержания. Углубленное использование математических терминов, тем и разделов, включая начала математического анализа, подняло представления школьников о функциях на новый качественный уровень. На данный шаг существенное воздействие оказали такие педагоги-математики, как, А. Г. Мордкович, А. И. Маркушевич, А.Н. Колмогоров и другие. Они были убеждены в главном образе понятия функции в математике, напрямую связанного с реальностью. Являясь математической моделью, функция позволяет исследовать и описывать различные зависимости среди реальных величин, а также познавать окружающий нас мир [15].

Тема факультативного курса имеет огромное прикладное значение. Благополучное усвоение многих разделов школьного курса математики зависит от того, как усвоены знания и умения учениками, который они получают при изучении функций и их графиков. Кроме того, развитие представлений о функциях в курсе изучения алгебры и начал математического анализа в старших классах помогает школьникам осознать их роль в человеческой практике и изучении явлений реальной действительности.

Таким образом, факультативный курс по теме «Исследование функций и построение графиков в старших классах средней школы» поможет старшеклассникам более детально разобраться в отдельных элементах исследования функций и повысить уровень своих знаний в данной области.

Глава 2. Факультатив по теме «Исследование функций и построение графиков».

2.1 Общая характеристика факультатива по теме «Исследование функций и построение графиков».

На факультативном курсе по теме «Исследование функций и построение их графиков» следует сочетать различные формы работы с учениками, а именно, индивидуальную и коллективную, сложные задачи разделять на несколько простых, обсуждая результаты их выполнения, формировать заинтересованность в результатах труда. На факультативном курсе задания следует подбирать, опираясь на знания и умения всей группы, а не для конкретного ученика [13].

Учителю необходимо формировать навыки самостоятельной работы с учебной литературой, научить школьников пользоваться литературой; формировать умение наблюдать, уметь разнообразить формы работы; создавать проблемные ситуации и принимать верные решения; формировать у школьников умения решать различной трудности задачи, а также составлять их самостоятельно [19].

Для обучения на факультативе отводится определенное количество часов, что отражено в сборнике нормативных документов для средних общеобразовательных школ. Наш факультативный курс рассчитан на 23 часа и проводится 7-8 уроками при пятидневной учебной неделе.

На факультативных занятиях методы и приемы обучения нужно подбирать, опираясь на содержание самого факультативного курса, уровень подготовки школьников, а также их интерес к различным разделам изучаемой программы [7]. Основной критерий при выборе методов – это активизация мышления школьников, развитие решительности и самостоятельности в различных формах её проявления.

Доклады учеников, практические работы, обсуждение заданий по дополнительной литературе – все эти разнообразные формы проведения занятий могут использоваться на факультативе. Практические занятия представляют из себя целенаправленную работу по формированию и закреплению у школьников умений и навыков при решении основных типов задач. На семинарских занятиях обобщается пройденный материал, повторяется и углубляется. Они служат приобретению новых знаний по своим дидактическим целям, обучению самостоятельному применению знаний в нестандартных ситуациях.

Изучение курса «Исследование функций и построение графиков» существенно расширяет кругозор учащихся. Творческие способности учеников помогает развить активное использование разнообразных задач на каждом этапе учебного процесса. На таком факультативном курсе складываются навыки и умения умственного труда, такие, как планирование работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическая оценка результатов [10]. Авторы контрольно-измерительных материалов ЕГЭ уделяют много внимания проверке умений читать по графику свойства функции, использовать их в решении уравнений и неравенств: задачи по теме «Функции и их графики» включены в основной государственный экзамен: они встречаются в заданиях №7, 12, 17 [26]. Поэтому, в процессе обучения ученики должны получить навык изложения своих мыслей ясно, лаконично и ёмко, приобрести навыки грамотного и аккуратного выполнения математических записей.

В группу факультативного занятия учащиеся зачисляются по желанию. Они обязаны без пропусков посещать занятия, изучая весь курс и выполнять все предложенные задания. Посещаемость учеников, а также успехи в прохождении курса, учителю необходимо отмечать в специальном классном журнале.

Курс является открытым, в него можно добавлять новые фрагменты, заменять какие-либо сюжеты другими, развивать тематику. Факультативный курс «Исследование функций и построение их графиков» позволит повысить знания школьников по способам задания функций, их свойствам, а также раскроет перед учениками новые знания, не входящие в школьную программу. Факультатив предназначен для обучения решению задач, выходящих за рамки обязательной программы обучения математики для 10-х классов, которые стремятся повысить свой уровень математических знаний.

Целью программы данного курса является создание целостного представления о функциях и существенное расширения ассортимента задач, посильных для учеников. Она, лишь развитие системы ранее приобретенных программных знаний. Свойства, включенные в курс, и их доказательства не вызовут трудности у школьников, т.к. не содержат громоздких выкладок, а каждое предыдущее готовит последующее. При направляющей роли учителя школьники могут самостоятельно сформулировать новые для них свойства и даже доказать их.

Факультативные занятия также предоставляют большие возможности школьникам при подготовке к предметным олимпиадам, выступлениям в школьных тематических и вечерах, и т.д [23]. На внеклассную работу факультатив также оказывает положительное воздействие.

Таким образом, программа данного факультативного курса в общеобразовательной школе располагает к самостоятельному поиску и направлена на повышение интереса к изучению предмета.

2.2 Программа факультатива

2.2.1 Пояснительная записка.

Для благополучного усвоения материала немалое значение имеет качественный подбор задач. Для школьников занятия факультатива необходимы быть увлекательными. Интересное и занимательное изложение материала помогает легче и лучше разобраться в сложных научных понятиях и проблемах, освоить весь факультативный курс, включающий методы и идеи математической науки [29].

Цель учителя в этом отношении – добиться от учеников понимания того, что они подготовлены к работе над сложными проблемами, но для этого не обойтись без трудолюбия, заинтересованности предметом, владения способностью организации работы.

Цели факультативного курса «Исследование функций и построение графиков»:

1. Расширить и углубить знания учащихся в разделе математики – «Исследование функций и построение графиков».

2. Повысить уровень математической грамотности учащихся посредством решения более сложных задач.

Задачи факультативного курса «Исследование функций и построение графиков»:

обучающие: (формирование познавательных и логических УУД)

- Сформировать "базу знаний" по теме «Функции и их графики», позволяющую легко пользоваться математическим материалом;

- Развить навыки построения графиков функций любой сложности.

- Научить полностью исследовать различные функции.

- Научить продуктивно распределять свое время, которое выделяется на выполнение конкретного задания.

- Подготовить к сдаче ЕГЭ с положительным итогом по математике.

развивающие: (формирование регулятивных УУД)

- научиться определять цель – целеполагание, как постановку учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимся, и того, что еще неизвестно;

- грамотно распределять свою работу, планировать и составлять план последовательности действий;

- оценивать себя – осмысление школьниками того, что уже изучено, а что еще требует тщательного усвоения, понимание качества и уровня своих знаний;

воспитательные: (формирование коммуникативных и личностных УУД)

- формировать способность внимательно слушать и вступать в диалог с учителем и одноклассниками;

- устанавливать школьниками связь среди цели учебной деятельности и ее причиной, иными словами, между продуктом учения, побуждающим деятельность, и тем, ради чего она осуществляется;

- участвовать в коллективном обсуждении, при этом усваивать навык осознанно и произвольно излагать свои мысли в устной и письменной форме;

- воспитывать аккуратность и ответственность.

Таким образом, опираясь на содержание факультативного курса, следует подбирать целесообразные приемы и методы обучения. Исследовав степень развития и подготовленности учеников, следует подбирать задания, имеющие важность не только для конкретного ученика, но и для всего класса.

2.2.2 Планируемые результаты обучения.

Рабочая программа факультативного курса включает ведущие темы основной школы, включаемые в задания ЕГЭ и темы, которые учащимся предстоит изучить в 10 классе в курсе алгебры и начала анализа и геометрии. Темы факультативных занятий будут определяться изучаемым на уроках алгебры и геометрии материалом и данной рабочей программой.
В результате изучения данного курса учащиеся должны уметь:

- Знать основные определения и правила к различным видам функций;
- Строить простые и сложные графики;
- Вычислять производную первого и второго порядка;
- Применять производную к исследованию функции;
- Вычислять пределы и применять их к исследованию функций;
- Исследовать различные функции по всем пунктам;
- Находить более рациональные способы решения задач;
- Анализировать, делать выводы.

Для реализации программы факультатива «Исследование функций и построение графиков» используются лекции, практикумы по решению задач.
Планируемые результаты обучения включают такие категории познавательной области, как:
Знание/понимание:
владение понятиями; использование различных математических языков (символического, графического); владение всевозможными эквивалентными

представлениями; распознавание (на основе определений, известных свойств, сформированных представлений).

Умение применить алгоритм:

использование основных правил действий с числами и алгебраическими выражениями; применение формулы как алгоритма вычислений; решение основных типов неравенств, систем, уравнений, задач.

Умение решить математическую задачу:

преобразование связей между известными фактами, задания, при решении которых необходима актуализация системы знаний; умение распознать стандартную задачу в измененной формулировке, включение известных понятий, приемов и способов решения в новые связи и отношения.

Применение знаний в жизненных, реальных ситуациях:

Умение решать задачи, представляющие собой практическую ситуацию, знакомую ученикам и близкую их жизненному опыту [25].

Планируемые результаты в освоении школьниками УУД по завершении обучения.

Личностные	Социально-предметные УУД	Метапредметные УУД		
		Регулятивные	Познавательные	Коммуникативные
Положительное отношение к урокам математики; умение признавать собственные ошибки; формирование ценностных ориентаций (саморегуляция, стимулирование, достижение и др.); формирование математической компетентности. В сфере личностных ууд у выпускников будут	Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; строить графики сложных функций; определять вид функции; вычислять производную первого и второго порядка; применять производную к	Отслеживать цель учебной деятельности (с опорой на маршрутные листы) и внеучебной (с опорой на развороты проектной деятельности); учитывать ориентиры, данные учителем, при освоении нового учебного материала; проверять результаты вычислений; адекватно	Анализировать условие задачи (выделять числовые данные и цель — что известно, что требуется найти); сопоставлять схемы и условия текстовых задач; устанавливать закономерности и использовать их при выполнении заданий;	Сотрудничать с товарищами при выполнении заданий: устанавливать и соблюдать очерёдность действий, сравнивать полученные результаты, выслушивать партнера, корректно сообщать товарищу об ошибках; задавать вопросы с целью получения нужной

сформированы внутренняя позиция обучающегося, адекватная мотивация учебной деятельности, включая учебные и познавательные мотивы, ориентация на моральные нормы и их выполнение.	исследованию функции; находить экстремумы функции; вычислять пределы; знать свойства тригонометрических функций; вычислять логарифмы;	воспринимать указания на ошибки и исправлять найденные ошибки. - оценивать собственные успехи в вычислительной деятельности; - планировать шаги по устранению пробелов (знание состава чисел). В сфере регулятивных ууд выпускники смогут овладеть всеми типами уч.действ.направленных на организацию своей работы в ОУ и вне его, включая способность принимать и сохранять учебную цель и задачу, планировать ее реализацию, контролировать и оценивать свои действия, вносить соответствующие коррективы и их выполнение	осуществлять синтез числового выражения, условия текстовой задачи (восстановление условия по рисунку, схеме, краткой записи); сравнивать и классифицировать изображенные предметы и геометрические фигуры по заданным критериям; понимать информацию, представленную в виде текста, схемы, таблицы. видеть аналогии и использовать их при освоении приемов вычислений; конструировать геометрические фигуры из заданных частей; мысленно делить геометрическую фигуру на части; сопоставлять информацию, представленную в разных видах; выбирать задание из предложенных, основываясь на своих интересах. В сфере познавательных УУД выпускники научатся воспринимать и	информации; организовывать взаимопроверку выполненной работы; высказывать свое мнение при обсуждении задания В сфере коммуникативных ууд выпускники приобретут умения учитывать позицию собеседника(партнерства), организовывать и осуществлять сотрудничество и кооперацию с учителем и сверстниками, адекватно воспринимать и передавать информацию, отображать предметное содержание и условия деятельности в сообщениях, важнейшими компонентами которых являются тексты заданий.

			анализировать сообщения и важнейшие их компоненты-тексты, использовать знаково-символические средства, в том числе овладевают действием моделирования, а также широким спектром логических действий и операций, включая общие приемы решения задач	

2.2.3 Учебно-тематическое планирование факультативного курса

Факультативный курс по теме «Исследование функций и построение их графиков» содержит 12 тем и рассчитан на 23 часа. На изучение каждой темы отводится 1-2 часа в неделю. По итогу курса проводится контрольный тест.

Учебно-тематическое планирование факультативного курса по теме «Исследование функций и построение графиков» в 10 классе:

№ урока	**Тема занятий**	**Количество часов**
	Модуль 1. Введение.	
	Повторение	1
	Диагностический тест.	1
	Модуль 2. «Исследование функций без применения производной».	
1	Исследование функций и построение графиков без применения производной.	2

2	Исследование дробно-рациональных функций и построение их графиков без применения производной.	2
3	Исследование тригонометрических, показательных и логарифмических функций и построение их графиков без применения производной.	2
4	**Модуль 3.** Повторение материала по теме «Применение производной к исследованию функций и построению графиков».	1
5	Экстремумы	1
6	Выпуклые функции. Точки перегиба.	1
7	Исследование рациональных функций и построение их графиков.	1
8	Исследование иррациональных функций и построение их графиков.	2
9	Исследование смешанных функций: Исследование смешанных тригонометрических функций и построение их графиков.	2
10	Исследование смешанных показательных функций и построение их графиков.	2
11	Исследование смешанных логарифмических функций и построение их графиков.	2
	Модуль 4. «Задания ЕГЭ»	
	12е задание КИМ ЕГЭ	2
	Модуль 5. Итоговое занятие.	1
Итого часов:		23

2.2.4 Содержание факультативного курса.

Программа факультатива рассчитана на один месяц обучения 10 класса и содержит следующие темы:

Повторение. 1 час

Повторение материала по исследованию функции и построению их графиков. Проверка уровня знаний школьников.

Исследование функций и построение графиков без применения производной. 2 часа

Основные определения. Графики функций. Стационарные и критические точки, точки экстремума, точки пересечения графика с осью абсцисс и осью ординат, точки разрыва функции.

Исследование дробно-рациональных функций и построение их графиков без применения производной. 2 часа

Определение рациональной функции. Правила работы со степенями числителя и знаменателя функции. График функции.

Исследование тригонометрических, показательных и логарифмических функций и построение их графиков без применения производной. 2 часа

Определение тригонометрической функции. Тригонометрическая окружность. Область определения и область значений. Периодичность тригонометрических функций. Преобразование графиков.

Повторение материала по теме «Применение производной к исследованию функций и построению графиков». 1 час

Определение производной функции. Экстремумы функции. Графики функции.

Экстремумы. 1 час

Критические точки, стационарные точки, экстремум и точки экстремума. Производная первого порядка.

Выпуклые функции. Точки перегиба. 1 час

Производная второго порядка. График функции. Выпуклые точки. Точки перегиба.

Исследование рациональных функций и построение их графиков. 2 часа

Производная первого и второго порядка. Понятие рациональной функции. Алгоритм исследования функции. График функции.

Исследование иррациональных функций и построение их графиков. 2 часа

Понятие иррациональной функции. График функции. Экстремумы функции. Дифференцирование.

Исследование смешанных тригонометрических функций и построение их графиков. 2 часа

Понятие тригонометрической функции. Свойства тригонометрических функций. Тригонометрическая окружность. График функции.

Исследование смешанных показательных функций и построение их графиков. 2 часа

Понятие показательной функции. Свойства показательной функции. Производная первого порядка. График функции.

Исследование смешанных логарифмических функций и построение их графиков. 2 часа

Понятие логарифмической функции. Свойства логарифмической функции. Логарифмы. Натуральный логарифм. График функции.

Задания ЕГЭ. 2 часа

12ое задание КИМ ЕГЭ.

Итоговое занятие. 1 час

Диагностический тест.

Организация факультативного курса по теме «Исследование функций и построение графиков», предусматривает следующие этапы:

1. Педагог обеспечивает учащихся материалами для ознакомления с возможными темами проектной деятельности: учебники, задачники, дополнительная литература.

2. Консультирование по вопросам, вызывающие затруднения.

3. Постановка задач, которые необходимо осуществить в ходе факультативного курса, постановка проблемной ситуации.

4. Проведение диагностического теста.

5. Подведение итогов.

Виды и формы контроля:

Виды контроля: промежуточный, итоговый.

Формы контроля: контроль знаний учащихся в период изучения данного факультативного курса контроль знаний учеников будет производиться с помощью письменных работ, дающих возможность установить степень достижения промежуточных результатов и выявляющие сбой в прохождении программы в любой момент процесса обучения, индивидуальной работы у доски, устных ответов учащихся, проверки домашнего задания, индивидуальной работы по карточкам.

В процессе преподавания курса «Исследование функций и построение графиков» основное внимание следует уделять не заучиванию формул или основных видов функций, а развитию у учащихся умения самостоятельно определять вид любой сложности функций и представлять примерный график, без затруднения проводя полное исследование. Поэтому методика преподавания должна базироваться на рассмотрении основных функциональных понятий в контексте с графическими определениями.

Программа факультативного курса содержит пять модулей:

1. Введение.
2. «Исследование функций без применения производной»;
3. «Исследование функций с применением производной».
4. «Задачи ЕГЭ».

5. Итоговое занятие.

Модуль «Введение» содержит организационные моменты и включает себя первый диагностический тест.

В модуле «Исследование функций без применения производной» отрабатываются навыки исследования функции простыми способами. В этом блоке контролируется владение главными алгоритмами, знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), умение пользоваться математическим текстом, применять знания к решению математических задач, которые не сводятся к прямому использованию алгоритма.

В конце модуля проводится итоговый тест, который нацелен на проверку владения материалом на повышенном уровне. Так учитель сможет определить хорошо успевающих школьников, выявить наиболее подготовленную часть учеников. Задания итогового теста направлены на проверку таких качеств математической подготовки школьников, как:

- уверенное определение вида функции;
- умение исследовать функцию любого вида;
- умение строить график;
- умение грамотно записать решение на математическом языке, приводя при этом требуемые обоснования и пояснения;
- владение широким спектром приемов и способов рассуждений.

Модуль «Исследование функций с применением производной». В этом блоке повторяются правила дифференцирования, и отрабатывается навык исследования функций с помощью производной.

Задания данного модуля направлены на проверку умения исследовать функцию, применяя аппарат производной; умения правильно строить график и читать его.

Модуль «Задачи ЕГЭ» содержит задачи КИМ ЕГЭ. В этом блоке отрабатывается навык решения 12го задания ЕГЭ.

Модуль «Итоговое занятие» предполагает проведение контрольного теста, результаты которого будут отражать уровень сформированности знаний и умений учащихся, по итогу прохождения курса.

На каждом занятии учитель предлагает задачи по соответствующим темам, рассматривает вместе с учениками рациональные способы их решений, дает школьникам возможность проявить самостоятельность в выполнении некоторых заданий, а также предлагает дополнительные упражнения на дом.

2.2.5 Методические рекомендации

Каждую новую тему на факультативных занятиях целесообразно разбивать на отдельные этапы, а именно – модули. Каждое новое занятие начинается с повторения основных теорем и формул по теме урока, а также рассмотрения новых, которые не входят в основную программу, но являются необходимыми при решении некоторых задач на экзамене. Можно использовать таблицы с формулами, рисунками (раздаточный материал), это позволит сэкономить время и облегчит восприятие нового материала.

На занятиях планируется разбор базовых наглядных задач, в решении которых используются основные алгоритмы, формулы и теоремы данного раздела и решения различными способами, повторяется алгоритм решения задач по теме. Учителю необходимо ответственно уделять внимание разбору типичных ошибок учащихся при решении заданий.

На занятиях выполняются решения задач, разбивая класс на группы и самостоятельно. Рекомендуется начинать решения задач с простого, завершая сложным под руководством учителя.

Учитель не следует исключать уроки парной работы, так школьники смогут подготовиться к самостоятельной и контрольной работе, защите проекта.

Желание учеников работать в индивидуальном режиме учителю целесообразно поощрять. На протяжении всего факультативного курса учителю необходимо стремиться поддерживать активный диалог с учениками.

Учитель регулярно проводит мониторинг достижения обязательных результатов обучения, вовремя осуществляет коррекцию знаний учащихся.

Преемственность в содержании, методах и формах организации занятий на факультативе по математике должна определяться целями обучения математики, всестороннего развития и воспитания учащихся.

Взаимосвязанное построение уроков и факультативных занятий по математики не должно противоречить дидактическим принципам в обучении математики [20].

Не должно быть противоречий с научно обоснованными психолого-педагогическими требованиями, направлениями такими, как: изучение новых понятий на основе известных; включение этих понятий в круг имеющихся у учащихся знаний; опора при изучении математических абстракций на конкретные модели; использование практических возможностей приложения математики не только на развивающем этапе изучения данного вопроса, но и в качестве мотива, обосновывающего необходимость изучения этого раздела, вопроса.

Необходимо избежать несогласованности и с директивными нормами организации работы общеобразовательной школы. Например, нельзя часы, отведенные на факультативные занятия, использовать для внеклассной работы или дополнительных занятий.

Основным условием продуктивности взаимосвязанного построения факультативного занятия по математике должна быть в конечном итоге эффективность неразрывно связанных друг с другом процессов обучения, развития и воспитания детей.

Так как результативность учебно-воспитательного процесса зависит главным образом от количества уроков, то преемственность и взаимосвязь факультативных занятий, уроков необходимо рассматривать в следующей последовательности: уроки математики – внеклассные занятия – факультативные занятия. Необходимо подчеркнуть, что каждое последующее звено следует рассматривать в связи с завершением задач, возложенных на предыдущее звено [25].

Одной из основных задач факультативных курсов является повышение подготовки школьников к выпускным экзаменам и приемным экзаменам в высшие и средние специальные учебные заведения [16]. Однако, не следует ставить эту задачу главной, поскольку тогда занятия сводятся к прямому натаскиванию, где ученики решают большинство задач, предлагавшихся на экзамене. Такой подход дискредитирует идею факультативных курсов, а занятия в такой форме мало эффективны.

Иное дело, если учитель на факультативных занятиях определяет вместе с учениками наиболее рациональную методику поиска решения, учит избегать типичных ошибок в решении, устанавливает границы применимости разных методов решения, в его записи и обосновании, в оформлении чертежа к задаче, учит находить эффективные приемы самоконтроля, сопоставлять различные способы решения одной и той же математической задачи, оценив их достоинства и недостатки. Но и предварительную самостоятельную работу школьников (вне занятий) по решению задач тоже организует. В этом случае сознательное и глубокое усвоение содержания, идей, методов школьного курса является в то же время лучшей подготовкой к экзаменам.

Таким образом, каждая из форм обучения: уроки и факультативные занятия, имеют свою ценность, у них есть свои специфические задачи.

Основным условием результативности взаимосвязанной организации факультативных занятий по математике должна быть в итоге эффективность неразрывно связанных друг с другом процессов обучения, развития и воспитания школьников [7].

Действующие школьные учебники, научно-популярная литература, различные сборники задач, математические справочники, а также учебные пособия по факультативным курсам и учебные пособия для учителей и учащихся, могут использоваться как учебно-методический комплекс по факультативным курсам.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учебники: Мордкович А.Г. и др. «Алгебра10», «Алгебра11», «Алгебра9». Учебник. Часть 2. Задачник. М. : Мнемозина

2. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. Уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева и др.– 3-е изд. -М.: Просвещение, 2016. - 463 с.

3. Алтынов П.И. Алгебра и начала анализа. Тесты. 10-11 кл.: Учебнометод. Пособие. – 4-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013.

4. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10 – 11 кл. сред. шк. / М. И. Башмаков. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 351 с.

5. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. -14-е изд. – М.: Просвещение, 2004. - 384 с.

6. Дидактические материалы: Александрова Л.А. Алгебра 10, 11. Самостоятельные работы. М. : Мнемозина

7. Мордкович А.Г. Алгебра, 10-11.Тесты. Мнемозина

8. Методические материалы: Мордкович А.Г. Алгебра, 10-11. Методическое пособие для учителей. М.: Мнемозина

9. Проблемы реализации ФГОС при обучении математике в основной и старшей общеобразовательной школе: монография / коллектив авторов: Иванюк М.Е., Липилина В.В., Максютин А.А. – Самара: изд-во ООО «Порто-принт», 2014 – 338с.

10. Тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ по математике-2021: дидактические материалы / сост.: А.А. Максютин, Ю.Н. Неценко, Т.П. Шаповалова. Самара: ООО «Издательство Ас Гард», 2021. 142с.

11. ЕГЭ – 2021: Математика: 11-й класс: Тренировочные варианты экзаменационных работ для проведения государственной итоговой аттестации в новой форме / авт.-сост. Е.А.Бунимович, Л.В. Кузнецова, Л.О. Рослова и др. – Москва: АСТ: Астрель, 2021

12. Интернет ресурсы для подготовки к ЕГЭ:

Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ) [Электронный ресурс] // www.fipi.ru

Вывод по главе 2.

Во второй главе была составлена программа факультатива, изложены все методические рекомендации по проведению факультативного курса на тему «Исследование функций и построение графиков», приведено учебно-тематическое планирование и составлено содержание теории и практики курса. Выбранная нами форма работы – факультатив, предоставляет возможность брать в расчет индивидуальные особенности и способности школьников, увеличить степень их самостоятельности путем подготовки докладов, выполнения исследовательских, творческих или других работ. При составлении программы, а именно, самих занятий данного курса, необходимо сперва изучить особенности каждого из учеников, уровень их знаний и область их интересов по теме факультатива. Учителю необходимо проводить разнообразные формы работы с учениками – это и работа на доске, и работа по группам, и самостоятельная работа. Задания должны быть увлекательными и интересными. А для достижения более высокого результата, следует обеспечить учеников соответствующей литературой. Тогда факультативный курс принесет наибольшие положительные результаты.

Заключение.

В данной дипломной работе был разработан факультативный курс по исследованию функций и построению графиков функций для обучающихся старших классов средних общеобразовательных учреждений. Факультативный курс «Исследование функции и построение графиков», представленный в данной работе, посвящен одному из основных понятий математики - понятию функция. Развитие функциональных представлений в курсе изучения алгебры и начал анализа на старшей ступени обучения помогает старшеклассникам получить наглядные представления о непрерывности и разрывах функций, узнать о непрерывности любой элементарной функции, научиться строить их графики и обобщить сведения об основных элементарных функциях, а также, осознать их роль в изучении явлений реальной действительности, в человеческой практике. А чёткие представления школьников о графике помогут при формировании таких центральных понятий курса алгебры и начал анализа, как непрерывность, производная, интеграл.

Цель, с которой проводилось исследование, достигнута: была составлена программа факультатива, изложены все методические рекомендации по проведению факультативного курса на тему «Исследование функций и построение графиков», приведено учебно-тематическое планирование и составлено содержание теории и практики курса.

В соответствии с целью данной работы и поставленными задачами получены следующие выводы и результаты:

Рассмотрена структура изучения функциональной линии в школьном курсе математики. Определены первостепенные цели и задачи обучения функциональной линии в курсе математики основной школы. Так же, выявлены методические особенности обучения учащихся различных функций.

Были изучены и проанализированы пособия по алгебре и начала математического анализа, чтобы определить представленную в них методику преподавания темы «Исследование функций и построение графиков». Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: в средней школе недостаточное внимание уделяется решению задач на исследование функции с применением производной. Изучено применение производной к исследованию функции для нахождения возрастания и убывания функции, экстремумов функции, выпуклости и точек перегиба.

Выделены и изучены основные типы задач в едином государственном экзамене школьников в курсе алгебры основной школы по теме «Функции». Определено, что в тестах единого государственного экзамена содержатся задачи на: нахождение корней на указанном промежутке; нахождение значения производной функции; нахождение наибольшего и наименьшего значения функции. Рассмотрев задачи на применение производной, которые предлагаются обучающимся для подготовки к сдаче ЕГЭ, мы можем сделать вывод, что при решении данных задач обучающимися часто допускаются некоторые ошибки, которые в итоге приводят к менее высоким результатам. А именно: ошибки, свзанные с непониманием геометрического смысла производной, связанные с арифметическими действиями, неуверенным владением алгоритмом вычисления наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции, неумение пользоваться основными правилами дифференцирования и т.д. А значит, при подготовке к ЕГЭ, учителям необходимо обращать внимание школьников на данные типичные ошибки.

Разработаны системы задач по теме «Функции» в куре алгебры основной школы. Каждая система задач подобрана в соответствии с основными знаниями и требованиями, предъявляемыми к ученику после окончания изучения темы. Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в дипломной работе, полностью решены.

Разработанные факультативные занятия дают учащимся не только необходимые для поступления знания, умения, навыки, но и позволяют систематизировать самоподготовку учащихся, способствуют развитию у учеников логического мышления, математической речи, навыков самоконтроля и самооценки. Многие задачи удается решить, свободно используя технику построения графиков, часто это оказывается единственным средством их решения.

Результаты данной дипломной работы могут быть использованы как методическое пособие для учителей в работе с обучающимися на уроках и факультативах, а также являться справочным материалом для обучающихся при самостоятельной подготовке к экзаменам.

Список использованных источников

1. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб.для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. Уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева и др.– 3-е изд. -М.: Просвещение, 2016. - 463 с.

2. Алтынов П.И. Алгебра и начала анализа. Тесты. 10-11 кл.: Учебнометод. Пособие. – 4-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013.

3. Гриценко, Л. В. Применение производной к исследованию функции и построению графика: Учеб.пособие / Л. В. Гриценко, Г. С. Костецкая. - Ростов-на-Дону.: Северо-Кавказский филиал МТУ, 2013. - 49 с.

4. Когаловский, С. Р. Производная и задачи элементарной математики / С. Р. Когаловский, В. В. Солдатова. – Математика в школе №3, - М.: «Школьная Пресса» 2012. - 44-49 с.

5. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа: учебник для втузов: в 3 т. Т. 1./ Л. Д. Кудрявцев. 6-е изд., перераб. - М.: Юрайт, 2012. - 702 с.

6. Кошелев, В. Н. Дифференцирование. Исследование функции. Учеб.пособие для студентов. / В. Н. Кошелев, Б. В. Лисин. - Нижний Новгород, Изд-во Нижегородского университета, 2011. – 183 с.

7. Факультативный курс по математике: учебное пособие для средней школы. / сост. И. Л. Никольская. – М., 1991. – 383 с.

8. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10 – 11 кл. сред. шк. / М. И. Башмаков. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 351 с.

9. Дѐмина, Т. Ю. Исследование функции на монотонность. Экстремумы функции / Т. Ю. Дѐмина– Математика в школе № 9-2009. – 12 с. 64

10. Акманова, С. В. Обучение Старшеклассников исследованию функций и построению их графиков на основе деятельностного подхода / С.В. Акманова, Р. Р. Каюмов. - Магнитогорск, Изд-во МГУ, 2012. – 147 с.

11. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений

(базовый уровень) / А. Г. Мордкович. - 14-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2013. - 400 с.

12. Игнаткина, Л. А. Применение производных к исследованию функций: Учебн. пособие. / Л. А, Игнаткина, Е. И, Томина. - Самара, Изд-во СГПУ, 2005. - 147 с.

13. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. /И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев- М.: Просвещение, 1991.- 384 с.

14. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А. Г. Мордкович и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича – 4-е изд., испр. – М. Мнемозина, 2007. – 336 с.

15. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. -14-е изд. – М.: Просвещение, 2004. - 384 с.

16. Внеурочная деятельность и дополнительное математическое образование школьников в условиях ФГОС. В 2 частях./ И. К. Кондаурова. – Саратов, 2015. – 102 с.

17. Зайцев И.А. Высшая математика. ДРОФА, 2005. - 400 с.

18. Краснов М. Вся высшая математика т. 1 изд. 2. Едиториал УРСС, 2003. - 328 с.

19. Факультативные курсы по математике, для 10-11 классов, Калягин Ю.М., Федорова Н.Е., НИИ школ МНО РСФСР, 1989. - 374 с.

20. Мироненко Е.С., Розанова С.А., ред., др, Розановой С.А., Кузнецова Т.А. Высшая математика. Изд-во: ФИЗМАТЛИТ®, 2009. - 168с.

21. Демидович, Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб.пособие. / Б. П. Демидович. - М.: АСТ; Астрель, 2007. - 495 с.

22. Крейн, С. Г. Математический анализ элементарных функций: учеб.пособие. / С. Г. Крейн, В. Н. Ушакова. – М.: Гос. Изд-во фих.-мат. литр., 1963. – 168 с.

23. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1989

24. Решу ЕГЭ. [Электронный ресурс] // https://ege.sdamgia.ru

25. Михеева Ю.В. – Суть изменений урока с введением ФГОС // 15-й Всероссийский интернет-педсовет. – 2014-2015. [Электронный ресурс] // https://pedsovet.org/publikatsii/nachalnaya-shkola/sut-izmeneniy-uroka-s-vvedeniem-fgos-noo

26. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. // https://fipi.ru

27. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. [Электронный ресурс]. // https://fgos.ru

28. Учительская газета [Электронный ресурс] // https://ug.ru

29. Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки. [Электронный ресурс]. // http://obrnadzor.gov.ru/

30. ЦК КПСС «О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы» от 10 ноября 1966 [Электронный ресурс]. // http://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=ESU&n=20993#06082410913812826

31. Из истории факультативного обучения. Мельник А. А. [Электронный ресурс] // https://cyberleninka.ru/article/n/iz-istorii-fakultativnogo-obucheniya

32. Степанова М., Манфред Шпитцер «Интерактивная доска в школе.» [Электронный ресурс] // https://www.profiz.ru/sec/2_2013/doska/

33. Степкина М. А., Байгушева И. А. «О готовности первокурсников к изучению математики в вузе» [Электронный ресурс] // https://cyberleninka.ru/article/n/o-gotovnosti-pervokursnikov-k-izucheniyu-matematiki-v-vuze/viewer

Приложение 1. План-конспекты уроков

Модуль 1.

Учитель проводит с учениками беседу, вводит их в содержание курса, обговариваются все организационные моменты. Далее учитель предлагает повторить материал, связанный с исследованием функций.

Учитель обсуждает с учениками план исследования функций. Школьники предлагаю варианты, затем все приходят к одному общему и записываю его на доске:

1. Найти область определения функции;
2. Найти нули функции;
3. Определить характер монотонности функции;
4. Найти асимптоты функции;
5. Исследовать функцию на четность;
6. Определить периодичность.
7. Построить график.

Затем учитель предлагает разобрать каждый пункт:

1) Область определения. **Опр.** Это множество значений x из X, которые обращают функцию в верное равенство. Для примера рассмотрим функцию типа $y = 2x+1$. Для вычисления ее значения можем определить x. Из выражения $2x+1$ видно, что функция определена на множестве всех действительных чисел.

   Рассмотрим еще один пример для подробного определения.

   Если задана функция типа $y = \frac{3}{x-1}$, и необходимо найти область определения, тогда понятно, что следует обратить внимание на знаменатель. Известно, что на ноль делить нельзя. Отсюда получаем, что $\frac{3}{x-1}$ знаменатель равняется нулю при $x = 1$, поэтому искомая область определения данной функции примет вид

   $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ и считается числовым множеством.

2) Нули функции. это значения аргумента, при которых функция равна нулю. Чтобы найти нули функции, заданной формулой $y=f(x)$, надо решить уравнение $f(x)=0$.

   Если уравнение не имеет корней, нулей у функции нет.

   Пример:

   Найти нули квадратичной функции $f(x)=x^2-7x+12$.

   Решение:

   Для нахождения нулей функции решим квадратное уравнение:

   $x^2-7x+12=0$.

   $D = 49-48=1$

   $$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3$$

   $$x_2 = \frac{7+1}{2} = 4$$

   Его корни $x_1=3$ и $x_2=4$ являются нулями данной функции.

   Ответ: $x=3$; $x=4$.

3) Монотонность. Опр. Функция называется монотонной, если она возрастает либо убывает на промежутке A из X.

   Для исследования функции на монотонность необходимо:

   1. найти её производную $f'(x)$;
   2. найти критические точки функции как решения уравнения $f'(x)=0$;
   3. определить знак производной на каждом из промежутков, на которые критические точки разбивают область определения функции;
   4. согласно достаточному условию монотонности функции определить промежутки возрастания и убывания.

   Пример:

   Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{x^2+1}{x}$.

   Область определения: $D(y)\colon x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Вычислим производную заданной функции: $y' = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+1)}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

Приравняем найденную производную к нулю и найдем корни полученного уравнения:

$$\frac{x^2-1}{x} = 0, \frac{(x+1)(x-1)}{x} = 0, x \neq 0, x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Получаем четыре интервала, внесем их в таблицу:

x	(-∞; -1)	(-1; 0)	(0; 1)	(1; +∞)
y’	–	+	–	+
y	убывает	возрастает	убывает	возрастает

Ответ: Функция $y = \frac{x^2+1}{x}$ возрастает на промежутке (-1; 0), (1; +∞) и убывает на промежутке (-∞; -1), (0; 1).

4) Асимптоты функции. Асимптотами называют прямые, к которым неограниченно приближается кривая графика функции при стремлении аргумента функции к бесконечности. Для того, чтобы построить график функции, необходимо найти все вертикальные и наклонные (горизонтальные) асимптоты, если они существуют.

Учитель предлагает вспомнить виды асимптот: горизонтальные, вертикальные и наклонные. Затем формулируется задача:

Найти асимптоты графика функции

$f(x) = \frac{4}{3+2x-x^2}$ [15].

В ходе обсуждения составляется план решения задачи:

1. Найти область определения функции;
2. Определить вид асимптоты;
3. Вычислить предел функции.

Решение:

1) Вертикальные асимптоты находятся в точках бесконечного разрыва, поэтому нужно проверить, обращается ли знаменатель в ноль. Для этого

решим квадратное уравнение:

$$-x^2+2x+3=0$$
$$D=4+12=16>0$$

Дискриминант положителен, поэтому уравнение имеет два действительных корня:

$$\sqrt{D}=\sqrt{16}=4$$
$$x_1=\frac{-2-4}{-2}=3$$
$$x_2=\frac{-2+4}{-2}=-1$$

В целях дальнейшего нахождения односторонних пределов квадратный трёхчлен удобно разложить на множители:

$-x^2+2x+3=-(x-3)(x+1)=(3-x)(x+1)$ (для компактной записи «минус» внесли в первую скобку).

Перепишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{4}{3+2x-x^2}=\dfrac{4}{(3-x)(x+1)}$

Найдём односторонние пределы в точке x = -1:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{4}{(3-x)(x+1)}=\frac{4}{(3-(-1-0))(-1-0+1)}=\frac{4}{4\cdot(-0)}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{4}{(3-x)(x+1)}=\frac{4}{(3-(-1+0))(-1+0+1)}=\frac{4}{4\cdot(+0)}=+\infty$$

И в точке x = 3:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{4}{(3-x)(x+1)}=\frac{4}{(3-(3-0))(3-0+1)}=\frac{4}{(+0)\cdot 4}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{4}{(3-x)(x+1)}=\frac{4}{(3-(3+0))(3+0+1)}=\frac{4}{(-0)\cdot 4}=-\infty$$

Таким образом, прямые x = -1, x = 3 являются вертикальными асимптотами графика рассматриваемой функции.

5) Четность функции: **<u>Опр.</u>** Функция *f*, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X называется четной (нечетной), если для любого x из X $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$).

При исследовании функции на четность и нечетность можно использовать следующие свойства:

1. Сумма двух четных функций четна, а сумма двух нечетных функций нечетна.
2. Произведение двух четных функций является четной функцией, равно как и произведение двух нечетных функций. Произведение четной и нечетной функции — нечетная функция.
3. Если функция $f(x)$ четная (нечетная), то и функция $\frac{1}{f(x)}$ четная (нечетная).

Пример: Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^2+4}{3x^6+x^4+7}$ на четность.

Исследуем отдельно четность функции, которые находятся в числителе и знаменателе:

$$g(-x) = -x^2 + 4 = x^2 + 4 = g(x)$$

то есть функция $g(x)$ четная; аналогично

$$h(-x) = 3(-x)^6 + (-x)^4 + 7 = 3x^6 + x^4 + 7 = h(x),$$

а тогда и функция $h(x)$ четная.

По свойству 3, так как $h(x)$ четная, то четной будет и функция $\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{3x^6+x^4+7}$. Тогда исходную функцию $f(x)$ можно представить в виде четных функций $f(x) = g(x) \cdot \frac{1}{h(x)}$, следовательно, по свойству 2, $f(x)$ – четная.

6) Периодичность функции. **<u>Опр</u>.** Функция, заданная на некотором промежутке X, называется периодической с периодом к, где $к \neq 0$, если
1. Множество X периодично (если с каждым x€X, оно содержит $(x \pm к)$€X) с периодом $к$.
2. для любого x€X $f(x \pm к) = f(x)$.

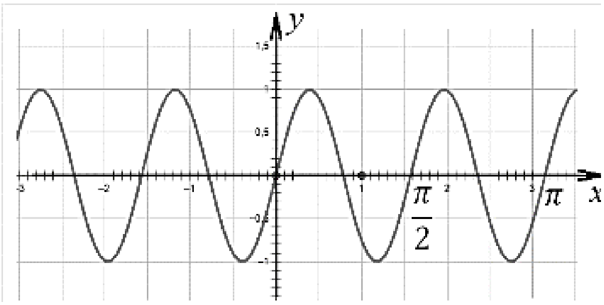
Пример: Определить период функции $f(x) = sin4x$.

Запишем условие периодичности:

$sin4(x+T)=sin4x,$ если $x=0,$ то

$sin4T=sin0=0,$ откуда $4T=\pi n, T=\dfrac{\pi n}{4}$, при $n=2, T=\dfrac{\pi}{2}$.

Проверкой можно показать, что $T=\frac{\pi n}{4}$ периодом не является. Тогда рассмотрим $T=\frac{\pi}{2}$. Действительно, $sin4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(4x+2\pi)=sin4x.$



Далее учитель предлагает школьникам пройти диагностический тест.

Диагностический тест.

Участники: Ученики 10 класса.

Участники делятся на два варианта. После окончания всего факультативного курса ученики пройдут этот же тест, поменявшись вариантами.

Вариант 1.

Задание 1. Исследовать функцию $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2$ на монотонность и направление выпуклости, найти экстремумы и точки перегиба.

Задание 2. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$ и построить ее график.

Вариант 2.

Задание 1. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ на монотонность и направление выпуклости, найти экстремумы и точки перегиба.

Задание 2. Исследовать функцию $y = \frac{(x+3)^2}{(x-4)}$ и построить её график.

Модуль 2.

Занятие №1.

Тема: Исследование функций и построение графиков без применения производной.

Цели: совершенствование знаний и умений, связанных с исследованием функции и построением графиков; формирование у учащихся навыков творческой исследовательской работы; создание у ребят положительной мотивации к выполнению умственных и практических действий; расширение математического кругозора.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены основные определения и правила, связанные с графиками функций, есть навык построения графиков.

Оборудование: Меловая доска, учебник «Алгебра и начала математического анализа» А. Г. Мордкович.

Продолжительность: два академических часа.

Развернутые комментарии к занятию:

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем формулируется задача: исследовать функцию и построить ее график: $y = 2x^2 + 4x - 5$ [11]. Учитель предлагает вспомнить некоторые определения – график функции, точки экстремума, точки пересечения графика с осью абсцисс и осью ординат, точки разрыва функции. А также основные правила построения графиков функции [2]. В ходе обсуждения составляется план решения задачи:

1. Найти область определения функции;
2. Найти нули функции;
3. Определить характер монотонности функции;
4. Найти асимптоты функции;
5. Исследовать функцию на четность;
6. Определить периодичность.

7. Построить график.

Далее по плану выполняется решение:

I. Дана функция: $y = 2x^2 + 4x - 5$. Построить ее график и исследовать ее.

Решение:

1) Найдем область определения: D(y) = (-∞; +∞).

2) Найдем нули функции:

$2x^2 + 4x - 5=0$

D = 16 + 40 = 56

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{14}}{4} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{14}}{4} = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

3) По графику определим характер монотонности: функция убывает на промежутке (-∞; -1) и возрастает на промежутке (-1; +∞).

4) Найдет асимптоты графика функции:

Уравнения наклонных асимптот обычно ищут в виде y = kx + b. По определению асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}(kx + b - f(x))=0$$

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

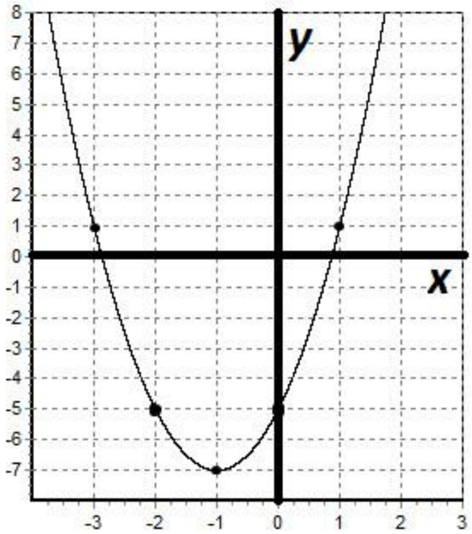
$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2 + 4x - 5}{x}\right) = \infty$$

Поскольку коэффициент k равен бесконечности, наклонных асимптот не существует.

5) Исследуем функцию на четность: $y(-x) = 2(-x^2) + (-4x) - 5 = 2x^2 - 4x - 5$. По определению функция ни четная, ни нечетная.

6) Функция не периодична.

7) Построим график данной функции:



Учитель предлагает еще одну задачу для тренировки на доске:

II. Дана функция:$y = \frac{x^2+3}{x}$. Построить ее график и исследовать ее.

Решение:

1) Найдем область определения: $x \in R: x \neq 0$.

2) Нули функции:

$$\frac{x^2+3}{x} = 0$$

$$x^2 + 3 = 0, x^2 = -3, x = \pm i\sqrt{3}$$

3) Асимптоты:

Уравнения наклонных асимптот обычно ищут в виде y = kx + b. По определению асимптоты:

$$\lim_{x \to \infty}(kx + b - f(x))$$

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$k = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\frac{x^2+3}{x}}{x}\right) = \lim_{x \to \infty}\frac{x^2+3}{x^2} = 1$$

Находим коэффициент b:

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - k \cdot x$$

$$b = \lim_{x \to \infty}\frac{x^2+3}{x} - x = \lim_{x \to \infty}\frac{3}{x} = 0$$

Получаем уравнение наклонной асимптоты:

y = x

Найдем вертикальные асимптоты. Для этого определим точки разрыва:

$x_1 = 0$

Находим переделы в точке x=0

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{x^2+3}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2+3}{x} = \infty$$

$x_1 = 0$ - точка разрыва II рода и является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонную асимптоту при x → -∞:

$$\lim_{x\to -\infty} (kx + b - f(x))$$

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$k = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\frac{x^2+3}{x}}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x^2} = 1$$

Находим коэффициент b:

$$b = \lim_{x\to \infty} f(x) - k \cdot x$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x} - x = \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x} = 0$$

Получаем уравнение наклонной асимптоты:

y = *x*

4) Определим характер монотонности:

По графику определим промежутки возрастания убывания функции:

Допустим в уравнении $y = \frac{x^2+3}{x}$ *y* – параметр. Тогда получим x^2-yx+3 = 0.

Найдем при каких значения y это квадратное уравнение имеет решения.

D = y^2-12. Квадратное уравнение будет иметь решения, когда D ≥ 0.

y^2-12 ≥ 0, y^2 ≥ 12

y ≤ -√12 или y ≥√12

$x^2 + \sqrt{12} \cdot x + 3 = 0,$

$D = 12 - 12 = 0$

$x = \frac{-\sqrt{12}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

$x^2 - \sqrt{12} \cdot x + 3 = 0,$

$D = 12 - 12 = 0$

$x = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

В -∞ функция стремится в -∞, в 0 стремится также в -∞. Следовательно $(-\sqrt{3};\ -\sqrt{12})$ –точка максимума. Тогда $(\sqrt{3};\ \sqrt{12})$ – точка минимума.

Определим промежутки возрастания и убывания функции:

Функция возрастает на промежутках (-∞; -√3) и (√3; +∞), убывает на (-√3; 0) и (0; √3).

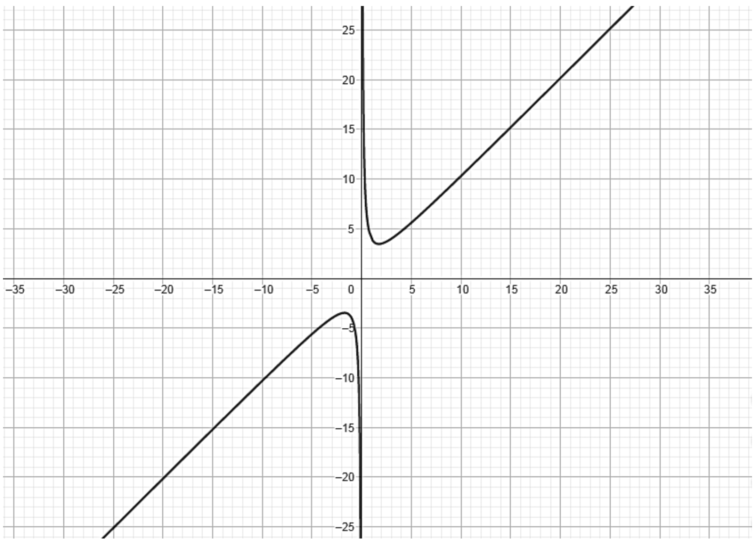
5) Исследуем функцию на четность:

$f(-x) = -\frac{(-x)^2+3}{x} = -\frac{x^2+3}{x} = -f(x)$

Функция нечетная.

6) Функция не периодична.

7) Построим график:



Далее учитель предлагает задачи для самостоятельного решения:

1) Построить график функции и исследовать ее: $y=(-x)^2+4x-7$.

2) Построить график функции и исследовать ее: $y=x^3-3x+2$.

3) Построить график функции и исследовать ее: $y=(2x+1)/(x^2+2)$ [2].

Занятие №2.

Тема: Исследование дробно-рациональных функций и построение их графиков без применения производной.

Цели: научить учащихся проводить исследование функции по ее аналитической формуле; научить учащихся строить график функции; углубить изучение понятия функции, ее свойств элементарными методами, приближая их к классическим моделям исследования на интуитивном уровне; вырабатывать умения действовать в нестандартных ситуациях.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены знания о дробно-рациональных функциях, имеется навык построения графиков.

Оборудование: меловая доска, Учебник «Алгебра и начала анализа» А. Н. Колмогоров.

Продолжительность: два академических часа.

Развернутые комментарии к занятию:

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем формулируется задача: исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}.$$ [15].

Учитель предлагает вспомнить определение дробно-рациональной функции, правила работы со степенями числителя и знаменателя функции [5]. В ходе обсуждения составляется план решения задачи:

1. Найти область определения функции.
2. Построить график
3. Определить характер монотонности функции;
4. Найти точки минимума и максимума;
5. Вычислить значения функции в точках.

Далее по плану выполняется решение:

I. Дана функция: $y = \dfrac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}$.

Построить ее график и исследовать ее.

1) Найдем область определения функции:

А. $(x+1)^2 \neq 0$, $x \neq -1$.

Б. $(x^2-2) \neq 0$, $x \neq \sqrt{2}$.

Область определения: D(f) = R\ (-1; ±√2).

2) Нули функции:

$x(x-1)^2 = 0$;

$x = 0$ или $(x-1)^2 = 0$; $x = 1$.

3) Асимптоты функции:

Уравнения наклонных асимптот обычно ищут в виде y = kx + b. По определению асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}(kx + b - f(x))$$

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^4+2x^3-x^2-4x-2} = 0$$

Находим коэффициент b:

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)} - 0\cdot x = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+x}{x^4+2x^3-x^2-4x-2} = 0$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты:

$y = 0$

Найдем вертикальные асимптоты. Для этого определим точки разрыва:

$x_1 = -1$

$x_2 = -\sqrt{2}$

$x_3 = \sqrt{2}$

Находим переделы в точке x = -1

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}=\infty$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}=\infty$$

x_1 = -1 - точка разрыва II рода и является вертикальной асимптотой.

Находим переделы в точке:

$x_2 = -\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}-0}\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}+0}\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}=\infty$$

$x_2 = -\sqrt{2}$ является вертикальной асимптотой.

Находим переделы в точке:

$x_3 = \sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}-0}\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}+0}\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}=\infty$$

$x_3 = \sqrt{2}$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонную асимптоту при x → -∞:

$$\lim_{n\to-\infty}(kx+b-f(x))$$

Находим коэффициент k:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2} = 0$$

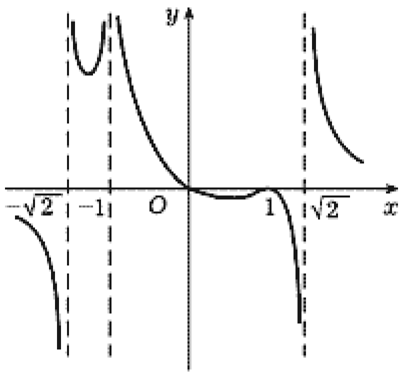
Находим коэффициент b:

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) - kx$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)} - 0 \cdot x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2} = 0$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты $y = 0$.

4) Построим график функции:



5) Исследование функции на четность:

Рассмотрим значение функции $y = \frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}$ в точке $f(-x)$:

$f(-x) = \frac{-x(-x-1)^2}{(-x+1)^2(-x^2-2)}$ Функция ни четная, ни нечетная.

6) Функция не периодична.

Учитель предлагает для тренировки следующие задания [5]:

а) Исследовать функцию $y = \frac{1}{2}x^4 + x - 1$

б) Исследовать функцию $y = \frac{x-a}{x^3+b}$

Занятие №3.

Тема: Исследование тригонометрических, показательных и логарифмических функций и построение их графиков без применения производной.

Цели: Создать условия для возникновения внутренней потребности включения в деятельность исследования изменения графиков тригонометрических функций в зависимости от коэффициентов. Знакомство с преобразованиями графиков тригонометрических функций, приобретение новых навыков построения и чтения графиков тригонометрических функций. Уметь определять расположение графика тригонометрической функции на координатной плоскости в зависимости от коэффициентов и делать соответствующий вывод в зависимости изменения значения аргумента и значения функции. Научиться использовать полученные выводы при изучении свойств функций.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены знания о тригонометрических функциях, имеется навык построения их графиков.

Оборудование: меловая доска, раздаточный материал, учебник «алгебра и начала математического анализа» П. И. Алтынов.

Продолжительность: три академических часа.

Развернутые комментарии к занятию.

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем формулируется задача для разминки: Даны следующие функции:

$y = -3\cos x$; $y = \mathrm{tg}2x$; $y = \sin x + 2$; $y = 1/3\sin x$; $y = \cos 2x$; $y = 4 - \cos x$; $y = \sin(x - 5)$; $y = 2\mathrm{ctg}x$; $y = \mathrm{ctg}1/3x$; $y = \mathrm{ctg}x + 1$; $y = \cos(x + 2)$; $y = 2\mathrm{ctg}x$ [1]. Сгруппировать их по каким-нибудь признакам.

Далее учитель предлагает проверить свои результаты:

I группа: наблюдается изменение аргумента $y = \mathrm{ctg}1/3x$; $y = \cos(x + 2)$; $y = \cos 2x$; $y = \mathrm{tg}2x$; $y = \sin(x - 5)$.

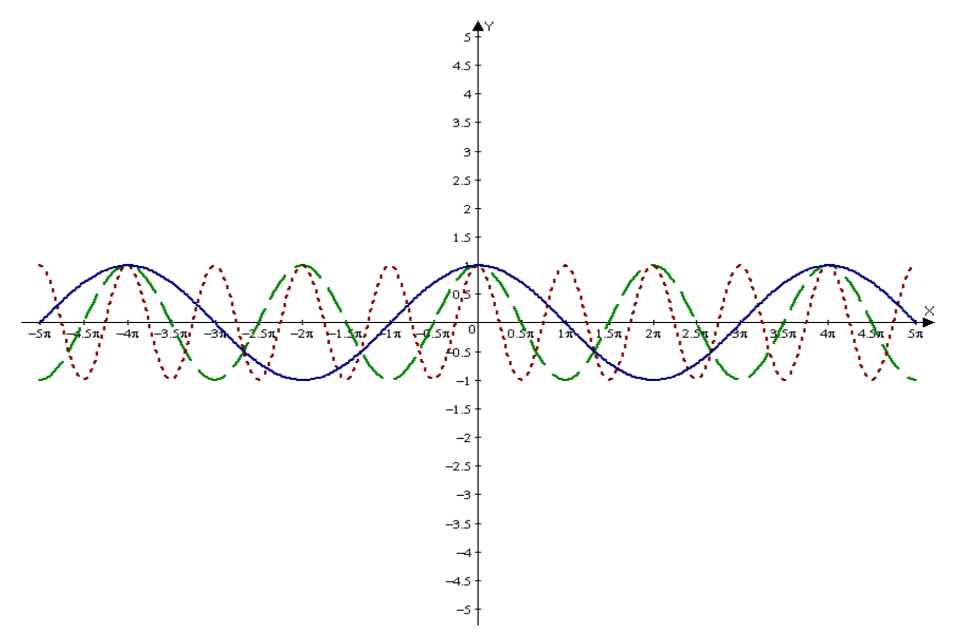
II группа: наблюдается изменение функции $y = 2\mathrm{ctg}x$; $y = \sin x + 2$; $y = 1/3\sin x$; $y = 4 - \cos x$; $y = 2\mathrm{ctg}x$; $y = \mathrm{ctg}x + 1$; $y = -3\cos x$.

Учитель предлагает вспомнить определение тригонометрической функции и разбиться классу на 4 группы для проведения исследовательской работы.

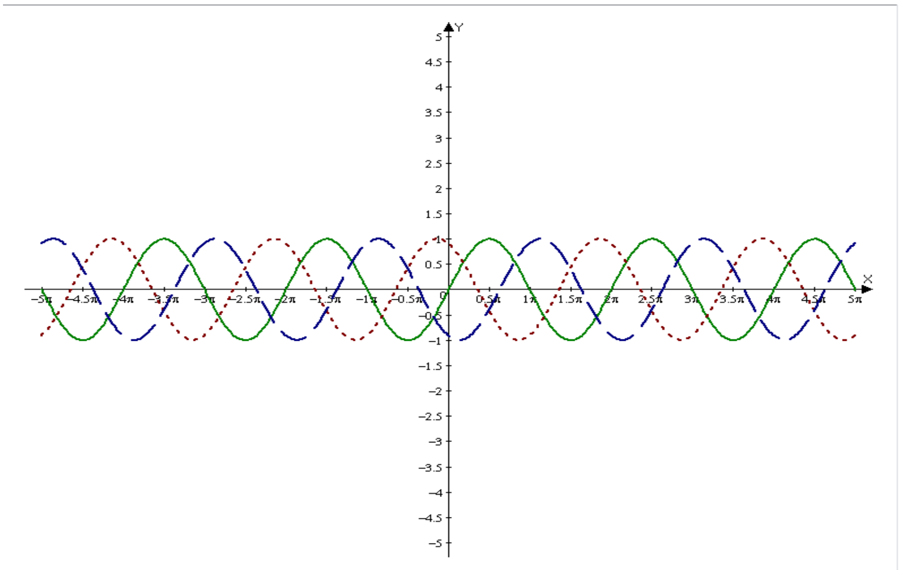
Исследовательская работа.

Для проведения исследовательской работы классу необходимо разделиться на несколько групп. Каждая группа получает карточку с заданием. Ученики работают внутри группы над поставленной проблемой, формулируют выводы и готовятся к устному выступлению.

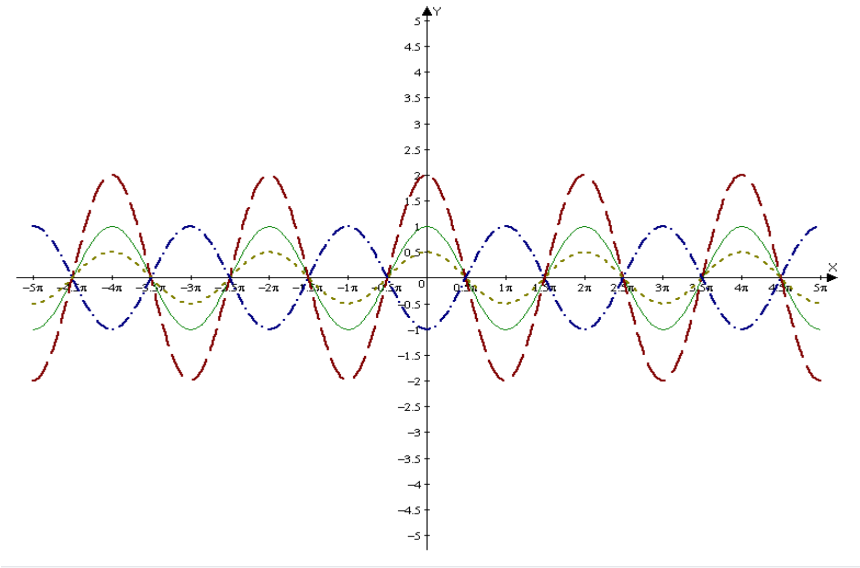
Задание для 1 группы. Даны функции: $y = \cos 1/2x$; $y = \cos 2x$; $y = \cos x$. Постройте их графики и определите, как они меняются в зависимости от изменения аргумента.



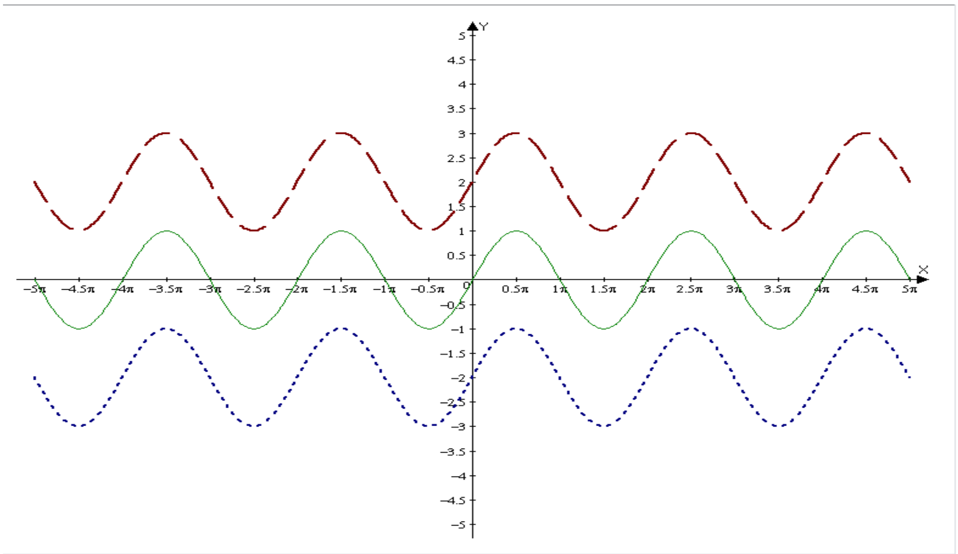
Задание для 2 группы. Даны функции: $y = \sin x$; $y = \sin(x + 2)$; $y = \sin(x - 2)$. Постройте их графики и определите, как они меняются в зависимости от изменения аргумента.



Задание для 3 группы. Даны функции: $y = \cos x$; $y = 2\cos x$; $y = 1/2\cos x$; $y = -\cos x$. Постройте их графики и определите, как они меняются в зависимости от изменения аргумента.



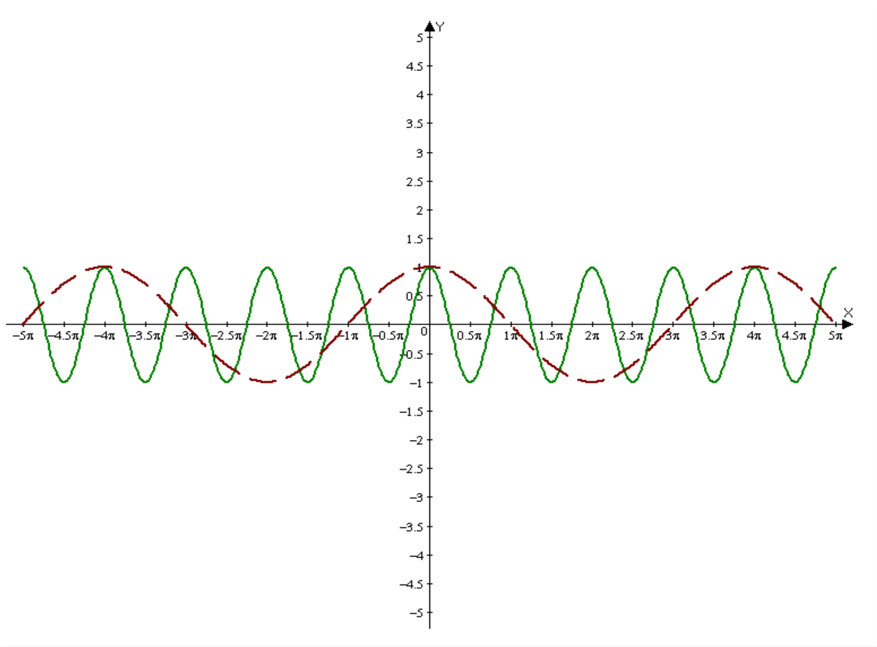
Задание для 4 группы. Даны функции: $y = \sin x$; $y = \sin x + 2$; $y = \sin x - 2$. Постройте их графики и определите, как они меняются в зависимости от изменения аргумента.



Группы демонстрируют результаты своей работы, делают выводы. Учитель проверяет, объясняет непонятные моменты. Другие учащиеся записывают результаты исследований и выводы в тетрадь.

Учитель предлагает задания для закрепления знаний:

1. Даны две функции: $y = \cos 2x$; $y = \cos 1/2x$. Постройте их графики, исследуйте и укажите свойства данных функций.



Решение:

<u>Перечислим свойства функции $y = \cos 2x$:</u>

$D(y) = R$; $E(y) = [-1; 1]$;

Период: π ; функция четная;

Возрастает на промежутке: $[-\pi/2 + \pi n; \pi n]$

Убывает на промежутке: $[\pi n; \pi/2 + \pi n]$

Нули функции:$(\pi/4 + 1/2\pi n; 0)$

Точки max$x$: πn;

Точки min: $\pi/2 + \pi n$;

<u>Перечислим свойства функции $y = \cos 1/2x$:</u>

$D(y) = R$; $E(y) = [-1; 1]$;

Период: 4π; функция четная;

Возрастает на промежутке: $[-2\pi + 4\pi n; 4\pi n]$

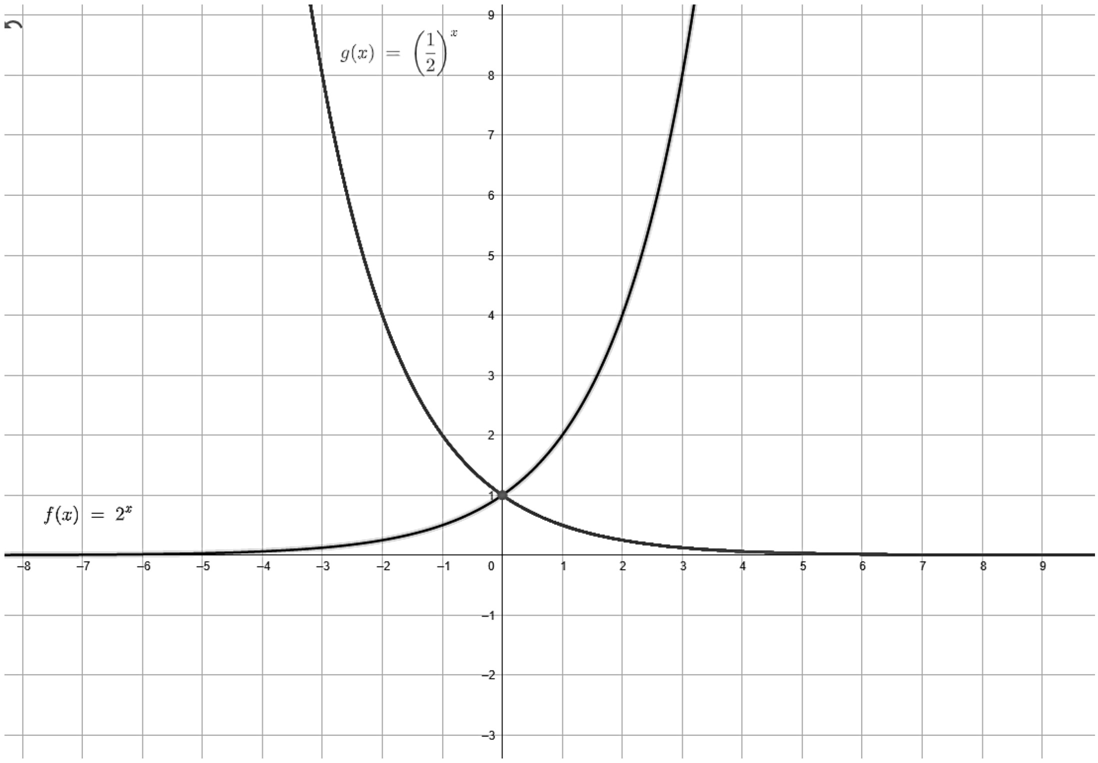
Убывает на промежутке: $[4\pi n; 2\pi + 4\pi n]$

Нули функции:$(\pi + 2\pi n; 0)$

Точки max$x$: $4\pi n$;

Точки min: $2\pi + 4\pi n$;

Далее учитель предлагает рассмотреть два графика показательной функции $y = a^x$. Первый, где $a > 0$, второй – $0 < a < 1$. Графики: $y = 2^x$ и $y = \frac{1}{2}^x$.

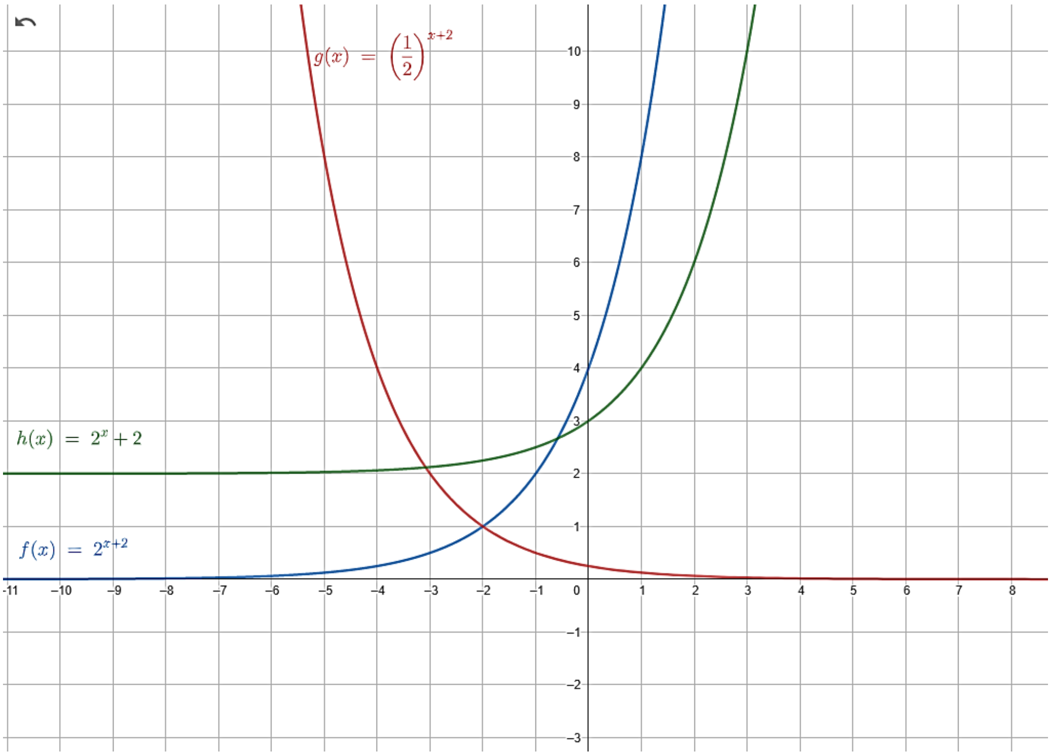


Исследуем их:

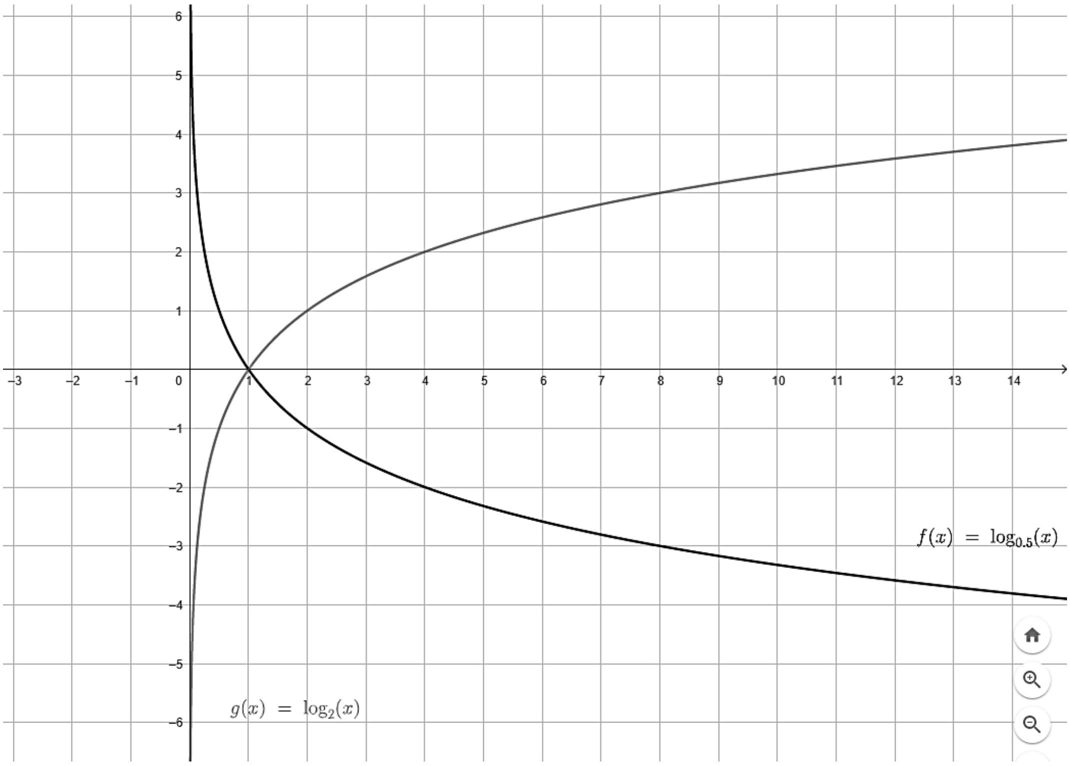
1) Область определения D(f) = (-∞; ∞);
2) При a > 0 функция строго возрастает, при 0 < a < 1 – строго убывает;
3) Функции непрерывны;
4) Не являются ни четной, ни нечетной;
5) Не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значений.
6) Ограничены снизу, сверху не ограничены;
7) Функции выпуклы вниз.

Далее учитель предлагает построить следующие графики функций и проследить, как они меняются в зависимости от изменения аргумента:

$y = 2^{x+2}, y = \frac{1}{2}^{x-2}, y = 2^x + 2.$



Затем учитель предлагает учащимся рассмотреть два графика логарифмической функции $y = \log_a x$. Первый, где $a > 0$, второй – $0 < a < 1$. Графики $y = \log_2 x$ и $y = \log_{0,5} x$.

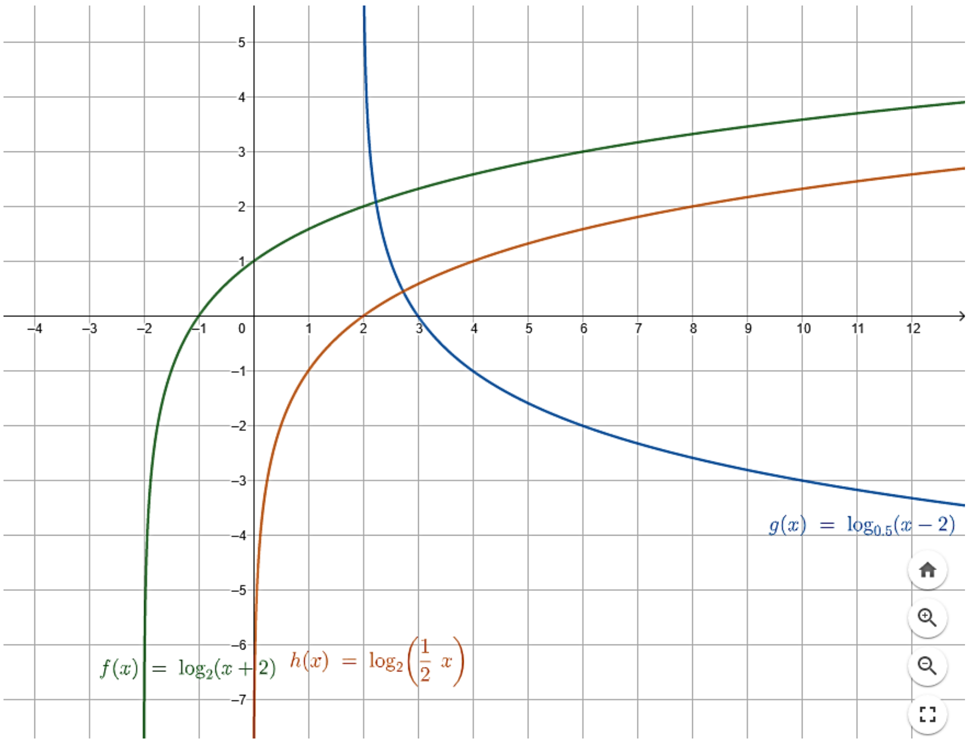


Проведем такое же исследование, как с показательной функцией:

1) Область определения D(f) = (0; +∞);

2) При a > 0 функция строго возрастает на промежутке (0; +∞), при 0 < a < 1 – строго убывает на промежутке (0; +∞);
3) Функции непрерывны;
4) Не являются ни четной, ни нечетной;
5) Не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значений.
6) Не ограничены ни снизу, ни сверху;
7) Функция выпуклы вверх при a > 0, выпукла вниз при 0 < a < 1.

Учитель называет ученикам функции $y = \log_2 x + 2,\ y = \log_{0,5} x - 2$, и $\log_2 \frac{1}{2} x$, просит начертить их графики и проследить, как они меняются в зависимости от изменения аргумента.



(Для самостоятельной работы)

Даны функции: $y = 2 - 2\cos x$; $y = 1/2\sin x + 1$, $y = \log_2 4 - x$, $y = 4^{1-x}$. Построить их графики, исследовать и указать свойства данных функций [17].

Провести исследование показательных и логарифмических функций, графики которых мы построили на занятии.

Модуль 3.

Занятие №4.

Тема: Повторение материала по теме «Применение производной к исследованию функций и построению графиков».

Цели: повторить материал, связанный с применением производной к построению графиков функций: знания схемы исследования функции для построения её графика, формирование умений выполнять исследование функций в соответствии со схемой и строить эскизы графиков на основе проведённых исследований. Провести диагностический тест.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены знания о производных, имеется навык вычисления производной.

Оборудование: меловая доска, раздаточный материал, учебник «Алгебра и начала анализа» Ш. А. Алимов.

Продолжительность: один академический час.

Развернутые комментарии к занятию.

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем формулируется задача для разминки (проводится в устной форме):

1. Найдите производную функции:

а) $\sin x$

б) $tg\ x$

в) $x^2 + 2$

г) x^4

д) $\sqrt{x} + 2$

е) e^{x+2}

Учитель предлагает повторить определение производной. Затем, напоминает, что применение производной позволяет исследовать функцию на монотонность и находить ее экстремумы.

Поговорим про возрастание и убывание функции. Учитель предлагает вспомнить: Монотонность функции у = $f(x)$ характеризуется знаком её производной: если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает на этом промежутке; если же $f'(x) < 0$, то функция убывает на данном промежутке.

Рассмотрим на примере: Дана функция $f(x) = x^2 - 8x + 12$. Найти промежутки монотонности.

Решение:

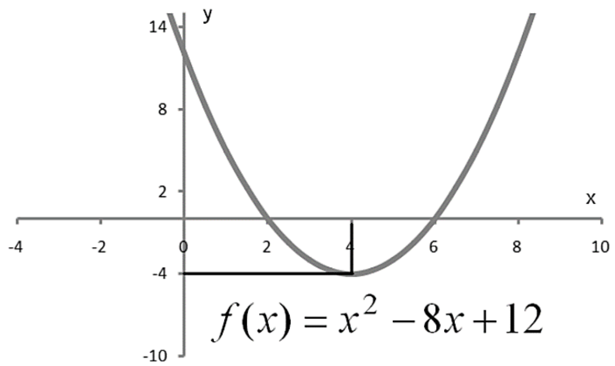
1) Находим производную функции: $f'(x) = 2x - 8$. $2x - 8 = 0$, $x = 4$.

Представим наши рассуждения в таблице:

x	$(-\infty; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Формулируем вывод: функция $f(x) = x^2 - 8x + 12$ в промежутке $-\infty < x < 4$ убывает, а в промежутке $4 < x < +\infty$ возрастает.

Далее учитель построить график функции и сравнить с ним полученный вывод.



Действительно, глядя на график, вывод подтверждается.

Повторив материал, связанный с монотонность функции, учитель предлагает поговорить об экстремумах функции и вспомнить алгоритм их нахождения при помощи первой производной:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти критические точки функции у = $f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Рассмотрим на примере: Дана функция: $f(x) = x^2 - 4x$. Исследовать ее на экстремум.

Решение:

1) Найдем производную: $f'(x) = 2x - 4$.
2) Приравняв производную к нулю, $2x - 4 = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$.
3) Представим наши рассуждения в таблице:

x	(-∞; 2)	2	(2; +∞)
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Минимум $f_{\min} = f(2) = -4$	↗

4) График функции $f(x) = x^2 - 4x$ – есть парабола, вершиной которой является точка минимума (2; -4).

Занятие №5.

Тема: Экстремумы функции.

Цели: Разобрать понятия «критические точки», «стационарные точки», «экстремум» и «точки экстремума». Научиться находить экстремумы функции.

Предварительная подготовка учащихся: Усвоены знания о производной, имеется навык нахождения экстремумов.

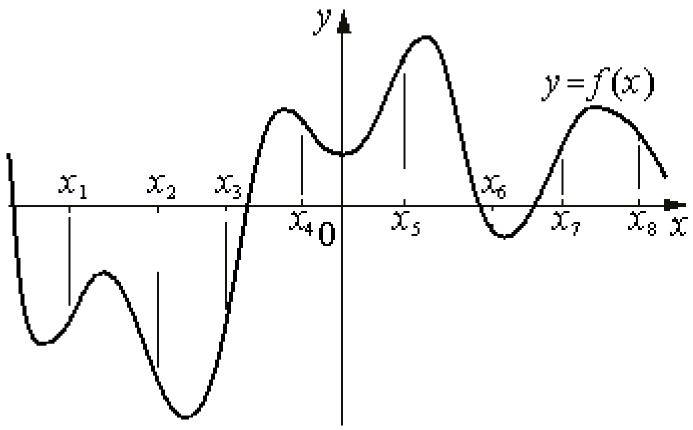
Оборудование: меловая доска, раздаточный материал, Учебник «Алгебра и начала анализа» А. Н. Колмогоров.

Продолжительность: один академический час.

Развернутые комментарии к занятию.

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем формулируется задача:

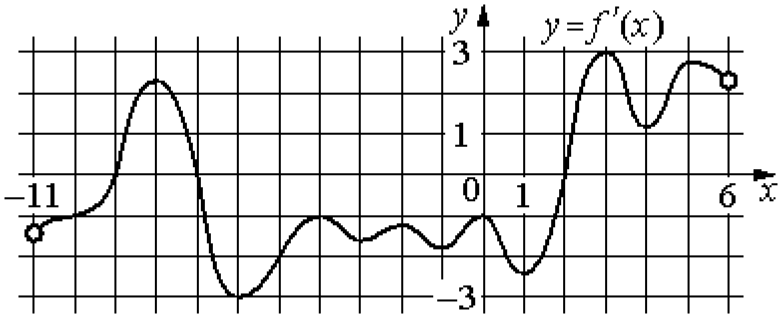
На доске изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены следующие точки: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Учитель предлагает вспомнить: Функция в точках экстремума меняет характер монотонности, а значит и производная функция меняет знак. Если функция убывает, то производная меньше либо равно нулю, а если функция возрастает, то производная больше либо равна нулю [4].

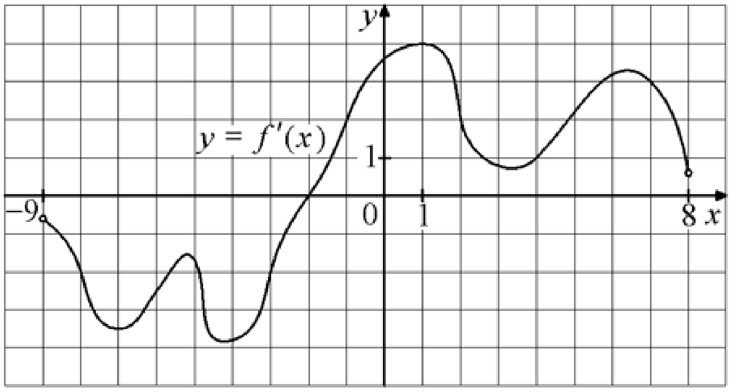
Похожая задача для тренировки:

На доске изображён график $y = f'(x)$, определённый на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, которые принадлежат отрезку $[-6; 4]$.

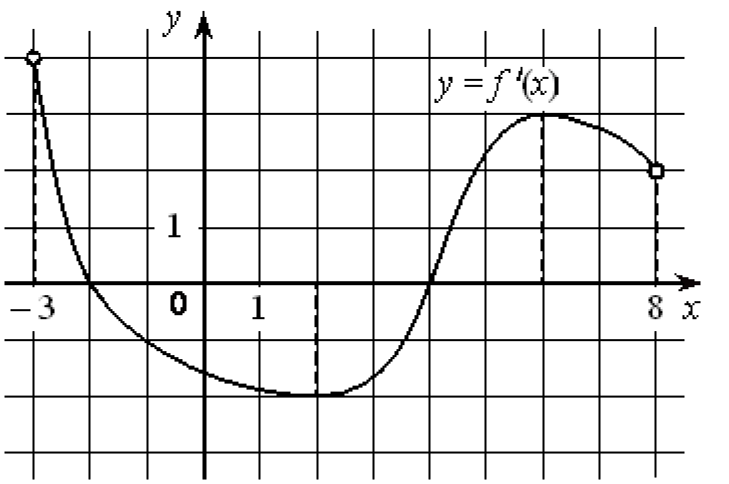


Далее учитель организует работу по карточкам:

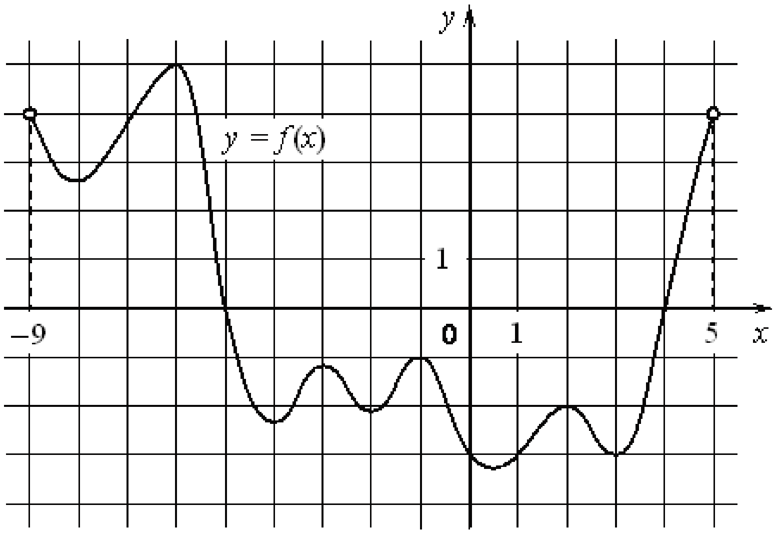
№1. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.



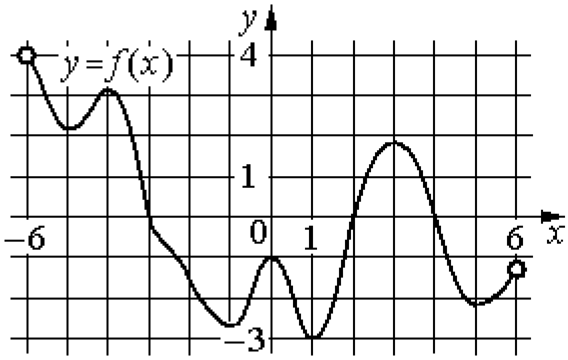
№2. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



№3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



№4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-4,5; 2,5]$ [15].



Ученики делятся на группы, решают задания, затем меняются карточками до тех пор, пока каждая из групп не решит все 4 карточки.

Занятие №6.

Тема: Выпуклые функции. Точки перегиба.

Цели: Сформировать понятие второй производной функции и умения вычислять вторую производную. Познакомить с понятием выпуклости функции и точек перегиба. Формировать умения применять производную к исследованию функции.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены умения вычислять вторую производную, имеется навык применения производной к исследованию функции.

Оборудование: меловая доска, учебник «Алгебра и начала математического анализа» А. Г. Мордкович.

Продолжительность: один академический час.

Развернутые комментарии к занятию.

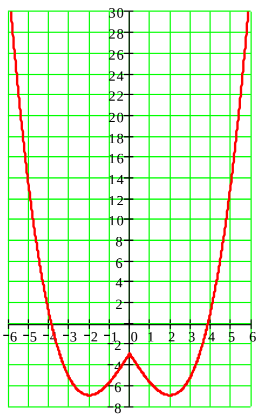
Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем учитель предлагает вспомнить, как вычисляется вторая производная. Далее дает задание на доске: Исследовать на наличие экстремумов и построить эскиз графика данной функции [2].

1. D(f) = R
2. $f(x) = x^3 – 4x = x(x^2 – 4)$
3. D(f)′ = R
4. f′(x) = 0 при x = 0, x = 2, x = -2.
5. Точки пересечения с осями координат (-3;0), (3;0).

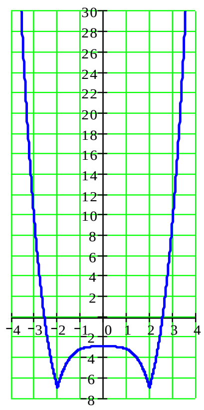
	(-∞; -2)	–2	(-2; 0)	0	(0; 2)	2	(2; +∞)
f'	_	0	+	0	_	0	+
f	↘	-7	↗	-3	↘	-7	↗
		min		max		min	

Наносим полученные точки на координатную плоскость.

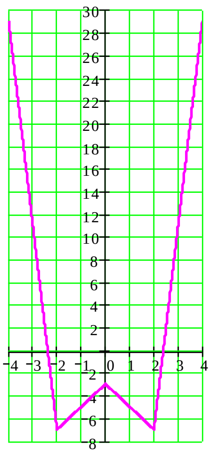
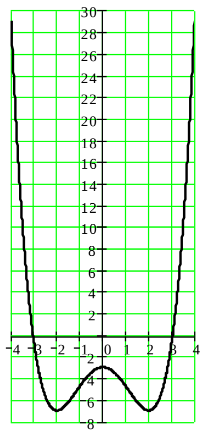
При построении возникает ***проблема***: как соединить полученные точки графика, чтобы свойства заданной функции отображались наиболее точно? Предлагаем 4 варианта соединения точек. Необходимо выбрать, какой из них верный?



1

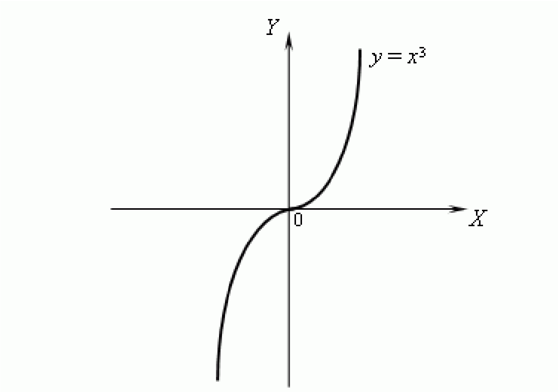


2

 3	 4

Как соединить две полученные точки – по прямой, выпуклостью вверх или выпуклостью вниз, позволяет определить аппарат производной. Для этого необходимо вычислить вторую производную функции [18].

Учитель предлагает рассмотреть график простой функции $y = x^3$ [11]



Данная функция является вогнутой при $x>0$ и выпуклой при $x<0$.

$y'' = 6x$, но $6x>0$ при $x>0$ и $6x<0$ при $x<0$, следовательно, $y''>0$ при $x>0$ и $y''<0$ при $x<0$, откуда следует, что функция $y = x^3$ является вогнутой при $x>0$ и выпуклой при $x<0$. Тогда $x = 0$ является точкой перегиба функции $y = x^3$.

Затем учитель предлагает продолжить построение графика рассматриваемой функции $f(x)= \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 3$

Так как $f'(x) = x^3 - 4x$, то $f''(x) = 3x^2-4$

$f''(x) = 0$ при $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Причём, при $x< -\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$ вторая производная больше 0, значит на этих интервалах график обладает выпуклостью вниз.

При $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ вторая производная меньше 0, следовательно на этом интервале график обладает выпуклостью вверх.

Таким образом, четвертый вариант построения графика наиболее точный.

Упражнения для тренировки: Исследуйте следующие функции и постройте их графики.

а) $y = (x+1)^3 (x-2)$

б) $y = \frac{x^2+5}{2-x}$

в) $y = x^2\sqrt{1-2x}$

г) $y = (x+2)^2 (x-2)$

д) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$

е) $y = 4x^2\sqrt{1-4x}$

Занятие №7.

Тема: Исследование рациональных функций и построение их графиков.

Цели: совершенствование знаний и умений, связанных с исследование рациональных функций, научится применять производную функции к ее исследованию.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены умения вычислят первую и вторую производные функции, имеется навык исследования рациональных функций.

Оборудование: меловая доска, учебник «Алгебра и начала математического анализа» А. Г. Мордкович.

Продолжительность: два академических часа.

Развернутые комментарии к занятию.

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем учитель предлагает решить задачу: Провести полное исследование и построить график функции $y(x)=(x^2+8)/(1-x)$ [11].

Для этого необходимо вспомнить алгоритм исследования:

1. Найти область определения. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты. Исследовать поведение на бесконечности.
9. Выбрать дополнительные точки и вычислить их координаты.
10. Построить график и асимптоты [22].

Решение:

1) Найдем область определения функции. Функция представляет собой дробь, значит необходимо найти нули знаменателя.

$1-x = 0, \Rightarrow x = 1.$

Точку x=1 исключаем из области определения функции и получаем:

$D(y) = (-\infty;1)\cup(1;+\infty).$

2) Далее нужно исследовать поведение функции в окрестности точки разрыва. Для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+8}{1-x} = +\infty; \ \lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+8}{1-x} = -\infty$$

Пределы равны бесконечности, следовательно, точка $x = 1$ является разрывом второго рода, тогда прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Оу, для чего приравниваем $x = 0$:

$$y = \frac{0^2+8}{1-0} = 8$$

Таким образом, точка пересечения с осью Оу имеет координаты (0;8).

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ох, для чего положим $y = 0$:

$$\frac{x^2+8}{1-x} = 0 \ \to \ x^2+8 = 0$$

Полученной уравнение не имеет корней, а значит точек пересечения с осью Ох нет. Можно заметить, что $x^2+8>0$ для любых x. Следовательно, при $x\in(-\infty;1)$ функция $y>0$ (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при $x\in(1;+\infty)$ функция $y<0$ (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

4) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как: $y(-x) = \frac{(-x)^2+8}{1-(-x)} = \frac{x^2+8}{1+x}; \ y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$

5) Исследуем функцию на периодичность. Функция не является периодической, так как представляет собой дробно-рационально функцию.

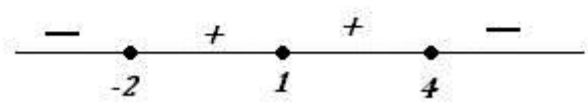
6) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+8}{1-x}\right)' = \frac{(x^2+8)'(1-x)-(x^2+8)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{2x(1-x)-(x^2+8)(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2x-2x^2+x^2+8}{(1-x)^2} = -\frac{x^2-2x-8}{(1-x)^2}$$

Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки (в которых $y' = 0$): $y' = 0 \rightarrow -\frac{x^2-2x-8}{(1-x)^2} = 0 \rightarrow x^2-2x-8=0 \rightarrow \ x=-2; x=4$

Получили три критические точки: $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$. Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При x∈(−∞;−2),(4;+∞)x производная y′<0, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При x∈(−2;1),(1;4) производная y′>0, функция возрастает на данных промежутках.

При этом x=−2 - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), x=4 - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Найдем значения функции в этих точках:

$$y(-2) = \frac{(-2)^2+8}{1-(-2)} = \frac{12}{3} = 4 \ y(4) = \frac{4^2+8}{1-4} = \frac{24}{-3} = -8$$

Таким образом, точка минимума (−2;4), точка максимума (4; −8).

7) Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Для этого необходимо вычислить вторую производную функции:

$$y'' = \left(-\frac{x^2-2x-8}{(1-x)^2}\right)' = -\frac{(x^2-2x-8)'(1-x)^2-(x^2-2x-8)((1-x)^2)'}{(1-x)^4} =$$

$$= -\frac{(2x-2)(1-x)^2-(x^2-2x-8)\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = -\frac{(2x-2)(1-x)+2(x^2-2x-8)}{(1-x)^3} =$$

$$= -\frac{2(-x^2+2x-1+x^2-2x-8)}{(1-x)^3} = \frac{-2\cdot(-9)}{(1-x)^3} = \frac{18}{(1-x)^3}$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0 \to \frac{18}{(1-x)^3} = 0$$

Так как полученное уравнение не имеет корней, точек перегиба нет. При этом, когда $x \in (-\infty;1)$ выполняется $y''>0$, то есть функция вогнутая, когда $x \in (1;+\infty)$ выполняется $y''<0$, то есть функция выпуклая.

8) Исследуем поведение функции на бесконечности, то есть при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-1} = -\infty;\ \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-1} = +\infty$$

Так как пределы бесконечны, горизонтальных асимптот нет.

Попробуем определить наклонные асимптоты вида $y=kx+b$. Вычисляем значения k, b по известным формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+8}{x-x^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

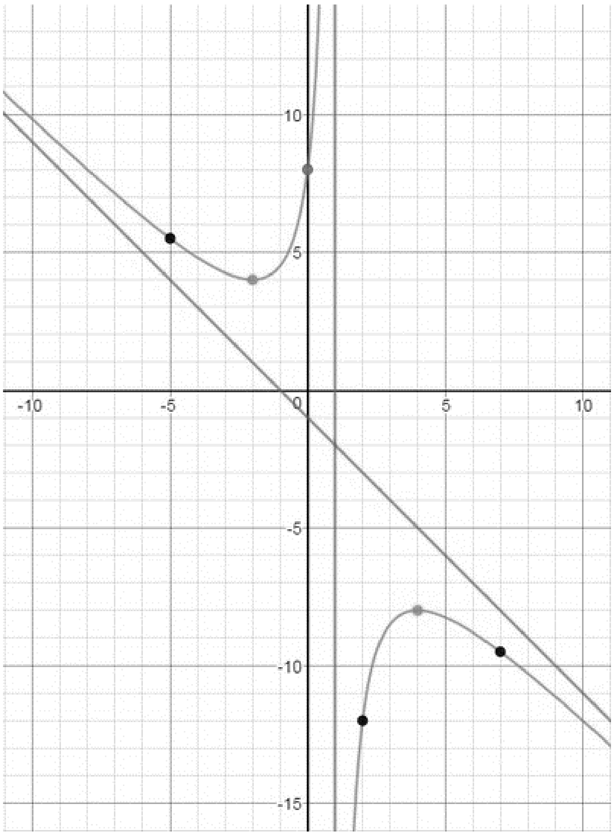
$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+8}{1-x}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+8+x-x^2}{1-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{8+x}{1-x}\right) = \frac{1}{-1} = -1$$

Получили, у что функции есть одна наклонная асимптота $y = -x-1$.

9) Дополнительные точки. Вычислим значение функции в некоторых других точках, чтобы точнее построить график.

$y(-5) = 5.5$; $y(2) = -12$; $y(7) = -9.5$.

10) По полученным данным построим график, проведем асимптоты $x = 1$, $y = -x-1$ и отметим характерные точки – пересечение с осью ординат, экстремумы и дополнительные точки:



Задания для тренировки: Исследуйте функции.

а) $y=(x^2+6)/(x^2-1)$;

б) $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$

в) $y=\dfrac{3x+5}{2x+2}$

г) $y=\dfrac{x^2-4}{2-x}$

д) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{1-x}$

е) $y=\dfrac{x-x^3}{x}$

Занятие №8.

Тема: Исследование иррациональных функций и построение их графиков.

Цели: повысить уровень знаний об экстремумах, научиться находить экстремумы, научиться исследовать иррациональные функции.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены знание об экстремумах функции, имеется навык исследования иррациональных функций.

Оборудование: меловая доска, учебник «Алгебра и начала анализа» М. И. Башмаков.

Продолжительность: два академических часа.

Развернутые комментарии к занятию.

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем учитель говорит о том, что важнейшие задачи на производную с иррациональными функциями – это задачи на экстремум. Для того, чтобы без затруднений их решать, нужно знать технику дифференцирования [6].

Учитель предлагает вспомнить ее на следующем примере:

Дана функция $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sin\frac{2\pi}{5}$. Найти $f'(0)$.

Напомним, что $(\sqrt{u})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$.

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0$. $\sin\frac{2\pi}{5}$ - постоянная величина, так как в данном выражении нет переменной, а с′ = 0 . Отсюда, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Следующее действие – найти производную в конкретной точке.

$f'(0) = \frac{-0}{\sqrt{1}} = 0$.

Таким образом, мы нашли производную в данной точке. Повторим: если требуется найти производную в конкретной точке, нужно найти производную в любой точке x, а потом подставить нужное значение.

Далее учитель предлагает решит задачу:

Построить график функции $f(x) = x\sqrt{2-x}$ [8].

В ходе обсуждения составляется план решения задачи:

1. Определить вид функции;
2. Найти нули функции;
3. Определить знаки;
4. Построить график.

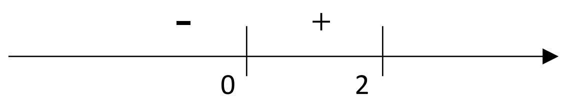
Решение.

Функция является **иррациональной**. Сперва попробуем построить эскиз графика функции без производной.

D(*f*): 2 - $x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Найдем нули функции.

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = 2$. Определим знак функции на каждом интервале (см. рис.1).



Итак, мы знаем, что на промежутке (0; 2) график функции будет находиться над осью X, а на промежутке (-∞; 0) – под осью X.

Построим график функции в окрестности каждого корня (см. рис.2).

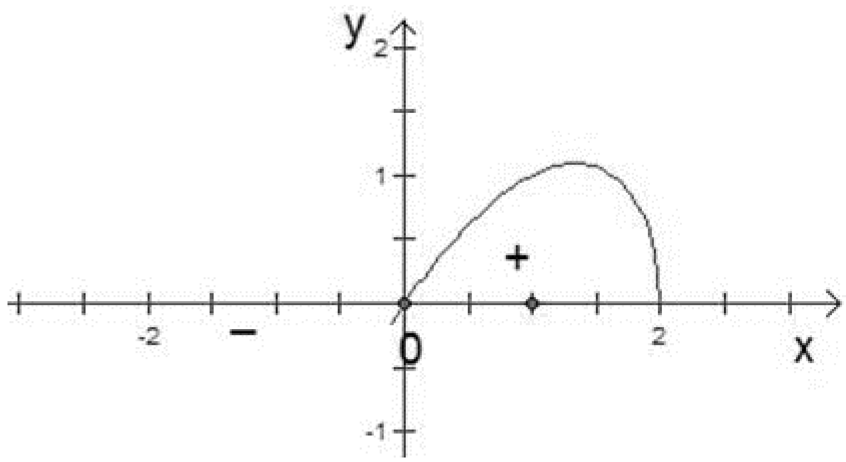


Рис. 2. Схематический график функции в окрестности каждого корня.

Если $x \to -\infty$, то $f(x) \to -\infty$. График идет следующим образом (см. рис.3):

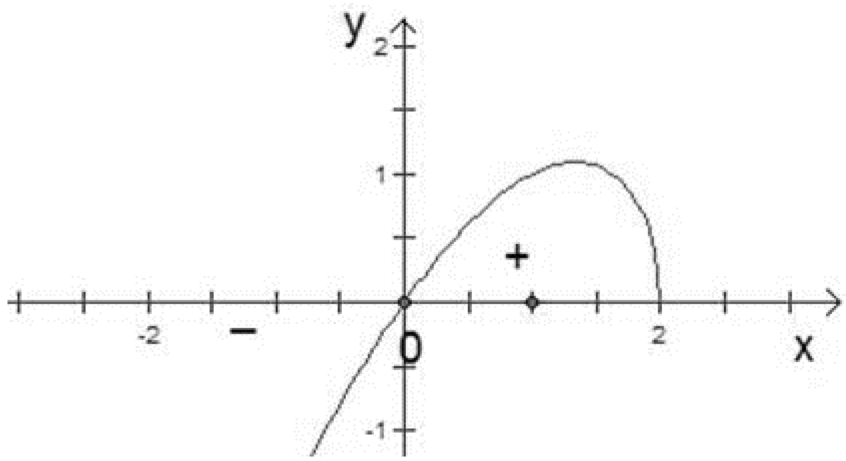


Рис. 3. Эскиз графика функции $f(x) = x\sqrt{2-x}$.

Мы предполагаем, что на промежутке (0;2) должен быть экстремум (см.рис.3). На все вопросы даст ответ производная.

Проведем исследование функции с помощью производной.

$$f'(x) = \sqrt{2-x} + x\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{2(2-x)-x}{2\sqrt{2-x}} = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}.$$

Приравняем производную к нулю, получим:

$\frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}} = 0$, отсюда $x = \frac{4}{3}$ - единственная точка области определения функции, в которой производная равна нулю. Найдем интервалы знакопостоянства производной (см. рис.4):

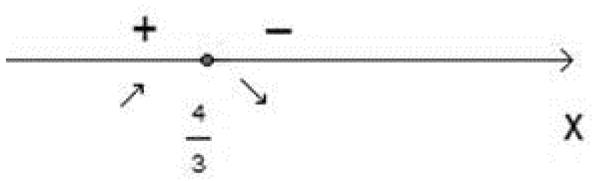


Рис. 4. Интервалы знакопостоянства производной.

Осталось вычислить значение функции в точке $x = \frac{4}{3}$.

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2-\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{6}}{3\cdot 3} = \frac{4\sqrt{6}}{9}.$$

Итак, координаты точки экстремума таковы: $\left(\frac{4}{3}; \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$.

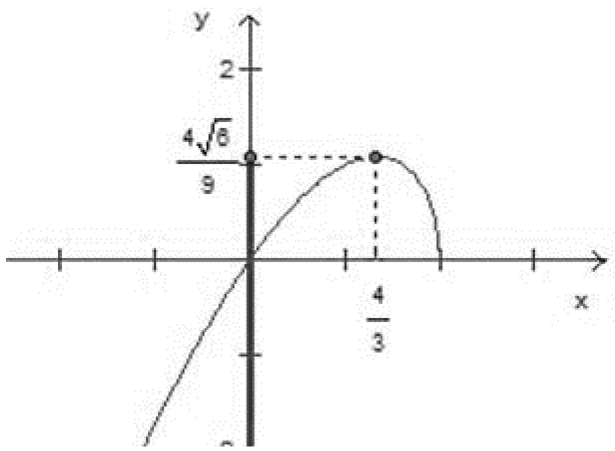


Рис. 5. График функции $f(x) = x\sqrt{2-x}$.

Если мы провели полное исследование функции и построили график, то на любые типовые вопросы, связанные с этой функцией, мы можем получить ответы.

Например, найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $x\sqrt{2-x}=a$ не имеет решений.

Ответ: если уравнение не имеет решений, значит параметр *a* не входит в множество значений функции (см. рис. 5) [11].

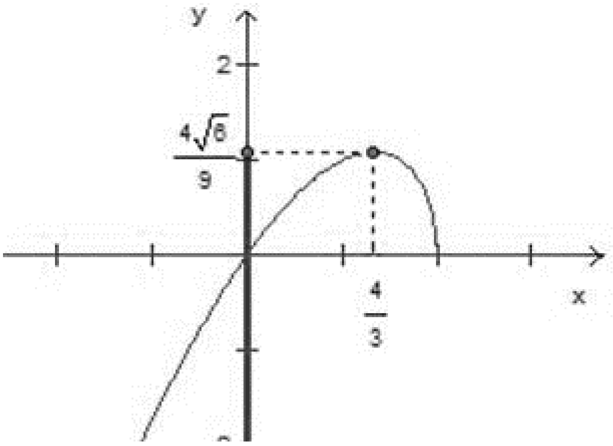


Рис. 5. Множество значений функции.

Ответ: уравнение $x\sqrt{2-x}=a$ не имеет решений при всех $a>\frac{4\sqrt{6}}{9}$.

Далее учитель предлагает задания для тренировки:

а) Провести полное исследование функции: $y=\sqrt[3]{x+1}$;

б) Провести полное исследование функции: $y = 3x - 2x\sqrt{x}$;

в) Провести полное исследование функции: $y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}$.

Исследование смешанных функций и построение их графиков.

Занятие №9.

Тема: Исследование смешанных тригонометрических функций и построение их графиков.

Цели: закрепление навыков построения графиков тригонометрических функций; систематизировать знания учащихся о свойствах тригонометрических функций; стимуляция интереса учащихся, повышение степени их вовлеченности в процесс обучения; увеличение наглядности при рассмотрении материала.

Предварительная подготовка учащихся: Имеется навык работы с тригонометрическими функциями, усвоены знания о свойствах тригонометрических функциях.

Оборудование: раздаточный материал, учебник «Алгебра и начала анализа. 10-11 класс» Ш. А. Алимов.

Продолжительность: два академических часа.

Развернутые комментарии к занятию.

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем учитель беседует с учениками, поясняет, что при решении тригонометрических уравнений возникает бесконечное множество корней, в этом заключается основная сложность. Например, уравнение $\sin x = 0$ имеет корни $x = \pi n$, где $n \in Z$. Таких чисел бесконечно много, тогда возникает вопрос – как их отмечать на координатной прямой? Решение есть: нужно подставлять конкретные значения n. Сперва возьмем n = 0, далее увеличиваем n до того момента, пока соответствующий корень не «вылетит» за пределы отрезка [a;b]. Так же, уменьшая n, мы получим корень, который меньше нижней границы. На отрезке [a;b] никаких корней больше не существует, кроме тех, которые мы получили, это несложно показать [1].

Далее учитель предлагает следующую задачу:

Задача. Дана функция $y = 7\sin x - 8x + 5$. Исследовать ее и построить график [1].

1) Область определения $D(f) = R$.
2) Проверим наличие асимптот:

   Уравнения наклонных асимптот обычно ищут в виде y = kx + b. По определению асимптоты:

   $$\lim_{x\to\infty}(kx + b - f(x))$$

   Находим коэффициент k:

   $$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

   $$k = \lim_{x\to\infty}\frac{7\sin x\ -\ 8x\ +\ 5}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-8x + 7\sin(x) + 5}{x} = -\infty$$

   Находим коэффициент b:

$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx$

$b = \lim_{x\to\infty} 7\sin x \; - \; 8x \; + \; 5 - (-8)x = \lim_{x\to\infty} 7\sin x + \; 5 = -2{,}12$

Функция изменяется в пределах (-2,12), следовательно, наклонные асимптоты функции отсутствуют.

Найдем наклонную асимптоту при x → -∞:

$\lim_{x\to-\infty}(kx + b - f(x))$

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{7sin\,x \; - \; 8x \; + \; 5}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-8x + 7\,sin(x) + 5}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} - 8 + 7\frac{sinx}{x} + \frac{5}{x} = \lim_{x\to-\infty} - 8 + 7 + 0 = \lim_{x\to-\infty} - 1 = -\infty$$

3) Функция ни четная, ни нечетная, так как $y(-x) = 7\sin\,(-x\,) - \; 8(-x) + \; 5 = -7\sin x + 8x + 5; y(-x) \neq y(x) \neq -y(x);$
4) Периодичность – это свойство только тригонометрических функций. На другие, в том числе смешанные, оно не распространяется. То есть все нетригонометрические функции непериодичны. Данная функция не периодична.
5) Найдем точки экстремума и интервалы монотонности:

   Решение. Вычислим производную:

   $y' = (7\sin x - 8x + 5)' = 7\cos x - 8.$

   $7\cos x - 8 = 0$ следовательно, cos x = 8/7 >1. Решений нет

6) Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости, для этого необходимо вычислить вторую производную функции:

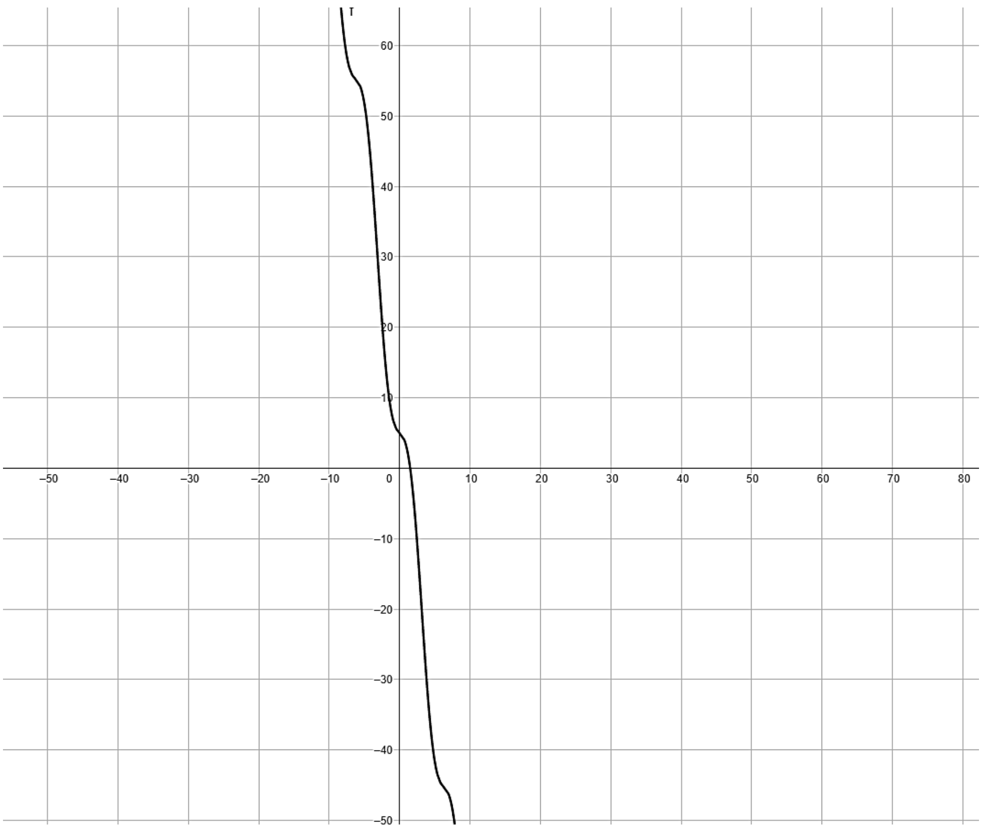
$y'' = \; (7\cos x - \; 8\,)' = -7\sin x$

Приравняем вторую производную к нулю:

$-7\sin x = 0$

$x = \pi n, n \in Z.$

7) График функции:



Занятие №10.

Тема: Исследование смешанной показательной функции и построение ее графика.

Цели: ввести определение показательной функции; сформулировать её основные свойства; показать построение графиков функции.

Предварительная подготовка учащихся: Усвоены умения вычислять производную, имеется навык построения графиков.

Оборудование: меловая доска, учебник «Алгебра и начала анализа» П. И. Алтынов.

Продолжительность: два академических часа.

Развернутые комментарии к занятию.

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем учитель беседует с учениками, поясняет, что выражение вида $y = a^x$ называется показательной функцией, где $a > 0$. Но в заданиях ЕГЭ встречаются только функции вида $y = e^x$

или, реже, $y = e^{kx + b}$. Причина в том, что производные этих функций считаются довольно легко:

1.$(e^x)'' = e^x$. Ничего не изменилось.

2.$(e^{kx + b})'' = k \cdot e^{kx + b}$.

Просто добавляется множитель, который равняется коэффициенту при переменной x. Это частный случай производной сложной функции. Все остальное стандартно.

Учитель предлагает следующую задачу:

Исследовать функцию и построить ее график: $y=3x^2e^x$.

Решение: Для решения задания будут необходимы следующие формулы:

$(e^x)'=e^x$

$(uv)'=u'v+uv'$

$(ku)'=ku'$

$(xn)'=nx^{n-1}$

1) Область определения D(f) = R.

2) Проверим наличие асимптот:

Уравнения наклонных асимптот обычно ищут в виде y = kx + b. По определению асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}(kx + b - f(x))$$

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2e^x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3xe^x}{1} = \infty$$

Поскольку коэффициент k равен бесконечности, наклонных асимптот не существует.

$y=3x^2e^x$

Найдем наклонную асимптоту при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}(kx + b - f(x))$$

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^2 e^x}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3xe^x}{1} = 0$$

Находим коэффициент b:

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) - kx$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} 3x^2 e^x - 0 \cdot x = \lim_{x \to -\infty} 3x^2 e^x = 0$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты:

y = 0

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем $x = 0$:

$$y = 3x^2 e^x = 3 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Точка пересечения с осью Oy (0;0)

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox, для чего положим $y = 0$:

$$3x^2 e^x = 0$$

$$x = 0$$

Точка пересечения с осью Ox (0;0)

4) Функция ни четная, ни нечетная, так как $y(-x) = 3(-x)^2 e^{-x} = 3x^2 \frac{1}{e^x}; y(-x) \neq y(x) \neq -y(x)$;

5) Функция не является периодической, так как представляет собой показательную смешанную функцию;
6) Найдем точки экстремума и интервалы монотонности:

При решении таких заданий необходимо хорошо знать и уметь применять на практике алгоритм нахождения интервалов монотонности функций, содержащих показательные или логарифмические функции:

1. Найти область определения функции;
2. Вычислить производную функции;

3. Определяем промежутки возрастания и убывания в случае положительной или отрицательной производной;

Вычислим производную функции:

$y' = (3x^2e^x)' = 3(x^2e^x)' = 3((x^2)'e^x+x^2(e^x)') = 3(2xe^x+x^2e^x) = 3e^x(2x+x^2) = 6xe^x+3x^2e^x$.

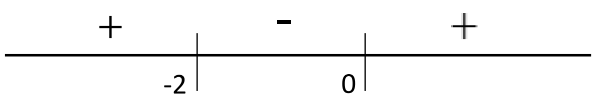
Эта производная существует при всех значениях x, значит, критических точек у функции нет.

$3e^x(2x+x^2) = 02x+x^2 = 0x(2+x) = 0x^1 = 0x^2 = -2$

Значит, производная обращается в нуль в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$ – это две стационарные точки. Отметим их на числовой прямой.

Критические и стационарные точки делят область определения на интервалы с неизменным знаком производной. Чтобы определить знак производной, достаточно вычислить значение производной функции в какой-либо точке соответственного интервала.

Знаки производной на полученных промежутках меняются так, как показано на рисунке:



Значит, $x_1 = -2$ – точка максимума функции, причём $y_{max} = y(-2) = 3\cdot(-2)^2\cdot e^{-2}= 12\cdot($ $1/e^2) \approx 1{,}6$; $e \approx 2{,}7$.

7) Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости, для этого необходимо вычислить вторую производную функции:

$$y'' = (6xe^x + 3x^2e^x)' = (3x^2e^x + 6xe^x)' = (3x^2e^x)' + (6xe^x)'$$

$$= (3x^2e^x + 6xe^x) + (6xe^x + 6e^x) = 3x^2e^x + 12xe^x + 6e^x$$

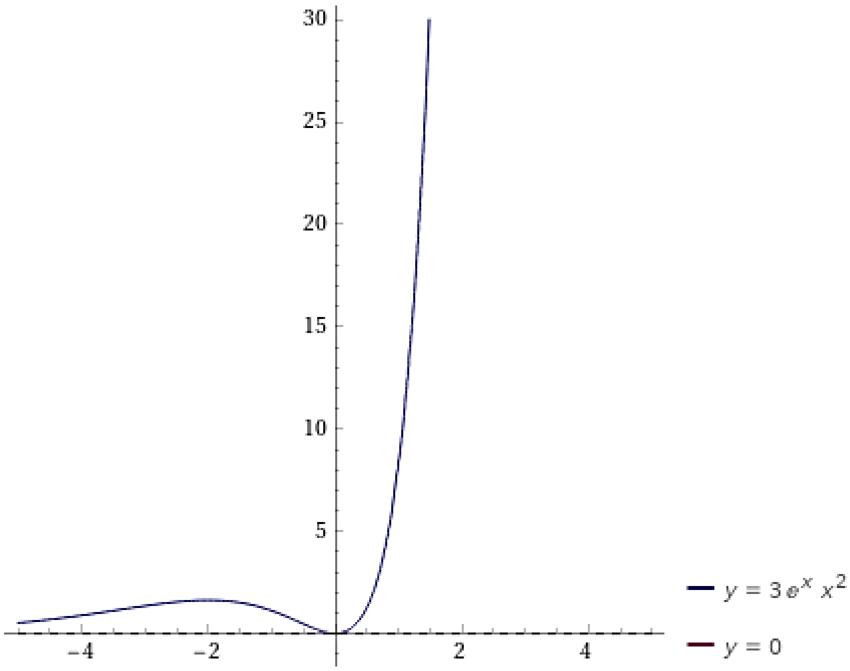
Приравняем вторую производную к нулю:

$y'' = 0 \rightarrow 3x^2e^x + 12xe^x + 6e^x = 0$

$x_1 = -2 - \sqrt{2}$

$x_2 = -2 + \sqrt{2}$ – Точки перегиба.

8) Построим график:



Далее учитель предлагает рассмотреть пример, выделяя основные моменты решения — без основательных рассуждений и комментариев.

Затем учитель предлагает задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить экстремумы и схематически изобразить и график функции $y=12x^2e^x$.
2. найти точки экстремума функции $y=xe^x$

В одной координатной плоскости построить графики функций:

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
2. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
3. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
4. $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

Занятие №11.

Тема: Исследование смешанной логарифмической функции и построение ее графика.

Цели: познакомить учащихся с логарифмической функцией, её свойствами, графиком; показать использование свойств логарифмической функции при решении заданий.

Предварительная подготовка учащихся: Имеется навык работы с логарифмами.

Оборудование: меловая доска, учебник «Алгебра и начала математического анализа» Ш. А. Алимов.

Продолжительность: два академических часа.

Развернутые комментарии к занятию.

Учитель начинает занятие с постановки целей. Затем учитель беседует с учениками: по аналогии с показательными функциями, в задачах ЕГЭ встречаются только натуральные логарифмы, так как их производная легко считается: 1.$(\ln x)' = 1/x$; 2.$(\ln(kx + b))' = k/(kx + b)$. В частности, если $b = 0$, то $(\ln(kx))' = 1/x$. Получается, что производная всегда будет являться дробно-рациональной функцией. Остается всего лишь приравнять саму производную и ее знаменатель к нулю, и решить полученные уравнения. Чтобы найти максимальное или минимальное значения логарифмической функции, необходимо помнить: натуральный логарифм обращается в «нормальное» число только в точках вида en. Например, ln 1 = ln e0 = 0 — это логарифмический ноль, и чаще всего решение сводится именно к нему. В остальных случаях «убрать» знак логарифма невозможно.

Далее учитель предлагает решить следующую задачу:

Задача:

Исследовать функцию и построить ее график: $f(x)=9\ln(x+9)+x^2+9x$.

1) Область определения логарифмической функции:
   $x + 9 > 0; x > -9.$
2) Вычислим асимптоты:

Уравнения наклонных асимптот обычно ищут в виде y = kx + b. По определению асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}(kx + b - f(x))$$

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{9ln(x+9) + x^2 + 9x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{9x + x^2 + 9ln(x+9)}{x} = \infty$$

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем $x = 0$:

$y = 9\ln(0+9)+0^2+9\cdot 0 = 9\ln 9$

Полученное уравнение имеет точку пересечения с осью ординат Oy в точке 9ln9.

4) Функция ни четная, ни нечетная, так как $y(-x) = 9\ln(-x+9)+(-x)^2+(-9x)$; $y(-x)\neq y(x)\neq -y(x)$;

5) Функция не является периодической, так как представляет собой смешанную логарифмическую функцию;

6) Найдем точки экстремума и интервалы монотонности:

Вычисляем производную функции:

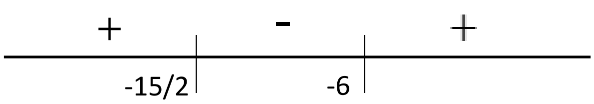
$$f'(x) = (9ln(x+9) + x^2 + 9x)' = \frac{2x^2+27x+90}{x+9}$$

Приравниваем ее к нулю:

$$\frac{2x^2 + 27x + 90}{x+9} = 0$$

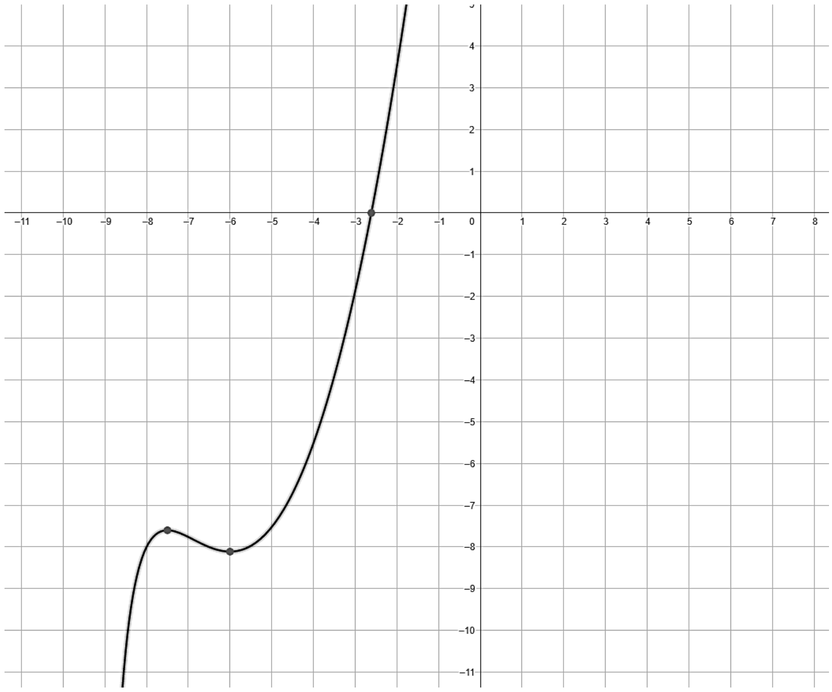
$x_1 = -6, x_2 = -\frac{15}{2}$ – стационарные точки.

Знаки производной на полученных промежутках меняются так, как показано на рисунке:



Значит, x_1 = -7,5 – точка максимума функции, x_2 = -6 –точка минимума.

7) График функции:



В конце занятия учитель предлагает задачи для тренировки:

1. Исследовать функцию и построить ее график функции: $y = \ln(x^2 - 5x)$

Модуль 4.

«Задания ЕГЭ»

Тема: Задание 12 ЕГЭ.

Цели: Прорешать возможные варианты 12ого задания.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены знания об исследовании различных функций.

Оборудование: меловая доска, раздаточный материал.

Продолжительность: один академический час.

Развернутые комментарии к занятию.

Задача. Дана функция: $y = \sin x - 5x \times \sin x - 5\cos x + 1$, найти точку максимума, принадлежащую отрезку $[-\pi/3; \pi/3]$.

Решение. Вычислим первую производную:

$y' = (\sin x - 5x \times \sin x - 5\cos x + 1)' = \cos x - 5x \times \cos x = (1 - 5x) \times \cos x$.

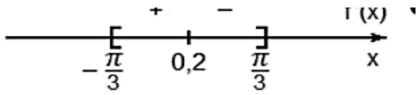
Решаем уравнение:

$y' = 0 \Rightarrow (1 - 5x) \cdot \cos(x) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 0{,}2$ или $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

Однако формула $x = \pi/2 + \pi n$ требует дополнительной обработки. Подставим разные значения n, начиная с n = 0:

$n = 0 \Rightarrow x = \pi/2$. Но $\pi/2 > \pi/3$, поэтому корень $x = \pi/2$ не входит в исходный отрезок. Кроме того, чем больше n, тем больше x, поэтому нет смысла рассматривать $n > 0$.

$n = -1 \Rightarrow x = -\pi/2$. Но $-\pi/2 < -\pi/3$ — этот корень тоже отбрасываем. А, так же, все корни для $n < -1$. Получается, что на отрезке $[-\pi/3; \pi/3]$ лежит только корень x = 0,2. Отметим его на координатной прямой вместе со знаками.



Нам необходимо удостовериться, что справа от x = 0,2 производная действительно отрицательна, для этого достаточно подставить в y’ значение $x = \pi/4$. Отметим, что в точке x = 0,2 производная меняет знак с плюса на минус, значит, это точка максимума. Ответ: 0,2.

Бывает, что при исследовании функции возникают уравнения, которые не имеют корней. Тогда задача становится еще проще, поскольку остается рассмотреть всего лишь концы отрезка.

Задача. Дана функция $y = (x^2 - 5x + 5)e^{x-3}$. Найти наименьшее значение на отрезке $[-1;5]$.

Решение. Вычислим производную: $y' = ((x^2 - 5x + 5)e^{x-3})' = (x^2 - 3x)e^{x-3} = x(x - 3)e^{x-3}$.

Находим корни: $y' = 0 \Rightarrow x(x - 3)e^{x-3} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 0; x = 3$. Оба корня лежат на отрезке $[-1;5]$.

Осталось найти значение функции во всех точках:

$y(-1) = ((-1)^2 - 5\cdot(-1) + 5)e^{-1-3} = \ldots = 11\cdot e^{-4}$;

$y(0) = (0^2 - 5\cdot 0 + 5)\, e^{0-3} = \ldots = 5\cdot e^{-3}$;

$y(3) = (3^2 - 5\cdot 3 + 5)\, e^{3-3} = \ldots = -1$;

$y(5) = (5^2 - 5\cdot 5 + 5)\, e^{5-3} = \ldots = 5\cdot e^2$.

Наименьшим корнем является –1. Ответ: −1

Дана функция $y = x^2 - 3x + \ln x$. Найти наименьшее значение на отрезке [0,5; 5] [1].

Решение:

Необходимо вычислить производную: найдем нули производной и ее знаменателя:

$y' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 0{,}5;\ x = 1;\ x = 0.$

Из трех чисел $x = 0$, $x = 0{,}5$ и $x = 1$ внутри отрезка [0,5; 5] лежит только $x = 1$, а число $x = 0{,}5$ является его концом. Имеем:

$y(0{,}5) = 0{,}52 - 3\cdot 0{,}5 + \ln 0{,}5 = \ln 0{,}5 - 1{,}25;$

$y(1) = 1 - 3\cdot 1 + \ln 1 = -2;$

$y(5) = 52 - 3\cdot 5 + \ln 5 = 10 + \ln 5.$

ln нет только при x=1.

Ответ: −2

Модуль 5.

Итоговое занятие.

Тема: Диагностический тест.

Цели: Провести диагностический тест, сравнить результаты исследования с более ранними результатами.

Предварительная подготовка учащихся: усвоены знания о сложных функциях, отработан навык построения графиков сложных функций.

Оборудование: меловая доска, раздаточный материал.

Продолжительность: один академический час.

Развернутые комментарии к занятию.

Участники: Ученики 10 класса.

Участники делятся на два варианта.

Вариант 1.

Задание 1. Исследовать функцию $f(x) = (x-1)^2(x-3)^2$ на монотонность и направление выпуклости, найти экстремумы и точки перегиба.

Задание 2. Провести полное исследование функции $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$ и построить ее график.

Вариант 2.

Задание 1. Исследовать функцию $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ на монотонность и направление выпуклости, найти экстремумы и точки перегиба.

Задание 2. Исследовать функцию $y = \frac{(x+3)^2}{(x-4)}$ и построить её график.